Grundwissen des Ingenieurs





GRUNDWISSEN DES INGENIEURS

Autoren

GRÖSSEN UND EINHEITEN

Dr. phil. *Erna Padelt* †, Berlin
(bearbeitet von Dipl.-Phys. *Jochen Horn*, Leipzig)

MATHEMATIK

Studiendirektor Dipl.-Ing. *Heinz Birnbaum*, Leipzig

OPERATIONSFORSCHUNG

Dr. rer. nat. *Alfred Kirchheim*, Weinar
Dr. sc. techn. *Heinz Krause*, Weimar

RECHENTECHNIK UND DATENVERARBEITUNG

Doz. Dr. sc. techn. *Klaus Kaplick*, Dresden
Dipl.-Ing. *Helmut Krolop*, Dresden
Dr.-Ing. *Klaus Wachler*, Dresden

PHYSIK

Studiendirektor *Helmut Lindner* †, Mittweida

TECHNISCHE MECHANIK

Dr.-Ing. *Raimund Drath* †, Leipzig
(bearbeitet von Dipl.-Ing. *Johannes Winkler*, Karl-Marx-Stadt)
Ing. *Paul Haase* †, Dresden
Dr.-Ing. *Gerhard Irmer*, Dresden
Dr.-Ing. *Gerd Rehlich*, Dresden

TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

Prof. Dr. phil. *Ernst Estel* †, Güstrow

TECHNISCHE THERMODYNAMIK

Prof. (em.) Dipl.-Ing. *Werner Pohlenz* †, Dresden

ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK

Prof. Dr. sc. nat. *Reinhold Schönefeld*, Ilmenau

CHEMIE

Dr. rer. nat. *Gerhard Ludwig*, Leipzig
Studiendirektor *Karl-Heinz Näser* †, Leipzig
Fachschuldozent *Werner Schröter*, Leipzig

WERKSTOFFE

Dr. rer. nat. *Horst Bretschneider*, Niederwiesa
Dr.-Ing. *Dieter Hempel*, Dresden
Studiendirektor Dipl.-Ing. *Gerhard Jokisch*, Leipzig
Dr.-Ing. *Hartmut Schiefer*, Dresden
Ing. *Bruno Schütze*, Neustadt (Sa.)
(bearbeitet von Fachschuldozent Dipl.-Ing. *Wolfgang Seidel*, Karl-Marx-Stadt)
Fachschuldozent Dipl.-Ing. *Wolfgang Seidel*, Karl-Marx-Stadt

WERKSTOFFPRÜFUNG

Dr. rer. nat. *Horst Bretschneider*, Niederwiesa
Dipl.-Ing. *Werner Dude*, Dresden
Doz. Dr.-Ing. *Herbert Opitz*, Dresden

STANDARDISIERUNG

Prof. Dr. rer. oec. *Roger Giewald*, Dresden
Dr.-Ing. *Manfred Meissner*, Ilmenau
Dr. rer. oec. *Horst Merbach*, Berlin

Grundwissen des Ingenieurs

Mit 763 Bildern, 322 Tabellen, 23 Tafeln und 4 Beilagen

VERLAG HARRI DEUTSCH
THUN UND FRANKFURT/MAIN

Die Originalausgabe dieses Werkes erscheint seit 1959 im VEB Fachbuchverlag Leipzig.

ISBN 3 87144 649 1

Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun
Printed in the German Democratic Republic
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“ Altenburg
Fotomechanischer Nachdruck INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig — III/18/97

Vorwort

Die rasche Entwicklung von Wissenschaft und Technik vergrößert die Fülle der aufzunehmenden Informationen derart, daß man sich eines zuverlässigen Hilfsmittels *zur Wiederholung von Gelerntem, zur Orientierung über Randgebiete* sowie *zum Nachschlagen unbekannter Begriffe* bedienen muß. Außerdem ist das bereits erworbene Wissen ständig zu ergänzen und zu vertiefen.
Das Nachschlagewerk GRUNDWISSEN DES INGENIEURS, für Studenten und Lehrkräfte an Fach-, Ingenieur- und Hochschulen sowie für in der Praxis tätige Ingenieure entwickelt, enthält den dargebotenen Stoff in verdichteter und übersichtlicher Form. Es ermöglicht so eine *rationelle Wissensvermittlung* und Vervollkommnung der Grundlagenkenntnisse. Die Darstellung in knapper, erläuternder Form — aufgelockert durch zahlreiche Bilder, Tabellen, Tafeln und praktische Beispiele — hilft, sicher und schnell Auskunft über wichtige Einzelheiten oder Zusammenhänge des Ingenieurgrundwissens zu erlangen, und regt zum Mitdenken an. Dadurch gewann das Werk mit den bisher erschienenen Auflagen rasch einen breiten Interessenten- und Benutzerkreis.
Dem wissenschaftlich-technischen Fortschritt Rechnung tragend, wurden alle Abschnitte auf die moderne Ingenieurpraxis bezogen. Das Spektrum der Mathematik ist im Nachschlagewerk um so wichtige Gebiete wie Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Netzplantechnik und Optimierung erweitert, andererseits wird die Anwendung der modernen Rechentechnik in Wissenschaft und Technik erläutert.
Im Nachschlagewerk werden konsequent die Maßeinheiten des *Internationalen Einheitensystems* (SI) nach den internationalen Festlegungen und Vorschriften über „Einheiten physikalischer Größen" angewendet. Beziehungen und Faktoren zur Umrechnung bisher üblicher, jedoch abzulösender Einheiten in SI-Einheiten werden in ausreichendem Maße im Abschnitt „*Größen und Einheiten*" gegeben.
Da es die Konzeption dieses Buches nicht erlaubt, alle Probleme in der von manchen Lesern gewünschten Tiefe zu behandeln, werden diese auf das Studium der angegebenen weiterführenden Literatur verwiesen. Für kritische Hinweise und Vorschläge zur weiteren Verbesserung sind Autoren und Verlag dankbar.

Verlag Harri Deutsch

Hinweise zur Benutzung des Nachschlagewerks

- Jedem Hauptabschnitt ist zur schnellen Orientierung ein *Buchstabensymbol* zugeordnet (z. B. für den Abschnitt Mathematik das Symbol Ma). Diese Symbole erscheinen jeweils auf den rechten Seiten rechts oben im Kolumnentitel.
- Jeder Hauptabschnitt beginnt mit einem ausführlichen *Inhaltsverzeichnis*, dem sich i. allg. ein Verzeichnis der wichtigsten verwendeten (z. T. standardisierten) *Formelzeichen* und der zu verwendenden *Einheiten* anschließt.
- Die Seiten des Nachschlagewerks sind am unteren Rand außen fortlaufend numeriert. Darauf beziehen sich die Angaben des *Gesamtinhaltsverzeichnisses* und des *Sachwortverzeichnisses*. Die Seiten der einzelnen Hauptabschnitte sind am oberen Rand außen, jeweils mit 1 beginnend, getrennt numeriert. Auf diese Numerierung bezieht sich das den Hauptabschnitten vorangestellte ausführliche *Inhaltsverzeichnis*.
- Zugang zu den Informationen findet man durch die *Inhaltsverzeichnisse* oder das umfangreiche *Sachwortverzeichnis*. Sind im Sachwortverzeichnis hinter einem Begriff mehrere Seitenzahlen genannt, dann ist die Seite, auf der die wesentlichsten Ausführungen dazu stehen, **halbfett** hervorgehoben.
- Hinweise auf weiterführende Literatur im *Literaturverzeichnis* stehen in eckigen Klammern (z. B. [1]).
- Gleichungen werden i. allg. als *Größengleichungen* geschrieben, bei den praktischen Berechnungen teilweise auch als *Zahlenwertgleichungen*. Die Größen sind dann in den Einheiten einzusetzen, die im danebenstehenden WALLOTschen Kamm genannt werden.
- Im Buch sind *Vektoren* und *Matrizen* durch halbfetten Druck gekennzeichnet (z. B. $\boldsymbol{F}$), ihr Betrag durch Normalschrift (z. B. $|\boldsymbol{F}| = F$). *Komplexe Größen* sind durch Unterstreichen hervorgehoben (z. B. $\underline{z}$). In den Bildern sind Vektoren durch Pfeile dargestellt, die Beschriftung gibt bereits den Betrag an.
- Hinweise auf *Fußnoten* erfolgen durch kleine hochgestellte Sternchen, z. B.*); auf *Standards* im DIN-Verzeichnis durch kleine hochgestellte Zahlen, z. B.[17]). Die zugehörige Norm ist in der Beilage A unter dem jeweiligen Abschnitt und der genannten Nummer zu suchen.
- Die *Schreibweise* im Nachschlagewerk folgt bei chemischen Namen der k-z-Schreibweise, bei Begriffen aus der Technik der f-Schreibweise. Findet man also einen Begriff im Sachwortverzeichnis nicht unter den Buchstaben c bzw. ph, so suche man unter k oder z bzw. f.
- GRUNDWISSEN DES INGENIEURS enthält folgende *Beilagen:*
  Beilage A. DIN-Verzeichnis
  Beilage B. t,s-Diagramm für trockene Luft (CO_2-frei)
  Beilage C. Mollier-h,s-Diagramm für Wasserdampf mit v-Linien
  Beilage D. Periodensystem der Elemente

Gesamtinhaltsverzeichnis

Ausführliche Inhaltsverzeichnisse stehen jeweils am Anfang der einzelnen Abschnitte.

GE Größen und Einheiten

Von Dr. phil. Erna Padelt †, Berlin, (bearbeitet von Dipl.-Phys. Jochen Horn, Leipzig)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Die 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (11. CGPM) der Internationalen Meterkonvention beschloß 1960 für das aus dem MKS-System entwickelte Einheitensystem mit sechs Basiseinheiten und zwei ergänzenden Einheiten den Namen „*Internationales Einheitensystem* (SI)“. Seit diesem Zeitpunkt hat sich das System schnell in vielen Ländern der Erde verbreitet. 1973 meldete das Internationale Büro für Maß und Gewicht (BIPM), daß nur 8 von 162 Staaten noch keine Maßnahmen zum Übergang zum SI eingeleitet hatten. Die Generalkonferenzen bis 1979 haben neben den Änderungen der Definitionen des Meters, der Sekunde und der Candela sowie der Festlegung kleinerer und größerer dezimaler Vielfacher und Teile (Vorsätze) eine *zusätzliche Basiseinheit* des SI, die Einheit für die *Stoffmenge*, sowie neue Eigennamen für einige häufig benutzte Einheitenquotienten eingeführt. Auch in Zukunft sind noch Änderungen zu erwarten.
Der umfassende Übergang zu den SI-Einheiten, der mit dem Aufgeben einer Anzahl bisher verwendeter systemfremder und inkohärenter Einheiten verbunden ist, soll in den einzelnen Ländern koordiniert durch gesetzliche Regelungen vollzogen werden.
Die *Vorteile* eines weltweit einheitlichen Einheitensystems liegen nicht nur darin, daß Meß- und Forschungsergebnisse ohne jegliches Umrechnen unmittelbar verglichen werden können, da es für jede Größe nur eine einzige SI-Einheit gibt, sondern auch in der Verbesserung des internationalen Warenaustauschs, der internationalen Kooperation sowie der internationalen wissenschaftlich-technischen Zusammenarbeit. Zwar sind für einige unterschiedliche Größen gleichnamige SI-Einheiten gebräuchlich, wie beispielsweise das *Ampere* für die elektrische Stromstärke und die magnetische Spannung, doch wurden für andere bereits unterschiedliche

Namen gefunden, so für die Frequenzeinheit *Hertz* ($Hz = s^{-1}$) und für die Einheit der Aktivität ionisierender Strahlung *Becquerel* ($Bq = s^{-1}$). Damit werden auch in der Datenverarbeitung weitgehend Fehleingaben ausgeschlossen. Es sind aber noch umfangreiche Umstellungen und Umrechnungen erforderlich, ehe alle SI-Einheiten richtig angewandt werden. Zur Erleichterung dienen verschiedene Umrechnungstabellen.

2. Die Struktur unseres Maßsystems

Unter *Maßsystem* soll im folgenden die Zusammenfassung von *Größen-* und *Einheitensystem* verstanden werden. Zuvor einige Bemerkungen zur Terminologie der *Größenlehre.* Seitdem GALILEI vor rund 3 Jahrhunderten erstmals physikalische Gesetze und Zusammenhänge als mathematische Gleichungen mit *Formelzeichen* (Buchstabensymbolen) ausgedrückt hatte, ist dies längst zur Selbstverständlichkeit geworden. Ursprünglich war die Wahl der Formelzeichen willkürlich. Gegenwärtig befassen sich internationale Gremien mit der Festlegung einheitlicher Formelzeichen, um zu sichern, daß die Mehrzahl von ihnen auf der ganzen Welt einheitlich benutzt wird. Da aber die Anzahl der zur Verfügung stehenden Alphabete beschränkt ist, läßt es sich kaum vermeiden, daß einzelne Formelzeichen mehrfache Bedeutung haben. Andererseits gelten für manche Qualitäten (*Größenarten*) mehrere Formelzeichen. Formelzeichen dienen in erster Linie zum Kennzeichnen *physikalischer Qualitäten,* z. B. l für Länge, F für Kraft, A für Aktivität, sie charakterisieren aber auch Werte derselben, z. B. eine Länge von 6 Meter, eine Kraft von 15 Newton, eine Aktivität von 3700 Becquerel. Derartige quantitativen und qualitativen Aussagen werden *Größen* genannt, wobei beim Rechnen an die Stelle der ausgeschriebenen Einheitennamen deren Einheiten(kurz)zeichen treten (6 m, 15 N, 3700 Bq). Allgemein lassen sich Größen als Produkt $G = \{G\} \cdot [G]$ schreiben, wobei die geschweifte Klammer den Zahlenwert, die eckige Klammer die zugehörige Einheit symbolisiert. Werden die Formelzeichen *ausnahmsweise* nur für *Zahlenwerte* eingesetzt, so ist eine Erläuterung hinsichtlich der Einheiten erforderlich. Bei schwierigen Berechnungen ist es vorteilhaft, zunächst nur mit den Formelzeichen zu rechnen und erst nach den möglichen Umrechnungen, Kürzungen usw. zu den Größen überzugehen, weil auf diese Weise begriffliche Unstimmigkeiten leichter erkennbar sind und sich Fehlschlüsse weitgehend vermeiden lassen.

Der Quotient aus zwei Größen gleicher Art wird *Verhältnisgröße* genannt. Werden beide Größen mit der gleichen SI-Einheit bezeichnet, so ergibt sich beim Kürzen der informationslose Zahlenwert 1. Deshalb ist es angebracht, bei Berechnungen auf das Kürzen zu verzichten und die Einheiten stehenzulassen, zumal in der Praxis Zähler und Nenner unterschiedliche Zahlenwerte haben. Das gilt z. B. für den thermischen *Ausdehnungskoeffizienten* der Länge $[m/(m \cdot K)]$, der Fläche $[m^2/(m^2 \cdot K)]$ und des Volumens $[m^3/(m^3 \cdot K)]$, die alle die Einheit K^{-1} haben*). Andere *Verhältnisgrößen* (z. B. der Wirkungsgrad) werden in Prozent (%) angegeben.

Einheiten physikalischer Größen (Maßeinheiten) sind Bezugsgrößen, mit denen andere Größen gleicher Art verglichen oder gemessen werden können. In Verbindung mit Zahlenwerten benutzt man üblicherweise die entsprechenden *Einheitenzeichen,* die international bestimmt sind; sie haben im Gegensatz zu den Formelzeichen den Vorteil der absoluten Eindeutigkeit.

In der Literatur werden die Größenarten meist als *Größen* und das Produkt aus Zahlenwert und Einheit als „*Wert der Größe*" oder auch als „*Größenwert*" bezeichnet. Wird in diesem Fall diese Terminologie nicht streng eingehalten, so sind leicht Mißverständnisse möglich, die nur bei erhöhter Aufmerksamkeit zu vermeiden sind.

Ein *Maßsystem* genügt am besten allen Anforderungen, wenn zu jeder Größenart eine adäquate Einheit festgelegt ist, so daß Definitionsgleichungen für abgeleitete Größenarten unmittelbar in Einheitengleichungen umgesetzt werden können. Maßsysteme werden aus einer ihrem

*) Im Text sind Einheitenprodukte in Anlehnung an internationale Gepflogenheiten mit Multiplikationspunkt geschrieben (z. B. $N \cdot m$ für Newtonmeter), es genügt aber auch die Schreibweise mit Ausschluß, wenn die Eindeutigkeit gewahrt bleibt (N m).

Verwendungszweck angepaßten Anzahl voneinander unabhängiger *Basisgrößen* aufgebaut, denen entsprechende *Basiseinheiten* zugeordnet sind (Tabelle 1). Während Basisgrößen nicht besonders definiert zu werden brauchen — zuweilen führt man sie axiomatisch als Wortdefinitionen ein —, müssen Basiseinheiten als Einzelwerte in ihrer Größenart exakt definiert und gegenüber anderen Größen gleicher Art (Größenwerte) abgegrenzt werden, z. B. durch eine Vorschrift für ihre Realisierung. *Definitionsgleichungen* für Basiseinheiten gibt es nicht.

Tabelle 1. Basiseinheiten sowie ergänzende Einheiten des SI

Größe	Formelzeichen	Basis- bzw. ergänzende Einheit	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Ebener Winkel	α, β, γ	Radiant	rad
Räumlicher Winkel	Ω, ω	Steradiant	sr

Größensysteme werden gewöhnlich durch die Formelzeichen ihrer Basisgrößen charakterisiert, *Einheitensysteme* durch die Einheitenzeichen ihrer Basiseinheiten, z. B. für das Größensystem der Mechanik *lmt* (Länge, Masse, Zeit) und das zugehörige Einheitensystem MKS (Meter, Kilogramm, Sekunde).

Die früher übliche Rückführung von Maßsystemen auf die Basisgrößen als *Dimensionen* mittels besonderer *Dimensionszeichen* war nur zweckmäßig, solange eine Vielzahl Größensysteme auf einfache Art auseinandergehalten werden mußten, z. B. das MKS-System im täglichen Leben, CGS-Systeme in Wissenschaft und Elektrotechnik und das Technische Maßsystem (ein MKS-System, in dem K das Kraftkilogramm symbolisierte). Sie wurden mit dem Übergang zum *Internationalen Einheitensystem* (*SI*) überflüssig, auch wenn die eine oder andere Einheit bisher noch benutzt wurde. Basiseinheiten werden entweder durch Verkörperungen (*Etalons, Prototype*) oder durch bestimmte, dem jeweiligen Zweck angepaßte Meß- und Zählvorschriften (*Etalonverfahren*) dargestellt. So wie sich aus Basisgrößen abgeleitete Größen in Form von *Potenzprodukten* mit positiven und/oder negativen Exponenten darstellen lassen, werden aus den Basis- und den ergänzenden Einheiten abgeleitete Einheiten gebildet, wobei die Definitionsgleichungen konform zu den Größengleichungen aufgebaut sind:

Geschwindigkeit = Weglänge/Zeit, $v = lt^{-1}$, $\mathrm{m/s} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$*)

Abgeleitete Größenarten werden durch eigene Formelzeichen dargestellt, seltener als Potenzprodukt der Ausgangsgrößen. Viele abgeleitete Einheiten haben Eigennamen, andere werden durch Potenzprodukte anderer Einheiten ausgedrückt.
Potenzprodukte von Formelzeichen werden ohne Multiplikationszeichen nebeneinander gesetzt, während zwischen den Faktoren von Einheitenprodukten Multiplikationszeichen gesetzt werden. Auf diese Weise besteht auch bei Verwendung gleicher Buchstabentypen (etwa auf der Schreibmaschine) ein deutlicher Unterschied zwischen Formelzeichen und Einheitenzeichen:

Formelzeichen für die Definitionsgleichung für Kraft $F = ma = lmt^{-2}$
Einheitenzeichen für deren Einheit Newton (N) $\mathrm{N} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Diese Schreibweise bewährt sich besonders bei reziproken Einheiten, z. B. hat der Ausdruck $1\ \mathrm{ms}^{-1}$ die Bedeutung einer Frequenz von 1 kHz, jedoch $1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ die einer Geschwindigkeit.
Im Gegensatz zu den Formelzeichen, bei denen zusätzliche Kennzeichnungen (Indizes) zulässig sind, dürfen grundsätzlich weder Einheiten noch Einheitenzeichen Zusätze erhalten. Es gibt deshalb keinen Normkubikmeter, sondern nur ein *Normvolumen* V_n oder V_{norm}, Einheit ist Kubikmeter (m^3).

*) Während Formelzeichen *kursiv* gedruckt werden, werden für Einheitenzeichen geradestehende Buchstabentypen benutzt.

Abgeleitete Einheiten werden *kohärent* genannt, wenn in ihnen nur der Zahlenfaktor 1 auftritt, alle mit anderen Faktoren gebildeten Einheiten gelten als *inkohärent*. Dazu gehören auch die mit Vorsätzen für Zehnerpotenzen (Tabelle 2) gebildeten Vielfachen und Teile der SI-Einheiten. Einheiten, die außerhalb des benutzten Einheitensystems entstanden sind, werden als *systemfremd* bezeichnet (z. B. die Kalorie, die Pferdestärke, die Normalatmosphäre). An die Stelle ihrer ursprünglichen Definitionen sind ihre Beziehungen zu den entsprechenden SI-Einheiten getreten.

Tabelle 2. Vorsätze zur Bildung von dezimalen Vielfachen und Teilen von SI-Einheiten

Vorsatz	Zeichen	Bedeutung	Vorsatz	Zeichen	Bedeutung
Exa	E	10^{18}	Dezi	d	10^{-1}
Peta	P	10^{15}	Zenti	c	10^{-2}
Tera	T	10^{12}	Milli	m	10^{-3}
Giga	G	10^{9}	Mikro	μ	10^{-6}
Mega	M	10^{6}	Nano	n	10^{-9}
Kilo	k	10^{3}	Piko	p	10^{-12}
Hekto	h	10^{2}	Femto	f	10^{-15}
Deka	da	10	Atto	a	10^{-18}

Abschließend noch einige sprachliche Hinweise. Zusammengesetzte Substantive dürfen nur aus Einheitenprodukten gebildet werden, z. B. Amperestunde (A · h), jedoch nicht von Einheitenquotienten. Deshalb ist es falsch, von *Stundenkilometern* zu sprechen und womöglich sogar das Einheitenzeichen kmh dafür zu verwenden. Auch der Ausdruck *Stundengeschwindigkeit* ist nicht gut, da die Verbindung aus Größenart und Einheit vermieden werden sollte, eine Geschwindigkeit ist der Quotient aus Weg und Zeit, nicht einer Zeiteinheit, wenn es auch vor einem halben Jahrhundert noch so üblich war.

3. Physikalische Gleichungen

Formelzeichen[1]) und Einheitenzeichen werden wie mathematische Zeichen behandelt. Folgende Rechenoperationen sind zulässig:

- Addition und Subtraktion — bei gleichen Größenarten und gleichen Einheiten
- Multiplikation und Division — bei gleichen und bei unterschiedlichen Größenarten und Einheiten
- Potenzieren und Radizieren — bei allen Größenarten und Einheiten.

Physikalische Gleichungen[2]) lassen sich aufstellen:

- zwischen Größen: *allgemeine Größengleichungen* (als Definitionsgleichungen für abgeleitete Größen), z. B. $a = lt^{-2}$;
- zwischen Größen: *Größengleichungen*, z. B. $v = 15$ m/s;
- zwischen Einheiten: *Einheitengleichungen* (als Definitionsgleichungen für weitere Einheiten), z. B. 1 N · m = 1 W · s = 1 J;
- zwischen Zahlenwerten: *Zahlenwertgleichungen* (in Zusammenhang mit einem entsprechenden Hinweis auf die verwendeten Einheiten),
  z. B. bei einer Masse von 80 kg, die in 5 s um 7 m gehoben werden soll, ergibt sich eine Leistung

$$P = l^2mt^{-3} = \frac{49 \cdot 80}{125} = 31{,}36 \qquad \begin{array}{|cccc|} l & m & t & P \\ \hline \mathrm{m} & \mathrm{kg} & \mathrm{s} & \mathrm{W} \end{array}$$

$$P = 31{,}36\ \mathrm{W}$$

4. Der Übergang zum umfassenden Gebrauch der SI-Einheiten

4.1. Inkohärente und systemfremde Einheiten

Im Interesse der allseitigen Verständigung zwischen Technikern und Naturwissenschaftlern ist es notwendig, die derzeit noch gebräuchlichen inkohärenten Einheiten der verschiedenen CGS-Systeme sowie die systemfremden Einheiten, zu denen auch einige Einheiten des Technischen Maßsystems zu rechnen sind, aufzugeben und sie durch SI-Einheiten zu ersetzen. Um diesen Übergang zu erleichtern, sind in den Tabellen 3 bis 7 entsprechende Umrechnungsfaktoren zusammengestellt.

Tabelle 3. Umrechnung von CGS-Einheiten in SI-Einheiten

Größe	CGS-Einheit	SI-Einheit
Länge	1 cm	10^{-2} m
Geschwindigkeit	1 cm/s	10^{-2} m/s
Beschleunigung	1 cm/s² = 1 Gal	10^{-2} m/s²
Masse	1 g	10^{-3} kg
Kraft	1 dyn = 1 cm · g/s²	10^{-5} N (Newton)
Kraftmoment	1 dyn · cm	10^{-7} N · m
Druck	1 dyn/cm²	10^{-1} Pa (Pascal)
Arbeit, Energie	1 erg = 1 dyn · cm	10^{-7} J (Joule)
Leistung	1 erg/s	10^{-7} W (Watt)
Dynamische Viskosität	1 dyn · s/cm² = 1 P (Poise)	10^{-1} Pa · s
Kinematische Viskosität	1 cm²/s = 1 St (Stokes)	10^{-4} m²/s
Oberflächenspannung	1 dyn/cm	10^{-3} N/m
Leuchtdichte	1 cd/cm² = 1 sb (Stilb)	10^{4} cd/m²
Beleuchtungsstärke	1 sb · sr = 1 lm/cm² = 1 ph (Phot)	10^{4} lx (Lux)

Tabelle 4. Umrechnung von Einheiten des Technischen Maßsystems in SI-Einheiten

Größe	Technische Einheit	SI-Einheit*)
Kraft	1 kp	9,806 65 N
Masse	1 kp · s²/m	9,806 65 kg
Arbeit, Energie	1 kp · m	9,806 65 J
Kraftmoment	1 kp · m	9,806 65 N · m
Druck, mechanische Spannung	1 kp/m²	9,806 65 Pa
	1 kp/cm² = 1 at (technische Atmosphäre)	9,806 65 · 10^{4} Pa
	1 m WS (Meter Wassersäule)	9,806 65 · 10^{3} Pa
	1 mm WS	9,806 65 Pa
Festigkeit	1 kp/mm²	9,806 65 · 10^{6} Pa
Leistung	1 kp · m/s	9,806 65 W
Dichte	1 kp · s²/m⁴	9,806 65 kg/m³
Dynamische Viskosität	1 kp · s/m²	9,806 65 Pa · s

*) In vielen Fällen kann man hier mit dem gerundeten Wert 10 rechnen (z. B. 1 kp = 9,806 65 N ≈ 10 N).

Tabelle 5. Umrechnung kalorischer Einheiten in SI-Einheiten

Größe	Kalorische Einheit	SI-Einheit
Wärmemenge	1 cal (Kalorie)	4,1868 J
Spezifische Wärmemenge	1 cal/g = 1 kcal/kg	$4{,}1868 \cdot 10^3$ J/kg
Wärmestrom	1 cal/s 1 kcal/h	4,1868 W 1,163 W
Wärmestromdichte	1 cal/cm² · s 1 kcal/m² · h	$4{,}1868 \cdot 10^4$ W/m² 1,163 W/m²
Wärmeübergangs- und Wärmedurchgangskoeffizient	1 cal/cm² · s · grd 1 kcal/m² · h · grd	$4{,}1868 \cdot 10^4$ W/(m² · K) 1,163 W/(m² · K)
Wärmeleitfähigkeit	1 cal/cm · s · grd 1 kcal/m · h · grd	$4{,}1868 \cdot 10^2$ W/(m · K) 1,163 W/(m · K)
Wärmekapazität	1 cal/grd 1 kcal/grd	4,1868 J/K $4{,}1868 \cdot 10^3$ J/K
Wärmeleitwiderstand	1 s · grd/cal 1 h · grd/kcal	$2{,}388 \cdot 10^{-1}$ K/W $8{,}598 \cdot 10^{-1}$ K/W

Tabelle 6. Umrechnung SI-fremder Einheiten der ionisierenden Strahlung in SI-Einheiten

Größe	Systemfremde Einheit	SI-Einheit
Exposition, Ionendosis	1 R (Röntgen)	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg
Expositionsleistung, Ionendosisleistung	1 R/s 1 R/min 1 R/h 1 R/d	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$ A/kg $4{,}3 \cdot 10^{-6}$ A/kg $7{,}1667 \cdot 10^{-8}$ A/kg $2{,}986 \cdot 10^{-9}$ A/kg
Physikalisches Röntgenäquivalent	1 rep (roentgen-equivalent-physical)	$8{,}38 \cdot 10^{-3}$ Gy (Gray ≙ J/kg)
Äquivalentdosis	1 rem (roentgen-equivalent-man)	10^{-2} Sv (Sievert ≙ J/kg)
Äquivalentdosisleistung	1 rem/s	10^{-2} Sv/s (= 10^{-2} W/kg)
Ionisierungsintensität	1 R/h · m = 1 rhm (roentgen per hour at one meter)	$7{,}1667 \cdot 10^{-8}$ A/(m · kg)
Energiedosis	1 rd (Rad, radiation absorbed dose)	10^{-2} Gy
Energiedosisleistung	1 rd/s 1 rd/h	10^{-2} Gy/s $2{,}778 \cdot 10^{-6}$ Gy/s
Aktivität	1 Ci (Curie)	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq (Becquerel ≙ s^{-1})
Molare Aktivität	1 Ci/mol	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq/mol
Spezifische Aktivität	1 Ci/kg	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq/kg
Spezifische Gammastrahlungskonstante	1 R · m²/Ci · h 1 mR · cm²/mCi · h	$1{,}937 \cdot 10^{-18}$ C · m²/kg $1{,}937 \cdot 10^{-22}$ C · m²/kg

Tabelle 7. Auswahl weiterhin gültiger SI-fremder Einheiten, SI-fremder Einheiten für Spezialgebiete sowie nicht mehr gültiger Einheiten und von Einheiten mit befristeter Gültigkeit

Größe	Spezialgebiet	Name der Einheit	Umrechnung in die SI-Einheit
Länge		Seemeile****)	1 sm = 1852 m
		Ångström***)	1 Å = 10^{-10} m
	Astronomie	Astronomische Einheit**)	1 AE = 1,49598 · 10^{11} m
	Astronomie	Lichtjahr**)	1 ly = 9,4605 · 10^{15} m
	Astronomie	Parsec**)	1 pc = 3,0857 · 10^{16} m
Fläche	Grundstücke	Hektar**)	1 ha = 10^4 m²
		Ar***)	1 a = 10^2 m²
		Barn***)	1 b = 10^{-28} m²
Volumen		Liter*)	1 l = 10^{-3} m³
Brechkraft	Optik	Dioptrie**)	1 dpt = 1/m
Masse	Atomphysik	Atomare Masseeinheit**)	1 u = 1,66057 · 10^{-27} kg
		Tonne*)	1 t = 10^3 kg
		Karat****)	1 k = 2 · 10^{-4} kg
Kraft		Dyn***)	1 dyn = 10^{-5} N
Zeit		Minute*)	1 min = 60 s
		Stunde*)	1 h = 3600 s
		Tag*)	1 d = 86400 s
Geschwindigkeit		Knoten****)	1 kn = 1 sm/h = 0,514 m/s
Beschleunigung		Gal***)	1 Gal = 10^{-2} m/s²
Energie	Atomphysik	Elektronenvolt**)	1 eV = 1,60219 · 10^{-19} J
		Erg***)	1 erg = 10^{-7} J
Druck		Bar****)	1 bar = 10^5 Pa
		Torr***)	1 Torr = 1,333 · 10^2 Pa
		Physikalische Atmosphäre***)	1 atm = 1,01325 · 10^5 Pa
Ebener Winkel		Grad*)	1° = 1,7453 · 10^{-2} rad
		Minute*)	1′ = 2,909 · 10^{-4} rad
		Sekunde*)	1″ = 4,848 · 10^{-6} rad
	Geodäsie	Gon**)	1 gon = 1,5708 · 10^{-2} rad
Leistung		Pferdestärke***)	1 PS = 7,35499 · 10^2 W
Temperatur		Grad Celsius*)	1 °C $\triangleq$ 273,15 K
Feinheit	Textiltechnik	Tex**)	1 tex = 10^{-6} kg/m
Leuchtdichte		Stilb***)	1 sb = 10^4 cd/m²
		Apostilb***)	1 asb = 0,31831 cd/m²
Bestrahlung		Langley***)	1 ly = 4,1868 · 10^4 J/m²

*) weiterhin gültig, **) in Spezialgebieten weiterhin gültig, ***) nicht mehr gültig
****) befristet noch gültig

4.2. Übergang von gewichtbezogenen Größenarten zu massebezogenen

Die entscheidendste Umstellung ergibt sich in der Technik aufgrund der Festlegung der SI-Basiseinheit *Kilogramm* für die Basisgröße Masse. Zwar werden damit viele Mehrdeutigkeiten früherer Definitionen beseitigt, andererseits sind dadurch viele neue Überlegungen und ein grundsätzliches Umdenken erforderlich.
Die Notwendigkeit, die *Masse*[3]) zur Basisgröße zu erklären und nicht, wie jahrzehntelang in der Technik, die Kraft, hat mehrere Gründe. Die Masse ist zeit- und ortsunabhängig. Sie ändert sich nicht, wenn sie von

einem Ort am Pol zu einem Ort am Äquator gebracht wird oder auf einen anderen Himmelskörper, obwohl sie in diesem Fall auf dem Weg dorthin das Schwerefeld der Erde verläßt und sich im Zustand der Schwerelosigkeit befindet, bis sie in den Einflußbereich eines anderen Schwerefelds gelangt. Massen kann man abtrennen, auseinanderschneiden, auf Transportgeräte verladen, anheben oder absetzen. Kräfte dagegen kann man allenfalls umlenken, aber niemals verladen oder transportieren.
Schwierigkeiten bereitete immer wieder der Ausdruck „*Gewicht*", der außer Masseverkörperung (Wägestück oder Gewichtstück) zwei wesentlich verschiedene Bedeutungen hatte. Manche verstanden darunter die mit Waagen ermittelte Masse von Körpern, andere bezeichneten damit die von Massen im Schwerefeld der Erde ausgeübten Kräfte (Gewichtskräfte), die ohne die Masse nicht zur Wirkung kämen. Im *Technischen Maßsystem* war die Kraft eine der drei Grundgrößenarten und die Masse eine abgeleitete Größenart, die nicht nur als Rechengröße angesehen wurde. Sie ergab sich als Quotient aus der Gewichtskraft G und der Fallbeschleunigung g, also $m = G/g$ mit der technischen Einheit Kilopondsekundequadrat je Meter ($\text{kp} \cdot \text{s}^2/\text{m}$). Demgegenüber ergab sich aufgrund des NEWTONschen Grundgesetzes für die Kraft $F = ma$ (m Masse, a Beschleunigung) mit der Einheit Meterkilogramm je Sekundequadrat ($\text{m} \cdot \text{kg/s}^2$). Diese Einheit erhielt 1948 den Eigennamen Newton (N). Zwischen den beiden Krafteinheiten bestand die Beziehung $1\,\text{kp} = 9{,}806\,65\,\text{N} \approx 10\,\text{N}$. Da überdies zwei unterschiedliche Masseeinheiten in einem Maßsystem nicht nebeneinander existieren können, mußte selbstverständlich die abgeleitete Masseeinheit des Technischen Maßsystems im SI entfallen. Das hat zur Folge, daß den in der Technik bisher verwendeten „*gewichtbezogenen*" Größenarten und ihren Einheiten die „*massebezogenen*" vorgezogen werden müssen. Dazu gehört u. a. das Aufgeben des Begriffs Wichte als Quotient aus Kraft und Volumen. An seine Stelle tritt im SI die *Dichte* als Quotient aus Masse und Volumen mit der SI-Einheit Kilogramm je Kubikmeter (kg/m^3). Des weiteren ist es notwendig, die bisherige Tragkraft (in Kilopond) in *Tragfähigkeit* (in Kilogramm oder Tonnen) umzuwandeln. Das entspricht den Gegebenheiten auch wesentlich besser, da Kräne und Aufzüge nicht Kräfte, sondern Massen befördern. Aus der bisherigen technischen Nutzlast bzw. Verkehrslast werden in Masseeinheiten anzugebende *Nutz-* bzw. *Verkehrsmassen*, aus Eigengewicht *Eigenmasse* usw. *Last* bedeutet in der Physik ebenso wie in der Wägetechnik eine Masse, so daß mit der Umbenennung zugleich eine klarere Definition einhergeht.
Selbstverständlich kauft die Hausfrau keine Kräfte ein, sondern Massen Lebensmittel, und der Gewichtheber hebt die Masse Hantel, nicht die Kraft, er leistet dabei Arbeit in Form von Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit. Die entsprechende SI-Einheit ist Joule (J).

5. Das Internationale Einheitensystem (SI)

5.1. Allgemeines

Das Internationale Einheitensystem (SI, Système International d'Unités) wurde auf Anregung der Mitgliedstaaten der Internationalen Meterkonvention geschaffen, um in Naturwissenschaft und Technik die Verwendung der gleichen Einheiten zu sichern. Das SI umfaßt sieben *Basiseinheiten* und zwei *ergänzende SI-Einheiten* für ebene und räumliche Winkel (Tabelle 1). Aus diesen Einheiten werden abgeleitete Einheiten als Potenzprodukte mit positiven und/oder negativen Exponenten gebildet; sie sind *kohärent*, wenn dabei lediglich der Zahlenfaktor 1 auftritt. *Nur kohärente Einheiten sind SI-Einheiten.* Besondere Vorteile bei der konsequenten Anwendung der SI-Einheiten sind, daß

1. für jede Größenart nur *eine* SI-Einheit existiert, deren Vielfache und Teile mit Vorsätzen (vgl. Tabelle 2) gesetzliche Einheiten sind,
2. selbst für gesetzlich nicht festgelegte Größen SI-Einheiten gebildet werden dürfen und als zulässig gelten,
3. SI-Einheiten auf der ganzen Welt die gleichen sind, so daß in SI-Einheiten bezeichnete Größen ohne weitere Umrechnung miteinander verglichen werden können.

In Verbindung mit den SI-Einheiten dürfen die systemfremden Einheiten der Zeit Minute (min), Stunde (h) und Tag (d) sowie die Winkeleinheiten Grad (°), Minute (′) und Sekunde (″) benutzt werden, weil Vielfache der Sekunde zu wenig Information vermitteln und die SI-Einheit Radiant (rad) noch zu wenig eingebürgert ist.



5.2. Anwendung der Vorsätze

Vorsätze (Tabelle 2) dienen zum Bilden dezimaler Vielfacher und Teile von Einheiten mit selbständigem Namen, zu denen keine Einheitenpotenzen zu rechnen sind. Nach den internationalen Empfehlungen soll jeweils nur *ein* Vorsatz angebracht werden. Den Potenzen 10^{3n} ($n = 1, 2, 3, \ldots$) mit positivem und negativem Vorzeichen des Exponenten ist der Vorzug zu geben.
Die Vorsätze Dezi (d) und Zenti (c) sowie Deka (da) und Hekto (h) sollen nur noch dort gebraucht werden, wo sie auch bisher schon gebräuchlich waren (z. B. bei Hektoliter hl; Zentimeter cm). Ausgeschriebene Einheitennamen dürfen nur mit ausgeschriebenen Vorsatznamen, Einheitenzeichen nur mit Vorsatzzeichen verknüpft werden, es darf also weder kOhm noch KiloΩ geschrieben werden, sondern nur Kiloohm oder kΩ. Die Verbindung von Einheit und Vorsatz bildet ein Ganzes, von dem Potenzen gebildet werden dürfen, z. B. cm^2, dm^3. In Potenzprodukten können die einzelnen Faktoren mit selbständigem Namen Vorsätze erhalten, dabei sind Vorsätze im Nenner weitgehend zu vermeiden.

5.3. SI-Einheiten des Raumes und der Zeit

Die Basiseinheit der *Länge*, das Meter (m), ist seit 1960 auf die Strahlung des Krypton 86 bezogen, ist also eine Naturkonstante, wie es schon die Schöpfer des metrischen Systems beabsichtigt hatten. Es sind alle Vielfachen und Teile mit Vorsätzen zulässig.
Abgeleitete SI-Einheit der *Fläche* ist das Quadratmeter (m^2), dezimale Vielfache und Teile werden von den entsprechenden Vielfachen und Teilen des Meters als 2. Potenzen gebildet.
Kohärente SI-Einheit des *Volumens* ist das Kubikmeter (m^3). Bei der Bildung von Vielfachen und Teilen wird wie beim Quadratmeter verfahren, allerdings mit 3. Potenzen. Der Eigenname *Liter* (l) für 10^{-3} m^3 bleibt zulässig, ebenso Vielfache und Teile desselben. Es gilt: 1 $dm^3 \triangleq$ 1 l, 1 $cm^3 \triangleq$ 1 ml, 1 $mm^3 \triangleq$ 1 µl.
Der Radiant (rad) ist die ergänzende SI-Einheit für den *ebenen Winkel*. Als Ersatz der systemfremden Winkeleinheiten werden Milli- und Mikroradiant empfohlen. In Rotationsgrößen werden die Winkeleinheiten unbedingt benötigt. Die SI-Einheit des *Raumwinkels* ist der Steradiant (sr), er ist für die abgeleiteten Einheiten der optischen Strahlung unentbehrlich, weil sonst z. B. die Einheiten für Lichtstärke und Lichtstrom übereinstimmen würden.
Die Basiseinheit der *Zeit*, die Sekunde (s), wird ebenfalls durch eine Naturkonstante, die Strahlung des Zäsium-Atoms 133, realisiert. Dezimale Vielfache sind z. Z. noch wenig gebräuchlich, da sie keine rechte Vorstellung vermitteln, so daß das Umrechnen in systemfremde Einheiten unvermeidlich ist:

$$1\ \mathrm{h} = 60\ \mathrm{min} = 3600\ \mathrm{s}$$

Frequenzen werden in der SI-Einheit Hertz (Hz) angegeben, für *Umlauffrequenzen* oder *Drehzahlen* soll die SI-Einheit s^{-1} verwendet werden. Die SI-Einheiten für *Geschwindigkeit* und *Winkelgeschwindigkeit* sowie für *Beschleunigung* und *Winkelbeschleunigung* sind Meter je Sekunde (m/s), Radiant je Sekunde (rad/s), Meter je Sekundequadrat (m/s^2) und Radiant je Sekundequadrat (rad/s^2) (vgl. Tabelle 3).

5.4. SI-Einheiten der Mechanik

SI-Basiseinheit der *Masse* ist das Kilogramm (kg), verkörpert durch den internationalen *Kilogramm-Prototyp*. Dezimale Vielfache und Teile werden vom Gramm (g) gebildet; als Eigenname für Megagramm (1 Mg = 10^3 kg) ist der Name Tonne (t) zulässig, deren zehnter Teil, die Dezitonne (1 dt = 100 kg), den alten *Doppelzentner* (dz) ersetzt hat. Pfund (℔) und *Zentner* (Ztr) sind seit rund 100 Jahren keine gesetzlichen Einheiten mehr!

Abgeleitete SI-Einheit der *Kraft* ist das Newton ($1\ N = 1\ m \cdot kg/s^2$). *Kraftmomente* werden in der SI-Einheit Newtonmeter ($N \cdot m$) angegeben. SI-Einheit des *Drucks* ist das Pascal ($1\ Pa = 1\ N/m^2$). Zu den aufzugebenden systemfremden Einheiten gehören auch die physikalische Atmosphäre (1 atm = 101325 Pa) und das Torr (1 Torr = 133,33 Pa).
Mechanische Spannungen sollen in Zukunft in der SI-Einheit Pascal ($1\ Pa = 1\ N/m^2$) bzw. den dezimalen Vielfachen kPa, MPa oder GPa angegeben werden. Die Zahlenwerte der systemfremden Einheiten kp/cm^2 und kp/mm^2 schließen den neuen Wert so ein, daß aus ihnen unmittelbar der Zahlenwert in MPa errechnet werden kann:

$$1\ kp/cm^2 < 1\ MPa < 1\ kp/mm^2$$

Für die *dynamische Viskosität* ist die SI-Einheit Pascalsekunde ($1\ Pa \cdot s = 1\ N \cdot s/m^2$) gültig, die *kinematische Viskosität* wird in der Einheit Quadratmeter je Sekunde (m^2/s) gemessen (vgl. Tabellen 3 und 4).
SI-Einheit der *Arbeit* und der *Energie* ist das Joule ($1\ J = 1\ N \cdot m = 1\ W \cdot s = 1\ m^2 \cdot kg/s^2$) und der *Leistung* das Watt ($1\ W = 1\ m^2 \cdot kg/s^3$).

5.5. SI-Einheiten der Elektrizität und des Magnetismus

Die SI-Basiseinheiten (m, kg, s) und die SI-Basiseinheit Ampere (A) für die *elektrische Stromstärke* bilden die Grundlage für das kohärente Vierersystem der Elektrizität und des Magnetismus. Zur Unterscheidung von anderen Leistungen dürfen elektrische *Scheinleistungen* in Voltampere ($1\ V \cdot A = 1\ W$) und elektrische *Blindleistungen* in Var (1 var = 1 W) angegeben werden. Für den Quotienten Weber je Quadratmeter (Wb/m^2) wurde der Eigenname Tesla (T) festgelegt.
Nicht mehr zulässige Einheiten enthält Tabelle 8.

Tabelle 8. Nicht mehr zulässige Einheiten des Magnetismus

Größe	Einheit	Umrechnung in die SI-Einheit
Induktion	Gauß	$1\ Gs = 10^{-4}\ T\ (= 10^{-4}\ Wb/m^2)$
Feldstärke	Oersted	$1\ Oe = 79{,}577\ A/m$
	Gamma	$1\ \gamma = 7{,}9577 \cdot 10^{-4}\ A/m$
Fluß	Maxwell	$1\ Mx = 10^{-8}\ Wb\ (= 10^{-8}\ W \cdot s/A)$
Spannung	Gilbert	$1\ Gb = 0{,}796\ A$

5.6. SI-Einheiten der Wärme(lehre) (Thermodynamik)

In der Wärmelehre hat die Umbenennung des Grad Kelvin in Kelvin (K) einige Änderungen bei abgeleiteten SI-Einheiten zur Folge, abgesehen davon, daß an dem Kurzzeichen der Einheit nicht mehr erkennbar ist, ob es sich um einen *Temperaturpunkt* oder eine *Temperaturdifferenz* handelt. So haben z. B. *Entropie* und *Wärmekapazität* die gleiche Einheit Joule je Kelvin (J/K). Temperaturdifferenzen werden nicht mehr in grd angegeben, sondern in Kelvin (z. B. 20 °C $\pm$ 2 K). Zur Angabe von *Celsius-Temperaturen* bleibt auch weiterhin der Grad Celsius (1 °C $\triangleq$ 1 K) als Temperaturdifferenz bestehen, der als Differenz einer Temperatur T und der Temperatur $T_0 = 273{,}15\ K$ gebildet wird (vgl. Tabelle 7):

$$0\ °C \triangleq 273{,}15\ K$$



5.7. SI-Einheiten der optischen Strahlung

Die Definition der Basiseinheit der *Lichtstärke*, der *Candela* (cd), wurde neu gefaßt, im übrigen ändern sich die Definitionen der abgeleiteten Einheiten nicht. Der Raumwinkel bzw. seine Einheit darf bei der Definition des *Lichtstroms* bzw. der SI-Einheit Lumen (1 lm = 1 cd · sr) und des Lux (1 lx = 1 cd · sr/m²) für die Beleuchtungsstärke nicht vernachlässigt werden, damit die Eindeutigkeit gewährleistet ist (vgl. Tabelle 3).

5.8. SI-Einheiten der Akustik

Die SI-Einheiten der Akustik lassen sich aus den SI-Einheiten der Mechanik ableiten, so für *Schallschnelle, Schallenergie, Schalldruck* und *Schalleistung.* Die *spezifische Schallimpedanz* hat die SI-Einheit Pascalsekunde je Meter (Pa · s/m), da das Rayl (1 Rayl = 10 N · s/m³ = 10 Pa · s/m) nicht mehr zulässig ist.

5.9. SI-Einheiten der ionisierenden Strahlung

Einheiten der ionisierenden Strahlung sind Einheiten der Elektrizitätslehre. Hier ist die Anzahl der reziproken Einheiten besonders groß, da es sich um Teilchen ionisierender Strahlungen im Verhältnis zu Flächen usw. handelt. Die *Kerma* (gebildet aus **k**inetic **e**nergy **r**eleased in **ma**terial) hat die SI-Einheit Joule je Kilogramm (J/kg), während die *Energiedosis* in Zukunft als absorbierte Dosis den Eigennamen Gray (Gy) haben wird (1 Gy = 1 J/kg). Um Verwechslungen der SI-Einheit der *Aktivität* Eins je Sekunde mit dem Hertz zu vermeiden, erhält sie den Eigennamen *Becquerel* (Bq) und ist anderen SI-Einheiten mit Eigennamen gleichgestellt (vgl. Tabelle 6).

5.10. SI-Einheiten der physikalischen Chemie

Jüngste SI-Basiseinheit ist das *Mol* (mol) für die *Stoffmenge* (Objektmenge) als Teilchenverhältnis eines Stoffs zu 0,012 kg des Kohlenstoffs 12. Das Mol läßt sich über die AVOGADROsche Konstante [(6,02205 ± 0,00003) · 10^{23} mol^{-1}] berechnen. Das neue Mol ist nicht zu verwechseln mit der Masseeinheit Mol, die früher in der physikalischen Chemie eine Rolle gespielt hat. In Tabelle 9 sind einige stoffmengenbezogene Größen und ihre SI-Einheiten zusammengestellt.

Tabelle 9. Stoffmengenbezogene Größen und ihre SI-Einheiten

Größe	SI-Einheit	Systemfremde Einheit	Umrechnung in SI-Einheit
Molares Volumen	m³/mol		
Molare Masse	kg/mol		
Molare innere Energie	J/mol	cal/mol	4,1868 J/mol
Molare Entropie	J/(mol · K)	cal/grd · mol	4,1868 J/(K · mol)
Molare Wärmekapazität	J/(mol · K)	cal/grd · mol	4,1868 J/(K · mol)
Molarer Brennwert	J/mol	cal/mol	4,1868 J/mol
Molare Leitfähigkeit	S · m²/mol		
Molare Aktivität	Bq/mol	Ci/mol	3,7 · 10^{10} Bq/mol
Molalität	mol/kg		
Stoffmengenkonzentration	mol/m³		
Ionenstärke	mol/kg		

6. Tabelle der Einheiten physikalischer Größen

(unter Verwendung des Standards[4])

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Raum und Zeit			
Länge l	*Meter*	m	Basiseinheit *Das Meter ist gleich 1650763,73 Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus $2p_{10}$ und $5d_5$ des Atoms Krypton 86 entspricht.*
Wellenzahl σ	Eins je Meter	1/m	$1/\mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}^{-1}$
Fläche A	Quadratmeter	m²	$1\ \mathrm{m}^2 = 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}$
Volumen V	Kubikmeter	m³	$1\ \mathrm{m}^3 = 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}$
Ebener Winkel $\alpha, \ldots$	Radiant	rad	1 rad = 1 m/m Der Radiant ist der Winkel zwischen zwei Kreisradien, die aus dem Kreisumfang einen Bogen ausschneiden, dessen Länge gleich dem Radius ist.
Raumwinkel Ω	Steradiant	sr	$1\ \mathrm{sr} = 1\ \mathrm{m}^2/\mathrm{m}^2$ Der Steradiant ist der Raumwinkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkt einer Kugel liegt und der aus der Oberfläche dieser Kugel eine Fläche ausschneidet, die gleich der eines Quadrats ist, dessen Seite mit dem Kugelradius übereinstimmt.
Zeit t	*Sekunde*	s	Basiseinheit *Die Sekunde ist die Dauer von 9192631770 Perioden der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Atoms Zäsium 133 entspricht.*
Frequenz f, ν	Hertz	Hz	$1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$
Geschwindigkeit v, u	Meter je Sekunde	m/s	$1\ \mathrm{m/s} = 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Winkelgeschwindigkeit (Winkelfrequenz, Kreisfrequenz) ω	Radiant je Sekunde, Eins je Sekunde	rad/s, 1/s	$1\ \mathrm{rad/s} = 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Beschleunigung a	Meter je Quadratsekunde	m/s²	$1\ \mathrm{m/s}^2 = 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Winkelbeschleunigung α	Radiant je Quadratsekunde	rad/s²	$1\ \mathrm{rad/s}^2 = 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Volumenstrom (Volumendurchfluß, Volumendurchsatz) $\dot{V}$	Kubikmeter je Sekunde	m³/s	$1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} = 1\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Mechanik			
Masse m	*Kilogramm*	kg	Basiseinheit *Das Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.* Keine Vorsätze!
Längenbezogene Masse m/l	Kilogramm je Meter	kg/m	$1\ \mathrm{kg/m} = 1\ \mathrm{m^{-1} \cdot kg}$
Flächenbezogene Masse m/A	Kilogramm je Quadratmeter	$\mathrm{kg/m^2}$	$1\ \mathrm{kg/m^2} = 1\ \mathrm{m^{-2} \cdot kg}$
Dichte ϱ	Kilogramm je Kubikmeter	$\mathrm{kg/m^3}$	$1\ \mathrm{kg/m^3} = 1\ \mathrm{m^{-3} \cdot kg}$
Spezifisches Volumen v	Kubikmeter je Kilogramm	$\mathrm{m^3/kg}$	$1\ \mathrm{m^3/kg} = 1\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$
Impuls $\boldsymbol{p}$	Kilogrammeter je Sekunde	$\mathrm{kg \cdot m/s}$	$1\ \mathrm{kg \cdot m/s} = 1\ \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-1}}$
Drehimpuls $\boldsymbol{L}$	Kilogramm mal Quadratmeter je Sekunde	$\mathrm{kg \cdot m^2/s}$	$1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}}$
Massenträgheitsmoment J	Kilogramm mal Quadratmeter	$\mathrm{kg \cdot m^2}$	$1\ \mathrm{kg \cdot m^2} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg}$
Kraft $\boldsymbol{F}$	Newton	N	$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-2}}$
Kraftmoment $\boldsymbol{M}$	Newtonmeter	$\mathrm{N \cdot m}$	$1\ \mathrm{N \cdot m} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$
Kraftstoß $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{I}$	Newtonsekunde	$\mathrm{N \cdot s}$	$1\ \mathrm{N \cdot s} = 1\ \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-1}}$
Druck p	Pascal	Pa	$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}}$ Einheit gilt auch für Spannung (mech.), Elastizitätsmodul, Schubmodul und Kompressionsmodul.
Oberflächenspannung σ	Newton je Meter	N/m	$1\ \mathrm{N/m} = 1\ \mathrm{kg \cdot s^{-2}}$
Dynamische Viskosität η	Pascalsekunde	$\mathrm{Pa \cdot s}$	$1\ \mathrm{Pa \cdot s} = 1\ \mathrm{m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}}$
Kinematische Viskosität ν	Quadratmeter je Sekunde	$\mathrm{m^2/s}$	$1\ \mathrm{m^2/s} = 1\ \mathrm{Pa \cdot s/(kg/m^3)} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$
Arbeit, Energie W	Joule	J	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$
Leistung P	Watt	W	$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}}$
Massestrom (Massedurchfluß, Massedurchsatz) $\dot{m}$	Kilogramm je Sekunde	kg/s	$1\ \mathrm{kg/s} = 1\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$
Massestromdichte I	Kilogramm je Sekunde mal Quadratmeter	$\mathrm{kg/(s \cdot m^2)}$	$1\ \mathrm{kg/(s \cdot m^2)} = 1\ \mathrm{m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-1}}$
Energiedichte w	Joule je Kubikmeter	$\mathrm{J/m^3}$	$1\ \mathrm{J/m^3} = 1\ \mathrm{m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}}$

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Wärme			
Temperatur (thermodynamische) T	*Kelvin*	K	Basiseinheit *Das Kelvin ist der 273,16te Teil der (thermodynamischen) Temperatur des Tripelpunkts von Wasser.*
Wärmemenge Q (innere Energie, Enthalpie, freie Energie, Phasenumwandlungswärme, chemische Reaktionswärme)	Joule	J	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$
Spezifische Wärmemenge (einer Phasenumwandlung, einer chemischen Reaktion) q	Joule je Kilogramm	J/kg	$1\ \mathrm{J/kg} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$
Wärmekapazität C	Joule je Kelvin	J/K	$1\ \mathrm{J/K} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
Spezifische Wärmekapazität c	Joule je Kilogramm mal Kelvin	J/(kg · K)	$1\ \mathrm{J/(kg \cdot K)} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
Entropie S	Joule je Kelvin	J/K	$1\ \mathrm{J/K} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
Spezifische Entropie s	Joule je Kilogramm mal Kelvin	J/(kg · K)	$1\ \mathrm{J/(kg \cdot K)} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
Wärmestrom Φ, $\dot{Q}$	Watt	W	$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}}$
Wärmestromdichte q, φ	Watt je Quadratmeter	W/m²	$1\ \mathrm{W/m^2} = 1\ \mathrm{kg \cdot s^{-3}}$
Wärmeübergangskoeffizient α Wärmedurchgangskoeffizient k	Watt je Quadratmeter mal Kelvin	W/(m² · K)	$1\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K)} = 1\ \mathrm{kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}}$
Wärmeleitfähigkeit λ	Watt je Meter mal Kelvin	W/(m · K)	$1\ \mathrm{W/(m \cdot K)} = 1\ \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}}$
Temperaturleitfähigkeit a	Quadratmeter je Sekunde	m²/s	$1\ \mathrm{m^2/s} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$
Elektrizität und Magnetismus			
Elektrische Stromstärke I	*Ampere*	A	Basiseinheit *Das Ampere ist die Stärke des zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter von vernachlässigbarem Querschnitt, die den Abstand* 1 m *haben und zwischen denen die durch den Strom elektrodynamisch hervorgerufene Kraft im leeren Raum je* 1 m *Länge der Doppelleitung* $2 \cdot 10^{-7}$ N *beträgt.*

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$	Ampere je Quadratmeter	A/m^2	$1\ A/m^2 = 1\ m^{-2} \cdot A$
Strombelag A, α	Ampere je Meter	A/m	$1\ A/m = 1\ m^{-1} \cdot A$
Elektrizitätsmenge (elektrische Ladung) Q	Coulomb	C	$1\ C = 1\ s \cdot A$
Raumladungsdichte ϱ	Coulomb je Kubikmeter	C/m^3	$1\ C/m^3 = 1\ m^{-3} \cdot s \cdot A$
Flächenladungsdichte σ	Coulomb je Quadratmeter	C/m^2	$1\ C/m^2 = 1\ m^{-2} \cdot s \cdot A$
Elektrische Verschiebung $\boldsymbol{D}$ (Verschiebungsdichte)	Coulomb je Quadratmeter	C/m^2	$1\ C/m^2 = 1\ m^{-2} \cdot s \cdot A$
Elektrischer Verschiebungsfluß Ψ	Coulomb	C	$1\ C = 1\ (C/m^2) \cdot m^2 \hat{=} 1\ s \cdot A$
Elektrische Leistung P	Watt	W	$1\ W = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$ Scheinleistungen dürfen in Voltampere (V·A), Blindleistungen in Var (var) angegeben werden.
Elektrische Spannung U	Volt	V	$1\ V = 1\ W/A = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$	Volt je Meter	V/m	$1\ V/m = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrische Kapazität C	Farad	F	$1\ F = 1\ C/V = 1\ m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Dielektrizitätskonstante ε, elektrische Feldkonstante ε_0	Farad je Meter	F/m	$1\ F/m = 1\ m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Elektrisches Dipolmoment $\boldsymbol{p}$	Coulombmeter	C · m	$1\ C \cdot m = 1\ m \cdot s \cdot A$
Elektrische Polarisation $\boldsymbol{P}$	Coulomb je Quadratmeter	C/m^2	$1\ C/m^2 = 1\ m^{-2} \cdot s \cdot A$
Elektrischer Widerstand R	Ohm	Ω	$1\ \Omega = 1\ V/A = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Spezifischer elektrischer Widerstand ϱ	Ohmmeter	Ω · m	$1\ \Omega \cdot m = 1\ m^3 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Elektrischer Leitwert G	Siemens	S	$1\ S = 1/\Omega = 1\ m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$, γ	Siemens je Meter	S/m	$1\ S/m = 1/(\Omega \cdot m) = 1\ m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Magnetischer Fluß Φ	Weber	Wb	$1\ Wb = 1\ V \cdot s = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ (magnetische Flußdichte)	Tesla	T	$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{Wb/m^2} = 1\,\mathrm{kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}}$
Magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$	Ampere je Meter	A/m	$1\,\mathrm{A/m} = 1\,\mathrm{m^{-1} \cdot A}$
Magnetische Spannung V	Ampere	A	$1\,\mathrm{A} = 1\,(\mathrm{A/m}) \cdot \mathrm{m} = 1\,\mathrm{A}$
Induktivität L	Henry	H	$1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{Wb/A} = 1\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}}$
Permeabilität μ, magnetische Feldkonstante μ_0	Henry je Meter	H/m	$1\,\mathrm{H/m} = 1\,\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}}$
Magnetische Polstärke nach COULOMB p	Weber	Wb	$1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{N \cdot m/A} = 1\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}}$
Magnetisches Moment nach COULOMB m_{H}	Webermeter	Wb · m	$1\,\mathrm{Wb \cdot m} = 1\,\mathrm{m^3 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}}$
Magnetische Polarisation $\boldsymbol{J}$	Tesla	T	$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{Wb \cdot m/m^3} = 1\,\mathrm{Wb/m^2}$ $= 1\,\mathrm{kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}}$
Magnetisches Moment nach AMPÈRE m_{B}	Ampere mal Quadratmeter	A · m²	$1\,\mathrm{A \cdot m^2} = 1\,\mathrm{m^2 \cdot A}$
Magnetisierung M	Ampere je Meter	A/m	$1\,\mathrm{A/m} = 1\,\mathrm{m^{-1} \cdot A}$
Magnetischer Widerstand R_{m}	Ampere je Weber	A/Wb	$1\,\mathrm{A/Wb} = 1\,\mathrm{m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot A^2}$
Magnetischer Leitwert Λ	Henry	H	$1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{Wb/A} = 1\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}}$
Optische Strahlung			
Lichtstärke I_{v}	*Candela*	cd	Basiseinheit ***Die Candela ist die in einer Richtung gegebene Lichtstärke einer Strahlungsquelle, die eine monochromatische Strahlung der Frequenz*** **540 · 10¹² Hz** ***aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung*** **(1/683) W/sr** ***beträgt.***
Leuchtdichte L_{v}	Candela je Quadratmeter	cd/m²	$1\,\mathrm{cd/m^2} = 1\,\mathrm{m^{-2} \cdot cd}$
Lichtstrom Φ_{v}	Lumen	lm	$1\,\mathrm{lm} = 1\,\mathrm{cd \cdot sr}$
Beleuchtungsstärke E_{v}	Lux	lx	$1\,\mathrm{lx} = 1\,\mathrm{lm/m^2} = 1\,\mathrm{m^{-2} \cdot cd \cdot sr}$
Spezifische Lichtausstrahlung M_{v}	Lumen je Quadratmeter	lm/m²	$1\,\mathrm{lm/m^2} = 1\,\mathrm{m^{-2} \cdot cd \cdot sr}$
Lichtmenge Q_{v}	Lumensekunde	lm · s	$1\,\mathrm{lm \cdot s} = 1\,\mathrm{s \cdot cd \cdot sr}$
Belichtung H_{v}	Luxsekunde	lx · s	$1\,\mathrm{lx \cdot s} = 1\,\mathrm{m^{-2} \cdot s \cdot cd \cdot sr}$
Strahlungsenergie W, Q	Joule	J	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Strahlungsfluß Φ_e	Watt	W	$1\ W = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Strahlstärke I_e	Watt je Steradiant	W/sr	$1\ W/sr = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot sr^{-1}$
Strahldichte L_e	Watt je Quadratmeter mal Steradiant	$W/(m^2 \cdot sr)$	$1\ W/(m^2 \cdot sr) = 1\ kg \cdot s^{-3} \cdot sr^{-1}$
Strahlungsflußdichte φ (spezifische Ausstrahlung, Bestrahlungsstärke)	Watt je Quadratmeter	W/m^2	$1\ W/m^2 = 1\ kg \cdot s^{-3}$
Bestrahlung H_e	Joule je Quadratmeter	J/m^2	$1\ J/m^2 = 1\ kg \cdot s^{-2}$

Akustik

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Schallschnelle v	Meter je Sekunde	m/s	$1\ m/s = 1\ m \cdot s^{-1}$
Schalldruck p	Pascal	Pa	$1\ Pa = 1\ m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Schallfluß q	Kubikmeter je Sekunde	m^3/s	$1\ m^3/s = 1\ m^3 \cdot s^{-1}$
Flußimpedanz, akustische Impedanz Z_a	Pascalsekunde je Kubikmeter	$Pa \cdot s/m^3$	$1\ Pa \cdot s/m^3 = 1\ m^{-4} \cdot kg \cdot s^{-1}$
Feldimpedanz, spezifische Impedanz Z_s, Z	Pascalsekunde je Meter	$Pa \cdot s/m$	$1\ Pa \cdot s/m = 1\ m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-1}$
Mechanische Impedanz Z_m	Newtonsekunde je Meter	$N \cdot s/m$	$1\ N \cdot s/m = 1\ kg \cdot s^{-1}$
Schallenergie W	Joule	J	$1\ J = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Schalleistung P Schallenergiefluß	Watt	W	$1\ W = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Schallintensität J	Watt je Quadratmeter	W/m^2	$1\ W/m^2 = 1\ kg \cdot s^{-3}$
Schallenergiedichte w, E	Joule je Kubikmeter	J/m^3	$1\ J/m^3 = 1\ m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$

Physikalische Chemie

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Stoffmenge n	*Mol*	mol	Basiseinheit *Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus so vielen gleichartigen elementaren Teilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffs 12 enthalten sind.* Die Teilchen müssen speziell angegeben werden!
Molare Masse M	Kilogramm je Mol	kg/mol	$1\ kg/mol = 1\ kg \cdot mol^{-1}$

Größe	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit, Bemerkungen
Molares Volumen V_m	Kubikmeter je Mol	m^3/mol	$1\ m^3/mol = 1\ m^3 \cdot mol^{-1}$
Molare innere Energie U_m, Molare Enthalpie H_m	Joule je Mol	J/mol	$1\ J/mol = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$ auch für chemisches Potential und Affinität
Molare Wärmekapazität C_m	Joule je Kelvin mal Mol	J/(K · mol)	$1\ J/(K \cdot mol) = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
Stoffmengenkonzentration, Molarität c	Mol je Kubikmeter	mol/m^3	$1\ mol/m^3 = 1\ m^{-3} \cdot mol$
Molalität b, m Ionenstärke	Mol je Kilogramm	mol/kg	$1\ mol/kg = 1\ kg^{-1} \cdot mol$
Ionisierende Strahlung			
Teilchenfluenz Φ	Eins je Quadratmeter	$1/m^2$	$1/m^2 = 1\ m^{-2}$
Teilchenflußdichte $\dot{\Phi}$ (Teilchenfluenzleistung)	Eins je Quadratmeter mal Sekunde	$1/(m^2 \cdot s)$	$1/(m^2 \cdot s) = 1\ m^{-2} \cdot s^{-1}$
Energiefluenz F	Joule je Quadratmeter	J/m^2	$1\ J/m^2 = 1\ kg \cdot s^{-2}$
Energieflußdichte $\dot{F}$ (Energiefluenzleistung)	Watt je Quadratmeter	W/m^2	$1\ W/m^2 = 1\ kg \cdot s^{-3}$
Exposition X	Coulomb je Kilogramm	C/kg	$1\ C/kg = 1\ kg^{-1} \cdot s \cdot A$
Expositionsleistung $\dot{X}$	Ampere je Kilogramm	A/kg	$1\ A/kg = 1\ kg^{-1} \cdot A$
Kerma K	Joule je Kilogramm	J/kg	$1\ J/kg = 1\ m^2 \cdot s^{-2}$ Die Einheit der Kerma darf auch Gray benannt werden.
Kermaleistung $\dot{K}$	Watt je Kilogramm	W/kg	$1\ W/kg = 1\ m^2 \cdot s^{-3}$ Die Einheit der Kermaleistung darf auch Gray je Sekunde benannt werden.
Energiedosis D	Gray	Gy	$1\ Gy = 1\ J/kg = 1\ m^2 \cdot s^{-2}$
Energiedosisleistung $\dot{D}$	Gray je Sekunde	Gy/s	$1\ Gy/s = 1\ m^2 \cdot s^{-3}$
Aktivität A	Becquerel	Bq	$1\ Bq = 1\ s^{-1}$
Neutronenquellstärke	Eins je Sekunde	1/s	$1/s = 1\ s^{-1}$ Keine Vorsätze! Die Bezeichnung Becquerel ist unzulässig.

Literaturverzeichnis

[1] Bekanntmachung über die Einführung der Einheit Mol als zusätzliche Grundeinheit des SI und der Benennung Pascal für die SI-Einheit des Druckes. Verfügungen und Mitteilungen des ASMW 4/1974, S. 7

[2] Bureau International des Poids et Mesures: Le Système International d'Unités. 3e Edition. — Sèvres 1977

[3] Gesetzblatt der DDR, Sonderdruck Nr. 761 vom 14. 9. 1973: Anordnung über die Einführung des Schlüssels der statistischen und physikalisch-technischen Maßeinheiten

[4] Ständige Kommission Standardisierung RGW: MS 6-73, Internationales Einheitensystem (SI). — Moskau 1973

[5] Ständige Kommission Standardisierung RGW: MS 8-70, Internationales Einheitensystem. Einheiten der Atom- und Kernphysik und der physikalischen Chemie. — Moskau 1970

[6] Ständige Kommission Standardisierung RGW: MS 14-71, Metrologie. Benennungen und Definitionen. — Moskau 1971

[7] Ständige Kommission Standardisierung RGW: RS 3472-74, Metrologie. Ordnung und Verfahren des Übergangs zum Internationalen Einheitensystem (SI). Allgemeine Empfehlungen. — Moskau 1974

Weiterführende Literatur

[8] *Baehr, H. D.:* Physikalische Größen und ihre Einheiten. — Braunschweig: Vieweg 1974

[9] *Bender, D., Pippig, E.:* Einheiten, Maßsysteme, SI. WTB, Reihe Mathematik/Physik. 3. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1977

[10] *Bender, D., Scholz, G.:* SI-Einheitentafel. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1984

[11] *Böge, A.:* Die neuen gesetzlichen Einheiten und ihre Anwendung. 4. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1973

[12] *Burdun, G. D.:* SI-Handbuch des Internationalen Einheitensystems. — Moskau: Verlag für Standardisierung 1971

[13] *Engel, W.:* SI-Einheiten: merken, mitreden, messen. — Würzburg: Vogel-Verlag 1978

[14] *Fischer, R., Padelt, E., Schindler, H.:* Physikalisch-technische Einheiten richtig angewandt. 6. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1979

[15] *Fischer, R., Vogelsang, K.:* Größen und Einheiten in Physik und Technik. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978

[16] *Förster, H.:* Einheiten, Größen, Gleichungen und ihre praktische Anwendung. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[17] *Haeder, W., Gärtner, E.:* Die gesetzlichen Einheiten in der Technik. 4. Aufl. — Berlin (West), Köln, Frankfurt (Main): Beuth-Vertrieb 1974

[18] *Hahnemann, H. W.:* Die Umstellung auf das Internationale Einheitensystem in Mechanik und Wärmetechnik. 2. Aufl. — Düsseldorf: VDI-Verlag 1964

[19] *Krist, Th.:* Neue internationale Einheiten der Technik und Physik — SI-Einheiten. 3. Aufl. — Darmstadt: Technik-Tabellen-Verlag Fikentscher & Co. 1975

[20] *Meißner, F.:* SI-Umrechnungstabellen. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980

[21] *Oberdorfer, G.:* Das System Internationaler Einheiten — Standort in der Größenlehre. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1978

[22] *Padelt, E., Laporte, H.:* Einheiten und Größenarten der Naturwissenschaften. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[23] *Petzold, M., Gensheimer, J.:* Wie rechnet man in SI-Einheiten um? — München, Wien: Carl Hanser Verlag 1974

[24] *Sacklowski, A.:* Einheitenlexikon. 4. Aufl. — Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt 1973

[25] SI Das Internationale Einheitensystem. — Berlin: Akademie-Verlag 1978

[26] *Wolfschlag, C.:* Einheiten, Größen und Formelzeichen der Elektroindustrie. — München, Wien: Carl Hanser Verlag 1974



Ma Mathematik

Von Studiendirektor Dipl.-Ing. Heinz Birnbaum, Leipzig

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Vorbemerkungen zum Abschnitt Mathematik

Sowohl die rasche Entwicklung der Wissenschaften, insbesondere der Technik, als auch die zunehmende mathematische Durchdringung aller Wissenschaftsbereiche ziehen einen enormen Ausbau der gesamten Mathematik nach sich. Dies führt einerseits zwangsläufig zur Aufteilung in viele mathematische Spezialgebiete und zwingt aber andererseits ständig dazu, die vielen Einzeldisziplinen auf einem gemeinsamen Fundament zu integrieren. Einer dieser fundamentalen Begriffe, auf denen die verschiedensten Teilgebiete der Mathematik aufbauen, ist zum Beispiel der Mengenbegriff.
Im Abschnitt MATHEMATIK wurde das Ziel verfolgt, der gestiegenen Bedeutung für die Technik gerecht zu werden, dem Charakter eines Nachschlagewerkes zu entsprechen und eine Beschränkung auf die mathematischen Grundlagen aller technischen Grundstudienrichtungen der Ingenieurausbildung zu erreichen. Daher erscheinen auch einige spezielle Teilgebiete außerhalb des Abschnitts MATHEMATIK. Dies sind die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mathematische Statistik, die Netzwerktheorie, die lineare und nichtlineare Optimierung und die Modellierung von Lagerhaltungs-, Zuverlässigkeits- und Bedienungsproblemen im Abschnitt OPERATIONSFORSCHUNG. Dazu gehören auch der weitere Ausbau der mathematischen Logik mit der Schaltalgebra und maschinellen Rechentechnik im Abschnitt RECHENTECHNIK UND DATENVERARBEITUNG. Probleme der darstellenden Geometrie, besonders geometrische Grundkonstruktionen, sind aus Zweckmäßigkeitsgründen im Abschnitt GRUNDLAGEN DES KONSTRUIERENS im „Fachwissen des Ingenieurs“, Band 1, dargestellt.

1.2. Mathematische Zeichen

Für die grafische oder analytische Darstellung mathematischer Sachverhalte sind entsprechende Standards zu berücksichtigen. Die wichtigsten Zeichen enthält Tabelle 1.

2. Aussagenlogik

2.1. Aussage, Aussageform und Aussagenfunktion

Die Aussagenlogik ist grundlegender Bestandteil der ***mathematischen Logik*** und nicht nur für die Mathematik selbst, sondern für den Ingenieur als Grundlage der Informationsverarbeitung von Bedeutung. Technische Realisierung der Aussagenlogik stellen die Bauelemente und Schaltsysteme in der Steuerung und Regelung, in der Automatisierungstechnik, Nachrichtentechnik und der maschinellen Datenverarbeitung dar.

Aussagen:

Die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts der objektiven Realität wird Aussage genannt. Eine Aussage ist entweder *wahr* oder *falsch*. Die Menge der Aussagen zerfällt damit genau in zwei Klassen, in die der wahren und in die der falschen Aussagen (*zweiwertige Logik*). Aussagen können in verschiedenen Formen auftreten, z. B. als gesprochener oder geschriebener Satz, als chemische Formel, als mathematischer Ausdruck usw. Sie werden durch große lateinische Buchstaben $A, B, C, \ldots$, ihre *Wahrheitswerte* wahr mit w oder L und falsch mit f oder O bezeichnet.

Beispiele sinnvoller Aussagen.

A: Plast ist ein Werkstoff; B: 1 km = 10 m.
A besitzt den Wahrheitswert w, denn in der Tat ist Plast ein Werkstoff. B ist eine falsche Aussage.

Tabelle 1. Auszug mathematischer Zeichen

Zeichen	Erklärung
$\cdots$	und so weiter bis
$\approx$	angenähert, nahezu gleich
$<$; $>$	kleiner als; größer als
$\ll$; $\gg$	klein gegen; groß gegen (von anderer Größenordnung)
$\parallel$; $\nparallel$	parallel; nicht parallel
$\downarrow\uparrow$; $\uparrow\uparrow$	gegensinnig parallel; gleichsinnig parallel
$\sim$	proportional; ähnlich
$\cong$	kongruent
$\triangleq$	entspricht
$\sphericalangle$	Winkel
$\rightarrow$	strebt gegen, konvergiert
$\Rightarrow$	wenn ..., so
D, Δ, det oder $\mid\ \mid$	Determinante $D = \Delta = \det(a_{ik}) = \mid\cdots\mid$
$\mid\ \mid$	absoluter Betrag einer Zahl, Betrag eines Vektors
$\boldsymbol{A}$ oder ( )	Matrix
$\boldsymbol{v}$ oder $\vec{v}$	Vektor
$\sum$	Summenzeichen
$\log_a$	Logarithmus zur Basis a
lg	Logarithmus zur Basis 10
ln	Logarithmus zur Basis e

Zeichen	Erklärung
$\Leftrightarrow$	äquivalent, gleichwertig
$\wedge$	und (sowohl ... als auch)
$\vee$	oder (im nicht ausschließenden Sinn)
$\in$; $\notin$	Element; nicht Element
$\subset$	Symbol für (echte) Teilmenge
$\cup$	Symbol für Vereinigungsmenge
$\cap$	Symbol für Durchschnittsmenge
$\setminus$	Symbol für Differenzmenge
$\times$	Symbol für Produktmenge
N	Menge der natürlichen Zahlen
G	Menge der ganzen Zahlen
R	Menge der rationalen Zahlen
P*)	Menge der reellen Zahlen
C	Menge der komplexen Zahlen
sin cos tan cot	Sinus Cosinus Tangens Cotangens
arcsin arccos arctan arccot	Arcus- Sinus Cosinus Tangens Cotangens
sinh cosh tanh coth	Hyperbel- Sinus Cosinus Tangens Cotangens
arsinh arcosh artanh arcoth	Area- Sinus Cosinus Tangens Cotangens

*) Mit P^+ bzw. P^- wird die Menge der positiven bzw. negativen reellen Zahlen bezeichnet.

Aussageformen:

Eine Aussageform ist ein (von der Form her) der Aussage analoger sprachlicher Ausdruck, in dem aber an Stelle der Namen konkreter Objekte mindestens eine *Variable* steht. Im Unterschied zur Aussage kommt der Aussageform kein Wahrheitswert zu. Eine Aussageform geht in eine Aussage über, wenn die Variablen ***belegt*** werden, d. h. an die Stelle der Variablen die Namen konkreter Objekte gesetzt werden.

Beispiele von Aussageformen.
$A(x)$: Der Werkstoff x leitet den elektrischen Strom nicht.
$A(x; y)$: Für die reellen Zahlen x und y gilt: $xy = 0$.
$A(u; v; w)$: Ein Würfel besitzt u Kanten, v Ecken und w Flächen.

Wird beispielsweise in $A(x)$ für x der Werkstoff Kupfer gesetzt, entsteht eine falsche Aussage. $A(x; y)$ wird genau dann zur wahren Aussage, wenn mindestens eine der beiden Variablen x oder y mit 0 belegt wird. $A(u; v; w)$ geht genau für das Belegungstripel $u = 12$; $v = 8$; $w = 6$ in eine wahre Aussage über.

Aussagenfunktionen:

Eine *n-stellige* Aussagenfunktion ist eine Abbildung, bei der jedem n-Tupel von Aussagen durch eine bestimmte Verknüpfungsvorschrift genau eine Aussage zugeordnet wird.
Zu den sogenannten *klassischen Aussagenfunktionen* gehören:

1. *Negation* oder *Verneinung* $\bar{A}$ einer Aussage A. Der Aussage A wird ihre verneinte Aussage $\bar{A}$ (lies: nicht A oder A negiert)*) zugeordnet. Es gilt: $\bar{A}$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn A eine falsche Aussage ist.
2. *Konjunktion* oder *UND-Funktion.* Den beiden Aussagen A; B wird die Aussage $C = A \wedge B$ (lies: A und B oder prägnanter: sowohl A als auch B) zugeordnet. Eine Konjunktion ist genau dann wahre Aussage, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind.
3. *Disjunktion* oder *ODER-Funktion***). Den beiden Aussagen A; B wird die Aussage $C = A \vee B$ (lies: A oder B) zugeordnet. Eine Disjunktion ist genau dann wahr, wenn mindestens eine Aussage wahr ist.
4. *Antivalenz.* Dem Aussagenpaar A; B wird die Aussage $C = A \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrow B$ (lies: entweder A oder B) zugeordnet. C ist genau dann wahr, wenn genau eine der Aussagen A oder B wahr ist.
5. *Implikation.* Dem Aussagenpaar A; B wird die Aussage $C = A \Rightarrow B$ (lies: A impliziert B) zugeordnet. Die Implikation ist genau dann falsch, wenn A wahre und B falsche Aussage ist. In der Mathematik entspricht in manchen Fällen $A \Rightarrow B$ der Sprechweise „wenn A, so B" oder „A ist hinreichende Bedingung für B".
6. *Äquivalenz.* Dem Aussagenpaar A; B wird die Aussage $C = A \Leftrightarrow B$ (lies: A äquivalent B) zugeordnet. Die Äquivalenz ist genau dann wahr, wenn entweder beide Einzelaussagen wahr oder beide falsch sind. Weitere Sprechweisen für $A \Leftrightarrow B$ sind: „A genau dann, wenn B", „A dann und nur dann, wenn B" oder „A ist notwendige und hinreichende Bedingung für B".

Dabei ist zu beachten, daß der Wahrheitswert von Aussagenfunktionen nur von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen und nicht vom Inhalt und Sinn der Aussagen abhängt (*extensionale* Aussagenfunktionen).

Beispiele. 1. Die Aussage A sei: $-2 < 2$. Dann lautet die Negation $\bar{A}$: $-2 \geqq 2$ (A ist wahre, $\bar{A}$ falsche Aussage).
2. Die Aussage A: „Quecksilber ist ein Metall" und die Aussage B: „Quecksilber ist bei 273 K flüssig" ergeben die Konjunktion $A \wedge B$: „Quecksilber ist ein Metall und bei 273 K flüssig." Der Wahrheitswert der Konjunktion ist w, da dies auch für beide Einzelaussagen gilt.
3. Die Aussagenverbindung $A \vee B$: „24 ist durch 6 oder durch 7 teilbar" ist wahr, da die erste Einzelaussage A: „24 ist durch 6 teilbar" wahr ist.

2.2. Wahrheitsfunktionen

Werden in Aussagenfunktionen an Stelle der Aussagen nur die Wahrheitswerte gesetzt, so ergeben sich *Wahrheitsfunktionen* (*Schaltfunktionen*).
Eine *einstellige Wahrheitsfunktion* $F_\nu{}^1$ ist eine Abbildung, durch die jedem $x \in X = \{O; L\}$ genau ein $y \in Y \subseteqq \{O; L\}$ zugeordnet wird. Der Definitionsbereich X umfaßt nur die beiden Wahrheitswerte O und L. Da sich aus O und L nur vier geordnete Paare bilden lassen, gibt es genau die vier einstelligen Wahrheitsfunktionen ($\nu = 0, 1, 2, 3$) der Tabelle 2.

Wie elementar einfach diese Funktionen (im Gegensatz zu den anderen mathematischen Funktionen in 8.) sind, geht aus ihren grafischen Darstellungen in einem kartesischen Koordinatensystem hervor. Mit O im Ursprung und L um jeweils eine Koordinateneinheit auf den Achsen vom Ursprung entfernt, ergeben sich jeweils zwei isolierte Punkte. Für die *Kontradiktion* (Bild 1) liegen diese zwei Punkte auf

*) auch $\neg A$ oder $\sim A$
**) auch Alternative

Tabelle 2. Einstellige Wahrheitsfunktionen

Bezeichnung	Funktionsgleichung	Wahrheitswertetabelle
Kontradiktion	$F_0^1(x) = 0 =$ konst.	x | y O | O L | O
Identität	$F_1^1(x) = x$	x | y O | O L | L
Negation	$F_2^1(x) = \bar{x}$	x | y O | L L | O
Tautologie	$F_3^1(x) = \mathrm{L} =$ konst.	x | y O | L L | L

der x-Achse mit $f_0(x) = 0$, für die *Identität* auf der Winkelhalbierenden $f_1(x) = x$ des 1. Quadranten (Bild 2), für die *Negation* auf der Geraden $f_2(x) = -x + \mathrm{L}$ (Bild 3) und für die *Tautologie* auf der Parallelen $f_3(x) \equiv \mathrm{L}$ zur Achse im Abstand L (Bild 4).

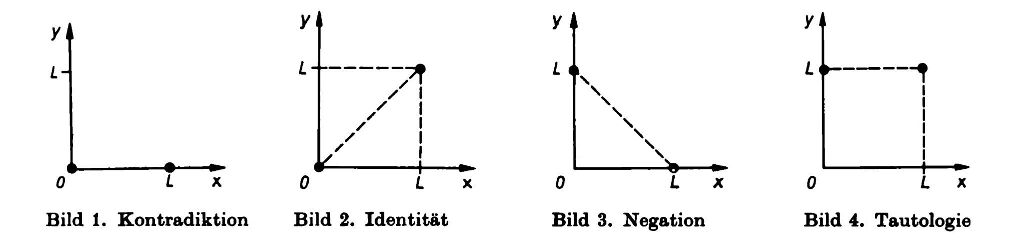


Bild 1. Kontradiktion Bild 2. Identität Bild 3. Negation Bild 4. Tautologie

Eine *zweistellige Wahrheitsfunktion* F_ν^2 ist eine Abbildung, durch die jedem geordneten Paar $(x_1; x_2) \in X \times X$ mit $X = \{\mathrm{O}; \mathrm{L}\}$ genau ein $y \in Y \subseteq X$ zugeordnet wird.
Die beiden unabhängigen (zweiwertigen) Variablen x_1 und x_2 werden häufig auch mit p und q bezeichnet.
Der Definitionsbereich besteht aus vier Paaren (O;O), (O;L), (L;O) und (L;L). Die nachstehende *Wahrheitswertetabelle* enthält sämtliche 16 zweistelligen Wahrheitsfunktionen ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, 15$).

Tabelle 3. Wahrheitswertetabelle

x_1	x_2	F_0^2	F_1^2	F_2^2	F_3^2	F_4^2	F_5^2	F_6^2	F_7^2	F_8^2	F_9^2	F_{10}^2	F_{11}^2	F_{12}^2	F_{13}^2	F_{14}^2	F_{15}^2
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	L	L	L	L	L	L	L	L
O	L	O	O	O	O	L	L	L	L	O	O	O	O	L	L	L	L
L	O	O	O	L	L	O	O	L	L	O	O	L	L	O	O	L	L
L	L	O	L	O	L	O	L	O	L	O	L	O	L	O	L	O	L

Neben der Kontradiktion F_0^2 (analog zu F_0^1) und der Tautologie F_{15}^2 (analog zu F_3^1) sind davon die wichtigsten Funktionen:

Tabelle 4. Zweistellige Wahrheitsfunktionen

Bezeichnung	Funktionsgleichung	Sprechweise
Konjunktion	$F_1^2(x_1; x_2) = x_1 \wedge x_2$	x_1 und x_2
Disjunktion	$F_7^2(x_1; x_2) = x_1 \vee x_2$	x_1 oder x_2
Antivalenz	$F_6^2(x_1; x_2) = x_1 \succ\!\prec x_2$	entweder x_1 oder x_2
Implikation	$F_{13}^2(x_1; x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$	x_1 impliziert x_2
Äquivalenz	$F_9^2(x_1; x_2) = x_1 \Leftrightarrow x_2$	x_1 äquivalent x_2
SHEFFER-*Funktion*	$F_{14}^2(x_1; x_2) = x_1 \mid x_2$	x_1 unverträglich mit x_2

Eine *n-stellige* Wahrheitsfunktion ($n \geqq 3$) von n Variablen x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) ist analog den ein- und zweistelligen Wahrheitsfunktionen definiert.
Allgemein gibt es 2^{2^n} n-stellige Wahrheitsfunktionen. Für die technische Anwendung der Wahrheitsfunktionen ist von Bedeutung, daß sich sämtliche Wahrheitsfunktionen durch Beschränkung auf wenige oder gar nur eine Funktion ausdrücken lassen. Daher kann man sich auf die Verwendung von

1. Negation, Konjunktion und Disjunktion,
2. Negation und Disjunktion oder
3. nur der SHEFFER-Funktion

beschränken. In Tafel 1 sind die Funktionsgleichungen der wichtigsten Wahrheitsfunktionen nur unter Verwendung der Negation, Disjunktion und Konjunktion dargestellt. Als Grund-

Tafel 1. Funktionsgleichungen der wichtigsten Wahrheitsfunktionen

Name	Funktionsgleichung	grafisches Symbol	
		alte Darstellung	neue Darstellung
Negation	$y = \bar{x}$		
Konjunktion UND (AND)	$y = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$		
Disjunktion ODER (OR)	$y = x_1 \vee x_2$		
Antivalenz	$y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$		logisches Schema s. Bild 5
Implikation	$y = x_1 \vee \bar{x}_2$		
Äquivalenz	$y = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$		
SHEFFER-Funktion NICHT-UND (NAND)	$y = \overline{x_1 x_2}$		
Nor-Funktion NICHT-ODER (NOR)	$y = \overline{x_1 \vee x_2}$		

stufe einer technischen Realisierung der Wahrheitsfunktionen werden diese grafisch in *Flußbilddarstellung* als sog. *logische Schemata* (Vorstufe der Schaltpläne) dargestellt. Dabei werden die rechts dargestellten grafischen Symbole angewendet, in denen aber von der technischen Ausführung (elektromechanisch, hydraulisch, halbleitertechnisch usw.) abstrahiert wird.
Tabelle 4 und Tafel 1 zeigen, daß eine Wahrheitsfunktion über mehrere Funktionsgleichungen dargestellt werden kann. Zwei Funktionsgleichungen werden dann *werteverlaufsgleich**) genannt, wenn genau bei jeder der möglichen Variablenbelegungen die zugehörigen Funktionswerte gleich sind. Daraus folgt, daß die Äquivalenz zweier werteverlaufsgleicher Funktionsgleichungen eine Tautologie ist.

Beispiele. 1. Die Werteverlaufsgleichheit von $F_6^2(x_1; x_2) = x_1 \succ\!\prec x_2$ und $\varphi(x_1; x_2) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$ ist mit Hilfe der Wahrheitswertetabelle zu beweisen.
Die Funktionswerte für $x_1 \succ\!\prec x_2$ werden Tabelle 3 entnommen. Die Funktionswerte für $\varphi(x_1; x_2)$ müssen schrittweise über $\bar{x}_1$; $\bar{x}_2$, die Terme $T_1 = x_1 \wedge \bar{x}_2$ und $T_2 = \bar{x}_1 \wedge x_2$ ermittelt werden, wobei die Definitionen der Konjunktion und Disjunktion zu beachten sind.

x_1	x_2	$x_1 \succ\!\prec x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	T_1	T_2	$\varphi(x_1; x_2)$
O	O	O	L	L	O	O	O
O	L	L	L	O	O	L	L
L	O	L	O	L	L	O	L
L	L	O	O	O	O	O	O

Die Übereinstimmung von 3. und 8. Spalte beweist die Werteverlaufsgleichheit $x_1 \succ\!\prec x_2 \equiv x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$.

2. Das logische Schema ist für $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$ darzustellen. Es entsteht unter Verwendung der Symbole aus Tafel 1 und unter Berücksichtigung der Terme (Untersysteme) T_1 und T_2 aus dem 1. Beispiel das Schema in Bild 5.

3. Zu den beiden Logikschemata der Bilder 6 und 7 sind die zugehörigen Funktionsgleichungen zu ermitteln. Die Werteverlaufsgleichheit beider Strukturen ist in der Form nachzuweisen, daß die Äquivalenz $f(x_1; x_2) \Leftrightarrow \varphi(x_1; x_2)$ eine Tautologie ist.

$f(x_1; x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$ (negierte ODER-Funktion oder NOR-Funktion),
$\varphi(x_1; x_2) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ (Konjunktion der negierten Variablen).
$\overline{x_1 \vee x_2} \Leftrightarrow (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$ wird zerlegt in $\overline{T}_1 \Leftrightarrow T_2$.

x_1	x_2	T_1	$\overline{T}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	T_2	$\overline{T}_1 \Leftrightarrow T_2$
O	O	O	L	L	L	L	L
O	L	L	O	L	O	O	L
L	O	L	O	O	L	O	L
L	L	L	O	O	O	O	L

Die letzte Spalte zeigt, daß $(\overline{T}_1 \Leftrightarrow T_2) = L$. Damit ist die Werteverlaufsgleichheit $f(x_1; x_2) \equiv \varphi(x_1; x_2)$ bewiesen.

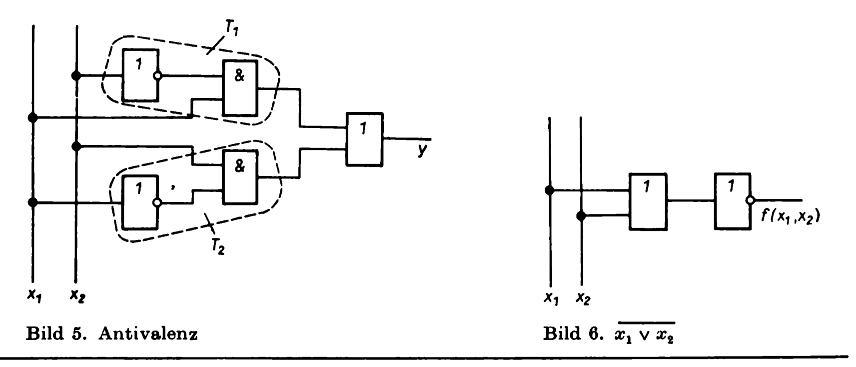


Bild 5. Antivalenz

Bild 6. $\overline{x_1 \vee x_2}$

*) auch logisch äquivalent genannt



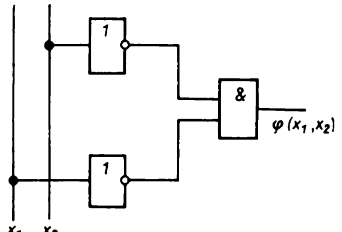


Bild 7. $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$

2.3. Rechenregeln für die logischen Grundfunktionen

Für die Negation, Konjunktion und Disjunktion als sog. *logische Grundfunktionen*, auf die sich sämtliche andere Wahrheitsfunktionen zurückführen lassen, gelten die folgenden Festsetzungen bzw. Regeln (Grundregeln der BOOLE*schen Algebra*):

$$\bar{\bar{x}} = x \quad (1)$$

$x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$ d. h., das Zeichen $\wedge$ kann weggelassen werden (2)

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 \quad (3) \qquad x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \quad (7)$$

$$x\bar{x} = \mathrm{O} \quad (4) \qquad x \vee \bar{x} = \mathrm{L} \quad (8)$$

$$x\mathrm{L} = x \quad (5) \qquad x \vee \mathrm{L} = \mathrm{L} \quad (9)$$

$$x\mathrm{O} = \mathrm{O} \quad (6) \qquad x \vee \mathrm{O} = x \quad (10)$$

$$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2)\, x_3 = x_1 x_2 x_3 \quad (11)$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \quad (12)$$

$$(x_1 \vee x_2)\, x_3 = (x_1 x_3) \vee (x_2 x_3) = x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \;{}^{*)} \quad (13)$$

$$x_1 x_2 \vee x_3 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) \quad (14)$$

$$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \quad (15) \qquad \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad (16)$$

Die Regeln gelten auch dann, wenn an Stelle einer Variablen x_i (überall dort, wo sie steht) ein beliebiger Term T gesetzt wird.

Beispiele. 1. Der Beweis der Regel (15) kann erbracht werden, indem beide Seiten als Wahrheitsfunktionen aufgefaßt, deren Wahrheitswertetabellen aufgestellt und auf Werteverlaufsgleichheit geprüft werden.

x_2	x_1	$x_1 x_2$	$y_1 = \overline{x_1 x_2}$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$y_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
O	O	O	L	L	L	L
O	L	O	L	L	O	L
L	O	O	L	O	L	L
L	L	L	O	O	O	O

Die Funktionswerte der 4. und 7. Spalte ergeben zeilenweise Übereinstimmung. Damit sind $y_1 = F_1(x_1; x_2)$ und $y_2 = F_2(x_1; x_2)$ werteverlaufsgleich und somit beide Seiten von (15) identisch.

2. Wird in (13) an die Stelle von x_3 der Term $T = \bar{x}_3 x_4$ gesetzt, so ergibt sich $(x_1 \vee x_2)\, T = x_1 T \vee x_2 T$ und damit $(x_1 \vee x_2)\, \bar{x}_3 x_4 = x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4$. Von rechts nach links gesehen kann die Analogie zum Ausklammern gleicher Faktoren aus algebraischen Summen erkannt werden.

*) Die Konjunktion hat Vorrang vor der Disjunktion analog zu: Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

3. Mengen

3.1. Mengen- und Elementbegriff

Die Gesamtheit einer Anzahl einzelner, wohlunterschiedener Objekte (Individuen) mit gemeinsamem Merkmal wird als *Menge* bezeichnet. Das gemeinsame Merkmal muß dabei so beschaffen sein, daß für jedes beliebige Objekt genau ausgesagt werden kann, ob es entweder zur Menge gehört oder aber nicht.
Zur Menge gehörige Objekte werden *Elemente* der Menge genannt. Als Zeichen für Mengen werden große, für Elemente kleine lateinische Buchstaben verwendet. Es bedeuten symbolisch

$a \in M$ bzw. $M \ni a$: a ist Element der Menge M, bzw. die Menge M enthält a als Element,

$a \notin M$ bzw. $M \not\ni a$: a ist nicht Element von M, bzw. M enthält a nicht als Element.

Die *Darstellung von Mengen* kann geschehen durch

a) die Aufzählung der Elemente selbst; in Zeichen

$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$, d. h., die Menge M besteht aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

b) die Angabe des mengenbildenden gemeinsamen Merkmals; in Zeichen

$M = \{x \mid A(x)\}$, d. h., M ist die Menge aller Elemente x, für welche die Aussage $A(x)$ gilt.

Nach der Anzahl der eine Menge enthaltenden Elemente unterscheidet man *unendliche* Mengen (Beispiel 1 und 4), *endliche* Mengen (Beispiel 2 und 3) und *leere* Mengen $M = \emptyset$, die kein Element enthalten (Beispiel 5).

Beispiele. 1. Menge N aller natürlichen Zahlen; symbolisch: $M = N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$ oder $M = \{x \mid x \in N\}$.
2. Menge R 5 der Vorzugszahlen von $1 \cdots 10$ lautet $R\,5 = \{1,\ 1{,}6,\ 2{,}5,\ 4,\ 6{,}3,\ 10\}$.
3. Menge aller in einem Kraftfahrzeug erforderlichen Getriebe.
4. Menge M aller Punkte innerhalb des Einheitskreises in Mittelpunktslage; symbolisch

$M = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 1,\ x \in P,\ y \in P\}$.

5. Menge E (Erfüllungsmenge) aller reellen Wurzeln der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist eine leere Menge, d. h. $E = \emptyset$.

3.2. Mengenrelationen und -eigenschaften

Zwischen zwei Mengen A und B können die im folgenden aufgeführten Relationen oder Beziehungen bestehen. Dabei lassen sich diese Relationen zweckmäßig durch *ebene Punktmengen* veranschaulichen.

1. *Gleichheit:* A und B sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, wenn also jedes Element a von A auch Element von B und umgekehrt jedes Element b von B auch Element von A ist; symbolisch:

$$A = B \quad \text{wenn} \quad a \in A \Rightarrow a \in B \quad \text{und} \quad b \in B \Rightarrow b \in A \tag{17}$$

2. *Enthaltensein:* Ist jedes Element a von A auch Element von B, so nennt man A *Untermenge* oder *Teilmenge* von B; symbolisch:

$$A \subseteqq B \quad \text{oder} \quad B \supseteqq A \tag{18}$$

Wird in (18) das Gleichheitszeichen weggelassen, so enthält B mindestens ein Element b, das nicht Element von A ist. A wird dann *echte Untermenge* von B genannt (schraffiert in Bild 8).

3. A und B sind *elementfremd* oder *zueinander disjunkt*, wenn sie kein Element gemeinsam enthalten (Bild 9), d. h.

wenn $a \in A \Rightarrow a \notin B$ und $b \in B \Rightarrow b \notin A$ (19)

4. In A und B existieren Elemente, die beiden Mengen angehören (Bild 10).
Hieraus ergeben sich folgende Eigenschaften:

$(A \subseteqq B) \wedge (B \subseteqq A) \Leftrightarrow A = B$ (20) $\quad A \subseteqq A \Leftrightarrow A = A$ (21)

$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (22) $\quad A = B \Leftrightarrow B = A$ (23)

$(A = B) \wedge (B = C) \Rightarrow A = C$ (24)

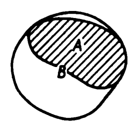


Bild 8. $A \subset B$

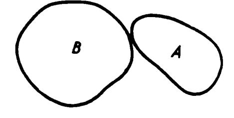


Bild 9. Disjunkte Menge

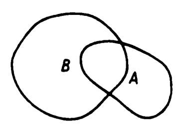


Bild 10. Menge mit gemeinsamen Elementen

Beispiele. 1. Aus $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{c, b, a, d\}$ folgt $A = B$; auf die Reihenfolge der Elemente kommt es nicht an.

2. $A = \{10^n \mid n \in N\} \subset N$, d. h., die Menge aller Zehnerpotenzen mit ganzzahligen positiven Exponenten ist echte Untermenge der natürlichen Zahlen.

3. Die in einer Baugruppe verwendete Menge S aller Schrauben ist Untermenge der Menge L aller lösbaren Verbindungselemente und diese wiederum Untermenge der Menge V aller Verbindungselemente, also $S \subseteqq L \subseteqq V$. Ist nach Stücklisten darüber hinaus bekannt, daß außer Schrauben auch mindestens ein Bolzen (lösbare Verbindung) und mindestens eine Preßverbindung (unlösbar) zum Einsatz kommt, so gilt schärfer: $S \subset L \subset V$.

3.3. Mengenoperationen

Die *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ der beiden Mengen A und B ist die Menge derjenigen Elemente, die wenigstens in einer der Mengen A oder B enthalten sind (schraffiert in Bild 11); symbolisch:

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \quad (25)$$

Für die Vereinigung $V = A \cup B \cup C$ der drei Mengen A, B und C gilt, daß V die Elemente enthält, die wenigstens in A oder in B oder in C enthalten sind. Analog erfolgt die Vereinigung von mehr als drei Mengen.

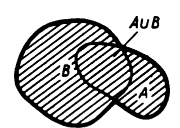


Bild 11, Vereinigungsmenge $A \cup B$

Die Reihenfolge der Vereinigung von Mengen ist gleichgültig. Es gilt:

$$A \cup B = B \cup A \quad (26)$$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (27)$$

Ferner ist $A \cup \emptyset = A$

Der *Durchschnitt* oder die *Durchschnittsmenge* $A \cap B$ der Mengen A und B enthält die Elemente von A und B, die sowohl Element von A als auch Element von B sind (schraffiert in Bild 12); symbolisch:

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \tag{28}$$

Analog enthält der Durchschnitt von n Mengen die Elemente, die allen n Mengen gemeinsam sind.
Für die Bildung der Durchschnittsmenge gilt wie bei der Vereinigung:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{29}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{30}$$

Sind A und B elementfremd, so wird $A \cap B = \emptyset$ (vgl. Bild 9).

Die *Differenz* $A \setminus B$ der Mengen A und B ist die Menge, die genau die Elemente von A enthält, die nicht in B enthalten sind (schraffiert in Bild 13). Daraus folgen:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \tag{31}$$

$$A \setminus B = A, \quad \text{falls} \quad A \cap B = \emptyset \tag{32}$$

Das *Mengenprodukt* $A \times B$ der beiden Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Elementpaare $(a; b)$, wobei $a \in A$ und $b \in B$. Bei den Paarbildungen stehen jeweils die Elemente von A an erster Stelle.

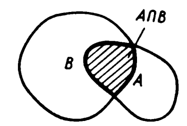


Bild 12. Durchschnittsmenge $A \cap B$

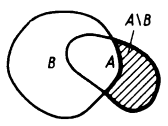


Bild 13. Differenzmenge $A \setminus B$

Beispiele. 1. $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{c, a, e\}$ ergeben vereinigt $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

2. Der Durchschnitt der Menge aller Rhomben und der Menge aller Rechtecke ist die Menge aller Quadrate, da das Quadrat sowohl die Eigenschaften des Rhombus als auch die des Rechtecks hat.

3. Mit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ und $C = \{5, 6\}$ soll (30) bestätigt werden.
$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3\}$.

4. Aus $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{d, e, n, a\}$ folgt $A \setminus B = \{b, c\}$.

5. Die Gitterpunkte im 1. Quadranten des rechtwinkligen Koordinatensystems bilden das Mengenprodukt $N \times N = \{(1; 1), (1; 2), \ldots, (2; 1), (2; 2), \ldots, (n; 1), (n; 2), \ldots\}$ der Menge der natürlichen Zahlen.

3.4. Abbildungen

Eine *Abbildung* F aus A in B ist eine Menge von Paaren $(a; b)$, die durch Zuordnung von Elementen $b \in B$ zu Elementen $a \in A$ in der Art gebildet wird, daß F Untermenge des Mengenprodukts von A und B ist:

$$F \subseteqq A \times B \tag{33}$$

Ist $a \in A$, $b \in B$ und $(a; b) \in F$, so werden a als *Urbild* und b als *Bild* der Abbildung bezeichnet. Sämtliche $a \in A$, denen mindestens je ein $b \in B$ zugeordnet ist, bilden die Urbildmenge oder den *Definitionsbereich* X und sämtliche $b \in B$, die Bild mindestens eines $a \in A$ sind, die Bildmenge oder den *Wertebereich* Y der Abbildung. Die *inverse Abbildung* oder Umkehrabbildung F^{-1} zu F ist die Menge aller der Paare $(b; a)$, die durch Vertauschung der Abbildungsrichtung aus den Paaren $(a; b) \in F$ entsteht. Daraus folgt:

$$(F^{-1})^{-1} = F \tag{34}$$

Je nach der Anzahl der an der Abbildung beteiligten Elemente von A und B und je nachdem, ob jedem Urbild nur ein Bild zugeordnet ist oder nicht, werden spezielle Arten von Abbildungen unterschieden.

Die wichtigsten sind:

1. die *eindeutige Abbildung aus A in B*, bei der jedem $a \in X \subseteqq A$ genau ein $b \in Y \subseteqq B$ zugeordnet ist, und
2. die *eineindeutige Abbildung von A auf B*, die eine eindeutige Abbildung ist, deren inverse Abbildung wiederum eindeutig ist.

Funktionen sind eindeutige Abbildungen (vgl. Funktionsbegriff Abschnitt 8.1.).
Von gleicher *Mächtigkeit* sind zwei Mengen, wenn sie sich eineindeutig aufeinander abbilden lassen und somit die gleiche Elementeanzahl besitzen.
Abzählbar unendlich werden solche unendliche Mengen genannt, die sich eineindeutig auf die natürlichen Zahlen abbilden lassen.

3.5. Punkt- und Zahlenmengen

Den reellen Zahlen lassen sich eindeutig Punkte der *Zahlengeraden* zuordnen. Dabei ist die Zahlengerade eine orientierte Gerade (die Pfeilspitze weist in die positive Richtung) mit gewählter Einsstrecke $\overline{OE}$ (Bild 14). Speziell werden dabei alle reellen Zahlen, die zwischen a und b liegen, als Strecke oder Intervall I auf der Zahlengeraden abgebildet.

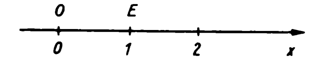


Bild 14. Zahlenstrahl

Analoge eineindeutige Abbildungen sind:

die Menge der Zahlenpaare $\{(x; y) \mid x \in P, y \in P\}$	$\leftrightarrow$	(ebene) Menge aller Punkte $P(x; y)$ einer durch das kartesische Koordinatensystem orientierten Ebene
und die Menge der Zahlentripel $\{(x; y; z) \mid x \in P, y \in P, z \in P\}$	$\leftrightarrow$	(räumliche) Menge aller Punkte $P(x; y; z)$ des durch das kartesische Koordinatensystem orientierten Raums

Tafel 2. Darstellungsmöglichkeiten der reellen Zahlen- bzw. Punktmengen als spezielle lineare Punktmengen

Intervallbezeichnung	Analytische Darstellung		Geometrische Darstellung
	in Kurzform	als Ungleichung	
I ist abgeschlossen, a und b gehören als Randpunkte zu I bzw. zur Menge	$x \in [a, b]$	$a \leqq x \leqq b$	a b x oder a b x
I ist offen und beschränkt, die Randpunkte a und b gehören nicht zur Menge	$x \in (a, b)$	$a < x < b$	a b x oder a b x
I ist linksseitig offen und unbeschränkt, rechtsseitig geschlossen	$x \in (-\infty, b]$	$-\infty < x \leqq b$	b x
I ist beiderseits offen und unbeschränkt	$x \in P$ oder $x \in (-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	0 x
I ist links offen und beschränkt, rechts abgeschlossen	$x \in (a, b]$	$a < x \leqq b$	a b x oder a b x

Beispiele. 1. $B = \{(x; y) \mid r < x^2 + y^2 \leqq R,\ 0 < r < R\}$ ist die ebene Menge aller Punkte zwischen den konzentrischen Kreisen mit den Radien R und r um den Ursprung einschließlich des äußeren (voll ausgezogenen) Rands (Bild 15).

2. $R = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z \leqq 4 \wedge z > 0\}$ ist die Menge aller Raumpunkte innerhalb und auf der Oberfläche des in Bild 16 dargestellten Rotationsparaboloids oberhalb der x,y-Ebene.

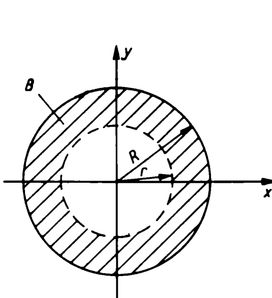


Bild 15. Ebene Punktmenge

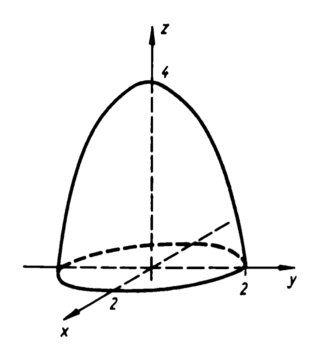


Bild 16. Räumliche Punktmenge

4. Zahlen und Grundgesetze der Arithmetik

4.1. Zahlenbereiche

Bereich der natürlichen Zahlen

Mit Hilfe der *natürlichen Zahlen* wird die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge angegeben (*Kardinalzahl*) oder eine endliche Menge der Reihe nach abgezählt bzw. durchnumeriert (*Ordnungszahl*). Da für die natürlichen Zahlen eine Reihenfolge festgelegt ist und keine größte natürliche Zahl angegeben werden kann, wird der Bereich der natürlichen Zahlen durch die geordnete unendliche Zahlenmenge $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dargestellt. Die grafische Darstellung der natürlichen Zahlen erfolgt auf der *Zahlengeraden*, indem man jedem $n \in N$ der Reihe nach Punkte in gleichen Abständen $\overline{OE}$, beginnend mit E, auf der Zahlengeraden zuordnet (vgl. Bild 14). Zahlenmengen, die sich eineindeutig auf die Menge N abbilden lassen, haben gleiche Mächtigkeit und werden *abzählbar* genannt. Im Bereich der natürlichen Zahlen sind nur die Addition und Multiplikation uneingeschränkt durchführbar.

Bereich der ganzen Zahlen

Der Bereich der *ganzen Zahlen* umfaßt die geordnete unendliche Menge $G = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, die sich als Vereinigungsmenge $G = N \cup \{0\} \cup \{-1, -2, \ldots\}$ der drei elementfremden Mengen N, der *Null**) und den *ganzen negativen Zahlen* ergibt. G ist abzählbar, also der Menge N

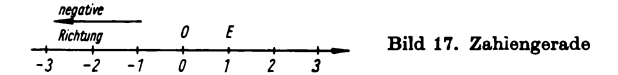


Bild 17. Zahlengerade

gleichmächtig. In der Darstellung auf der Zahlengeraden werden die natürlichen Zahlen durch die Abbildung der Null und der negativen ganzen Zahlen in die Punkte der Zahlengeraden erweitert, die der Reihe nach in der negativen Richtung in O beginnend jeweils um die Strecke $\overline{OE}$ folgen (vgl. Bild 17). Im Bereich der ganzen Zahlen sind Addition, Subtraktion und Multiplikation uneingeschränkt durchführbar.

*) Mitunter wird auch die Zahl Null der Menge der natürlichen Zahlen zugeordnet.



Körper der rationalen Zahlen

Die Menge R der *rationalen* (gebrochenen) *Zahlen* enthält alle *Brüche* a/b, die sich durch die ganzen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ darstellen lassen, d. h., $R = \{a/b \mid a \in G \wedge b \in G \setminus \{0\}\}$. Dabei repräsentiert die Menge aller Brüche, die sich durch Kürzen auf den gleichen teilerfremden Bruch zurückführen lassen, jeweils nur eine rationale Zahl. Die ganzen Zahlen sind als Teilmenge aller rationalen Zahlen mit dem Nenner $b = 1$ in R enthalten. Die rationalen Zahlen lassen sich ordnen und in Punkte der Zahlengeraden abbilden. Obwohl sie dort in sich dicht liegen, wird nicht jedem Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl zugeordnet. R ist abzählbar. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division außer durch Null sind innerhalb der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar. Zahlenmengen, die diese Eigenschaften besitzen, heißen *Zahlenkörper*.

Körper der reellen Zahlen

Die Menge P der *reellen Zahlen* ist die Vereinigungsmenge der rationalen Zahlen mit der Menge der nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche (Irrationalzahlen) als elementfremde Mengen. *Irrationalzahlen*, wie beispielsweise $\sqrt{2}$, π, $\sin 15°$, können daher in eine Rechnung nur mit einer bestimmten (aber beliebigen) Genauigkeit eingehen. Die reellen Zahlen lassen sich eineindeutig auf die Punkte der Zahlengeraden abbilden und haben daher mit der Menge aller Punkte der Geraden gleiche Mächtigkeit. Die Menge P ist nicht abzählbar und damit von größerer Mächtigkeit als die Menge N der natürlichen Zahlen. Die Menge P bildet den vollkommensten geordneten Zahlenkörper, in dem Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division außer durch Null uneingeschränkt ausführbar sind und der den *Ordnungsrelationen* „größer als" oder „kleiner als" genügt. In diesem Sinne kann P nicht durch weitere Zahlenmengen erweitert werden.
Da der Körper der reellen Zahlen eine geordnete Menge darstellt, muß für zwei reelle Zahlen a und b genau eine der folgenden drei Beziehungen gelten (*Ordnungsrelationen*):

Relation	Sprechweise	Grafisch auf der Zahlengeraden	
1. $a < b$	a kleiner als b	a liegt links von b	(vgl. Bild 17)
2. $a = b$	a gleich b	a fällt mit b zusammen	
3. $a > b$	a größer als b	a liegt rechts von b	

Zu jeder der drei Beziehungen gibt es jeweils eine Negation dieser Beziehungen, die aber offen läßt, welche der beiden anderen gültig ist:

Relation	Sprechweise	Bedeutung
1. $a \geqq b$	a größer oder gleich b	a ist nicht kleiner als b
2. $a \neq b$	a ungleich b	a ist nicht gleich b
3. $a \leqq b$	a kleiner oder gleich b	a ist nicht größer als b

Es gelten für die drei Anordnungen:

$$a = a$$

$$a = b \Leftrightarrow b = a$$

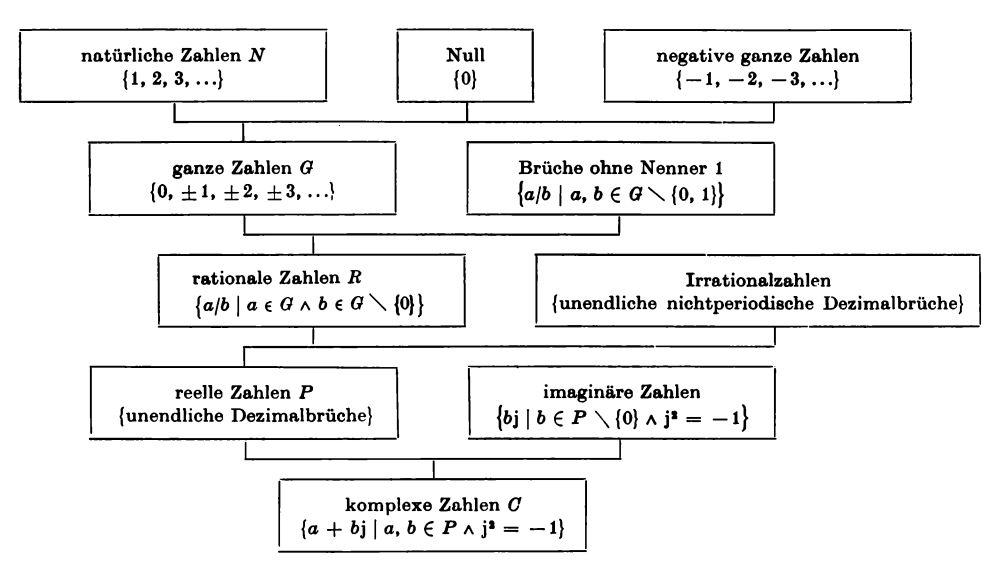
$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

$$\left.\begin{array}{l} a \leqq b \wedge b < c \\ a < b \wedge b \leqq c \end{array}\right\} \Rightarrow a < c$$

Körper der komplexen Zahlen

Die Menge C der *komplexen Zahlen* enthält alle aus der Vereinigungsmenge der reellen Zahlen und der *imaginären Einheit* j (mit $j^2 = -1$)*) bildbaren Zahlenpaare, die in der Form $a + bj$ ($a, b \in P \wedge j^2 = -1$) dargestellt werden können. Eine Ordnungsrelation im Sinne „kleiner als" oder „größer als" ist nicht mehr gegeben. Die vier arithmetischen Grundrechenarten außer der Division durch Null sind uneingeschränkt ausführbar, daher bildet C einen Körper. Die reellen Zahlen sind in ihm als Teilmenge enthalten, die nichtreellen Zahlen werden *imaginäre Zahlen* genannt. (Vgl. 4.6. Komplexe Zahlen und deren Rechengesetze.)

Die Zahlenbereiche mit ihren jeweiligen Erweiterungen lassen sich schematisch durch folgende Übersicht zusammenfassen:



4.2. Potenzen und Wurzeln reeller Zahlen

4.2.1. Definitionen

1. Unter der *Potenz* $a^n = b$ mit $a \neq 0 \wedge n \in N \setminus \{1\}$ versteht man das Produkt aus n gleichen Faktoren a; a ist die *Basis* und n der *Exponent* der Potenz.
   Aus Gründen der Zweckmäßigkeit wird der oben definierte Potenzbegriff durch die folgenden Definitionen erweitert:

2. $a^1 = a$ 3. $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$ 4. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \in N)$

5. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ($a \notin P^-, n \in N \setminus \{1\}$); $\sqrt[n]{a}$ wird n-te Wurzel aus a, $a \geqq 0$ *Radikand* und n *Wurzelexponent* genannt. Sie ist die nichtnegative Zahl b, deren n-te Potenz genau a ergibt, d. h., $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$ $(a, b \geqq 0)$. In der für $n = 2$ vorliegenden Quadratwurzel $\sqrt{a}$ schreibt man den Wurzelexponenten nicht.

6. $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

7. $a^r = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\{a_n\}}$, wobei $r \in P$, $a \in P^+$ und $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine konvergente Folge rationaler Zahlen mit dem reellen Grenzwert r ist.

*) Oft auch als i mit $i^2 = -1$ bezeichnet

4.2.2. Potenz- und Wurzelgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (35) \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (36)$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \quad (37) \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (38)$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (39) \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (40)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (41) \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (42)$$

Die Gleichungen (35) bis (42) gelten auch von rechts nach links.
Eine Zusammenfassung von Potenzen bzw. Wurzeln durch Addition und Subtraktion ist nur möglich, wenn Basis und Exponent bzw. Radikand und Wurzelexponent übereinstimmen. Im Falle $a^n - b^n$ gilt die Identität:

$$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (43)$$

mit dem Spezialfall:

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b) \quad (44)$$

Aus der Definition 1. und 4. folgt für negative Basen:

$$(-a)^{2n} = a^{2n} \quad \text{bzw.} \quad (-a)^{2n-1} = -a^{2n-1} \qquad (a \in P \wedge a > 0,\ n \in G) \quad (45)$$

Rationalmachen des Nenners

Bei der numerischen Berechnung von Brüchen, deren Nenner Wurzeln als Irrationalzahlen sind, ist es zweckmäßig, vor dem Rechnen den Nenner in eine Rationalzahl zu verwandeln. Dies erspart die ungünstige Division durch einen Dezimalbruch als Näherungswert einer Irrationalzahl. Die Irrationalität des Nenners wird durch entsprechendes Erweitern beseitigt (vgl. Beispiele 4 und 5).

Beispiele. 1. $\sqrt{0{,}0002} = \sqrt{2 \cdot 10^{-4}} = 10^{-2} \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}41 \cdot 10^{-2}$.

2. $0{,}25^3 \cdot 2^3 = (0{,}25 \cdot 2)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, d. h. Rechenvorteil durch Anwendung von (37).

3. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$ bzw. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = [(2^3)^{1/2}]^{1/3} = 2^{3 \cdot 1/2 \cdot 1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$ nach Anwendung von (42) bzw. Wurzeldefinition als Potenz und (41).

4. In $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ wurde der Nenner durch Erweitern mit $\sqrt{3}$ rational gemacht.

5. $\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{5 - 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{3}\,(5 + 3\sqrt{2})}{25 - 18} = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{6} \approx 8{,}7 + 7{,}4 = 16{,}1$ nach Rationalmachen des Nenners und Anwendung von (44) beim Erweitern.

4.2.3. Potenzen von Binomen (binomischer Lehrsatz)

Sind $a, b \in P$ und $n \in N$, so läßt sich $(a + b)^n$ in die Summe:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \quad (46)$$

entwickeln. Rechts stehen $(n + 1)$ Summanden, in deren Produkten die Exponenten von a mit n beginnend je um 1 nach rechts abnehmen, die von b umgekehrt mit 0 beginnend je um 1 zunehmen und die als EULERsche *Symbole* geschriebenen *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$*), die aus den folgenden Definitionen heraus berechnet werden können:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (n \in P, k \in N) \qquad (47)$$

$$k!\,^{**)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)\,k \qquad (48)$$

$$0! = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

Ferner gelten:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (49)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (50)$$

Schreibt man für $n = 0, 1, 2, \dots$ die Binomialkoeffizienten zeilenweise auf, so erhält man das unten dargestellte PASCALsche *Zahlendreieck*. In der rechts stehenden ausgerechneten Form läßt sich die Symmetrie der Zahlen zur Mittelsenkrechten der Zeilen und wegen (49) die Darstellung einer Zahl als Summe der links und rechts darüber stehenden erkennen. Damit kann das rechts stehende Zahlendreieck auch ohne (47) und (48) formal entwickelt werden.

$n = 0$:	$\binom{0}{0}$	1
$n = 1$:	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1
$n = 2$:	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1
$n = 3$:	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n = 4$:	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

Die wichtigsten Spezialfälle für $n = 2$, $n = 3$, $a, b > 0$ sind:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Beispiele. 1. $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ und $\binom{-6}{3} = \frac{(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -56$ nach (47).
2. $(1 - x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ nach (46).

4.3. Logarithmen reeller Zahlen

4.3.1. Definitionen und Gesetze

Vorausgesetzt, $a > 1$ und b sind positive reelle Zahlen, so gibt es genau eine Zahl $n = \log_a b$, *Logarithmus b* zur Basis a genannt, die als Exponent zur Basis a genau b ergibt:

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b \qquad (a > 1,\ b > 0)\ ^{***)}$$

*) Sprechweise: n über k
**) Sprechweise: k Fakultät
***) Die Gleichung gilt auch für $0 < a < 1$; diese Basen werden aber praktisch nicht benutzt.

a wird *Logarithmenbasis* und *b* *Numerus* des Logarithmus genannt. Aus der Definition folgt: Das Logarithmieren ist eine Umkehrung des Potenzierens, und Logarithmieren und Potenzieren zur gleichen Basis heben sich auf:

$$a^{\log_a b} = \log_a (a^b) = b$$

Weitere Folgerungen ($a > 1$):

$$\log_a b = 1, \quad \text{wenn} \quad b = a \quad \text{(Basis gleich Numerus)} \tag{51}$$

$$\log_a b > 0, \quad \text{wenn} \quad b > 1 \tag{52}$$

$$\log_a b = 0, \quad \text{wenn} \quad b = 1 \tag{53}$$

$$\log_a b < 0, \quad \text{wenn} \quad 0 < b < 1 \tag{54}$$

Auf Grund dieser Beziehungen kann jeweils durch Logarithmieren eine Rechenoperation 2. Stufe (Multiplikation oder Division) mit reellen Zahlen bzw. eine Rechenoperation 3. Stufe (Potenzieren oder Radizieren) auf eine Operation 1. Stufe (Addition oder Subtraktion) bzw. Operation 2. Stufe zurückgeführt werden.

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \tag{55}$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v \tag{56}$$

$$\log_a u^m = m \log_a u \tag{57}$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u \quad (n \in N) \tag{58}$$

4.3.2. Logarithmensysteme

Sämtliche Logarithmen ($0 < b < \infty$) zu einer bestimmten Basis $a > 1$ werden als ein *Logarithmensystem* bezeichnet. Zwei Logarithmensysteme mit den Basen *a* und *c* sind durch die Beziehung:

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b \tag{59}$$

verknüpft. Für $b = a$ folgt speziell:

$$\log_a c \cdot \log_c a = 1 \tag{60}$$

Mit (59) können die Logarithmen eines Systems zur Basis *c* aus den bekannten Logarithmen eines anderen Systems (zur Basis *a*) berechnet werden. Als Ausgangssystem werden die natürlichen Logarithmen mit der Basis $a = \mathrm{e}$ (vgl. Tab. 5) verwendet*). Der sich aus (59) ergebende Umrechnungsfaktor $M_c = \log_c \mathrm{e}$ wird *Modul* des Systems *c* genannt, so daß für eine Umrechnung (59) unter Verwendung von (60) übergeht in:

$$\log_c b = M_c \cdot \ln b = \ln b / \ln c \tag{61}$$

Zum numerischen Rechnen (außer Addition und Subtraktion) sind am besten die *dekadischen Logarithmen* geeignet, da deren Logarithmen von Zehnerpotenzen ganze Zahlen sind und sich jede Zahl *b* durch Abspaltung einer Zehnerpotenz 10^n in $b = 10^n \cdot b'$ mit $1 \leqq b' < 10$ zerlegen läßt. Infolge (55) wird $\lg b = n + \lg b'$, wobei *n* als *Kennziffer* und die hinter dem

*) Diese Logarithmen lassen sich aus einer Reihenentwicklung heraus berechnen (vgl. 9.4.).

Tabelle 5. In der Praxis gebräuchliche Logarithmensysteme

Bezeichnung des Systems	Basis	Schreibweise	Modul M_c
Natürliche oder NAPIERsche Logarithmen	$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828$	$\ln b$	$M_e = \frac{1}{\ln e} = 1$
Dekadische oder BRIGGSsche Logarithmen	10	$\lg b$	$M_{10} = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429$
Dyadische Logarithmen	2	$\mathrm{ld}\, b$	$M_2 = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443$

Komma erscheinenden Stellen von $\lg b'$ in der Dezimalbruchschreibweise als *Mantisse* bezeichnet werden. Die Tabellen der dekadischen Logarithmen enthalten nur die Mantissen.

Beispiele. 1. $\mathrm{ld}\, 32 = 5$, da $2^5 = 32$

2. Aus $x = a^2 \cdot \sqrt[3]{b}/c$ folgt wegen (55)···(57) $\lg x = 2 \lg a + 1/3 \lg b - \lg c$ nach Logarithmieren beider Seiten zur Basis 10.

3. Es soll $\ln 0{,}5 = x$ ermittelt werden! Lösungsmöglichkeiten:

3.1. Direktes Aufsuchen von $\ln 0{,}5 = -0{,}693$ aus einer Logarithmentabelle.

3.2. $x = \ln 0{,}5 \Leftrightarrow e^x = 0{,}5$. Der Wert 0,5 der Skale eines Rechenstabs mit Exponentialskalen führt zu $-x \approx 0{,}693$ auf der Grundskale.

3.3. Nach (56) wird $x = \ln 1/2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ und mit Hilfe einer Logarithmentabelle $\ln 0{,}5 = -\ln 2 \approx -0{,}693$.

3.4. Nach (61) wird $x = \lg 0{,}5/M_{10}$, und mit Hilfe einer Tabelle dekadischer Logarithmen (oder eines Rechenstabs mit Logarithmenskale L) unter Berücksichtigung der Kennziffer $n = \lg 10^{-1} = -1$ erhält man $x \approx (0{,}699 - 1)/0{,}434 = -0{,}693$.

4. $x = 9{,}805^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}2704}/0{,}7641$ soll mit Logarithmen berechnet werden!

Nach der Logarithmierung beider Seiten und der Anwendung der Logarithmengesetze (vgl. Beispiel 2) ist es zweckmäßig, ein Rechenschema aufzustellen. Die linke Spalte enthält die Numeri, die rechte die Logarithmen.
In der 5. Zeile rechts steht die Summe der 3. und 4. Zeile, die wiederum aus der 1. durch Multiplikation mit 2 bzw. aus der 2. durch Division durch 3 hervorgingen. Der Logarithmus der letzten Zeile (entstanden aus 5. Zeile minus 6. Zeile) ist gleich $\lg x$. Zuletzt muß mit der Tabelle zum Numerus übergegangen werden, wobei die Kommastellung im Ergebnis aus der Kennziffer 1 folgt. (In der 2. Zeile wurde die Kennziffer $0 - 1$ äquivalent durch $2 - 3$ ersetzt, damit die Division durch 3 eine ganzzahlige Kennziffer liefert.)

num	lg	
9,805	0,99145	· 2
0,2704	2,43201 − 3	: 3
$9{,}805^2$	1,98290	
$\sqrt[3]{0{,}2704}$	0,81067 − 1	+
Zähler	1,79357	
0,7641	0,88315 − 1	−
81,36 = x	1,91042	



4.4. Absolute Beträge reeller Zahlen

Der *absolute Betrag* $|a|$ *) einer Zahl a ist diejenige der beiden Zahlen a und $-a$, die nicht negativ ist, also:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geqq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases} \tag{62}$$

Folgerungen aus (62): $|a| \geqq 0$, $\pm a \leqq |a|$ und $|-a| = |a|$

$$|a + b| = \begin{cases} a + b, & \text{wenn } a + b \geqq 0 \\ -(a + b), & \text{wenn } a + b < 0 \end{cases} \tag{63}$$

$$|a - b| = |b - a| \tag{64}$$

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{65}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{und speziell} \quad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \tag{66}$$

4.5. Kombinatorik

Die *Kombinatorik* untersucht die Gesetze möglicher Anordnungen und Zusammenstellungen von Dingen oder Elementen einer endlichen Menge. Im wesentlichen ist zu unterscheiden zwischen *Permutationen,* in denen nur die Reihenfolge der n Elemente berücksichtigt wird, *Kombinationen,* in denen nur die Auswahl zu je k aus n Elementen entscheidend ist, und *Variationen,* in denen sowohl die Auswahl zu je k und deren Anordnung von Bedeutung ist. Darüber hinaus ist in allen drei Varianten zu unterscheiden, ob sich Elemente in den Zusammenstellungen wiederholen dürfen oder aber nicht.

Jede Anordnung von n Elementen in einer beliebigen Reihenfolge nennt man eine *Permutation* P_n von n Elementen. Zwei Permutationen sind daher nur gleich, wenn die Reihenfolge der Elemente in beiden Anordnungen übereinstimmt.

Wenn die n Elemente nicht sämtlich voneinander verschieden sind, sondern jeweils $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ Elemente von k Arten innerhalb ihrer Art übereinstimmen, so liegt bei beliebiger Anordnung eine Permutation mit Wiederholung vor.

Eine Zusammenstellung von n verschiedenen Elementen zu je k Elementen ($k \leqq n$) ohne Berücksichtigung der Anordnung nennt man eine *Kombination* $C_n^{(k)}$ von n Elementen zur k-ten Ordnung.

Eine Zusammenstellung von n verschiedenen Elementen zu je k Elementen ($k \leqq n$) unter Berücksichtigung der Reihenfolge ihrer Anordnung nennt man eine *Variation* $V_n^{(k)}$ von n Elementen zur k-ten Ordnung.

Die Anzahl der möglichen Anordnungen bzw. Zusammenstellungen geht aus Tabelle 6 hervor.

Tabelle 6. Gleichungen zur Kombinatorik

	ohne Wiederholungen	mit Wiederholungen
Permutationen	$P_n = n!$	$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$
Kombinationen	$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	$C_{wn}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k} \quad (n \geqq k)$
Variationen	$V_n^{(k)} = \binom{n}{k} k!$	$V_{wn}^{(k)} = n^k \quad (n \geqq k)$

*) Sprechweise: a absolut

Beispiele. 1. Die Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, d. h. $n = 3$: 1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1; das sind $6 = 3!$ Anordnungen; vgl. Tabelle 6.
2. Die Anzahl der Permutationen der Elemente, A, A, A, B, B, C wird nach Tabelle 6:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60.$$

3. Die Zahl der Möglichkeiten, die Zahlen 1 bis 90 zu je 5 Zahlen ohne Berücksichtigung der Anordnung zu kombinieren (Zahlenlotto), ist nach Tabelle 6:

$$C_{90}^{(5)} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268$$

4. Zur Kennzeichnung äußerlich gleicher, aber den Materialeigenschaften nach unterschiedlicher Werkstoffproben soll jede Probe 2 Farbstriche erhalten, wobei zur Vermeidung von Verwechslungen die Reihenfolge der Anordnung gleichgültig ist, aber einfarbige Markierungen (zwei Striche gleicher Farbe) zugelassen sind. Wieviel unterschiedliche Proben lassen sich bei Verwendung von 5 Farben S, W, R, B und G kennzeichnen?
Nach Tabelle 6 lassen sich $C_{W5}^{(2)} = \binom{6}{2} = 15$ Proben kennzeichnen (vgl. Schema).

SS	SW	SR	SB	SG
	WW	WR	WB	WG
		RR	RB	RG
			BB	BG
				GG

5. Wird im 4. Beispiel als weiteres Unterscheidungskriterium noch die Reihenfolge der Farbstrichgebung herangezogen, so lassen sich nach Tabelle 6 $V_{W5}^{(2)} = 5^2 = 25$ verschiedene Proben kennzeichnen.

4.6. Komplexe Zahlen und deren Rechengesetze

4.6.1. Definitionen und Darstellung

Die *imaginäre Einheit* j ist eine komplexe Zahl, deren Quadrat -1 ist*):

$$j^2 = -1 \tag{67}$$

Unter Verwendung von j ist jede *komplexe Zahl* z als Summe einer reellen Zahl a und einer *imaginären Zahl* bj ($b \in P$) darstellbar. Die Menge C der komplexen Zahlen enthält alle geordneten Zahlenpaare $z = (a; b)$ mit $z \in C$ und $a, b \in P$. Die Menge P der reellen Zahlen ist Untermenge der komplexen Zahlen, d. h. $P \subset C$.
Für die komplexen Zahlen gelten nicht die in 4.1. dargestellten Ordnungsrelationen im Sinne „kleiner als" und „größer als" und die daraus folgenden Ungleichungen. An deren Stelle treten für zwei komplexe Zahlen $z_1 = (a_1; b_1)$ und $z_2 = (a_2; b_2)$:

entweder $z_1 = z_2$ oder $z_1 \neq z_2$ $(z_1, z_2 \in C \setminus P)$

und $z_1 = z_2$, wenn genau $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

Analytische Darstellungen einer komplexen Zahl z:

1. als geordnetes Zahlenpaar $z = (a, b)$ mit $z \in C, \quad a, b \in P$ (68)
2. in arithmetischer Form $z = a + b$j (69)
3. in goniometrischer Form $z = r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi)$ (70)
4. in der Exponentialform $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ (71)

Dabei bedeuten: Realteil von z: $\mathrm{Re}\,(z) = a \quad (a \in P)$
Imaginärteil von z: $\mathrm{Im}\,(z) = b \quad (b \in P)$
Absoluter Betrag**) von z: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (r \geqq 0)$

*) Sehr oft wird die imaginäre Einheit auch mit i bezeichnet: $i^2 = -1$.
**) geometrisch als Abstand vom Nullpunkt in Übereinstimmung mit 4.4., dessen Gesetze auch für $|z|$ $(z \in C)$ gültig sind



Argument von z: $\varphi = \operatorname{arc} z$ *), das nur bis auf ein additives ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt ist. Man definiert zweckmäßig als Hauptwert des Arguments von z: $\operatorname{arc} z = \varphi$ mit $-\pi < \varphi \leqq \pi$, so daß eindeutig

$$\operatorname{arc} z = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad a > 0, \quad b = 0 \\ \pi & \text{wenn} \quad a < 0, \quad b = 0 \\ \operatorname{arccot} \dfrac{a}{b} & \text{wenn} \quad a \in P, \quad b > 0 \\ \operatorname{arccot} \dfrac{a}{b} - \pi & \text{wenn} \quad a \in P, \quad b < 0 \end{cases}$$

und arc z beliebig, wenn $a = b = 0$.
Die *konjugiert komplexe Zahl* z^* zu z unterscheidet sich von z lediglich im Vorzeichen des Imaginärteils, d. h.:

$$\operatorname{Re} z^* = \operatorname{Re} z \wedge \operatorname{Im} z^* = -\operatorname{Im} z \tag{72}$$

Aus (70) und (71) ergibt sich die Eulersche *Formel*:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \tag{73}$$

Die grafische Darstellung einer komplexen Zahl kann durch eineindeutige Abbildung auf einen Punkt der komplexen oder Gaussschen *Zahlenebene* erfolgen. Die gebräuchlichsten Formen sind (Bild 18):

1. Darstellung in kartesischen Koordinaten als Punkt mit Abszisse a und Ordinate b. Die reellen Zahlen entsprechen Punkten der reellen, die imaginären Punkten der imaginären Achse.
2. Darstellung in Polarkoordinaten als Punkt mit dem absoluten Betrag r als Abstand vom Nullpunkt und dem Argument $\varphi = \operatorname{arc} z$ als Richtungswinkel von der reellen Achse aus.
3. Darstellung als Pfeil oder Zeiger vom Nullpunkt aus nach dem Punkt mit $(a; b)$ bzw. $(r; \varphi)$ als Koordinaten der komplexen Zahlenebene.

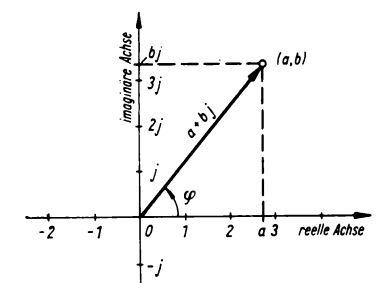


Bild 18. Gausssche Zahlenebene

4.6.2. Grundrechenarten

Mit $z_1 = a_1 + b_1 j = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$

und $z_2 = a_2 + b_2 j = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$

folgen:

$$z = z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\,j \tag{74}$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,j \tag{75}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,j \qquad (z_2 \neq 0) \tag{76}$$

*) Üblich ist auch die Schreibweise arg z.

Die grafische Addition und Subtraktion stimmen mit der geometrischen Vektoraddition (Parallelogrammsatz) überein (Bild 19). Die grafische Multiplikation und Division liefern z aus z_1 und z_2 nach Ausführung einer Drehstreckung, die sich aus der goniometrischen Darstellung des Produkts und Quotienten:

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{77}$$

$$z = z_1/z_2 = r_1/r_2[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \qquad (z_2 \neq 0) \tag{78}$$

ergibt. Die Konstruktion des Produkts geht aus Bild 20 und die des Quotienten aus Bild 21 hervor.

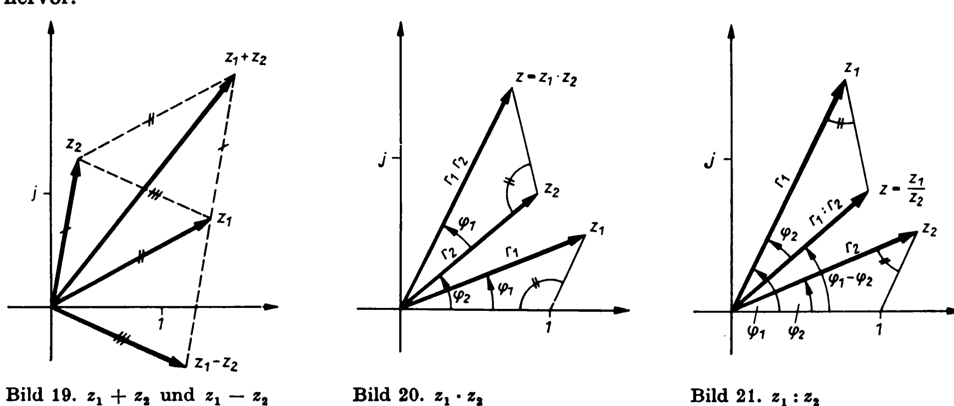


Bild 19. $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$ Bild 20. $z_1 \cdot z_2$ Bild 21. $z_1 : z_2$

4.6.3. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen komplexer Zahlen

Für die Potenzen von j ergibt sich bei ganzzahligen Exponenten n die Periodizität:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}^{4n+1} &= \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^{4n+2} &= -1 \\ \mathrm{j}^{4n+3} &= -\mathrm{j} \\ \mathrm{j}^{4n+4} &= 1 \end{aligned}\right\} n \in G \text{ und speziell für } n = 0 \left\{\begin{aligned} \mathrm{j}^1 &= \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 &= -1 \\ \mathrm{j}^3 &= -\mathrm{j} \\ \mathrm{j}^4 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Eine beliebige komplexe Zahl mit n potenziert ($n \in G$) ergibt in der goniometrischen Form bzw. Exponentialform:

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + \mathrm{j}\sin(n\varphi)] = r^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{79}$$

Sind die Exponenten nicht ganzzahlig ($n \in P \setminus G$), so ist die Potenz z^n nicht mehr eindeutig. Ist $n \in G$, so gelten die Potenzgesetze (35) bis (42) aus 4.2.2. auch für komplexe Basen.
Die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z \neq 0$ besitzt die n Werte:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{80}$$

mit $z \in C \setminus \{0\}$, $n \in N$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.
In der komplexen Zahlenebene liegen die z_k auf dem Kreis aller $|z| = \sqrt[n]{r}$ und bilden ein regelmäßiges, diesem Kreis einbeschriebenes n-Eck. Ist $r = 1$, nennt man z_k die n-ten *Einheitswurzeln.*
Der natürliche Logarithmus der komplexen Zahl $z \neq 0$ ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathrm{j}$ bestimmt:

$$\ln z = \ln r + \mathrm{j}\varphi + 2k\pi\mathrm{j} \qquad (k \in G, z \in C \setminus \{0\}) \tag{81}$$

Der Wert von $\ln z$ für $k = 0$ wird als *Hauptwert* bezeichnet.

5. Determinanten und Matrizen

5.1. Determinanten

Eine *n-reihige Determinante* ist eine quadratische Anordnung

$$D = \det(a_{ik}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{82}$$

von n^2 Termen (den *Elementen*) mit n *Zeilen* und n *Spalten,* deren Wert sich nach (84) oder (85) ergibt.

Von den Doppelindizes der Elemente in (82) gibt der erste die Zeile und der zweite die Spalte an. Zeile und Spalte werden unter dem Oberbegriff *Reihe* zusammengefaßt. Elemente der *Hauptdiagonalen* sind die a_{ii} ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) von links oben nach rechts unten.

Die $(n-1)$-reihige *Unterdeterminante* D_{ik} von D entsteht durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte in D.

Adjunkte A_{ik} zu a_{ik} ist die nach (83) mit Vorzeichen versehene Unterdeterminante:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} \tag{83}$$

Der Wert von (82) ist definiert durch:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{für beliebiges } k \tag{84}$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{für beliebiges } i \tag{85}$$

Speziell ergibt sich für

$n = 1$: $\quad D = |a_{11}| = a_{11}$

$n = 2$: $\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$

wenn D nach den Elementen der 1. Zeile [vgl. (85)] entwickelt wird.

Determinantengesetze:

1. Der *Wert* einer Determinante ändert sich nicht, wenn alle Elemente an der Hauptdiagonalen gespiegelt werden, d. h. die Zeilen mit den gleichstelligen Spalten vertauscht werden.
2. Eine Determinante ändert ihr *Vorzeichen,* wenn zwei parallele Reihen vertauscht werden.
3. Der *Wert* einer Determinante ist Null (verschwindet), wenn die Elemente einer Reihe
   a) Null,
   b) den Elementen einer Parallelreihe proportional oder
   c) Linearkombinationen der Elemente paralleler Reihen sind.
4. Die *Summe* zweier Determinanten, die sich nur in einer Reihe voneinander unterscheiden, ergibt eine Determinante, in der die Elemente der unterschiedlichen Reihen addiert und die übrigen gleichen Elemente beibehalten werden.
5. Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert, indem jedes Element nur einer Reihe mit dieser Zahl multipliziert wird. Als Umkehrung kann ein allen Elementen einer Reihe gemeinsamer Faktor vor die Determinante gezogen werden.
6. Sind sämtliche Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen Null, ergibt sich der Wert der Determinante als Produkt aller in der Hauptdiagonalen stehenden Elemente.

Es ist nicht zweckmäßig, den Wert einer mehrreihigen Determinante sofort nach (84) oder (85) zu bestimmen. Günstiger ist es, vor der Entwicklung nach den Elementen einer Reihe, mit Hilfe der Determinantengesetze so umzuformen, daß alle Glieder der betreffenden Reihe bis auf eines verschwinden. Auf diese Weise wird dann eine n-reihige Determinante auf nur eine $(n-1)$-reihige Unterdeterminante und diese wiederum auf nur eine $(n-2)$-reihige usw. reduziert. Eine weitere Möglichkeit bietet die Anwendung des Gaussschen *Algorithmus* (vgl. Beispiel).

Beispiel. Berechnung der vierreihigen Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

1. D wird nach Subtraktion der 2fachen 4. Spalte von der 3. Spalte auf eine dreireihige Determinante zurückgeführt, die sich wiederum sofort nach dem 2. Glied der 2. Zeile entwickeln läßt:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (7 + 4) = 22$$

2. Mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus (vgl. 6.4.2 4.) wird D so umgeformt, daß unter der Hauptdiagonalen nur Nullen auftreten und das 6. Determinantengesetz angewendet werden kann. Es ergibt sich schrittweise:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5{,}5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 5{,}5 = 22$$

5.2. Matrizen

5.2.1. Definitionen

Das aus $n \cdot m$ Elementen bestehende rechteckige Schema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{86}$$

wird *Matrix* vom Typ (m, n) genannt und kurz auch dargestellt durch:

$$A_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, n)$$

Spezielle Matrizen

Einreihige Matrizen werden *Vektoren* genannt, und zwar

Zeilenvektoren für $m = 1$ und *Spaltenvektoren* für $n = 1$

Nullmatrix: $a_{ik} = 0$ für alle i und k
Quadratische Matrix: $m = n$
Diagonalmatrix: $m = n \wedge a_{ik} = 0$ für $i \neq k \wedge a_{ii} \neq 0$
Einheitsmatrix E*:* Diagonalmatrix mit allen $a_{ii} = 1$

Symmetrische Matrix: $m = n \wedge a_{ik} = a_{ki}$
Schiefsymmetrische oder *antimetrische Matrix:* $m = n \wedge a_{ik} = -a_{ki}$
Transponierte Matrix $\boldsymbol{A}'$ zur Matrix $\boldsymbol{A}$: wenn $\boldsymbol{A} = (a_{ik})_{(m,n)}$,
dann ist $\boldsymbol{A}' = (a_{ik})_{(n,m)}$,
d. h., die Spalten werden mit den Zeilen vertauscht.

Gleichheit von Matrizen: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, falls beide Matrizen vom gleichen Typ sind und elementweise übereinstimmen:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \quad \text{sofern} \quad a_{ik} = b_{ik} \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Ferner gelten die Eigenschaften:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$$

5.2.2. Matrizenoperationen

Addition und Subtraktion: Die Summe (Differenz) zweier Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ist nur definiert, wenn beide Matrizen vom gleichen Typ (m, n) sind, und ergibt eine Matrix $\boldsymbol{C}$ vom Typ (m, n), deren Elemente c_{ik} die Summe (Differenz) $a_{ik} \pm b_{ik}$ der einander entsprechenden Elemente von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (a_{ik} \pm b_{ik})_{(m,n)} \tag{87}$$

Es gelten:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$$

Multiplikation mit einem Skalar λ: Eine Matrix wird mit einer Zahl λ multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit λ multipliziert wird:

$$\lambda \boldsymbol{A} = \lambda(a_{ik}) = (\lambda a_{ik}) \tag{88}$$

Umgekehrt kann auch ein jedem Element gemeinsamer Faktor vor die Matrix gezogen werden. Es gelten:

$$\lambda \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda, \quad \lambda(\mu \boldsymbol{A}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{A}, \quad \lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B} \quad \text{und}$$

$$(\lambda \pm \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} \pm \mu\boldsymbol{A} \tag{89}$$

Multiplikation von Matrizen: Das Produkt $\boldsymbol{AB}$ zweier Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ist nur dann definiert, wenn die Spaltenanzahl des ersten Faktors $\boldsymbol{A}$ gleich der Zeilenanzahl des zweiten Faktors $\boldsymbol{B}$ ist. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden dann *verkettbar* genannt. Ist $\boldsymbol{A}$ vom Typ (m, n) und $\boldsymbol{B}$ vom Typ (n, p), so ist das Produkt $\boldsymbol{AB}$ eine Matrix $\boldsymbol{C}$ vom Typ (m, p), deren Elemente c_{ik} sich jeweils aus dem *Skalarprodukt* der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ mit der k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$ ergeben:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \tag{90}$$

Im allgemeinen ist das Matrizenprodukt nicht kommutativ, also:

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

Analog ist das Produkt von mehr als zwei Matrizen nur definiert, wenn sämtliche Faktoren verkettbar sind, also die Spaltenanzahl eines Faktors mit der Zeilenanzahl des nachfolgenden Faktors übereinstimmt:

$$\boldsymbol{ABC} = (a_{ik})_{(m,n)}\,(b_{ik})_{(n,l)}\,(c_{ik})_{(l,p)} = (d_{ik})_{(m,p)} = \boldsymbol{D} \tag{91}$$

Es gelten (Verkettbarkeit vorausgesetzt):

$$(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{ABC} \tag{92}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} \tag{93}$$

Es ist zweckmäßig, Matrizenprodukte nach dem FALK*schen Schema* auszurechnen, da dieses den Vorteil einer übersichtlichen Anordnung mit dem der Möglichkeit einer Rechenkontrolle kombiniert. Im Bild 22 ist das Schema allgemein und daneben in Bild 23 am Zahlenbeispiel für das Produkt $\boldsymbol{AB}$ mit den Matrizen $\boldsymbol{A}$ vom Typ (4,3) und $\boldsymbol{B}$ vom Typ (3,2) dargestellt. Die Rechenkontrolle wird hierbei über den Spaltensummenvektor $\boldsymbol{s}_A$ von A durchgeführt.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 57 & 47 \\ -19 & -21 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

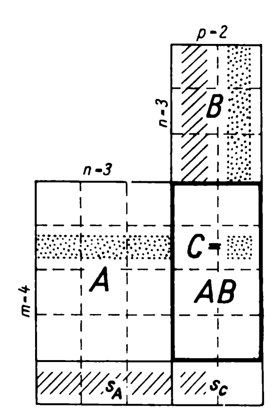


Bild 22. FALKsches Schema

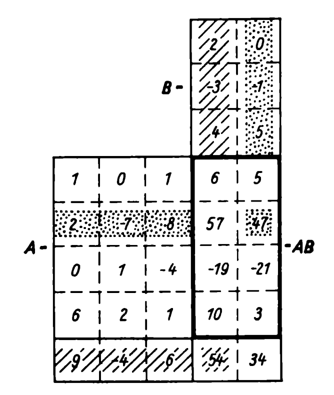


Bild 23. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

Das Element c_{ik} von $\boldsymbol{C}$ steht dabei im Schnittpunkt der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ und k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$, deren Skalarprodukt zu bilden ist (Rasterfelder). In Bild 23 folgt $c_{22} = 47$ aus

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 7 + 5 \cdot 8$$

Die Summe der Spalten von $\boldsymbol{A}$ liefert $\boldsymbol{s}_A = (9\ -4\ 6)$ und die von $\boldsymbol{C}$ $\boldsymbol{s}_C = (54\ 34)$. Zur Kontrolle muß das Skalarprodukt von $\boldsymbol{s}_A$ und einem Spaltenvektor von $\boldsymbol{B}$ mit dem im Schnittpunkt stehenden Element von $\boldsymbol{s}_C$ übereinstimmen (schraffierte Felder).

Für das Produkt von mehr als zwei Matrizen kann das FALKsche Schema — wie in folgenden Anordnungen für $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{D}$ dargestellt ist — entweder von links oder von rechts beginnend in der Reihenfolge $\boldsymbol{AB}$, $(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C}$ nebeneinander oder $\boldsymbol{BC}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ untereinander aufgestellt

werden. Die Rechenkontrolle erfolgt nach der

Spaltensummenprobe

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{AB}$	$\boldsymbol{ABC}$
$\boldsymbol{s_A}$	$\boldsymbol{s_{AB}}$	$\boldsymbol{s_{ABC}}$

Zeilensummenkontrolle

	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{z_C}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{BC}$	$\boldsymbol{z_{BC}}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{ABC}$	$\boldsymbol{z_{ABC}}$

Inverse Matrix: Ist $\boldsymbol{A} = (a_{ik})_{(m,m)}$ eine quadratische Matrix und regulär, d. h., $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, so ist die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ diejenige Matrix, für die $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ ist. Es gilt:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\alpha_{ik})_{(m,m)} \quad \text{mit} \quad \alpha_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det \boldsymbol{A}} \tag{94}$$

wobei A_{ki} die Adjunkte zum Element a_{ki} von $\det \boldsymbol{A}$ ist. Statt nach (94) ist es zweckmäßiger, die Elemente von $\boldsymbol{A}^{-1}$ durch Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ zu ermitteln. Aus der Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ läßt sich dann $\boldsymbol{A}^{-1}$ ablesen (vgl. Austauschverfahren in 6.4.2.3.).

Beispiele.

1. $$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -7 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 & -9 & 0 \\ -6 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 10 \\ -6 & 4 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Ist gegeben**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 10 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$ so ergeben sich die Matrizenprodukte

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -9 & 30 & -22 \\ 38 & 16 & -8 \\ -1 & 17 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -5 & 28 & -11 \\ 52 & 4 & -10 \\ 26 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

3. Mit Hilfe des FALKschen Schemas ergibt sich aus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

das Matrizenprodukt $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{ABCD}$ zu

							1	−1	0				
			3	−2	0	2	3	2	−1	2	−1	1	
			−3	2	−1	0	1	0	0	3	2	1	
			6	4	1	1	0	2	0	0	1	5	
6	2	−4	−12	−24	−6	8	−90	−20	24	−240	74	10	
9	3	6	54	12	3	24	93	18	−12	240	−69	51	$= \boldsymbol{P}$
15	5	2	42	−12	−3	32	3	−2	12	0	5	61	

Das Anordnungsschema wurde nebeneinander aufgebaut und mit der Spaltensummenprobe kontrolliert.

5.2.3. Rang einer Matrix

Unter dem *Rang* $r \leqq$ Min. (m, n)*) einer Matrix A vom Typ (m, n) versteht man die maximale Reihenzahl einer ihrer nicht verschwindenden Unterdeterminanten.
Um zu vermeiden, daß u. U. bei einer Rangbestimmung eine große Anzahl von Unterdeterminanten berechnet werden muß, wendet man die folgenden Sätze an:
Der Rang einer Matrix bleibt unverändert, wenn man

1. zwei Zeilen oder zwei Spalten vertauscht,
2. eine Reihe mit einem Faktor $c \neq 0$ multipliziert,
3. zu einer Reihe ein beliebiges Vielfaches einer parallelen Reihe addiert.

Matrizen, die durch Anwendung dieser Sätze auseinander hervorgehen, also gleichen Rang besitzen, werden *äquivalente Matrizen* genannt.

Beispiel.

Der Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist zu bestimmen!

1. Unpraktisch ist es, die Unterdeterminanten einzeln zu berechnen, denn es sind 5 vierreihige und 40 dreireihige Unterdeterminanten zu berechnen, die sämtlich Null werden. Im günstigsten Falle würde also erst die Berechnung der 46. Unterdeterminante (beispielsweise die durch Streichung der 2. und 3. Zeile und 3., 4. und 5. Spalte entstehende zweireihige Unterdeterminante $1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2$) nicht Null werden und somit $r = 2$ als Ergebnis liefern.
2. Multipliziert man die 1. Zeile mit -2 bzw. -3 bzw. -5 und addiert das Ergebnis zur 2. Zeile bzw. 3. Zeile bzw. 4. Zeile, so entsteht die äquivalente Matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man erneut die 2. Zeile mit -1 bzw. -3 und addiert das Ergebnis zur 3. bzw. 4. Zeile, so ergibt sich wiederum eine äquivalente Matrix:

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Verschwinden aller ihrer vier- und dreireihigen Unterdeterminanten ist auf Grund des Gesetzes (3a) von 5.1. offensichtlich.

Wegen $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ ist $r(A^{**}) = r(A^*) = r(A) = 2$

3. Zweckmäßig ist es, die Umformung nach dem Gaussschen Verfahren (6.4.2.4.) durchzuführen. Das Rechenschema liefert das 3. Beispiel, wobei die mit E bezeichneten Zeilen diejenigen der Matrix A^{**} sind.

*) Min. (m, n) bedeutet die kleinere Zahl von m und n.



6. Gleichungen und Ungleichungen

6.1. Grundbegriffe

Ein *Term* ist ein aus Konstanten, Variablen und Rechenzeichen gebildeter Ausdruck, der beim Belegen der Variablen mit geeigneten Zahlen einen Zahlenwert annimmt. Der *Definitionsbereich* eines Terms umfaßt die Gesamtheit der Zahlen, mit denen ein Term belegt werden kann.
Beispiele wichtiger Terme siehe Tabelle 7.

Tabelle 7. Wichtige Arten von Termen

Bezeichnung	Beispiele
Konstanter Term	$T = \frac{8}{3}\sqrt{2}(\pi + 1)$
Linearer Term	$T(x) = mx + b$, d. h. linear in x mit m, b = konst. $T(x, y, z) = 3x - 2y - z - 3$, d. h. linear in x, y und z
Linearkombination	$T(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i T_i$, wobei die c_i beliebige, aber nicht sämtlich verschwindende Konstanten und die T_i lineare Terme in x und y sind
Ganzrationaler Term oder Polynom	$T(a, b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $T(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ mit x_1, x_2, x_3 = konst., also ein Polynom in x
(Gebrochen-)rationaler Term	$T(x) = \frac{x^2 - a^2}{x + a}$ definiert für alle $x \neq -a$, a = konst.
Transzendenter Term	$T(x) = e^{-x} \sin x + \ln x$ definiert für $x > 0$

Gleichungen bzw. *Ungleichungen* sind Aussageformen (vgl. 2.1.), in denen Terme (wenigstens eine Variable enthaltend) mit dem Gleichheits- bzw. Ungleichheitszeichen verknüpft sind, z. B.

$$T_1 = T_2 \quad \text{bzw.} \quad T_1 > T_2$$

Der Definitionsbereich X ist die Durchschnittsmenge der Definitionsbereiche ihrer enthaltenen Terme.
Die Elemente (Zahlen, Wertepaare usw.) einer vorgegebenen Menge $\overline{X}$, der sog. *Lösungsgrundmenge*, die, anstelle der Variablen eingesetzt, die obigen Gleichungen zur wahren Aussage machen, werden *Lösungen* und ihre Gesamtheit *Lösungs-* oder *Erfüllungsmenge* E genannt. Es gilt:

$$E \subseteq \overline{X}$$

Eine *identische Gleichung* (bezüglich $\overline{X}$) liegt vor, wenn speziell $E = \overline{X}$, d. h. sämtliche Elemente von $\overline{X}$ die Gleichung erfüllen.
Eine *nicht erfüllbare* Gleichung (*Widerspruch*) hat $E = \emptyset$. Unter dem *Lösen* einer Gleichung bzw. Ungleichung wird die schrittweise Ermittlung der Lösungsmenge E verstanden. Dabei entsteht im allgemeinen eine Kette von Gleichungen bzw. Ungleichungen, bei denen die nachfolgende Aussageform der vorangehenden *äquivalent*, d. h. mit gleichem Definitionsbereich, oder nicht äquivalent sein kann. Bei nicht äquivalentem Umformen mit dem Ziel, die *Unbekannte* bzw. Unbekannten zu eliminieren, können Elemente der Lösungsmenge verlorengehen oder „überzählige Scheinlösungen" auftreten.

Beispiele. 1. Welche ganzen Zahlen (Lösungsgrundmenge) erfüllen die Gleichung $x + 1 = \sqrt{x + 7}$? Andere Schreibweisen sind: $E = \{x \mid x + 1 = \sqrt{x+7} \wedge x \in G\}$ oder kürzer $x + 1 = \sqrt{x + 7}$ $(x \in G)$.
Die Gleichung ist definiert für alle $x \geqq -7$ (die Wurzel ist für negative Radikanden nicht definiert), also $X = [-7; +\infty)$. Quadrieren beider Seiten ergibt die nicht äquivalente Gleichung $x^2 + 2x + 1 = x + 7$, da diese für alle $x \in G$ definiert ist. Von den Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ erfüllt x_2 die Ausgangsgleichung nicht, denn die Probe hierfür liefert die falsche Aussage $-2 = 2$. Somit tritt nur eine Lösung $x = 2$ bzw. $E = \{2\}$ als Ergebnis auf.
2. Die Gleichung $x^2 + 2{,}5x + 1 = 0$ hat bezüglich der Lösungsgrundmengen $\overline{X} = N$ keine Lösung, $\overline{X} = G$ eine Lösung $x = -2$ und $\overline{X} = P$ die zwei Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = -0{,}5$. Die Angabe der Lösungsgrundmenge ist also durchaus nicht überflüssig, sofern diese aus der Problemstellung heraus nicht ersichtlich ist.

6.2. Gleichungen mit einer Variablen

6.2.1. Gleichungsgesetze

Für das Umformen von Gleichungen gelten für deren Terme in x folgende Äquivalenzen:

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_2 = T_1$$

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 \pm T = T_2 \pm T \,^{*)}$$

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \,^{*)} & (T \neq 0) \\ T_1 : T = T_2 : T \,^{*)} & (T \neq 0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} T_1 = T_2 \\ T_3 = T_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T_1 \pm T_3 = T_2 \pm T_4 & \\ T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_4 & (T_3, T_4 \neq 0) \\ T_1 : T_3 = T_2 : T_4 & (T_3, T_4 \neq 0) \end{cases}$$

Die Anwendung von Rechenoperationen 3. Stufe auf die Terme einer Gleichung erfordert zusätzliche Untersuchungen bezüglich des Definitionsbereichs und die Durchführung der Probe.

6.2.2. Lineare Gleichungen

Sind a und b reelle Konstanten und x eine reelle Variable, so wird:

$$ax + b = 0 \tag{95}$$

*lineare Gleichung***) einer Variablen oder Unbekannten genannt. (95) hat:

- genau eine Lösung $x = -\dfrac{b}{a}$, falls $a \neq 0$,
- keine Lösung (Widerspruch), falls $a = 0 \wedge b \neq 0$ und
- unendlich viele Lösungen ($E = P$), falls $a = 0 \wedge b = 0$.

Viele andere Gleichungen lassen sich nach Umformen auf eine lineare Gleichung (95) zurückführen.

Beispiele. 1. Gesucht sind die (reellen) Lösungen der Gleichung $\dfrac{2x - 1}{x + 0{,}1} = \dfrac{x + 4{,}8}{0{,}5x + 3}$!
Der Definitionsbereich der Ausgangsgleichung umfaßt alle $x \in P \setminus \{-0{,}1, -6\}$, da der linke Term nicht für $x = -0{,}1$ und der rechte nicht für $x = -6$ definiert ist. Multiplikation der Gleichung mit

*) T muß für alle die Variablenbelegungen definiert sein, für die auch die Ausgangsgleichung $T_1 = T_2$ definiert ist.
**) genauer: Bestimmungsgleichung (zum Unterschied von identischen Gleichungen oder Funktionsgleichungen)

$T(x) = (x + 0{,}1) \cdot (0{,}5x + 3) = 0$, d. h., $x \in P \setminus \{-0{,}1, -6\}$ führt auf die lineare Gleichung $0{,}6x = 3{,}48$. Deren Lösung $x = 5{,}8$ ist wirklich (einzige) Lösung der Ausgangsgleichung, da 5,8 deren Definitionsbereich angehört. Die Probe bestätigt dies.

2. Die reellen Lösungen von $\sqrt{x-6} = \sqrt{3x}$ sollen ermittelt werden. Quadrieren beider Seiten führt auf die lineare Gleichung $x - 6 = 3x$, deren Lösung $x = -3$ ist. Die Ausgangsgleichung wird aber von keinem reellen x erfüllt, da $x = -3 \notin X$, denn der Definitionsbereich X der Ausgangsgleichung ergibt sich aus $X_1 = [6; +\infty)$ und $X_2 = [0; +\infty)$ zu $X = X_1 \cap X_2 = [6; +\infty)$. Die Probe würde auf den nicht im Reellen definierten, also sinnlosen Term $\sqrt{-9}$ führen. Daher $E = \emptyset$.

6.2.3. Quadratische Gleichungen

Mit den reellen Konstanten a_k $(k = 0, 1, 2)$ wird:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_2 \neq 0) \tag{96}$$

allgemeine Form der quadratischen Gleichung oder der Gleichung 2. Grades genannt. Falls $a_1 = 0$, wird (96) speziell *reinquadratische Gleichung* genannt.
Die Lösung von (96) erfolgt über die Herstellung der *Normalform* der quadratischen Gleichung, indem durch a_2 dividiert wird:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{und} \quad q = \frac{a_0}{a_2} \tag{97}$$

(97) hat, wenn $\overline{X} = C$ als Lösungsgrundmenge vorgegeben wird, genau die zwei *reellen Lösungen*:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{falls} \quad D \geqq 0\,^{*)} \tag{98}$$

oder die zwei *konjugiert komplexen Lösungen*:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad \text{falls} \quad D < 0 \tag{99}$$

wobei $D = \frac{p^2}{4} - q$ die sog. *Diskriminante* von (97) ist. Mit (98) bzw. (99) ergeben sich die *Produktform* von (97):

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \tag{100}$$

und der *Wurzelsatz von* VIETA:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1x_2 = q \tag{101}$$

Beispiele quadratischer Gleichungen bzw. solcher, die auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können, vgl. Beispiele in 6.1.

6.2.4. Gleichungen n-ten Grades

Die Lösung einer *algebraischen Gleichung n-ten Grades*:

$$\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{102}$$

ist für $k \geqq 5$ nicht mehr in geschlossener Form möglich. Mit Hilfe der vier Grundrechenarten und des Radizierens lassen sich keine Formeln zur Berechnung der Lösungen angeben. Sofern

*) im Falle $D = 0$ zwei reelle Lösungen, die gleich sind

keine Sonderfälle vorliegen, werden daher im allgemeinen bereits für $k \geqq 3$ *Näherungsverfahren* (vgl. 6.2.6.) angewendet, die es ermöglichen, die Lösungen mit jeder geforderten Genauigkeit zu ermitteln.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge und für die Anzahl und Eigenschaften der Lösungen einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades sind folgende Sätze von Bedeutung:

1. Eine algebraische Gleichung n-ten Grades hat, wenn ihr Definitionsbereich die komplexen Zahlen umfaßt, stets n Lösungen (Folgerung aus dem *Fundamentalsatz der Algebra*).
2. Die Lösungen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ einer algebraischen Gleichung können vollständig oder teilweise untereinander gleich sein (mehrfache Lösungen).
3. Komplexe Lösungen treten stets paarweise als konjugiert komplexe Lösungen auf, so daß bei ungeradem Grad n der Gleichung mindestens eine Lösung reell ist.
4. Jede algebraische Gleichung n-ten Grades läßt sich in der *Produktform* $a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$ darstellen.
5. Für $a_n = 1$ lautet der *Wurzelsatz von* VIETA:

$$a_0 = (-1)^n \, x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} (x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_n + \cdots + x_2 x_3 \cdots x_n)$$

....

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Beispiel. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung 5. Grades $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x = 0$. Wegen $a_0 = 0$ läßt sich x ausklammern, woraus $x_1 = 0$ als 1. Lösung folgt. Durch Probieren lassen sich die weiteren ganzzahligen Lösungen $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$ aus den nach Abspaltung der Linearfaktoren verbleibenden Gleichungen 4. und 3. Grades finden, deren Koeffizienten aus dem HORNER-Schema hervorgehen:

	1	−3	2	2	−4	$\Leftarrow x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$
	.	2	−2	0	4	
2	1	−1	0	2	0	$\Rightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0$
		−1	2	−2		
−1	1	−2	2	0		$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

Die beiden letzten Lösungen werden aus der quadratischen Gleichung nach (99) zu $x_{4,5} = 1 \pm \mathrm{j}$ errechnet. Damit wird die gegebene Gleichung durch $x = 0; 2; -1; 1 + \mathrm{j}; 1 - \mathrm{j}$ erfüllt.

6.2.5. Transzendente Gleichungen

Die meisten *transzendenten Gleichungen* lassen sich nur durch Näherungsverfahren lösen (vgl. 6.2.6.). Von den wenigen geschlossen lösbaren Typen sind die wichtigsten folgende:

Spezielle Exponentialgleichungen

Die Gleichung:

$$a^{mx+b} = c \qquad (a, b, c, m \in P;\ a, c > 0;\ a \neq 1;\ m \neq 0) \tag{103}$$

liefert nach Logarithmieren zur Basis 10 die Lösung:

$$x = \frac{1}{m}\left(\frac{\lg c}{\lg a} - b\right) \tag{104}$$

Ist der rechte Term von (103) ebenfalls wie der linke als Potenz von a dargestellt, so folgt x aus dem Exponentenvergleich (vgl. 2. Beispiel).

Spezielle logarithmische Gleichungen

$$\log_a (mx + b) = c \qquad \left(x > -\frac{b}{m};\ m \neq 0\right) \tag{105}$$

wird zur Logarithmenbasis a potenziert, so daß:

$$x = \frac{a^c - b}{m} \tag{106}$$

Spezielle goniometrische Gleichungen

sind Gleichungen, in denen die reelle Variable x als Argument von trigonometrischen Funktionen auftritt. Obwohl ein allgemeines Lösungsverfahren für alle direkt lösbaren Gleichungen nicht angegeben werden kann, besteht meist das Ziel der Umformungen darin, nur eine einzige trigonometrische Funktion mit übereinstimmenden Argumenten zu erhalten, z. B.:

$$T(mx + b) - c = 0 \tag{107}$$

oder

$$T^2(mx + b) + pT(mx + b) + q = 0 \tag{108}$$

Dabei sind b, c, m, p und q reelle Konstanten und T eine der trigonometrischen Funktionen. Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ergibt sich bei Lösbarkeit eine unendliche Lösungsmenge, von der häufig nur die endliche Zahl der sogenannten *Hauptwerte* der Lösungen, das sind alle x_i, für die $0 \leqq x_i < 2\pi$, angegeben wird.

Beispiele. 1. Die bei der Seilreibung auftretende Exponentialgleichung $F_1 = F_2 e^{\mu x}$ ist nach dem Umschlingungswinkel x aufzulösen! Nach (104) wird mit $c = F_1/F_2$: $x = \frac{1}{\mu}\,\frac{\lg F_1/F_2}{\lg e}$ oder unter Anwendung von natürlichen Logarithmen: $x = \frac{1}{\mu} \ln (F_1/F_2)$.

2. Die Exponentialgleichung $2^{4x} = 8^{x+2}$ kann in $2^{4x} = 2^{3(x+2)}$ umgeformt werden. Da die Basen beider Potenzen gleich sind, muß dies auch für die Exponenten gelten. Damit erhält man $4x = 3(x + 2)$ mit der Lösung $x = 6$.

3. $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$ geht nach Multiplikation beider Seiten mit e^x in $e^{2x} + 6 - 5e^x = 0$ über und kann nach Substitution $z = e^x$ auf die quadratische Gleichung $z^2 - 5z + 6 = 0$ zurückgeführt werden. Nach (98) erhält man $z_1 = 3 = e^{x_1}$ und $z_2 = 2 = e^{x_2}$ und damit die beiden Lösungen $x_1 = \ln 3$ und $x_2 = \ln 2$.

4. Gesucht sind sämtliche Lösungen und die Hauptwerte der goniometrischen Gleichung $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$. Die Gleichung ist vom Typ (107) und wird durch die Substitution $z = 2x + \frac{\pi}{3}$ auf $\cos z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ zurückgeführt, deren unendliche Lösungsmenge aus den Lösungen $\left\{z_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup z_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \wedge k \in G\right\}$ besteht. Der Übergang auf die Variable x ergibt die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung zu $\left\{x_1 = (24k - 1)\frac{\pi}{24} \cup x_2 = (24k + 17)\frac{\pi}{24} \wedge k \in G\right\}$. Die 4 Hauptwerte ergeben sich daraus als Teilmenge für $k = 1$ und $k = 2$ in x_1 und $k = 0$ und $k = 1$ in x_2 zu $\left\{x_{20} = \frac{17}{24}\pi, x_{11} = \frac{23}{24}\pi, x_{21} = \frac{41}{24}\pi, x_{12} = \frac{47}{24}\pi\right\}$.

5. Welche Hauptwerte erfüllen die Gleichung $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$?
Da $\cos x = 0$ offensichtlich die falsche Aussage $1 = 0$ ergibt, kann die Gleichung durch $\cos^2 x$ $\left(x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2};\ k \in G\right)$ dividiert werden, so daß $1 - 3 \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} = 0$ entsteht. Nach Tabelle 17 erhält man $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$ als Gleichung 2. Grades für $\tan x$ vom Typ (108). Diese hat mit $z = \tan x$ die Lösung $z_1 = \tan x_1 = 2$ und $z_2 = \tan x_2 = 1$. Damit ergeben sich für x die Hauptwerte $\{x_{20} = 45°,\ x_{10} \approx 63{,}5°,\ x_{21} = 225°,\ x_{11} \approx 243{,}5°\}$ als Teilmenge der gesamten Lösungsmenge $\{x_1 \approx 63{,}5° + k \cdot 180° \cup x_2 = 45° + k \cdot 180° \wedge k \in G\}$.

6.2.6. Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen

Numerische Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung der reellen Lösungen von Gleichungen mit einer Variablen müssen angewendet werden, sofern sich die Lösungsmenge nicht in geschlossener Form ermitteln läßt. Da diese Verfahren weitestgehend allgemein anwendbar sind und die Lösungen mit jeder gewünschten Genauigkeit liefern, werden sie in der Praxis auch dann verwendet, wenn die Ermittlung der Lösungen in geschlossener Form aufwendig und kompliziert ist.

Ist x_0 eine in der Gleichung $f(x) = 0$ gesuchte reelle Wurzel, so ist bei allen Verfahren erforderlich, in Abhängigkeit von der Wahl eines Näherungswerts x_1 in einer Umgebung von x_0, vom Charakter des Terms $f(x)$ und vom Näherungsverfahren eine Folge von Näherungslösungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zu ermitteln, die gegen x_0 konvergiert. Die Abschätzung der Ausgangsnäherungslösung x_1 kann durch Probieren, unter Verwendung von Tabellen, mit Hilfe des HORNER-Schemas bei algebraischen Gleichungen oder durch grafische Verfahren (z. B. grafische Ermittlung der Nullstellen von $y = f(x)$ als zugehörige Funktion zur Gleichung $f(x) = 0$) erfolgen.

Lineares Eingabeln — regula falsi

Die Berechnung einer reellen Lösung x_0 der auf die Form $f(x) = 0$ gebrachten Gleichung geschieht über die Ermittlung der entsprechenden *Nullstelle* x_0 der zugehörigen und — in einer Umgebung von x_0 — stetigen Funktion $y = f(x)$. Nach Wahl zweier Näherungswerte x_1 und x_2,

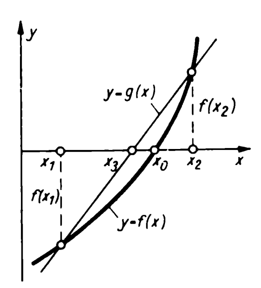


Bild 24. Regula falsi

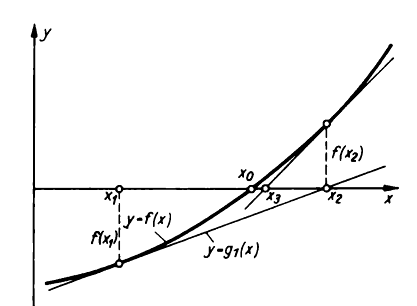


Bild 25. NEWTONsches Verfahren

die innerhalb dieser Umgebung x_0 eingabeln, d. h. $x_1 < x_0 < x_2$ (Bild 24), wird $f(x)$ im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ durch die lineare Funktion $g(x)$ ersetzt, die an den Stellen x_1 bzw. x_2 mit $f(x)$ übereinstimmende Funktionswerte $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$ besitzt. Unter der Voraussetzung, daß $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ (entgegengesetzte Vorzeichen), berechnet sich die verbesserte Näherung x_3 aus:

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \tag{109}$$

Wird das Verfahren erneut auf das Intervall $x_3 \leqq x \leqq x_2$ (nach Bild 24 ist $f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$) angewendet, erhält man x_4 als weiteren verbesserten Näherungswert, so daß durch Fortsetzung dieser Methode x_0 mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann.

Newtonsches Näherungsverfahren

Nach Wahl eines Näherungswerts x_1 in einer Umgebung von x_0 und unter der Voraussetzung, daß $y = f(x)$ in dieser Umgebung differenzierbar ist und keine verschwindende 1. Ableitung besitzt ($f'(x) \neq 0$), wird die Funktion durch eine Gerade $g_1(x)$ ersetzt, die an der Stelle x_1 gleichen Funktionswert und gleiche 1. Ableitung besitzt, also $y = f(x)$ dort tangiert (vgl. Bild 25). Die Nullstelle x_2 der Tangente $g_1(x)$ ist bei Konvergenz des Verfahrens eine bessere Näherung als x_1 und kann zum Ausgangspunkt einer weiteren Tangente $g_2(x)$ gewählt werden,

welche die verbesserte Näherung x_3 liefert usw. Aus:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{110}$$

folgt allgemein die $(i+1)$-te Verbesserung aus dem Näherungswert x_i zu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{111}$$

Das NEWTONsche Verfahren konvergiert auf alle Fälle, wenn die hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung erfüllt ist*):

$$\frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \leqq m < 1 \tag{112}$$

Iterationsverfahren

Die Gleichung muß hierbei auf die Form $x = \varphi(x)$ gebracht werden. Grafisch veranschaulicht, ist die Stelle x_0 des Schnittpunkts der zu beiden Termen zugehörigen Funktionen, von denen eine die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten darstellt, zu berechnen (Bild 26). Nach

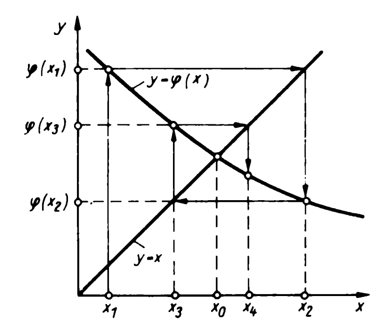


Bild 26. Iteration

Wahl eines Näherungswerts x_1 in einer Umgebung von x_0 und Berechnung eines verbesserten Werts $x_2 = \varphi(x_1)$ usw. erhält man allgemein die $(i+1)$-te Verbesserung aus:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{113}$$

Ein Konvergieren $\left(\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0\right)$ des Verfahrens liegt auf alle Fälle dann vor, wenn:

$$|\varphi'(x)| \leqq m < 1 \tag{114}$$

in einer x_0 und die x_i enthaltenden Umgebung erfüllt ist. Diese Bedingung ist nur hinreichend, so daß die Iteration auch zum Ziele führen kann, wenn sie nicht an jeder Stelle dieser Umgebung erfüllt ist. Wird $|\varphi'(x)| > 1$, so läßt sich das Verfahren auf die zu $\varphi(x)$ inverse Funktion $\psi(x)$ (vgl. 8.2.) anwenden, da $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ und (114) für $\psi(x)$ erfüllt ist.
Regula falsi und NEWTONsches Näherungsverfahren sind Spezialfälle der Iteration, und (112) folgt aus (114) für $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Beispiele.[a] 1. Die reelle Lösung der Gleichung $x^3 + x + 1 = 0$ soll 1. nach der regula falsi, 2. nach dem NEWTONschen Näherungsverfahren und 3. nach dem Iterationsverfahren bestimmt werden. Da die zur Gleichung zugehörige Funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ keine relativen Extrema besitzt [$f'(x) = 3x^2 + 1$ verschwindet für kein reelles x], besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ genau eine reelle Lösung x_0. Durch Probieren ergibt sich wegen $f(-1) = -1$ und $f(0) = 1$ die erste Grobabschätzung: $-1 < x_0 < 0$.

1.1. Mit Hilfe des HORNER-Schemas wird x_0 feiner eingegabelt: $x_1 = -0{,}7 < x_0 < x_2 = -0{,}6$ werden als Ausgangsnäherung mit $f(x_1) = -0{,}043$ und $f(x_2) = 0{,}184$ in der regula falsi (109) angesetzt, so daß

*) (112) setzt die Existenz der 2. Ableitung voraus.

$x_3 = -0{,}7 - \frac{-0{,}043 \cdot 0{,}1}{0{,}184 + 0{,}043} = -0{,}681$. Wegen $f_3(x) = 0{,}0032$ ergibt sich als verfeinertes Intervall: $x_1 = -0{,}7 < x_0 < x_3 = -0{,}681$, und (109) führt nochmals angewendet auf $x_4 = -0{,}7 - \frac{-0{,}043 \cdot 0{,}019}{0{,}0032 + 0{,}043}$ $= -0{,}682$. Das Verfahren steht bereits in der 2. Stelle hinter dem Komma, damit ist die Lösung mindestens auf 10^{-2} genau.

1.2. Für das NEWTONsche Näherungsverfahren wird von $x_1 = -0{,}7$ ausgegangen. Da $f(x_1) = -0{,}043$ und $f'(x_1) = 2{,}47$, erhält man nach (111): $x_2 = -0{,}7 + 0{,}017 = -0{,}683$. Erneute Anwendung des Verfahrens mit $x_2 = -0{,}683$, $f(x_2) = -0{,}0016$ und $f'(x_2) = 2{,}399$ liefert $x_3 = -0{,}683 + 0{,}0007 = -0{,}6823$. Das Verfahren steht in der 2. Stelle, und die Folge 0,017, 0,0007 der Korrekturen weist auf rasche Konvergenz des Verfahrens hin. Dies wird durch den im Verhältnis kleinen Konvergenzfaktor $m = 0{,}03 \ll 1$ bestätigt, der sich aus (112) für $x_1 = -0{,}7$ ergibt.

1.3. Es gibt drei Möglichkeiten, die gegebene Gleichung auf die Form $x = \varphi(x)$ zu bringen. Die tabellarische Zusammenstellung zeigt, daß die 2. Möglichkeit wegen Nichterfüllung von (114) entfällt.

Nr.	Gleichung	$\varphi(x)$	$\varphi'(x)$	$\lvert\varphi'(-0{,}7)\rvert = m$
1.	$x = -\sqrt[3]{x+1}$	$-\sqrt[3]{x+1}$	$-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$	$0{,}7 < 1$
2.	$x = -x^3 - 1$	$-x^3 - 1$	$-3x^2$	$1{,}5 > 1$
3.	$x = -\frac{1}{x^2+1}$	$-\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$0{,}6 < 1$

Die Konvergenzfaktoren für die 1. und 3. Möglichkeit deuten auf schwache Konvergenz der Näherungswerte. Mit Hilfe einer Kubikwurzeltabelle läßt sich aber mit wenig Rechenaufwand bei der 1. Möglichkeit die Lösung auf 10^{-3} genau angeben: $x_1 = -0{,}7 \Rightarrow$ nach (113) $x_2 = -\sqrt[3]{-0{,}7 + 1} = -0{,}669$. Analog ergibt sich für die weiteren Näherungswerte die Folge $x_3 = -0{,}692$, $x_4 = -0{,}675$, $x_5 = -0{,}688$, $x_6 = -0{,}678$, $x_7 = -0{,}685$, $x_8 = -0{,}680$, $x_9 = -0{,}684$, $x_{10} = -0{,}681$, $x_{11} = -0{,}683$ und $x_{12} = 0{,}682$. Damit gilt für x_0: $-0{,}683 < x_0 < -0{,}682$.

2. Die transzendente Gleichung $e^{-x} - x + 1 = 0$ ist mit Hilfe des Iterationsverfahrens auf 10^{-3} genau zu lösen! Nach dem linearen Glied aufgelöst erhält man $x = e^{-x} + 1$. Die erste Grobabschätzung durch Probieren ergibt $1 < x_0 < 2$. Das Verfahren konvergiert wegen $\varphi'(x) = -e^{-x}$ und damit $|\varphi'(1)| = 0{,}37 < 1$ *).

Mit $x_1 = 1{,}3$ als Ausgangswert können die folgenden Verbesserungen bis x_4 mit Hilfe einer Tabelle für e^{-x} sehr rasch bestimmt werden. Für die folgenden müssen fünfstellige Logarithmen zur Ausrechnung eingesetzt werden. Die Folge der Verbesserungen lautet:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1,3	1,27	1,28	1,278	1,2786	1,2784	1,27848

Damit liegt x_0 im Intervall $x_6 = 1{,}2784 < x_0 < 1{,}27848 = x_7$, so daß $x_0 = 1{,}278$ auf 10^{-3} genau gesichert ist.

6.3. Ungleichungen mit einer Variablen

6.3.1. Gesetze für das Rechnen mit Ungleichungen

Die Ermittlung der Lösungsmenge einer Ungleichung geschieht wie bei Gleichungen durch Umformungen in äquivalente Ungleichungen. Oft gabelt sich dabei der Lösungsweg durch Fallunterscheidungen, wenn bei einer bestimmten Variablenbelegung die beteiligten Terme ihre Vorzeichen wechseln (vgl. Beispiele 2. und 3.). Bei den folgenden Regeln ist zu beachten, daß der Term T für alle die Variablenbelegungen definiert sein muß, für die auch die Aus-

*) $\varphi(x)$ fällt monoton, so daß $|\varphi'(x)| < 0{,}37$ für alle $x > 1$.

gangsungleichung definiert ist und anstelle des Ordnungssymbols $<$ auch $>$, $\leqq$ oder $\geqq$ stehen können.

1. Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf ein und derselbe Term addiert oder subtrahiert werden:

$$T_1 < T_2 \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 + T < T_2 + T \\ T_1 - T < T_2 - T \end{cases} \tag{115}$$

2. Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit demselben bzw. durch denselben positiven Term multipliziert bzw. dividiert werden:

$$T_1 < T_2 \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 \cdot T < T_2 \cdot T \\ T_1 : T < T_2 : T \end{cases} \qquad (T > 0) \tag{116}$$

(Gilt $T < 0$, so dreht sich der Sinn des Ungleichheitszeichens um.)
3. Vertauscht man beide Seiten, so dreht sich der Sinn des Ungleichheitszeichens um:

$$T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_2 > T_1 \tag{117}$$

4. Gleichsinnige Ungleichungen dürfen seitenweise addiert werden:

$$\left.\begin{matrix} T_1 < T_2 \\ T_3 < T_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_1 + T_3 < T_2 + T_4 \tag{118}$$

5. Gleichsinnige Ungleichungen dürfen seitenweise multipliziert werden, wenn mindestens die beiden rechten Terme T_2 und T_4 positiv sind:

$$\left.\begin{matrix} T_1 < T_2 \\ T_3 < T_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_1 \cdot T_3 < T_2 \cdot T_4 \qquad (T_2 > 0 \wedge T_4 > 0) \tag{119}$$

Beispiele. 1. Welche natürlichen Zahlen erfüllen bezüglich der Variablen x die lineare Ungleichung $2 + 5x < 7 + 3x$? Die Ungleichung ist für alle $x \in N$ definiert. Subtraktion des Terms $2 + 5x$ nach (115) und anschließende Division durch 2 nach (116) führen auf die gleichwertige Ungleichung $x < 2{,}5$ und wegen $x \in N$ auf die Lösungsmenge $E = \{x \mid x < 2{,}5 \wedge x \in N\} = (-\infty; 2{,}5) \cap N = \{1{,}2\}$. Das heißt, nur die ersten zwei natürlichen Zahlen 1 und 2 erfüllen die Ungleichung.
Probe: $7 < 10$ und $12 < 13$.

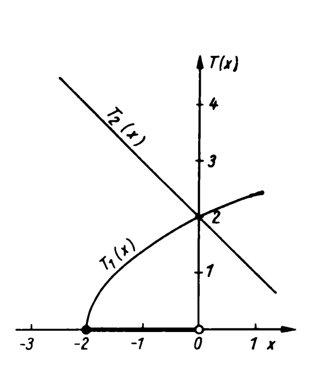


Bild 27. Grafische Lösung 2. Beispiel

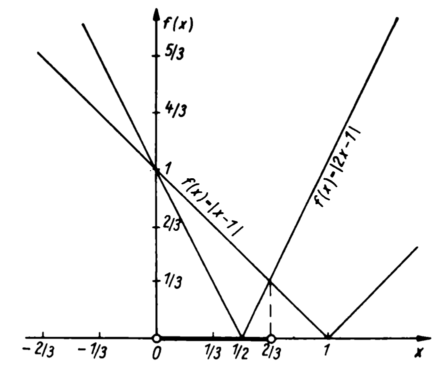


Bild 28. Grafische Lösung 3. Beispiel

2. Gesucht ist $E = \left\{x \,\middle|\, \sqrt{2x+4} < 2 - x \wedge x \in P\right\}$! Zuerst wird der Bereich X ermittelt, für den die Ungleichung unter der Bedingung $x \in P$ definiert ist: Aus der Wurzeldefinition (vgl. 4.2.1.) folgt $T_1(x) = \sqrt{2x+4} \geqq 0$ und $2x + 4 \geqq 0$, d. h. $X_1 = [-2; +\infty)$. Wegen $T_1(x) \geqq 0$ und $T_1(x) < T_2(x) = 2 - x$ folgt $T_2(x) = 2 - x > 0$, d. h. $X_2 = (-\infty; 2)$. Damit wird $E \subseteqq X = X_1 \cap X_2 = [-2; 2)$. Die Ungleichung kann nach (119) wegen $T_1(x) \geqq 0$ und $T_2(x) > 0$ quadriert werden. Dadurch entsteht

$2x + 4 < 4 - 4x + x^2$, woraus nach (115) $0 < x^2 - 6x$ und $3^2 < (x - 3)^2$ nach Addition der quadratischen Ergänzung folgt. Der Vergleich beider Basen der Potenzen gleicher Exponenten liefert $3 < x - 3$ für $x \geqq 3$ und $3 < -(x - 3)$ für $x < 3$. Die erste Ungleichung entfällt für weitere Untersuchungen, da $X \not\ni x \geqq 3$. Die zweite führt auf $x < 0$ oder $x \in (-\infty; 0)$. Wegen X wird damit $E = [-2; 2) \cap (-\infty; 0) = [-2; 0)$ oder $E = \{x \mid -2 \leqq x < 0 \wedge x \in P\}$. Die grafische Lösung dieser Aufgabe mit dem stark ausgezogenen Lösungsbereich ist in Bild 27 dargestellt.

3. Welche reellen x erfüllen $|2x - 1| < |x - 1|$? Mit $T_1(x) = 2x - 1$ und $T_2(x) = x - 1$ müssen bei Beseitigung der Betragsstriche die drei Fälle: $T_1(x) \geqq 0 \wedge T_2(x) \geqq 0$, $T_1(x) \geqq 0$, $T_2(x) < 0$ und $T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0$ unterschieden werden. Die Lösung der gegebenen Ungleichung ergibt sich dann als Vereinigung der Lösungsmengen für die drei Fallunterscheidungen.

$T_1(x) \geqq 0 \wedge T_2(x) \geqq 0$:	$T_1(x) \geqq 0 \wedge T_2(x) < 0$:	$T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0$:
Dies gilt für $x \geqq 1$, d. h. $X_1 = [1; +\infty)$.	Dies gilt für $\frac{1}{2} \leqq x < 1$, d. h. $X_2 = \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.	Dies gilt für $x < \frac{1}{2}$, d. h. $X_3 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Die gegebene Ungleichung geht jeweils über in

$2x - 1 < x - 1$	$2x - 1 < -(x - 1)$	$-(2x - 1) < -(x - 1)$
$x < 0$.	$x < \frac{2}{3}$.	$x > 0$.
Da $X_1 \not\ni x < 0$, folgt	Wegen X_2 folgt	Wegen X_3 folgt
$E_1 = \emptyset$.	$E_2 = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.	$E_3 = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Damit wird $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \left(0; \frac{2}{3}\right)$ oder $E = \left\{x \mid 0 < x < \frac{2}{3} \wedge x \in P\right\}$.
Die Lösungsmenge ist als stark ausgezogenes offenes Intervall in der grafischen Lösung des Bildes 28 dargestellt.

6.3.2. Abschätzungen

Eine Ungleichung wird *Abschätzung* genannt, wenn ihre Erfüllungsmenge und ihr Definitionsbereich übereinstimmen.
Die Ungleichung $x < a$ ist eine Abschätzung der Variablen x durch die Konstante a nach oben.
Für beliebige a_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) gilt stets:

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| \quad (120)$$

Speziell ergibt sich hieraus für $n = 2$, $a_1 = a$ und $a_2 = b$ die *Dreiecksungleichung*:

$$|a + b| \leqq |a| + |b| \quad (121)$$

als Abschätzung des absoluten Betrags einer Summe nach oben.

Analog folgt für $a_1 = a$, $a_2 = -b$ als Abschätzung des absoluten Betrags einer Differenz nach oben:

$$|a - b| \leqq |a| + |b| \quad (122)$$

Die Abschätzung des absoluten Betrags einer Summe nach unten ist:

$$|a + b| \geqq ||b| - |a|| \quad (123)$$

Für alle nicht negativen a und b und natürliche n gilt:

$$a^n + b^n \leqq (a + b)^n \quad (124)$$

Bei nicht negativen a und natürlichem n gilt die BERNOULLIsche *Ungleichung*:

$$(1 + a)^n \geqq 1 + n \cdot a \quad (125)$$

Für n positive reelle Zahlen a_i ist das harmonische Mittel nicht größer als das geometrische Mittel und dieses wiederum nicht größer als das einfache arithmetische Mittel:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \tag{126}$$

Sind die a_i n beliebige reelle Zahlen, so ist der absolute Betrag des einfachen arithmetischen Mittels nicht größer als der des quadratischen Mittels dieser Zahlen:

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \tag{127}$$

Für n beliebig reelle a_i und b_i gilt die CAUCHY-SCHWARZ*sche Ungleichung*:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \tag{128}$$

Beispiele. 1. $1{,}04^3$ ist nach unten abzuschätzen! Nach (125) wird $1{,}04^3 = (1+0{,}04)^3 \geqq 1 + 3 \cdot 0{,}04$ und damit $1{,}04^3 \geqq 1{,}12$.

2. Aus den Zahlen 2, 3 und 6 ergeben sich folgende Mittelwerte:

Arithmetisches Mittel: $m_a = (2+3+6):3 = 11/3 \approx 3{,}67$

Geometrisches Mittel: $m_g = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt[3]{36} \approx 3{,}30$

Harmonisches Mittel: $m_h = \dfrac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \dfrac{3}{1} = 3$

Wegen $3 < 3{,}30 < 3{,}67$ wird damit (126) bestätigt.

6.4. Lineare Gleichungssysteme

6.4.1. Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Das aus zwei Gleichungen bestehende *System**):

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array}\right| \quad (a_{ik}, b_i = \text{konst.}, x \text{ und } y \text{ reelle Variablen}) \tag{129}$$

hat als Lösungen diejenigen Wertepaare $(x; y)$, die sowohl die erste als auch die zweite Gleichung erfüllen, symbolisch $E = \{(x; y) \mid a_{11}x + a_{12}y = b_1 \wedge a_{21}x + a_{22}y = b_2\}$.
Elementar lassen sich die Lösungen solcher Systeme durch folgende drei Verfahren ermitteln: *Substitutions-* oder *Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren* und *Additionsverfahren* (1. Beispiel). Allen drei Verfahren ist das Ziel gemeinsam, das System durch Elimination einer Variablen auf eine lineare Gleichung vom Typ (95) unter Anwendung der Gleichungsgesetze zurückzuführen. Deren Lösung**) ergibt den einen Wert und dieser, in eine geeignete Ausgangsgleichung eingesetzt, den anderen Wert des gesuchten Lösungspaars. (129) läßt sich allgemein mit Hilfe zweireihiger Determinanten lösen. Je nach den Werten, welche die *Koeffizientendeterminante* D und die Determinanten D_x und D_y annehmen, wobei:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ und } \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

*) Der erste Index gibt die Zeile oder Nummer der Gleichung, der zweite die Spalte oder die Nummer der Variablen an.
**) vorausgesetzt, die Gleichungen sind widerspruchsfrei und nicht linear abhängig

(D_x bzw. D_y entstehen, indem in D die 1. Spalte bzw. die 2. Spalte durch die rechte Seite von (129) ersetzt werden), ergeben sich folgende Lösungsmengen (Tabelle 8):

Tabelle 8. Lösungsmengen der Determinanten

D, D_x und D_y		Analytisch	Grafisch
$D \neq 0$ D_x, D_y beliebig		Genau ein Wertepaar $(x; y)$ mit $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$ (CRAMERsche Regel)	Schnittpunkt zweier Geraden
$D = 0$	$D_x = 0 \wedge D_y = 0$	unendliche Lösungsmenge E wegen linearer Abhängigkeit (vgl. 2. Beispiel)	zwei aufeinanderfallende Geraden
	$D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$ *)	$E = \emptyset$, also keine Lösung, d. h. Widerspruch (vgl. 3. Beispiel)	zwei parallele Geraden

Enthält das System mehr als zwei Gleichungen, so kann aus zwei Gleichungen, sofern diese linear und unabhängig und widerspruchsfrei sind, das Lösungspaar bestimmt werden. Mit den restlichen Gleichungen muß die Probe durchgeführt werden, um festzustellen, ob das ermittelte Wertepaar auch diese erfüllt oder aber nicht.

Beispiele. 1. Das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 2x - 3y = -6 \end{array} \right|$ ist zu lösen!

1.1. *Einsetzungsverfahren:* Zweckmäßig ist es, die 1. Gleichung nach y aufzulösen: $y = 2x$ und für y in die 2. Gleichung $2x$ einzusetzen. Das führt auf eine Gleichung $2x - 3 \cdot 2x = -6$ in x und daraus $x = 1{,}5$. Dieser Wert, in die 1. Gleichung eingesetzt, liefert $2 \cdot 1{,}5 - y = 0$ und somit $y = 3$. Damit ergibt sich genau ein Wertepaar $x = 1{,}5$; $y = 3$ als Lösung.

1.2. *Gleichsetzungsverfahren:* Beide Gleichungen werden nach $2x$ aufgelöst, also entsteht das gleichwertige System $\left| \begin{array}{l} 2x = y \\ 2x = 3y - 6 \end{array} \right|$. Gleichsetzung beider rechten Seiten (die linken sind gleich) ergibt $y = 3y - 6$ und somit $y = 3$. Dieser Wert, in die erste Ausgangsgleichung eingesetzt, führt zu $2x - 3 = 0$, und damit wird $x = 1{,}5$.

1.3. *Additionsverfahren:* Die mit -1 multiplizierte zweite Gleichung des gegebenen Systems wird zur ersten addiert. Die Glieder in x heben sich auf, und es entsteht $2y = 6$ mit $y = 3$ und analog zu 1.2. $x = 1{,}5$.

1.4. *CRAMERsche Regel:* Wegen $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -6$ und $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -12$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{-4} = 1{,}5, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-4} = 3$$

1.5. Die *grafische Lösung* ist im Bild 29 dargestellt (Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden 1 und 2).

2. Gegeben ist das System $\left| \begin{array}{rl} 2x - 3y & = -6 \\ -x + 1{,}5y & = 3 \end{array} \right|$. Es liegt eine lineare Abhängigkeit vor, denn:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1{,}5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 1{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 = 0, \; D_x = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 1{,}5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 3 & 1{,}5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Das Additionsverfahren hätte nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit 2 und Addition beider Seiten auf die Identität $0 = 0$ geführt und damit die Ermittlung der Lösungsmenge verhindert. Die Elimination

*) Das heißt, D_x und D_y werden nicht beide gleichzeitig Null.

von y aus einer Gleichung liefert die unendliche Lösungsmenge $E = \left\{\left(x; y = \frac{2}{3}x + 2\right) \middle| x, y \in P\right\}$, die in Bild 29 durch die unendlich vielen Punkte der Geraden 2 repräsentiert wird.

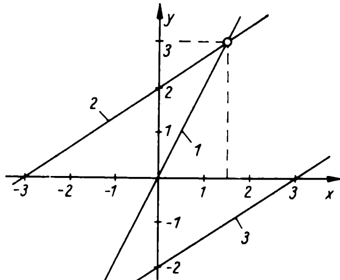


Bild 29. Grafische Lösung eines Gleichungssystem

3. Das System $\left|\begin{matrix} 2x - 3y = -6 \\ 2x - 3y = 6 \end{matrix}\right|$ ist nicht lösbar. Wegen Übereinstimmung der linken Seiten wird nach Gleichsetzen in der falschen Aussage $-6 = 6$ der Widerspruch sofort ersichtlich. Es werden $D = 0$, $D_x = 36 \neq 0$ und $D_y = 24 \neq 0$, also $E = \emptyset$. Dieser Sachverhalt wird grafisch in Bild 29 durch die beiden parallelen Geraden 2 und 3 dargestellt.

6.4.2. Systeme mit *m* linearen Gleichungen und *n* Variablen

6.4.2.1. Darstellungsmöglichkeiten und Lösbarkeit

Ein *System von m linearen Gleichungen* mit den n Variablen x_k, den konstanten Koeffizienten a_{ik} und den Absolutgliedern b_i, wobei $k = 1, 2, \ldots, n$ und $i = 1, 2, \ldots, m$, hat analog (129) die Gestalt:

$$\left|\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right| \tag{130}$$

Unter Verwendung der Koeffizientenmatrix $A = (a_{ik})_{(m,n)}$ aus 5.2.1. und der Spaltenvektoren:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

kann das System (130) auch als Matrizengleichung dargestellt werden:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{131}$$

Sind sämtliche $b_i = 0$, liegt (130) in der *homogenen Form*, anderenfalls in der *inhomogenen Form* vor.

Für die *Lösbarkeit des Systems* (130) und den Charakter der Lösungsmenge sind die Ränge $r(\boldsymbol{A})$ (vgl. 5.2.3.) der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ und $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ der um den Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{132}$$

von Bedeutung. Und zwar gelten für die Lösbarkeit des Systems (130) nach Tabelle 9 folgende Kriterien:

Tabelle 9. Lösbarkeitskriterien

Fall	Lösbarkeit	Bedingungen
1	lösbar	$r(A) = r(A, b) = r$
1a	genau eine Lösung	$r = n \leqq m$
1b	$(n - r)$-fach unendlich viele Lösungen	$r <$ Min (m, n) oder $r = m < n$
2	nicht lösbar (Widerspruch)	$r(A) \neq r(A, b)$

Ein homogenes System ist stets lösbar (Fall 1) und im Falle (1a) wird die einzige Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ die triviale Lösung des homogenen Systems genannt.

6.4.2.2. Cramersche Regel

Ist das System (130) eindeutig lösbar (Fall 1a) und $m = n$, so können die Unbekannten x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ als Quotient je zweier Determinanten zu:

$$x_k = \frac{D_{xk}}{D} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{133}$$

mit $D = \det A$ und

$$D_{xk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & b_n & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{134}$$

ermittelt werden.

6.4.2.3. Austauschverfahren

Mit dem *Austauschverfahren* soll das zu (130) zugehörige System von m linearen Funktionen mit n Variablen $(m \gtreqless n)$:

$$\begin{vmatrix} y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2\nu}x_\nu + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\mu = a_{\mu 0} + a_{\mu 1}x_1 + \cdots + a_{\mu\nu}x_\nu + \cdots + a_{\mu n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m0} + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m\nu}x_\nu + \cdots + a_{mn}x_n \end{vmatrix} \tag{135}$$

nach den unabhängigen Variablen x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in Abhängigkeit von den y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ aufgelöst werden. Dabei umfaßt (135) mit sämtlichen $y_i = 0$ und $a_{i0} = -b_i$ das Gleichungssystem (130) als Spezialfall mit.

Die Lösung geschieht durch schrittweisen Austausch jeweils einer ν-ten Spalte mit einer μ-ten Zeile ($a_{\mu\nu} \neq 0$ vorausgesetzt). Dabei wird (135) in der Form des Schemas (136) dargestellt — Absolutglieder in der $(n + 1)$-ten Spalte — und dieses beim Austausch in das System (137) umgeformt. Die α_{ik} von (137) folgen aus den a_{ik} des Ausgangssystems (136) mit $a_{\mu\nu} = p$ als *Pivotelement* nach folgenden *Austauschregeln*:

1. $\alpha_{\mu\nu} = \dfrac{1}{p}$ (Austausch des Pivotelements)

2. $\alpha_{\mu k} = \frac{a_{\mu k}}{-p}$; $k \neq \mu$ (Austausch der Pivotzeile)

3. $\alpha_{i\nu} = \frac{a_{i\nu}}{p}$; $i \neq \nu$ (Austausch der Pivotspalte)

4. $\alpha_{ik} = a_{ik} + a_{i\nu}\alpha_{\mu k}$; $i \neq \nu \wedge k \neq \mu$ (Austausch der restlichen Elemente)

I	x_1	$\cdots x_\nu$	$\cdots x_n$	1
y_1	a_{11}	$\cdots a_{1\nu}$	$\cdots a_{1n}$	a_{10}
$\vdots$	...	...	...	...
y_μ	$a_{\mu 1}$	$(a_{\mu\nu})$	$a_{\mu n}$	$a_{\mu 0}$
$\vdots$	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	$\cdots a_{m\nu}$	$\cdots a_{mn}$	a_{m0}
K	$\alpha_{\mu 1}$	$\cdots *$	$\cdots \alpha_{\mu n}$	$\alpha_{\mu 0}$

(136) $\Rightarrow$

II	x_1	$\cdots y_\mu$	$\cdots x_n$	1
y_1	α_{11}	$\cdots \alpha_{1\nu}$	$\cdots \alpha_{1n}$	α_{10}
$\vdots$	...	...	...	...
x_ν	$\alpha_{\mu 1}$	$(\alpha_{\mu\nu})$	$\alpha_{\mu n}$	$\alpha_{\mu 0}$
$\vdots$	...	...	...	...
y_m	α_{m1}	$\cdots \alpha_{m\nu}$	$\cdots \alpha_{mn}$	α_{m0}

. (137)

Da bei der Anwendung der 4. Regel (*Rechteckregel*) die $\alpha_{\mu k}$ (außer $\alpha_{\mu\nu}$) gebraucht werden, fügt man an (136) die sog. *Kellerzeile* K mit den $\alpha_{\mu k}$ an. Als Rechenkontrolle werden den Schemata (vgl. 1. Beispiel) rechts die zusätzliche Probespalten P angefügt. Im Ausgangsschema I sind die Elemente von P so zu ermitteln, daß die Zeilensumme einschließlich des Werts in P gleich 1 ist. Bei der Transformation auf das neue Schema II werden die Werte von P nach 2. und 4. Regel mit umgeformt, und zur Kontrolle muß in Schema II dann die Zeilensumme wieder gleich 1 sein. Die Reihenfolge des Austauschs, d. h. die Wahl des Pivotelements, ist grundsätzlich bis auf die Bedingung $a_{\mu\nu} \neq 0$ beliebig. Beim *numerischen Rechnen* mit zwangsläufigem Runden muß aus Gründen gesicherter Genauigkeit dasjenige Element unter den in Frage kommenden Elementen als Pivotelement ausgewählt werden, das absolut den größten Betrag hat.

Die *Lösung des Gleichungssystems* (130) erfolgt durch Übergang zum zugehörigen Funktionssystem (135) und schrittweisen Austausch der Variablen x_k gegen y_i. *Widerspruch* und somit *Nichtlösbarkeit* des Systems (130) liegt dann vor, wenn sich mindestens ein y_i nicht mehr gegen ein x_k austauschen läßt und in der betreffenden Zeile das Absolutglied nicht Null ist. Die Lösung von (130) selbst ergibt sich, indem am Ende des Austauschs die $y_i = 0$ gesetzt werden.

Austauschverfahren mit Spaltentilgung:

Zur Lösung des Systems (130) kann das Austauschverfahren in der Weise vereinfacht werden, daß die nach der 3. Regel transformierte Pivotspalte im neuen Schema (wegen $y_i = 0$) weggelassen wird.

Dabei muß im Ausgangsschema I in die Probespalte P jeweils die mit (-1) multiplizierte Zeilensumme. In den nachfolgenden Schemata muß nach Transformation dieser Elemente in P die Zeilensumme (einschließlich des Werts in P) 0 bzw. 1 sein, sofern in der Kopfspalte vor der betreffenden Zeile ein y_i bzw. ein x_k steht (vgl. 2. Beispiel).

Sind gewisse y_i nicht mehr gegen x_k austauschbar und die Absolutglieder der betreffenden Zeilen sämtlich Null, so können diese Zeilen weggelassen werden (System mit abhängigen Gleichungen).

Beispiele. 1. Mit dem Austauschverfahren soll das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

gelöst werden.

I	x_1	x_2	x_3	1	P
y_1	(1)	-2	2	-4	4
y_2	-2	3	-1	-3	4
y_3	0	-2	3	-10	10
y_4	1	2	0	0	-2
K	*	2	-2	4	-4

$\Rightarrow$

II	y_1	x_2	x_3	1	P
x_1	1	2	-2	4	-4
y_2	-2	(-1)	3	-11	12
y_3	0	-2	3	-10	10
y_4	1	4	-2	4	-6
K	-2	*	3	-11	12

$\Rightarrow$

III	y_1	y_2	x_3	1	P
x_1	-3	-2	4	-18	-20
x_2	-2	-1	3	-11	12
y_3	4	2	(-3)	12	-14
y_4	-7	-4	10	-40	42
K	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	*	4	$-\frac{14}{3}$

$\Rightarrow$

IV	y_1	y_2	y_3	1	P
x_1	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-2	$\frac{4}{3}$
x_2	2	1	-1	1	-2
x_3	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4	$-\frac{14}{3}$
y_4	$\frac{19}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$

In Schema IV ist y_4 nicht mehr austauschbar, aber das Absolutglied dieser Zeile Null. Daher liegt Lösbarkeit vor, und die Lösungen $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$ lassen sich in der Spalte der Absolutglieder ablesen.

2. Mit dem Austauschverfahren mit Spaltentilgung ist das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 = 1 \end{vmatrix}$$

zu lösen.

I	x_1	x_2	x_3	x_4	1	P
y_1	(1)	2	2	1	-6	0
y_2	2	1	1	-1	0	-3
y_3	2	-3	-1	2	-3	3
y_4	3	2	0	-2	-1	-2
K	*	-2	-2	-1	6	0

$\Rightarrow$

II	x_2	x_3	x_4	1	P
x_1	-2	-2	-1	6	0
y_2	(-3)	-3	-3	12	-3
y_3	-7	-5	0	9	3
y_4	-4	-6	-5	17	-2
K	*	-1	-1	4	-1

$\Rightarrow$

III	x_3	x_4	1	P
x_1	0	1	-2	2
x_2	-1	-1	4	-1
y_3	(2)	7	-19	10
y_4	-2	-1	1	2
K	*	$-\frac{7}{2}$	$\frac{19}{2}$	-5

$\Rightarrow$

IV	x_4	1	P
x_1	1	-2	2
x_2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	4
x_3	$-\frac{7}{2}$	$\frac{19}{2}$	-5
y_4	(6)	-18	12
K	*	3	-2

$\Rightarrow$

V	1	P
x_1	1	0
x_2	2	-1
x_3	-1	2
x_4	3	-2

Die Lösung läßt sich aus der mittleren Spalte des Schemas V ablesen.

6.4.2.4. Gaußscher Algorithmus

Dieses Verfahren ist ein Spezialfall des Austauschverfahrens in 6.4.2.3. Wird dabei, vom Austauschverfahren mit Spaltentilgung ausgehend, die am Austausch beteiligte Zeile anschließend herausgeschrieben und nicht mehr in den folgenden Austauschschritt einbezogen, so ergeben die herausgeschriebenen Gleichungen ein *gestaffeltes Gleichungssystem*, bei dem jede Gleichung gegenüber der vorhergehenden eine Unbekannte weniger enthält.

Die Überführung eines Systems (130) in ein *gestaffeltes System* äquivalenter Gleichungen kann, einfacher als mit Austausch, durch geeignete *Linearkombinationen* erreicht werden. Dabei werden schrittweise die Variablen eliminiert (vgl. Erläuterungen zu Tabelle 10). Gilt $r = n \leqq m$ (Fall 1a, Tabelle 9), wird:

$$\left|\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b_2' \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b_3'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{array}\right| \qquad (138)$$

Tabelle 10. Für den Fall $r = m = n = 4$

Koeffizient		a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	
Spaltensumme		s_1	s_2	s_3	s_4	s	$s + \sum_{k=1}^{4} s_k = \sum_{i=1}^{4} z_i$
Eliminationsstufe	E	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	z_1
	c_{21}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	z_2
		$c_{21}a_{11}$	$c_{21}a_{12}$	$c_{21}a_{13}$	$c_{21}a_{14}$	$c_{21}b_1$	$c_{21}z_1$
	c_{31}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	z_3
		$c_{31}a_{11}$	$c_{31}a_{12}$	$c_{31}a_{13}$	$c_{31}a_{14}$	$c_{31}b_1$	$c_{31}z_1$
	c_{41}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	z_4
		$c_{41}a_{11}$	$c_{41}a_{12}$	$c_{41}a_{13}$	$c_{41}a_{14}$	$c_{41}b_1$	$c_{41}z_1$
1	E	0	a'_{22}	a'_{23}	a'_{24}	b_2'	z_2' ←
	c_{32}	0	a'_{32}	a'_{33}	a'_{34}	b_3'	z_3' ←
			$c_{32}a'_{22}$	$c_{32}a'_{23}$	$c_{32}a'_{24}$	$c_{32}b_2'$	$c_{32}z_2'$
	c_{42}	0	a'_{42}	a'_{43}	a'_{44}	b_4'	z_4' ←
			$c_{42}a'_{22}$	$c_{42}a'_{23}$	$c_{42}a'_{24}$	$c_{42}b_2'$	$c_{42}z_2'$
2	E	0	0	a''_{33}	a''_{34}	b_3''	z_3'' ←
	c_{43}	0	0	a''_{43}	a''_{44}	b_4''	z_4'' ←
				$c_{43}a''_{33}$	$c_{43}a''_{34}$	$c_{43}b_3''$	$c_{43}z_3''$
3	E	0	0	0	a'''_{44}	b_4'''	z_4''' ←

Hat (130) $(n-r)$-fach unendlich viele Lösungen (Fall 1b, Tabelle 9), so sind die $(n-r)$ freien Variablen auf die rechte Seite von (138) zu bringen. Als *freie Variablen* müssen diejenigen gewählt werden, deren Koeffizienten in der Hauptdiagonalen Null werden. Nur bei einfachen ganzzahligen Koeffizienten lassen sich die Koeffizientenmatrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ (in einer Matrix vereint) ohne Zwischenzeilen und Proben äquivalent umformen (vgl. 1. Beispiel). Sonst ist nach Tabelle 10 mit Zwischenzeilen und Proben zu verfahren.

In Tab. 10 enthalten die mit E bezeichneten Zeilen die Koeffizienten, die in den Gleichungen des gestaffelten Systems entstehen. Diese Zeilen entsprechen den Gleichungen, die in den einzelnen Eliminationsstufen unverändert bleiben. Die Faktoren $c_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ $(a_{11} \neq 0)$ sind diejenigen, die mit den Koeffizienten der unveränderten Gleichung (E) multipliziert werden müssen, damit die Addition der so entstandenen Zeilen (gerahmt) mit den darüberstehenden i-ten Zeilen den ersten Koeffizienten der 1. Eliminationsstufe Null werden läßt. Analog sind die $c_{i2} = -\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$ $(a'_{22} \neq 0)$ und $c_{43} = -\frac{a''_{43}}{a''_{33}}$ $(a''_{33} \neq 0)$ die entsprechenden Faktoren weiterer Eliminationsstufen. Die $s_k = a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + a_{4k}$ und $s = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ sind die Spaltensummen, deren Summe $s + \sum_{k=1}^{4} s_k$ zur Probe mit der Summierung $\sum_{i=1}^{4} z_i$ aller Zeilensummen übereinstimmen muß. Die sich durch Addition der Zeilenkoeffizienten ergebenden Zeilensummen z_i' müssen zur Probe mit $z_i + c_{i1}z_1$ übereinstimmen. Analog muß auch $z_i'' = z_i' + c_{i2}z_2'$ als Probe erfüllt sein.

Beispiele. 1. Die Überprüfung der Lösbarkeit des im 1. Beispiel von 6.4.2.3. gegebenen Systems ergibt die folgende Kette äquivalenter und erweiterter Koeffizientenmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei wurden, mit der 1. Spalte beginnend, die Elemente unter der Hauptdiagonalen auf Null gebracht. Beispielsweise wurde die 1. Zeile der ersten Matrix nacheinander mit 2, 0 und -1 multipliziert und in dieser Reihenfolge zu den übrigen Zeilen addiert, usw. Die Nullen in der 4. Zeile der letzten Matrix kennzeichnen das Vorliegen einer abhängigen Gleichung im gegebenen System. Wegen $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3 = n$ folgt die (einzige) Lösung aus dem zur letzten Matrix gehörenden gestaffelten System:

$$\left| \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -3x_3 &= -12 \end{aligned} \right| \text{ mit } \quad x_3 = 4; \quad x_2 = 1; \quad x_1 = -2.$$

2. Die Lösung des 2. Beispiels von 6.4.2.3. ergibt sich nach dem Schema der Tabelle 10 folgendermaßen:

		a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	
		8	2	2	0	10	22
	E	1	2	2	1	6	12
	-2	2	1	1	-1	0	3
		-2	-4	-4	-2	-12	-24
	-2	2	-3	-1	2	3	3
		-2	-4	-4	-2	-12	-24
	-3	3	2	0	-2	1	4
		-3	-6	-6	-3	-18	-36

Das gestaffelte System lautet also

$$\left| \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ -3x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= -12 \\ 2x_3 + 7x_4 &= 19 \\ 6x_4 &= 18 \end{aligned} \right|$$

	Faktor	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	Summe
		8	2	2	0	10	22
1.	E	0	−3	−3	−3	−12	−21
	$-\frac{7}{3}$	0	−7	−5	0	−9	−21
			7	7	7	28	49
	$-\frac{4}{3}$	0	−4	−6	−5	−17	−32
			4	4	4	16	28
2.	E		0	2	7	19	28
	1		0	−2	−1	−1	−4
				2	7	19	28
3.	E			0	6	18	24

und von x_4 beginnend erhält man der Reihe nach

$x_4 = 3$

$x_3 = -1$

$x_2 = 2$

$x_1 = 1$

als einzige Lösung der Lösungsmenge.

3. Das System

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right|$$

ist als homogenes System stets lösbar.
Das gestaffelte System ergibt sich aus folgendem Schema:

Faktor	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i	Summe
	11	12	7	7	5	0	42
E	1	2	2	2	0	0	7
−2	2	2	1	1	1	0	7
	−2	−4	−4	−4	0	0	−14
−3	3	4	3	3	1	0	14
	−3	−6	−6	−6	0	0	−21
−5	5	4	1	1	3	0	14
	−5	−10	−10	−10	0	0	−35
E	0	−2	−3	−3	1	0	−7
−1	0	−2	−3	−3	1	0	−7
		2	3	3	−1	0	7
−3	0	−6	−9	−9	3	0	−21
		6	9	9	−3	0	21
E		0	0	0	0	0	0
E		0	0	0	0	0	0

Das gestaffelte System enthält nur zwei linear unabhängige Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right|$$

für fünf Variablen. Mit x_3, x_4 und x_5 als freie Variablen geht es in das System

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = -2x_3 - 2x_4 \\ \quad - 2x_2 = 3x_3 + 3x_4 - x_5 \end{array} \right|$$

über, so daß die dreifach unendliche Lösungsmenge

$x_1 = t_1 + t_2 - t_3$

$x_2 = -1{,}5t_1 - 1{,}5t_2 + \frac{1}{5}\,t_3$

$(t_1, t_2, t_3 \in P)$

lautet, sofern $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$ und $x_5 = t_3$ gesetzt werden.

6.5. Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

Das System:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 < b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 < b_m \end{array}\right| \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{b} \qquad (139)$$

ist ein *lineares System von m Ungleichungen* mit zwei Variablen*).

Die Wertepaare $(x_1; x_2)$, die Lösungsmenge je einer Ungleichung des Systems (139) sind, bilden geometrisch die Punktmenge je einer *Halbebene*, in welche die x_1, x_2-Ebene durch die Gerade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ zerfällt.

Die Lösungsmenge von (139) liegt in dem Bereich, der sich als Durchschnitt der Punktmengen aller Halbebenen ergibt.

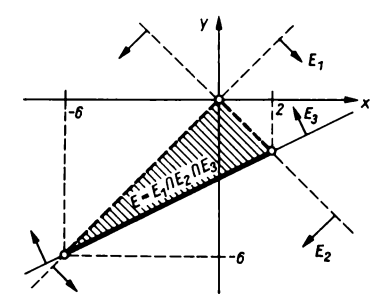


Bild 30. Grafische Lösung eines Ungleichungssystems

Beispiel. Der Bereich, in dem die Menge aller Punkte liegt, die das Ungleichungssystem:

$$x_1 - x_2 > 0$$

$$x_1 + x_2 < 0$$

$$0{,}5x_1 - x_2 \leqq 3$$

erfüllen, ist in Bild 30 dargestellt. Die Punkte der vollausgezogenen unteren Strecke gehören mit zur Lösungsmenge E.

7. Geometrie

7.1. Planimetrie und Trigonometrie

7.1.1. Ähnlichkeit

In *ähnlichen Figuren* sind einander entsprechende Strecken zueinander proportional und die entsprechenden Winkel gleich. Bei *gleichsinnig ähnlichen Figuren* muß zusätzlich zur Ähnlichkeit noch gleicher Umlaufsinn entsprechender Punkte vorliegen. Der *Proportionalitätsfaktor* wird *Ähnlichkeitsfaktor* (*Maßstab*) M genannt. Das *Bild* ist gegenüber dem *Original*

$$\left.\begin{array}{l} \text{vergrößert,} \\ \text{kongruent,} \\ \text{verkleinert,} \end{array}\right\} \text{falls } M \left\{\begin{array}{l} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{array}\right.$$

*) Anstelle des Zeichens $<$ können auch $>$, $\leqq$ oder $\geqq$ stehen.



Die *Umfänge* ähnlicher Figuren verhalten sich zueinander wie die Längen entsprechender Strecken, und die *Flächeninhalte* verhalten sich zueinander wie die Quadrate entsprechender Strecken.

Strahlensätze (Bild 31): Ist $p_1 \,||\, p_2$, verhalten sich

1. die Abschnitte auf der einen Geraden g_1 zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden g_2 und
2. die Abschnitte auf den Parallelen zueinander wie die zugehörigen, vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf einer Geraden.

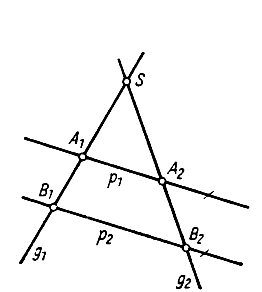


Bild 31. Strahlensätze

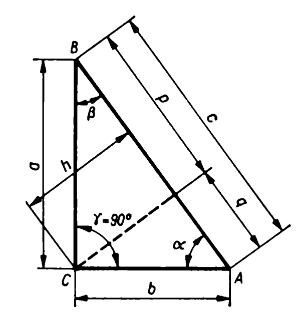


Bild 32. Rechtwinkliges Dreieck

Beispielsweise gelten:

1. $\overline{SA_1} : \overline{SB_1} = \overline{SA_2} : \overline{SB_2}$, $\overline{SA_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{SA_2} : \overline{A_2B_2}$ und
2. $\overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SB_1} = \overline{SA_2} : \overline{SB_2}$

7.1.2. Vielecke

Rechtwinkliges Dreieck (Bild 32)

Satz des PYTHAGORAS: $c^2 = a^2 + b^2$ (140)

Kathetensatz des EUKLID: $a^2 = cp, \quad b^2 = cq$ (141)

Höhensatz: $h^2 = pq$ (142)

Trigonometrische Funktionen: $\sin\alpha = a : c \quad \cos\alpha = b : c$
$\tan\alpha = a : b \quad \cot\alpha = b : a$ (143)

Allgemeines Dreieck (Bild 33)

Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (144)

Umfang: $U = a + b + c = 2s$ (145)

Flächeninhalt):* $A = ah_a/2 = bh_b/2 = ch_c/2 = r_i s = abc/4r_u$ (146)

$A = (bc/2)\sin\alpha = (ac/2)\sin\beta = (ab/2)\sin\gamma$ (147)

Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ (148)

Cosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ (149)
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

*) vgl. (190) und (191) in 7.3.3.

Schwerpunkt S: Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Umkreismittelpunkt M_u: Schnittpunkt der Mittellote über den Seiten

Inkreismittelpunkt M_i: Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Trapez (Bild 34)

Mittellinie: $m = (a + c)/2$ (150)

Flächeninhalt: $A = (a + c)\,h/2 = mh$ (151)

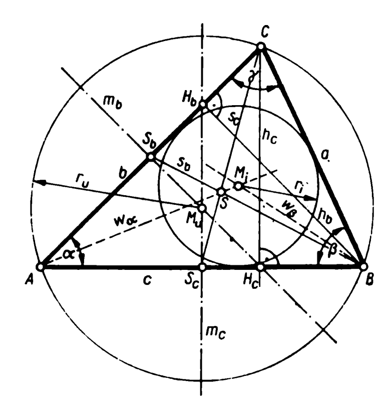


Bild 33. Allgemeines Dreieck

Bild 34. Trapez

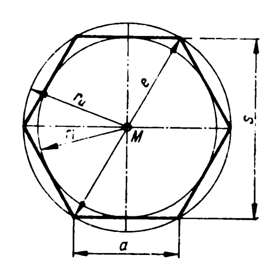


Bild 35. Regelmäßiges Sechseck

Regelmäßiges Sechseck (Bild 35)

Um- und Inkreisradius: $r_u = a, \quad r_i = a\sqrt{3}/2$ (152)

Eckenmaß: $e = 2a$ (153)

Schlüsselweite: $s = 2r_i = e\sqrt{3}/2$ (154)

Flächeninhalt: $A = 3a^2\sqrt{3}/2$ (155)

Vieleck: Durch Diagonalen lassen sich Vielecke entweder in Dreiecke oder in Dreiecke und Trapeze zerlegen. Damit können sämtliche Berechnungen an Vielecken auch auf die an Dreiecken oder Trapezen zurückgeführt werden*).

*) vgl. (190) und (191) in 7.3.3.

7.1.3. Kreis und Kreisteile

Die in den Formeln auftretenden Größen sind Bild 36 zu entnehmen. Der *Zentriwinkel* φ ist im Bogenmaß einzusetzen.

Kreisumfang: $U = \pi d = 2\pi r$ (156)

Kreisfläche: $A = \pi r^2 = \pi d^2/4$ (157)

Kreisbogen: $b = r\varphi = \widehat{AB}$ (158)

Kreisringfläche: $A = \pi(D^2 - d^2)/4 = \pi(d + a)\, a$ (159)

Kreissektor (Ausschnitt): $A = br/2 = r^2\varphi/2$ (160)

Kreissegment (Abschnitt): $A = (br - sr + sh)/2$ (161)

Sehne: $s = 2r \sin(\varphi/2) = \overline{AB}$ (162)

Pfeilhöhe (Bogenhöhe): $h = r[1 - \cos(\varphi/2)]$ (163)

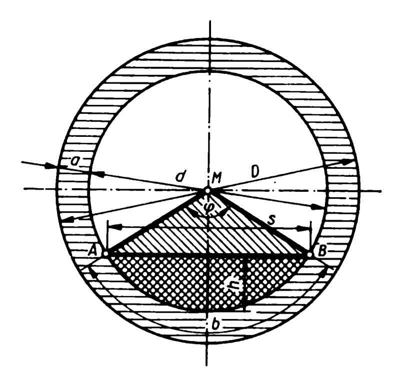


Bild 36. Kreis und Kreisteile

7.2. Stereometrie

Im folgenden bedeuten V: Volumen, A_O: Oberfläche (insgesamt) und A_M: Mantelfläche.

Sechskantsäule: Grund- und Deckfläche sind je ein regelmäßiges Sechseck der Kantenlänge a (vgl. 7.1.2. und Bild 35).

$$V = Ah = 3a^2h\sqrt{3}/2 \quad (164)$$

$$A_O = 3a\left(a\sqrt{3} + 2h\right) \quad (165)$$

Pyramide: Mit der Grundfläche A und der Höhe h wird:

$$V = Ah/3 \quad (166)$$

Pyramidenstumpf: Mit der Grund- bzw. Deckfläche A_1 bzw. A_2 wird:

$$V = h\left(A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2\right)/3 \quad (167)$$

Kreiskegel: Mit $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ ergeben sich:

$$V = \pi r^2 h/3 \quad (168)$$

$$A_O = \pi r(r + s) \quad (169)$$

$$A_M = \pi rs \quad (170)$$

Kegelstumpf: Mit dem Grund- bzw. Deckkreisradius R bzw. r und der Mantellinie s ergeben sich:

$$V = \pi h(R^2 + r^2 + Rr)/3 \quad (171)$$

$$A_O = \pi[R^2 + r^2 + s(R + r)] \quad (172)$$

$$A_M = \pi s(R + r) \quad (173)$$

Hohlzylinder: Mit den Maßen des Kreisringquerschnitts nach Bild 36 wird:

$$V = \pi h(D^2 - d^2)/4 = \pi ha(D + d)/2 \qquad (174)$$

Torus oder zylindrischer Ring (Bild 37):

$$V = \pi^2 Dd^2/4 \qquad (175)$$

$$A_0 = \pi^2 Dd \qquad (176)$$

Die Kugel und ihre Teile werden durch Rotation der in Bild 38 schraffierten Flächen um die Drehachse erzeugt.

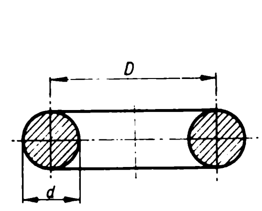


Bild 37. Torus

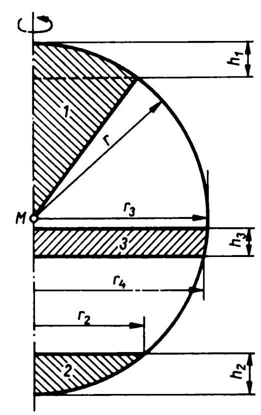


Bild 38. Kugel und Kugelteile

Kugel (Halbkreis als erzeugende Fläche):

$$V = 4\pi r^3/3 \qquad (177)$$

$$A_0 = 4\pi r^2 = \pi d^2 \qquad (178)$$

Kugelsektor (erzeugende Fläche 1 in Bild 38):

$$V = 2\pi r^2 h_1/3 \qquad (179)$$

$$A_0 = A_M = \pi r(r_1 + 2h_1) \qquad (180)$$

Kugelsegment (erzeugende Fläche 2 in Bild 38):

$$V = \pi h_2^2(3r - h_2)/3 \qquad (181)$$

$$A_M = 2\pi r h_2 = \pi(r_2^2 + h_2^2) \qquad (182)$$

Kugelschicht (erzeugende Fläche 3 in Bild 38):

$$V = \pi h_3(3r_3^2 + 3r_4^2 + h_3^2)/6 \qquad (183)$$

$$A_M = 2\pi r h_3 \qquad (184)$$

7.3. Analytische Geometrie der Ebene

7.3.1. Koordinatensysteme

Bei der rechnerischen Behandlung geometrischer Probleme werden in erster Linie die beiden folgenden Koordinatensysteme verwendet. (Räumliche Koordinatensysteme vgl. u. a. 8.5., 12.7.2. und 14.)

Rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem:

Durch zwei senkrecht aufeinander stehende Koordinatenachsen (*x-Achse* und *y-Achse*), die sich im Ursprung oder Nullpunkt O schneiden, werden jedem Punkt P der Ebene eineindeutig ein geordnetes Zahlenpaar oder die Koordinaten $(x; y) \in P \times P$ zugeordnet. Dabei gibt die erste Zahl als *Abszisse* x den vorzeichenbehafteten Abstand von der y-Achse und die zweite

Zahl als *Ordinate* y analog den Abstand von der x-Achse an. Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier *Quadranten* I bis IV (Bild 39).

Polarkoordinatensystem:

Das Polarkoordinatensystem besteht aus einem Strahl, der *Polarachse* p, auf dem vom *Pol* O aus die nichtnegativen reellen Zahlen abgebildet sind. Dadurch wird jedem Punkt P*) der Ebene eineindeutig ein Zahlenpaar $(\varrho; \varphi)$ zugeordnet, wobei der *Radius* $\varrho > 0$ den Abstand vom Pol und das *Argument* $\varphi \in [0°; 360°)$ den im positiven Sinne gemessenen $\sphericalangle\, p, \overline{OP}$ angibt (Bild 39).

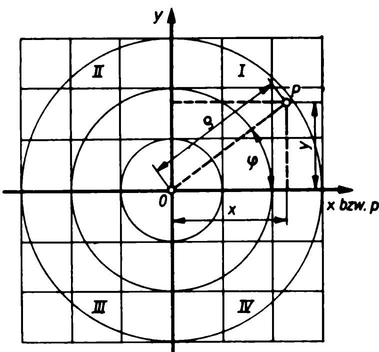


Bild 39. Koordinatensysteme

7.3.2. Koordinatentransformationen

Bei technischen Problemen ist das geometrische Gebilde (Werkstück, Baugruppe o. ä.) das Primäre, während das Koordinatensystem nach Art und Lage erst danach gewählt und zweckmäßig hineingelegt wird. Häufig ist es vorteilhaft, vom ursprünglich festgelegten System auf ein anderes Koordinatensystem oder auf eine andere Lage der Koordinatenachsen überzugehen.

Transformation von *Polar-* in *kartesische* Koordinaten:

Unter der Voraussetzung, daß die positive x-Achse mit der Polarachse und der Ursprung mit dem Pol zusammenfallen (Bild 39), gelten:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = y/x \qquad (185) \qquad \text{bzw.} \qquad x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \qquad (186)$$

Parallelverschiebung des kartesischen Koordinatensystems:

Sind die Achsen des ξ,η-Systems parallel zum x,y-System um x_0 und y_0 verschoben, so ergeben sich nach Bild 40 die Transformationsgleichungen:

$$\xi = x - x_0 \quad \text{und} \quad \eta = y - y_0 \qquad (187)$$

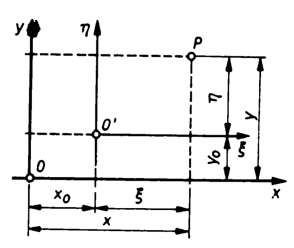


Bild 40. Paralleltransformation

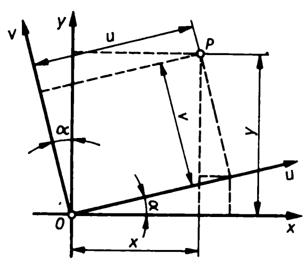


Bild 41. Drehung des Koordinatensystems

*) außer dem Pol selbst, für den $\varrho = 0$ und φ nicht definiert ist

Drehung des kartesischen Koordinatensystems:

Geht bei gleichem Ursprung das u,v-System aus dem x,y-System durch Drehung um den im positiven Sinne gemessenen Winkel α hervor (Bild 41), so gelten die Transformationsgleichungen

$$u = x \cos\alpha + y \sin\alpha \quad \text{und} \quad v = -x \sin\alpha + y \cos\alpha \tag{188}$$

bzw. nach x und y aufgelöst

$$x = u \cos\alpha - v \sin\alpha \quad \text{und} \quad y = u \sin\alpha + v \cos\alpha \tag{189}$$

7.3.3. Flächeninhalt von Vielecken

Der *Flächeninhalt* A des $\triangle\, P_1P_2P_3$ ergibt sich als algebraische Summe dreier Trapezflächeninhalte zu:

$$A = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \tag{190}$$

Die x_i und y_i ($i = 1, 2, 3$) sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks.

Analog (193) ergibt sich für den Flächeninhalt eines beliebigen *n-Ecks* mit den Eckpunkten $P_i(x_i; y_i)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) der Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1})\right| \tag{191}$$

wobei y_n statt y_0 und y_1 statt y_{n+1} zu setzen ist.

Beispiel. Der Flächeninhalt des Vierecks mit den Eckpunkten $P_1(0; -2)$, $P_2(0; 0)$, $P_3(4; 3)$ und $P_4(5; -1)$, ergibt nach (194) den Betrag

$$A = 0{,}5\,|x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)|$$
$$= 0{,}5\,|0 + 0 + 4(-1 - 0) + 5(-2 - 3)| = 14{,}5$$

7.3.4. Strecken und Geraden

Für die *Strecke* $\overline{P_1P_2}$ ergeben sich:
der *Abstand* beider Punkte

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{192}$$

die *Steigung*

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{193}$$

und die Koordinaten des Punkts T, der $\overline{P_1P_2}$ im Verhältnis $\lambda = \overline{P_1T} : \overline{TP_2}$ teilt

$$x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \tag{194}$$

Für $\lambda = 1$ liegt *Halbierung*, $\lambda > 0$ *innere Teilung* und $\lambda < 0$ äußere Teilung von $\overline{P_1P_2}$ durch T vor (Bild 42).

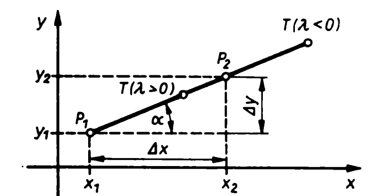


Bild 42. Strecke

Jede Gerade ist durch zwei Bestimmungsstücke festgelegt. Je nachdem, welche Stücke bekannt sind, ergeben sich die folgenden Formen der Geradengleichungen. Dabei sind A, B und C reelle Konstanten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ auf der Geraden liegende Punkte, m die Steigung nach (193), b die Ordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse, a die Abszisse des Schnittpunkts mit der x-Achse und p der Abstand von O (Bild 43).

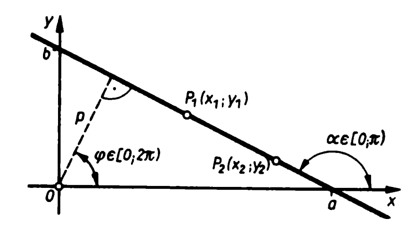


Bild 43. Gerade

Allgemeine Form: $Ax + By + C = 0$ (195)

Normalform: $y = mx + b$ (196)

Punktrichtungsform: $y - y_1 = m(x - x_1)$ (197)

Zweipunkteform: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (198)

Abschnittsform: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (199)

Hessesche *Normalform:* $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ (200)

Besondere Lagen einer Geraden

Gerade durch O: $b = -C/B = p = 0$ (201)

Parallele zur x-Achse: $m = -A/B = \cos\varphi = 0$ (202)

Parallele zur y-Achse: $B = \varphi = 0$ (203)

(195) wird auf die Form (200) durch die Beziehungen

$$\cos\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{und} \quad p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{204}$$

gebracht, wobei das Wurzelzeichen zu verwenden ist, wofür $p > 0$ wird.
Zwei Geraden g_1 und g_2 sind entweder parallel zueinander oder schneiden sich im *Schnittpunkt S* unter dem Schnittwinkel $\sigma \in (0; \pi/2]$. Die Koordinaten von S werden berechnet, indem beide Geradengleichungen als Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (vgl. 6.4.1.) aufgefaßt werden. Der Schnittwinkel σ ergibt sich aus:

$$\tan\sigma = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \tag{205}$$

Parallelitätsbedingung: $m_1 = m_2$ (206)

Orthogonalitätsbedingung: $m_1 m_2 = -1 \Leftrightarrow \sigma = 90°$ (207)

Beispiele. 1. Eine Gerade schneidet die Koordinatenachsen in $(0; -5)$ und $(20/3; 0)$. Gesucht ist ihre Gleichung in der Hesseschen Normalform. Wegen $b = -5$ und $a = 20/3$ ergibt sich nach (199) die Geradengleichung $\dfrac{3x}{20} - \dfrac{y}{5} = 1$, bzw. auf die allgemeine Form (195) gebracht: $3x - 4y - 20 = 0$. Mit $A = 3$, $B = -4$ und $C = -20$ folgen $\cos\varphi = 0{,}6$, $\sin\varphi = -0{,}8$ und $p = 4$ und somit die Geradengleichung in der Hesseschen Normalform zu $0{,}6x - 0{,}8y - 4 = 0$.

2. Der Schnittpunkt der Geraden g_1: $2x - y = 0$ und g_2: $2x - 3y + 6 = 0$ hat (vgl. 1. Beispiel in 6.4.1.) die Koordinaten $S(1{,}5;\,3)$. Da $m_1 = 2$ und $m_2 = 2/3$, ergibt sich der Schnittwinkel σ beider Geraden aus $\tan\sigma = 4/7$ mit $\sigma = 29{,}7°$.

7.3.5. Kreise

Ein *Kreis* ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt (*Mittelpunkt M*) einen konstanten Abstand (*Radius r*) haben.
Nach Bild 44, mit dem Mittelpunkt $M(x_M;\,y_M)$ und dem Radius r, lautet nach Anwendung des Satzes des Pythagoras auf den beliebigen (laufenden) Punkt $P(x;\,y)$ im ξ,η-System und anschließender Koordinatentransformatic ι nach (187) die *Gleichung des Kreises in allgemeiner Lage:*



$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \tag{208}$$

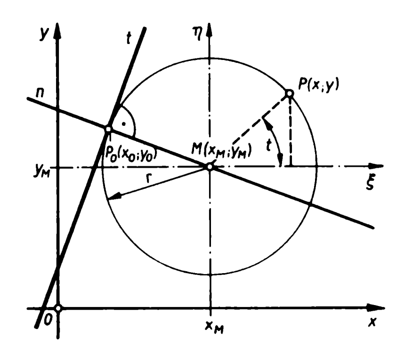


Bild 44. Kreis in allgemeiner Lage

oder in einer *Parameterdarstellung:*

$$x = x_M + r\cos t; \qquad y = y_M + r\sin t \tag{209}$$

Die *Mittelpunktsgleichung* des Kreises folgt mit $x_M = y_M = 0$ als Spezialfall von (208):

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{210}$$

Die Gleichung der in $P_0(x_0;\,y_0)$ an den Kreis (208) gelegten *Tangente t* lautet:

$$(x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2 \tag{211}$$

und die Gleichung der zugehörigen *Normalen n:*

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_M}{x_0 - x_M}(x - x_0) \tag{212}$$

7.3.6. Parabeln

Eine *Parabel* ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Abstände von einer festen Geraden (der *Leitlinie l*) und von einem festen Punkt (dem *Brennpunkt F*) gleich sind.
Die Gleichung einer Parabel wird besonders einfach, wenn das Koordinatensystem so gelegt wird, daß eine Koordinatenachse mit der Symmetrieachse der Parabel zusammenfällt und der Ursprung in den Scheitel S der Parabel fällt (Bild 45). Da für einen beliebigen Parabelpunkt P definitionsgemäß $\overline{LP} = \overline{PF}$ gilt, folgt daraus mit p als *Halbparameter* die *Scheitelgleichung:*

$$y^2 = \pm 2px \tag{213}$$

der *nach rechts* (oberes Vorzeichen) bzw. *nach links* (unteres Vorzeichen) *geöffneten* Parabel und:

$$x^2 = \pm 2py \quad \text{oder} \quad y = ax^2 \quad (a = \pm 1/2p) \tag{214}$$

der *nach oben* (oberes Vorzeichen) bzw. *nach unten* (unteres Vorzeichen) *geöffneten* Parabel.

Analog (213) und (214) ergeben sich, wenn der Scheitel $S\ (x_S;\ y_S)$ außerhalb des Ursprungs und die Parabelachse parallel zu einer Koordinatenachse liegt (Bild 46), die *Scheitelgleichung in achsenparalleler* Lage:

$$(y - y_S)^2 = \pm 2p(x - x_S) \tag{215}$$

der *nach rechts* (oberes Vorzeichen) bzw. *nach links* (unteres Vorzeichen) *geöffneten* Parabel und die Scheitelgleichung:

$$(x - x_S)^2 = \pm 2p(y - y_S) \tag{216}$$

der *nach oben* (oberes Vorzeichen) bzw. *nach unten* (unteres Vorzeichen) *geöffneten* Parabel.

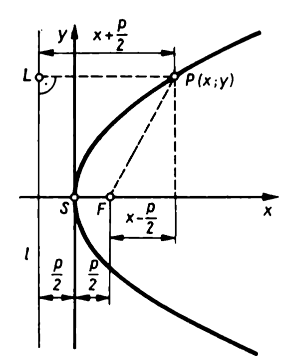


Bild 45. Parabel in Scheitellage

Bild 46. Parabeln in achsenparalleler Lage

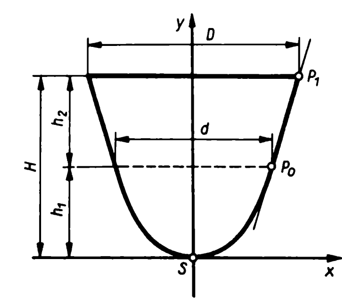


Bild 47. Behälterschnitt

Die Gleichungen der in $P_0(x_0;\ y_0)$ an die Parabeln (215) bzw. (216) gelegten *Tangenten* sind:

$$(y - y_S)(y_0 - y_S) = \pm p(x + x_0 - 2x_S) \tag{217}$$

bzw.

$$(x - x_S)(x_0 - x_S) = \pm p(y + y_0 - 2y_S) \tag{218}$$

und der zugehörigen *Normalen*:

$$y - y_0 = \pm \frac{y_S - y_0}{p}(x - x_0) \tag{219}$$

$$x - x_0 = \pm \frac{x_S - x_0}{p}(y - y_0) \tag{220}$$

Beispiel. Ein rotationssymmetrischer Behälter, dessen Schnitt in Bild 47 dargestellt ist, soll aus einem parabolförmigen Unterteil mit aufgesetztem Kegelstumpf so gestaltet werden, daß aus Gründen eines günstigen Spannungsverlaufs ein knickloser Übergang an der Stelle P_0 gewährleistet ist. Welches Verhältnis $D : d$ ergibt sich, wenn $h_1 = h_2 = 0{,}5H$ gegeben ist?
Im Schnitt liegt der Parabeltyp (214) vor, dessen Halbparameter sich nach Einsetzen der Koordinaten von $P_0(0{,}5d;\ h_1)$ aus $d^2/4 = 2ph_1$ zu $p = d^2/8h_1$ ergibt. $\overline{P_0P_1}$ ist ein Teil der Tangente t an die Parabel in P_0. Die Tangentengleichung lautet nach (218) mit $x_S = y_S = 0$: $x = \dfrac{d}{4h_1}y + \dfrac{d}{4}$. Werden in diese die Koordinaten von $P_1(0{,}5D;\ H)$ eingesetzt, folgt aus $\dfrac{D}{2} = \dfrac{d}{4h_1}H + \dfrac{d}{4}$ das gesuchte Verhältnis $D : d = 3 : 2$.

7.3.7. Ellipsen und Hyperbeln

Eine *Ellipse* (Bild 48)	Eine *Hyperbel* (Bild 49)

ist die Menge aller Punkte der Ebene, für welche die

Summe	Differenz

ihrer Abstände von zwei festen Punkten (den *Brennpunkten* F_1 und F_2) konstant ist. Mit $\overline{F_1F_2} = 2e$, $\overline{A_1A_2} = 2a$, $\overline{B_1B_2} = 2b$, $\overline{F_1P} = r_1$ und $\overline{PF_2} = r_2$ gelten:

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{221}$$

$$a^2 - e^2 = b^2 \tag{222}$$

$$\varepsilon = e/a < 1 \tag{223}$$

$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{224}$$

$$e^2 - a^2 = b^2 \tag{225}$$

$$\varepsilon = e/a > 1 \tag{226}$$

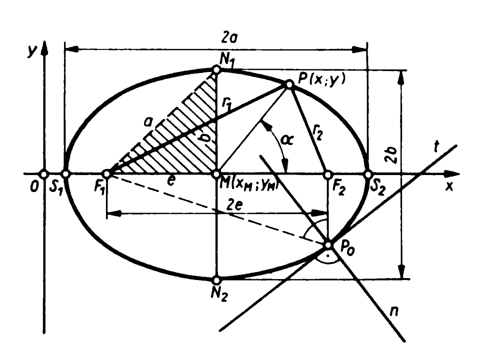


Bild 48. Ellipse

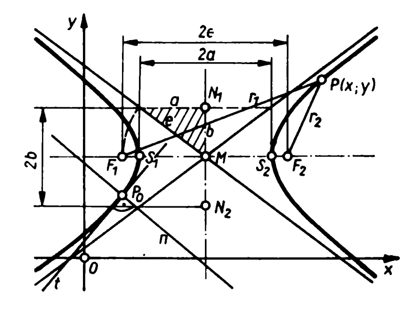


Bild 49. Hyperbel

Mittelpunktsgleichungen mit $M(0; 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{227}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{228}$$

Gleichungen in achsenparalleler Lage mit $M(x_M; y_M)$:

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1 \tag{229}$$

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1 \tag{230}$$

Gleichung der in $P_0(x_0; y_0)$ an die Ellipse (229) bzw. Hyperbel (230) gelegten *Tangente t:*

$$\frac{(x - x_M)(x_0 - x_M)}{a^2} \pm \frac{(y - y_M)(y_0 - y_M)}{b^2} = 1 \tag{231}$$

und der zugehörigen *Normalen n:*

$$y - y_0 = \pm \frac{a^2(y_0 - y_M)}{b^2(x_0 - x_M)}(x - x_0) \tag{232}$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen für die *Ellipse*, das untere für die *Hyperbel*.
Gleichungen der beiden *Asymptoten der Hyperbel* (230):

$$y - y_M = \pm(x - x_M)(b/a) \tag{233}$$

Beispiel. Es sind Parameterdarstellungen der Konturen des in Bild 50 dargestellten Werkstücks aufzustellen, wenn Kurve 1 eine Halbellipse darstellt. Aus Symmetriegründen wird 0 in den Kreismittelpunkt und die große Ellipsenhalbachse in die x-Achse gelegt. Halbkreis und Halbellipse haben somit Mittelpunkts-



lage. Mit 10 mm $\triangleq$ 1 KE und den reellen Variablen (Parametern) t_1, t_2, t_3 und t_4 ergeben sich, im Linkssinn von unten links beginnend, folgende *Parameterdarstellungen*:

1. $x = 40 \cos t_1$; $y = 30 \sin t_1$ $(-90° \leqq t_1 \leqq 90°)$
2. $x = 0$; $y = 30 - t_2$ $(0 \leqq t_2 \leqq 20)$
3. $x = 10 \sin t_3$; $y = 10 \cos t_3$ $(0° \leqq t_3 \leqq 180°)$
4. $x = 0$; $y = -(10 + t_4)$ $(0 \leqq t_4 \leqq 20)$

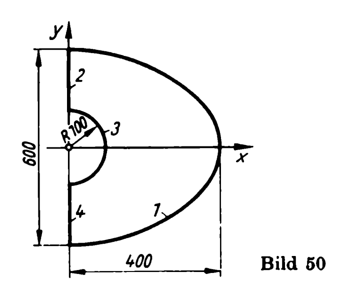


Bild 50

7.3.8. Spiralen

Spiralen werden analytisch am zweckmäßigsten in *Polarkoordinaten* dargestellt.

Archimedische Spirale: Der Radius $\varrho = \overline{OP}$ des laufenden Punkts P (Bild 51) ändert sich proportional mit dem Argument φ, daher die Gleichung:

$$\varrho = a\varphi \tag{234}$$

Der Abstand von Windung zu Windung auf einem vom Pol ausgehenden Strahl hat den konstanten Betrag $2\pi a$.

Logarithmische Spirale: Ihre Gleichung in Polarkoordinaten (Bild 52) lautet:

$$\varrho = ae^{b\varphi} \tag{235}$$

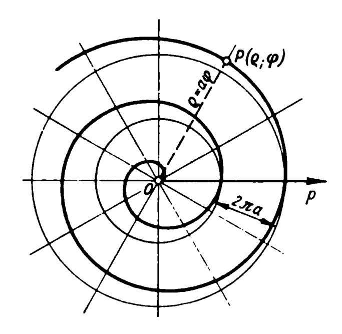


Bild 51. Archimedische Spirale

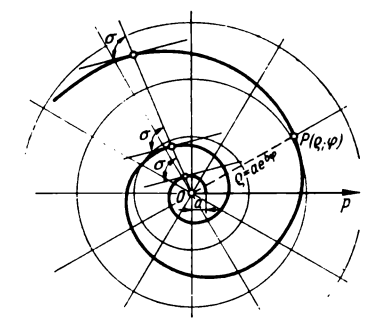


Bild 52. Logarithmische Spirale

Für $\varphi = 0 \Rightarrow \varrho = a$ und, wenn φ negative Werte annimmt, wird $\lim\limits_{\varphi \to -\infty} \varrho = 0$. Jeder von O ausgehende Strahl schneidet die Windungen unter dem gleichen Schnittwinkel σ (vgl. Beispiel in 13.2.2.).

7.3.9. Zyklische Rollkurven

Rollt ein Kreis mit dem Radius r auf einem festen Kreis mit Radius R (ohne zu gleiten) ab, so beschreiben alle Punkte (z. B. P, P', P'') der abrollenden Kreisebene *zyklische Rollkurven.* Dabei wird der Kreisbegriff im erweiterten Sinne, nämlich Geraden mit $r = \infty$ bzw. $R = \infty$ einschließend, angewandt. Es entstehen:

1. *Zykloiden* (Bild 53), wenn der feste Kreis eine Gerade g ist ($R = \infty$),
2. *Epizykloiden* (Bilder 54 und 57), wenn der Rollkreis *außen* auf dem festen Kreis abrollt,
3. *Hypozykloiden* (Bilder 55 und 58), wenn der Rollkreis *innen* auf dem festen Kreis abrollt, und
4. *Kreisevolventen* (Bild 56), wenn der Rollkreis eine Gerade g ($r = \infty$) ist.

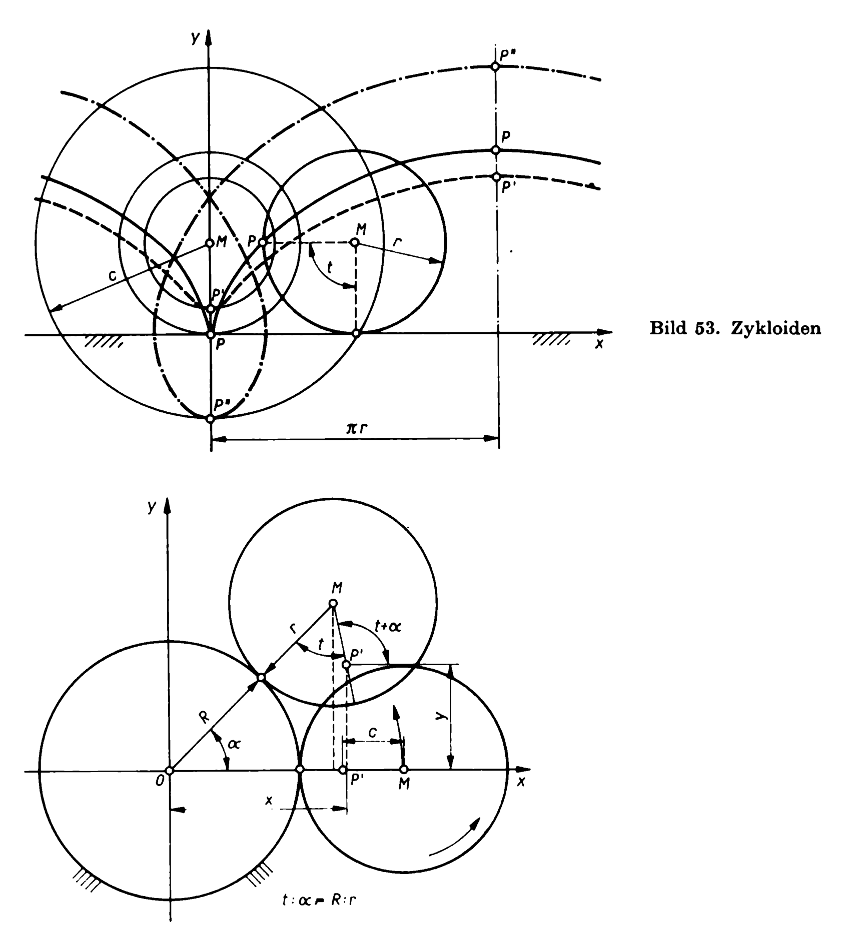


Bild 53. Zykloiden

Bild 54. Erzeugung der Epizykloide

Die Epizykloiden und Hypozykloiden werden zu in sich geschlossenen Kurven (nach einer bestimmten Zahl von Rollkreisumläufen), wenn das Verhältnis $m = r/R$ eine rationale Zahl ist.

Je nachdem, ob der erzeugende Punkt auf, innerhalb oder außerhalb der Rollkreisperipherie liegt, entstehen mit:

$c = r$ (Punkt P) *gespitzte*
$c < r$ (Punkt P') *gestreckte*
$c > r$ (Punkt P'') *verschlungene*
} Zykloiden, Epizykloiden, Hypozykloiden

bzw.
$c = 0$ (Punkt P) *gespitzte*
$c \neq 0$ (P' und O auf verschiedenen Seiten von g) *gestreckte*
$c \neq 0$ (P'' und O auf der gleichen Seite von g) *verschlungene*
} Kreisevolventen

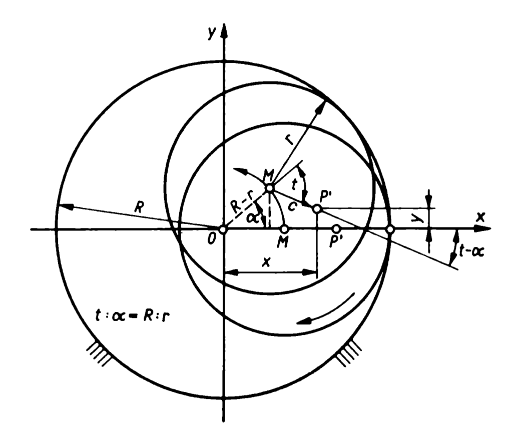


Bild 55. Erzeugung der Hypozykloide

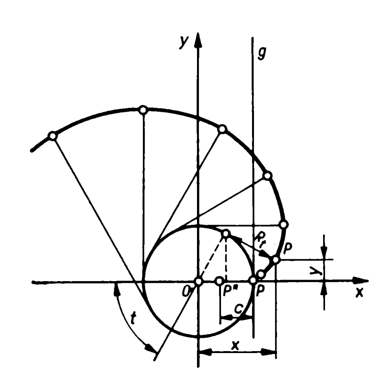


Bild 56. Kreisevolvente

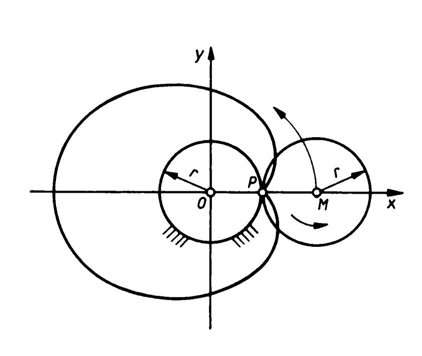


Bild 57. Kardioide

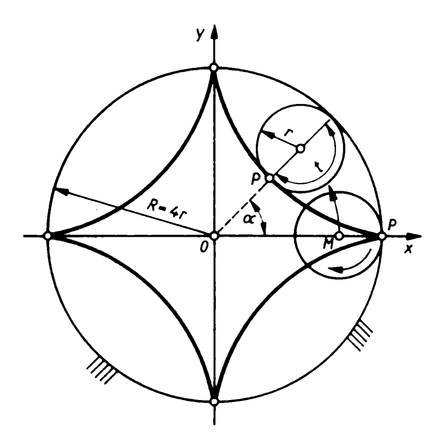


Bild 58. Astroide

Die Gleichungen der zyklischen Rollkurven ergeben sich am zweckmäßigsten in den in Tabelle 11 ersichtlichen Parameterdarstellungen mit dem *Wälzwinkel t* als Parameter.

Tabelle 11. Gleichungen zyklischer Rollkurven

Zyklische Rollkurve	Kurvengleichung
Zykloide	$x = rt - c \sin t;\ y = r - c \cos t$
gespitzte Zykloide	$x = r(t - \sin t);\ y = r(1 - \cos t)$
Epizykloide	$x = (R + r) \cos \frac{r}{R} t - c \cos \frac{R+r}{R} t;\ y = (R + r) \sin \frac{r}{R} t - c \sin \frac{R+r}{R} t$
Kardioide (Bild 57) $(R = r = c)$	$x = r(2 \cos t - \cos 2t);\ y = r(2 \sin t - \sin 2t)$
Hypozykloide	$x = (R - r) \cos \frac{r}{R} t + c \cos \frac{R-r}{R} t;\ y = (R - r) \sin \frac{r}{R} t - c \sin \frac{R-r}{R} t$
Astroide (Bild 58) $\left(r = c = \frac{1}{4} R\right)$	$x = R \cos^3 \frac{t}{4};\ y = R \sin^3 \frac{t}{4} \quad (t = 4\alpha)$
Ellipse (Bild 48) $\left(r = \frac{1}{2} R,\ a = \frac{1}{2} R + c,\ b = \frac{1}{2} R - c\right)$	$x = \left(\frac{R}{2} + c\right) \cos \frac{t}{2};\ y = \left(\frac{R}{2} - c\right) \sin \frac{t}{2} \quad (t = 2\alpha)$
Kreisevolvente	$x = R(\cos t + t \sin t) - c \cos t;\ y = R(\sin t - t \cos t) - c \sin t$
gespitzte Kreisevolvente $(c = 0)$ (Bild 56)	$x = R(\cos t + t \sin t);\ y = R(\sin t - t \cos t)$
Archimedische Spirale $(c = R)$	$x = Rt \sin t;\ y = -Rt \cos t$

8. Elementare reelle Funktionen

8.1. Definition und Darstellungsmöglichkeiten

Eine *reelle Funktion* f ist die Menge aller *geordneten Paare* $(x; y)$, in denen jedem $x \in X \subseteq P$ genau ein $y \in Y \subseteq P$ zugeordnet ist. Damit ist f eine *eindeutige Abbildung* (vgl. 3.4.).

Dabei heißen X *Definitionsbereich*, Y *Wertebereich* und (wegen der Abbildungsrichtung $x \to y$) x *unabhängige Variable* oder *Argument* und y *abhängige Variable* oder *Funktionswert* von f.

Darstellungsmöglichkeiten:

1. *verbal*, d. h., die Zuordnungsvorschrift ist in Worten gegeben,
2. *tabellarisch* durch eine *Wertetafel*,
3. *grafische Darstellung:* Die Wertepaare werden als Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt — Bild von f.
4. *analytische Darstellung* der Zuordnungsvorschrift durch eine oder mehrere Gleichungen — *Funktionsgleichungen* — in folgenden Formen:
   explizite Darstellung von f: $y = f(x)$, d. h. nach y aufgelöst,
   implizite Darstellung von f: $f(x, y) = 0$, d. h. nicht explizit oder in
   Parameterdarstellung von f: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, wobei x und y einzeln als Funktionswerte einer *Hilfsvariablen* t (*Parameter*) angegeben werden.

Statt der symbolischen Schreibweise für f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$:

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x)\} \quad \text{oder} \quad f: y = f(x) \quad \text{oder} \quad x \to y = f(x)$$

wird häufig kurz von der Funktion $y = f(x)$ gesprochen.

Beispiel. Den nichtnegativen reellen Zahlen werden ihre Quadratwurzeln zugeordnet. Dieser verbalen Darstellung entsprechen die analytische Darstellung $f: y = \sqrt{x}$ mit $x \geqq 0$ und die grafische Darstellung als oberer Ast der nach rechts geöffneten Normalparabel in Bild 59, wobei die Punkte in sich dicht liegen, so daß eine zusammenhängende Kurve entsteht.

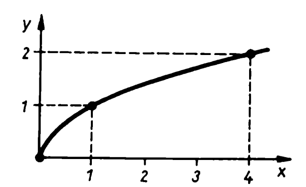


Bild 59. $f: y = \sqrt{x}$

8.2. Funktionstypen mit besonderen Eigenschaften

Identische Funktionen: Zwei Funktionen f und g sind identisch (geschrieben: $f \equiv g$), wenn sie im Definitions- und Wertebereich übereinstimmen und für jedes x des Definitionsbereichs gilt:

$$f(x) = g(x)$$

Monotone Funktionen: Die in X definierte Funktion f mit $x_1, x_2 \in X$ heißt:

monoton wachsend, falls $f(x_1) \leqq f(x_2)$ und $x_1 < x_2$
monoton fallend, falls $f(x_1) \geqq f(x_2)$ und $x_1 < x_2$

Fehlt das Gleichheitszeichen, so liegt *strenge Monotonie* vor.

Symmetrische Funktionen: Gilt für jedes $x \in X$ der Funktion $f: y = f(x)$

$$f(x) = f(-x) \quad (236) \quad \mid \quad f(x) = -f(-x) \quad (237)$$

so wird f

gerade Funktion | *ungerade Funktion*

genannt, und in der grafischen Darstellung ist ihr Bild

axialsymmetrisch zur y-Achse | *zentralsymmetrisch* zum Ursprung O

Periodische Funktionen: Eine Funktion ist *periodisch*, wenn

$$f(x) = f(x + kp) \quad (238)$$

$p \in P^+$ heißt *primitive Periode* und kp *Periode* der Funktion ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Umkehrfunktion: Ist die Funktion $f: y = f(x)$ eineindeutig*) in X, so entsteht durch Vertauschung der Abbildungsrichtung von $x \to y$ in $y \to x$ (vgl. 3.4.) wieder eine Funktion f^{-1}, die *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* zu f genannt wird. Analytisch ergibt sich die Funktionsgleichung von f^{-1} aus der von f durch Vertauschung der Variablen. Grafisch liegen die Bilder von f und f^{-1} axialsymmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Verläuft f in $X_1, X_2, \ldots$ stückweise jeweils streng monoton, so existiert für jedes Intervall $X_1, X_2, \ldots$ je eine Umkehrfunktion $f_1^{-1}, f_2^{-1}, \ldots$

Stetige Funktionen: Eine Funktion $f: y = f(x)$ ist an der Stelle $x = a$ genau dann *stetig*, wenn:

1. $f(x)$ an der Stelle $x = a$ definiert ist und
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

*) Dies ist bei strenger Monotonie stets der Fall.

f heißt *stetige Funktion* im Intervall $[x_1; x_2]$, wenn Stetigkeit für alle $x \in [x_1; x_2]$ vorliegt (an den Randstellen einseitige Stetigkeit).

Beschränkte Funktionen: Eine Funktion heißt in X *beschränkt*, falls für alle $x \in X$ gilt: $|f(x)| \leqq B \in P^+$.

Beispiel. Die Funktion

$$f: y = \operatorname{sgn} x \Leftrightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{in } (0; +\infty) \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{in } (-\infty; 0) \end{cases} \quad \text{(Bild 60)}$$

ist wegen Erfüllung von (237) eine ungerade Funktion, die an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit (Sprungstelle) hat, da $f(0) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \pm 0} f(x) = \pm 1 \neq 0$. Sie ist wegen $|\operatorname{sgn} x| \leqq 1 = B$ beschränkt.

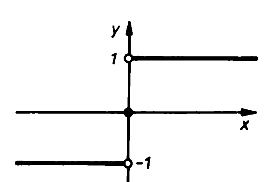


Bild 60. f: $y = \operatorname{sgn} x$

8.3. Algebraische Funktionen

Jede Funktion, deren Funktionsgleichung auf die Form:

$$P_0(x) + P_1(x)\,y + P_2(x)\,y^2 + \cdots + P_n(x)\,y^n = 0 \tag{239}$$

gebracht werden kann, wobei die $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ganzrationale Polynome sind, wird *algebraische Funktion* genannt.

8.3.1. Potenzfunktionen

Allgemeiner Typ der Funktionsgleichung einer *Potenzfunktion:*

$$y = ax^k \qquad (a, k \in P) \tag{240}$$

Der Faktor a bewirkt für $a > 1$ ein *Stauchen* und für $a < 1$ ein *Strecken* der Kurve in Richtung der y-Achse, bezogen auf Funktionen mit $a = 1$.
Die Potenzfunktionen lassen sich nach der Gestalt ihrer Kurven und nach den Symmetrieeigenschaften in mehrere Gruppen einteilen, von denen die wichtigsten für $a = 1$ und $n \in N$ in Tabelle 12 und den Bildern 61, 62 und 63 dargestellt sind.

Tabelle 12. Potenzfunktionen vom Typ $y = x^k$

k	Funktionsgleichung	Name der Kurven	Definitionsbereich X	Bild
0	$y = x^0$		$P \setminus \{0\}$	61
$2n$	$y = x^{2n}$	*Parabeln* k-ter Ordnung	P	61
2	$y = x^2$	*Normalparabel*	P	61
$2n - 1$	$y = x^{2n-1}$	*Parabeln* k-ter Ordnung	P	61
1	$y = x$	Gerade	P	61
$-2n$	$y = \frac{1}{x^{2n}}$	*Hyperbeln*	$P \setminus \{0\}$	62

Tabelle 12 (Fortsetzung)

k	Funktionsgleichung	Name der Kurven	Definitionsbereich X	Bild
$-2n+1$	$y = \frac{1}{x^{2n-1}}$	*Hyperbeln*	$P \setminus \{0\}$	62
-1	$y = \frac{1}{x}$	*gleichseitige Hyperbel*	$P \setminus \{0\}$	62
$\frac{1}{2n}$	$y = \sqrt[2n]{x};\ y = -\sqrt[2n]{x}$	je eine *Halbparabel*	$P^+ \cup \{0\}$	63
$\frac{1}{2n+1}$	$y = \sqrt[2n+1]{x};\ y = -\sqrt[2n+1]{-x}$	je eine *Halbparabel*	$P^+ \cup \{0\}$ bzw. $P^- \cup \{0\}$	63
$\frac{3}{2}$	$y = \sqrt{x^3};\ y = -\sqrt{x^3}$	NEILsche *Parabel*	$P^+ \cup \{0\}$	63

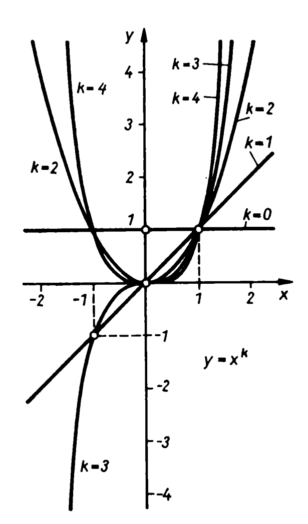


Bild 61. f: $y = x^k$

Bild 62. f: $y = \frac{1}{x^k}$

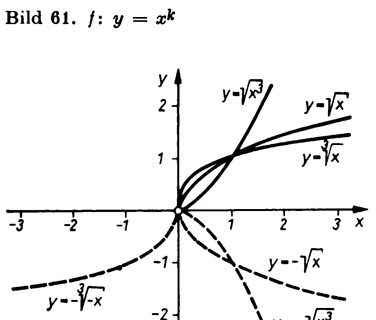


Bild 63. Wurzelfunktionen

8.3.2. Ganzrationale Funktionen

Die *ganzrationale Funktion n-*ten Grads hat die Funktionsgleichung:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \tag{241}$$

wobei die Koeffizienten $a_k \in P$ und $a_n \neq 0$.
Die Bilder ganzrationaler Funktionen werden *Parabeln n-ter Ordnung* genannt. (241) ist definiert für alle $x \in P$, die Kurven verlaufen über dem gesamten Definitionsbereich stetig, knickfrei und ohne abzureißen.
Wichtige Spezialfälle von (241) sind:

Lineare Funktionen (vgl. 7.3.4. mit $b = a_0$ und $m = a_1$):

$$y = a_0 + a_1x \tag{242}$$

Quadratische Funktionen (vgl. 7.3.6.):

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{243}$$

deren Kurven nach oben oder unten geöffnete Parabeln sind, deren Parabelachse parallel zur y-Achse verläuft und deren Scheitel die Koordinaten $S\left(-\frac{a_1}{2a_2};\, a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right)$ haben.

Ganzrationale Funktionen 3. Grads:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \tag{244}$$

Potenzfunktionen (vgl. 8.3.1.):

$$y = a_nx^n \tag{245}$$

Die *Nullstellen* $x = x_N$, wofür die $f(x_N) = 0$ werden, sind die reellen Lösungen der Gleichung n-ten Grads (102) aus 6.2.4., die entsteht, wenn in (241) $y = 0$ gesetzt wird. Ist x_N eine n-fache Lösung von (102), so liegt eine *Nullstelle n-ter Ordnung* oder eine *n-fache Nullstelle* vor. An der Nullstelle wird die x-Achse von der Kurve berührt oder geschnitten (bei mehrfachen Nullstellen unter einem Schnittwinkel von 0°).

Berechnung der Funktionswerte von (241) mit Hilfe des HORNER*schen Schemas:* Aus den in der 1. Zeile geschriebenen Koeffizienten a_k folgen über den Algorithmus $b_n = a_n$ und $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$ $(k \neq n)$ die Koeffizienten b_k, von denen der letzte $b_0 = f(x_0)$, also gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0 ist. Im Schema wechseln Addition und Multiplikation einander ab.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
		$+$	$+$		$+$	$+$
	$\downarrow$	a_nx_0	$b_{n-1}x_0$	$\cdots$	b_2x_0	b_1x_0
		$\nearrow\downarrow$	$\nearrow\downarrow$		$\nearrow\downarrow$	$\nearrow\downarrow$
x_0	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_1	$b_0 = f(x_0)$

Gl. (241) läßt sich nach Potenzen von $(x - x_0)$ oder an der Stelle $x_0 \in P$ über die TAYLOR-*Formel* entwickeln:

$$y = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k \tag{246}$$

wobei $c_0 = f(x_0)$ und $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Die c_k können auch durch Fortsetzung des HORNERschen Schemas ermittelt werden. Vgl. 1. Beispiel.

Ermittlung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grads (241), deren Kurve durch $n + 1$ vorgegebene Punkte $P_k(x_k; y_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ geht, nach dem NEWTON*schen Interpolationsverfahren:*

$$y = p_0 + p_1(x - x_0) + p_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ p_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \tag{247}$$

Die Koeffizienten p_k von (247) lassen sich zweckmäßig nach folgendem Schema berechnen:

$\cdots$	$x_{k+3} - x_k$	$x_{k+2} - x_k$	$x_{k+1} - x_k$	x_k	$y_k = p_k^0$	p_k^1	p_k^2	p_k^3	$\cdots$
				x_0	$\underline{y_0}$				
			$x_1 - x_0$			$\underline{p_0^1}$			
		$x_2 - x_0$		x_1	y_1		$\underline{p_0^2}$		
	$x_3 - x_0$		$x_2 - x_1$			p_1^1		$\underline{p_0^3}$	
		$x_3 - x_1$		x_2	y_2		p_1^2		
			$x_3 - x_2$			p_2^1			
				x_3	y_3				

Dabei gilt: $p_k^i = \dfrac{p_{k+1}^{i-1} - p_k^{i-1}}{x_{k+i} - x_k}$, und die p_k von (247) sind die im Schema unterstrichenen Werte in der Reihenfolge von links oben nach rechts unten (vgl. 2. Beispiel).

Beispiele. 1. Die Funktion $y = -3x^3 - 8x^2 - 8x - 4$ ist nach Potenzen von $(x + 1)$ oder an der Stelle $x_0 = -1$ zu entwickeln. Mit dem HORNERschen Schema ergibt sich

	-3	-8	-8	-4
		3	5	3
-1	-3	-5	-3	$\underline{\underline{-1}} = f(-1) = c_0$
		3	2	
-1	-3	-2	$\underline{-1}$	
		3		
-1	-3	$\underline{1}$		
-1	$\underline{-3}$			

$$y = -1 - (x + 1) + (x + 1)^2 - 3(x + 1)^3$$

2. Welche Funktionsgleichung hat die ganzrationale Funktion 3. Grads, die durch die Punkte $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(2; -8)$, $(3; -3)$ geht? Das Schema zu (247) lautet:

$x_{k+3} - x_k$	$x_{k+2} - x_k$	$x_{k+1} - x_k$	x_k	$y_k = p_k^0$	p_k^1	p_k^2	p_k^3
			-1	$\underline{1}$			
		1			$\underline{-1}$		
	3		0	0		$\underline{-1}$	
4		2			-4		$\underline{1}$
	3		2	-8		3	
		1			5		
			3	-3			

Damit wird $y = 1 - (x + 1) - (x + 1)x + (x + 1)x(x - 2) = x^3 - 2x^2 - 4x$.

8.3.3. Gebrochenrationale Funktionen

Eine *gebrochenrationale Funktion* ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)} \tag{248}$$

und definiert für sämtliche $x \in P$, für die der Nenner $N(x)$ nicht verschwindet.
Die Funktion heißt *echt gebrochen* bei $n < m$, *unecht gebrochen* bei $n \geqq m$.
(248) hat für

$x = x_N$ eine *Nullstelle*, wenn $Z(x_N) = 0 \wedge N(x_N) \neq 0$,

$x = x_P$ eine *Polstelle*, wenn $N(x_P) = 0 \wedge Z(x_P) \neq 0$ *)

$x = x_L$ eine *Lückenstelle*, wenn $N(x_L) = 0 \wedge Z(x_L) = 0 \wedge i \geqq k$ *).

Asymptoten sind Geraden, denen sich die Kurven für $x \to \pm\infty$ oder $y \to \pm\infty$ immer besser anschmiegen. Sie treten an den Polstellen als Parallelen zur y-Achse (*Sperrgeraden*) auf und sind wesentliches Hilfsmittel zur grafischen Darstellung (vgl. Bilder 49, 62 und 87).

Sonderfälle von gebrochenrationalen Funktionen (248) sind die Potenzfunktionen in 8.3.1., Tabelle 12, deren Bilder Hyperbeln mit der x- und y-Achse als Asymptoten sind.

8.4. Transzendente Funktionen

8.4.1. Exponentialfunktionen

Eine *Exponentialfunktion* hat eine Funktionsgleichung vom Typ:

$$y = a^x \qquad (a \in P^+) \tag{249}$$

Sie ist für alle $x \in P$ definiert, schneidet die y-Achse (wegen $a^0 = 1$) im Punkt (0; 1), hat keine Nullstelle und die x-Achse zur Asymptote (Bild 64).
Die Funktion verläuft streng monoton

— wachsend für $a > 1$ (Funktion des *natürlichen Wachstums*) bzw.
— fallend für $a < 1$ (Funktion des *natürlichen Zerfalls*).

Für $a = 1$ entartet (249) zur Parallelen zur x-Achse.

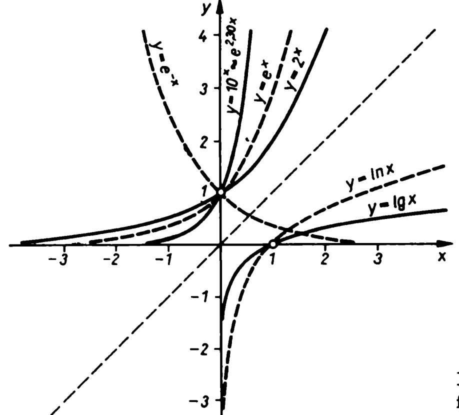


Bild 64. Exponential- und Logarithmusfunktionen

*) wenn x_L i-fache Nullstelle von $Z(x)$ und k-fache Nullstelle von $N(x)$ ist. Falls $i < k$, liegt eine Polstelle vor.

Wichtigste Sonderfälle sind für $a = \mathrm{e}$*) bzw. $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ die Exponentialfunktionen:

$$y = \mathrm{e}^x \qquad (250) \qquad \text{bzw.} \qquad y = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x = \mathrm{e}^{-x} \qquad (251)$$

Da $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, läßt sich jede Exponentialfunktion auf folgenden Typ zurückführen:

$$y = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \mathrm{e}^{kx} \qquad (252)$$

8.4.2. Logarithmusfunktionen

Die *Logarithmusfunktion:*

$$y = \log_a x \qquad (253)$$

ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion (249). Sie ist definiert für $x \in P^+$, hat bei $x = 1$ die einzige Nullstelle und verläuft für $a > 1$ streng monoton wachsend (vgl. Bild 64). Die wichtigsten Sonderfälle sind für $a = \mathrm{e}$ bzw. $a = 10$ die Logarithmusfunktionen:

$$y = \ln x \qquad (254) \qquad \text{bzw.} \qquad y = \lg x \qquad (255)$$

8.4.3. Trigonometrische Funktionen

Die in 7.1.2. am rechtwinkligen Dreieck definierten *trigonometrischen Funktionen***) lassen sich für beliebige Winkel $\alpha \in P$ am *Einheitskreis* definieren. Mit den Koordinaten des beliebigen Peripheriepunkts $P(u; v)$ auf dem Einheitskreis im u,v-System des Bilds 65 gelten:

$$\sin \alpha = v, \quad \cos \alpha = u, \quad \tan \alpha = v/u, \quad \cot \alpha = u/v$$

Die Vorzeichen der Funktionswerte in den Quadranten sind in Tabelle 13 zusammengefaßt.

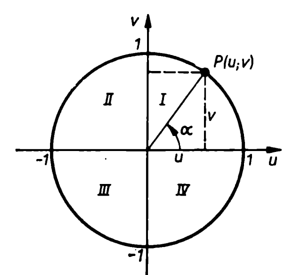


Bild 65. Einheitskreis

Tabelle 13. Vorzeichen der Funktionswerte in den Quadranten

Funktion	Quadrant I	II	III	IV
sin α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tan α	+	−	+	−
cot α	+	−	+	−

*) e = 2,718...
**) auch *goniometrische Funktionen* oder Winkelfunktionen genannt

Die Kurvenverläufe der vier trigonometrischen Funktionen mit dem Winkel x im Bogenmaß sind in den Bildern 66 und 67 dargestellt. Charakteristische Eigenschaften der Funktionen sind in Tabelle 14 zusammengefaßt.

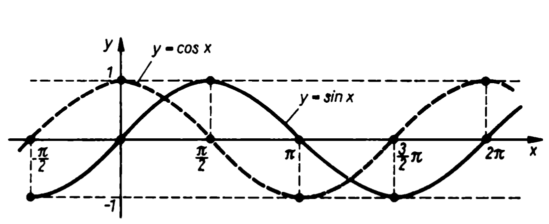


Bild 66. Sinus- und Cosinusfunktion

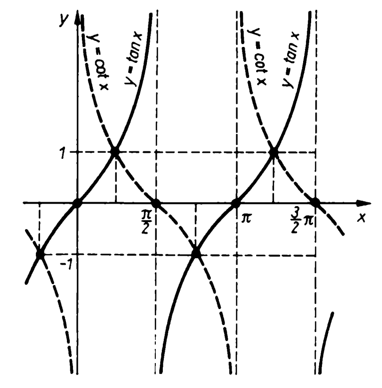


Bild 67. Tangens- und Cotangensfunktion

Tabelle 14. Trigonometrische Funktionen

Funktions-gleichung	Definitionsbereich X	Werte-bereich Y	Symmetrie	Primitive Periode p
$y = \sin x$	P	$[-1; 1]$	ungerade Funktion	2π
$y = \cos x$	P	$[-1; 1]$	gerade Funktion	2π
$y = \tan x$	$P \setminus \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in G\right\}$	P	ungerade Funktion	π
$y = \cot x$	$P \setminus \{k\pi \wedge k \in G\}$	P	ungerade Funktion	π

Mit Hilfe der *Quadrantenrelationen* in Tabelle 15 und der Periodizität der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha \qquad \tan(\alpha + k \cdot 180°) = \tan\alpha$$
$$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha \qquad \cot(\alpha + k \cdot 180°) = \cot\alpha \qquad (k \in G) \qquad (256)$$

wird die Ermittlung der Funktionswerte für einen beliebigen Winkel α auf spitze Winkel zurückgeführt.

Tabelle 15. Quadrantenrelationen

α	$\sin\alpha =$	$\cos\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\cot\alpha =$
$90° < \alpha \leqq 180°$	$\sin(180° - \alpha)$	$-\cos(180° - \alpha)$	$-\tan(180° - \alpha)$	$-\cot(180° - \alpha)$
$180° < \alpha \leqq 270°$	$-\sin(\alpha - 180°)$	$-\cos(\alpha - 180°)$	$\tan(\alpha - 180°)$	$\cot(\alpha - 180°)$
$270° < \alpha \leqq 360°$	$-\sin(360° - \alpha)$	$\cos(360° - \alpha)$	$-\tan(360° - \alpha)$	$-\cot(360° - \alpha)$
$\alpha < 0°$	$-\sin(-\alpha)$	$\cos(-\alpha)$	$-\tan(-\alpha)$	$-\cot(-\alpha)$

Tabelle 16. Funktionswerte für besondere Winkel

Funktion	Winkel				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen:

Die in Tabelle 17 dargestellten Zusammenhänge zwischen den Funktionen bei gleichem Winkel $\alpha \in P$ gehen aus folgenden Grundbeziehungen hervor:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{257}$$

$$\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha \tag{258}$$

$$\cot\alpha = 1/\tan\alpha \tag{259}$$

Tabelle 17. Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen

Gesucht	Gegeben			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

Additionstheoreme und Folgerungen: Für $\alpha \in P$ und $\beta \in P$ gelten:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{260}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{261}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \tag{262}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \tag{263}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \qquad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tag{264}$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 \qquad = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \cot \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \qquad = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \tan \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{265}$$

Allgemeine Sinusfunktion (*harmonische Schwingung*)

$$y = A \sin (\omega t + \varphi) \tag{266}$$

Die Einflüsse der *Amplitude* A (maximaler Funktionswert), der *Kreisfrequenz* ω und des *Nullphasenwinkels* φ auf den Kurvenverlauf sind an den Beispielen in Bild 68 zu erkennen.

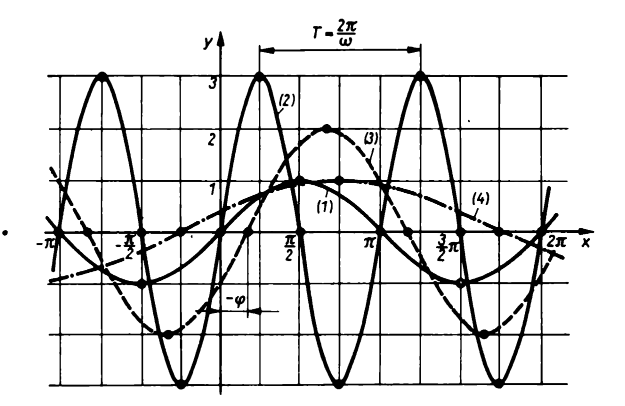


Bild 68. Allgemeine Sinusfunktion. (1) $y = \sin t$ ($A = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$); (2) $y = 3 \sin 2t$ ($A = 3$, $\omega = 2$, $\varphi = 0$); (3) $y = 2 \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$ $\left(A = 2, \omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{6}\right)$; (4) $y = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ $\left(A = 1, \quad \omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{8}\right)$

8.4.4. Zyklometrische Funktionen

Die *zyklometrischen Funktionen* (*Arcusfunktionen*) sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen jeweils in dem Monotonieintervall, das für die zyklometrischen Funktionen Wertebereich ist (Tabelle 18 und Bilder 69 und 70).
Ferner gelten:

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \tag{267}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2 \tag{268}$$



Tabelle 18. Zyklometrische Funktionen

Funktionsgleichung	Definitionsbereich X	Wertebereich Y	Symmetrie
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	ungerade Funktion
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	—
$y = \arctan x$	P	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	ungerade Funktion
$y = \operatorname{arccot} x$	P	$(0; \pi)$	—

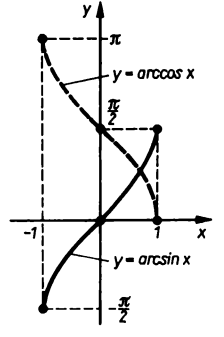


Bild 69. Arcussinus- und Arcuscosinusfunktion

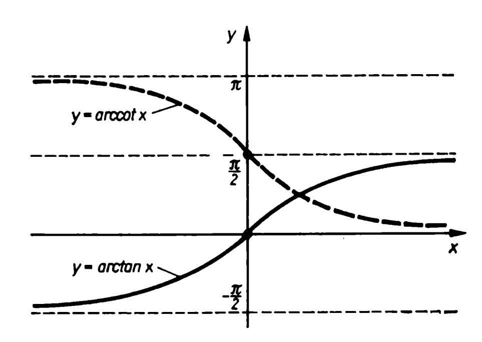


Bild 70. Arcustangens- und Arcuscotangensfunktion

Beispiel. Die Ermittlung des Funktionswerts arcsin 0,5 ergibt sich aus der Fragestellung: Wie groß ist der Winkel y in $Y = [-\pi/2; \pi/2])$, dessen Sinus 0,5 ist? Dies ist der Fall für $y = \pi/6$, also $\arcsin 0{,}5 = \pi/6$.

8.4.5. Hyperbelfunktionen

Die *Hyperbelfunktionen* oder *hyperbolischen Funktionen* setzen sich aus Exponentialfunktionen zusammen (Tabelle 19 und Bilder 71 und 72).

Tabelle 19. Hyperbelfunktionen

Funktionsgleichung	Definitionsbereich X	Wertebereich Y	Symmetrie	
$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	P	P	ungerade	Funktion
$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	P	$[1; +\infty)$	gerade	Funktion
$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	P	$(-1; 1)$	ungerade	Funktion
$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$P \setminus \{0\}$	$P \setminus [-1; 1]$	ungerade	Funktion

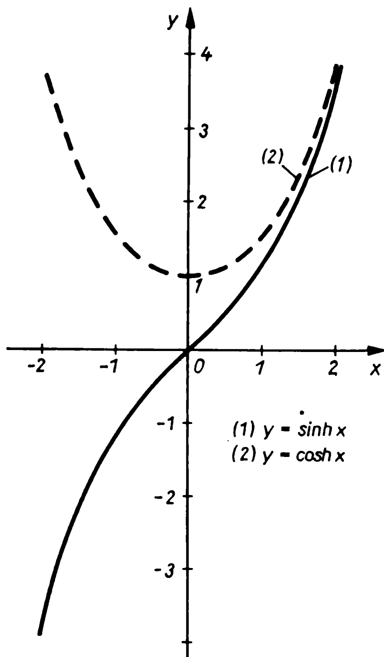


Bild 71. Hyperbelsinus- und Hyperbelcosinusfunktion

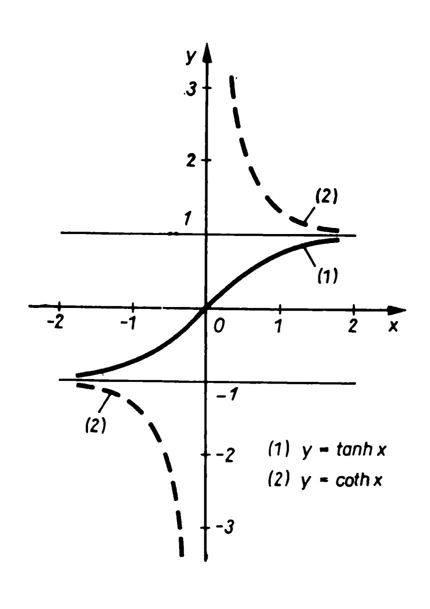


Bild 72. Hyperbeltangens- und Hyperbelcotangensfunktion

Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{269}$$

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x \tag{270}$$

$$\coth x = 1/\tanh x \tag{271}$$

Beispiel. Ein (symmetrisch zur y-Achse) frei durchhängendes Seil, das ohne Biegesteifigkeit nur durch die Eigenmasse belastet wird, nimmt eine Gestalt an, die als *Kettenlinie* bezeichnet wird. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet $y = h \cosh (x/h)$.

8.4.6. Areafunktionen

Die *Areafunktionen* sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen (Tabelle 20 und Bilder 73 und 74).

Tabelle 20. Areafunktionen

Funktionsgleichung	Definitionsbereich X	Wertebereich Y	Symmetrie
$y = \text{arsinh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	P	P	ungerade Funktion
$y = \text{arcosh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$	$[1; +\infty)$	$[0; +\infty)$	
$y = \text{artanh}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$	$(-1; 1)$	P	ungerade Funktion
$y = \text{arcoth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$	$P \setminus [-1; 1]$	$P \setminus \{0\}$	ungerade Funktion

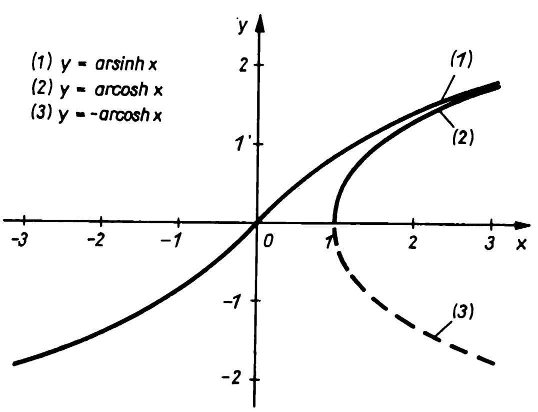


Bild 73. Areasinus- und Areacosinusfunktion

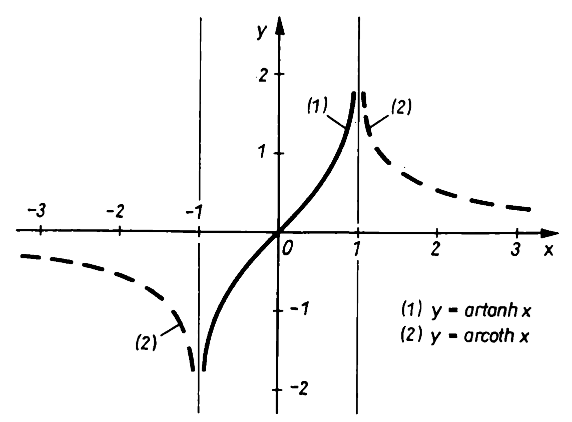


Bild 74. Areatangens- und Areacotangensfunktion

8.5. Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

Die Funktion f ist (analog 8.1.) die Menge aller geordneten *Tripel* $(x; y; z)$, in denen jedem geordneten Paar $(x; y) \in D \subseteqq P \times P$ genau ein $z \in W \subseteqq P$ zugeordnet ist.
Symbolische Schreibweise von f mit der Funktionsgleichung (explizit) $z = f(x; y)$:

$$f\colon (x; y) \to z = f(x; y) \quad \text{oder kurz} \quad z = f(x; y) \tag{272}$$

Jedem geordneten Zahlentripel $(x; y; z)$ entspricht eineindeutig ein Punkt P mit den Koordinaten $(x; y; z)$ in einem *räumlichen kartesischen Koordinatensystem.* Im allgemeinen ergibt die grafische Darstellung einer Funktion (272) eine Fläche im Raum. Als grafische Darstellungsarten solcher Flächen werden verwendet:

1. das *Schrägbild* (vgl. Bilder 16 und 97 bis 101), wobei u. a. charakteristische Punkte und die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen ermittelt und eingezeichnet werden;
2. die Darstellung in der x,y-Ebene mit Kurven der Schar $z =$ konst. als *Niveau-* oder *Höhenlinien* (Bilder 75 und 117).

Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen

Die Funktion f ist die Menge aller geordneten $(n + 1)$-*Tupel* $(x_1; x_2; \ldots; x_n; y)$, in denen jedem n-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D$ genau ein $y \in W$ zugeordnet ist.

Schreibweise der Funktionsgleichung:

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) \tag{273}$$

Beispiel. Die Funktion mit der Gleichung $z = 4 - x^2 - y^2$ unter der zusätzlichen Bedingung $z \geqq 0$ ist geometrisch die Oberfläche eines Paraboloids mit dem Scheitel in (0; 0; 4). Die Schnittkurven für $x = 0$ bzw. $y = 0$, also mit der x,z-Ebene bzw. der y,z-Ebene, sind Parabeln, und in der x,y-Ebene ergibt sich der Grundkreis mit $r = 2$ (vgl. Bild 16). Die Niveau- oder Höhenlinien bilden die Kreisschar $C = 4 - x^2 - y^2$, deren Kreise für $z = C = 0, 1, 2, 3$ in Bild 75 eingetragen sind.

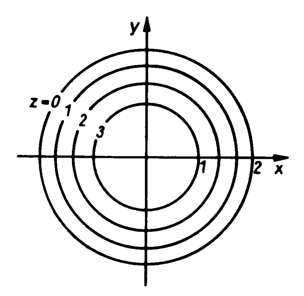


Bild 75. Niveaulinien des Paraboloids Bild 16

9. Folgen und Reihen

9.1. Endliche Zahlenfolgen

Eine *endliche reelle Zahlenfolge**) ist eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich eine endliche Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, z\}$ der natürlichen Zahlen ist.

Darstellungsmöglichkeiten:

1. *Verbal* (die Zuordnungsvorschrift in Worten), z. B. die Folge der ersten 10 Quadratzahlen,
2. *Aufzählen der Glieder* u_n der Folge: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots, u_z$, wobei u_1 Anfangs-, u_z End- und u_n n-tes (allgemeines) Glied genannt werden,
3. *Funktionsgleichung:* $u_n = f(n)$ und Definitionsbereich,
4. *rekursiv:* $u_{n+1} = f(u_n; n)$, u_1 und u_z,
5. *geometrisch* als Folge isolierter Punkte auf der Zahlengeraden oder in einem Koordinatensystem.

Die Eigenschaften *Monotonie* und *Identität* von Folgen sind analog denen bei Funktionen definiert (vgl. 8.2.).
Die wichtigsten endlichen Folgen sind die *arithmetischen Folgen* (1. Ordnung) und die *geometrischen Folgen* (vgl. Tabelle 21).

Tabelle 21. Endliche Folgen

	Arithmetische Folge	Geometrische Folge
Definition	$u_{n+1} - u_n = d =$ konst. d: *Differenz*	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q =$ konst. q: *Quotient*
n-tes Glied u_n	$u_n = u_1 + (n - 1)\,d$	$u_n = u_1 q^{n-1}$
Summe s_n der ersten n Glieder	$s_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$	$s_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

*) Eine Zahlenfolge wird im folgenden kurz *Folge* genannt.

Beispiel. Es sollen Behälter von 40 ··· 400 l Fassungsvermögen in 6 Größen bei geometrischer Stufung hergestellt werden. Aus Tabelle 21 ergeben sich $q = \sqrt[5]{10}$ und damit folgende Volumina in Liter V/l: $u_1 = 40$, $u_2 = 40\sqrt[5]{10} \approx 60$, $u_3 = 40\sqrt[5]{10^2} \approx 100$, $u_4 = 40\sqrt[5]{10^3} \approx 160$, $u_5 = 40\sqrt[5]{10^4} \approx 250$, $u_6 = 400$.

9.2. Unendliche Zahlenfolgen

Eine *unendliche reelle Zahlenfolge* ist eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich die Menge N der natürlichen Zahlen ist. Ihre Gliederanzahl $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ist damit unbegrenzt.
Eine Folge ist:

1. *nach unten beschränkt,* falls $u_n \geqq K_1$ (untere Schranke K_1),
2. *nach oben beschränkt,* falls $u_n \leqq K_2$ (obere Schranke K_2) und
3. *beschränkt,* falls $|u_n| \leqq K$ (Schranke K).

Eine nach oben und unten beschränkte Folge ist beschränkt und umgekehrt.
Die Folgen lassen sich in zwei Klassen einteilen:

1. *konvergente Folgen,* die einen Grenzwert g (vgl. 10.1.) haben, und
2. *divergente Folgen,* die keinen Grenzwert haben.

Nullfolgen sind konvergente Folgen mit dem Grenzwert $g = 0$.

Konvergenzkriterien für Folgen:

1. Eine beschränkte und monotone Folge ist stets konvergent.
2. Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ so angegeben werden kann, daß für alle Indizes $n_1 > N(\varepsilon)$ und $n_2 > N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|u_{n1} - u_{n2}| < \varepsilon$ gilt.

Beispiele konvergenter Folgen:

1. Eine geometrische Folge mit $u_n = u_1 q^{n-1}$ und $|q| < 1$ ist eine (konvergente) Nullfolge.
2. Die Folge mit $u_n = [1 + (1/n)]^n$ ist konvergent und hat den Grenzwert e (vgl. 10.1.).

9.3. Unendliche Reihen

Die zur unendlichen Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ gehörige Folge der *Partialsummen* $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2, \ldots, s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \ldots$ oder in symbolischer Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (274)$$

heißt *unendliche Reihe**).
Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in P$, so wird die Reihe konvergent und s die *Summe der Reihe* genannt.
Nichtkonvergente Reihen heißen divergent.

Zur Konvergenz- bzw. Divergenzuntersuchung stehen u. a. folgende Kriterien zur Verfügung:

1. *notwendige* Bedingung für Konvergenz von (274): $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
2. *hinreichende* Bedingung für Divergenz von (274): $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$
3. Kriterien für Reihen *mit positiven Gliedern:*

   – *Majorantenkriterium:* Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ eine *konvergente Vergleichsreihe* ist, so konvergiert (274), falls $u_n \leqq v_n$ **).

   – *Minorantenkriterium:* Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ eine *divergente Vergleichsreihe* ist, so divergiert (274), falls $u_n \geqq v_n$ **).

---

*) im folgenden kurz Reihe genannt
**) von einem bestimmten n ab

— *Wurzelkriterium:* Falls

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k \quad \begin{array}{l}\text{und } 0 \leqq k < 1, \text{ konvergiert die Reihe}\\ \text{und } k > 1, \text{ divergiert die Reihe}\end{array}$$

— *Quotientenkriterium:* Falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k \quad \begin{array}{l}\text{und } 0 \leqq k < 1, \text{ konvergiert die Reihe}\\ \text{und } k > 1, \text{ divergiert die Reihe}\end{array}$$

(Wurzel- und Quotientenkriterium liefern im Falle $k = 1$ keine Entscheidung).

4. LEIBNIZ-*Kriterium* für *alternierende Reihen:* Die Reihe konvergiert, wenn:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0 \quad \text{und} \quad |u_{n+1}| \leqq |u_n|.$$

5. Kriterium für Reihen *mit beliebigen Gliedern:* Eine Reihe ist (absolut) konvergent, falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ konvergent ist.

Häufig verwendete *Vergleichsreihen:*

die divergente *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

die konvergente *geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ mit $|q| < 1$ und $s = \frac{u_1}{1-q}$,

die konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ mit $\alpha > 1$.

Beispiele. 1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$ ist auf Konvergenz zu untersuchen. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1 \neq 0$ ist die hinreichende Bedingung für Divergenz erfüllt, also die Reihe divergent.

2. Zur Konvergenzuntersuchung der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ kann die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ als konvergente Vergleichsreihe herangezogen werden. Wegen $\sin(n\alpha) \leqq 1$ wird $u_n \leqq v_n$. Damit konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium.

9.4. Potenzreihen

Eine *Potenzreihe* ist eine spezielle *Funktionenreihe**) der Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \equiv a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{275}$$

Dabei sind $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ reelle Konstanten und $(x - x_0)^n = 1$ für $n = 0$ und auch für $x = x_0$. Aus (275) ergibt sich für $x_0 = 0$ der wichtige Spezialfall:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{276}$$

Die Konvergenzuntersuchung für eine Potenzreihe (275) kann ergeben:

1. Divergenz für alle $x \neq x_0$ oder *Konvergenzradius* $r = 0$, d. h., die Reihe *konvergiert nirgends.*
2. Konvergenz für alle $x \in (-\infty; +\infty)$ oder $r = \infty$, d. h., die Reihe *konvergiert beständig.*
3. (Absolute) Konvergenz für alle $|x - x_0| < r \in P$ und Divergenz für alle $|x - x_0| > r$.

An den Grenzen P_1 und P_2 des *Konvergenzintervalls* (Bild 76) kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen, was mit Hilfe der Kriterien aus 9.3. gesondert ermittelt werden muß.
Der *Konvergenzradius* r folgt aus:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{oder} \quad r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{277}$$

*) Die Glieder der Reihe sind Funktionen von x.

Potenzreihen dürfen innerhalb des Konvergenzintervalls gliedweise mit einem Faktor multipliziert, linear kombiniert, multipliziert, gliedweise differenziert und integriert werden.

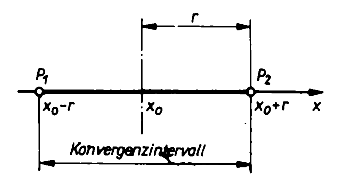


Bild 76. Konvergenzradius

Entwicklung einer Funktion $f: y = f(x)$ in eine Potenzreihe:

TAYLOR*sche Reihe* als Entwicklung an der Stelle $x = x_0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{278}$$

MACLAURIN*sche Reihe* als Sonderfall von (278) für $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{279}$$

(278) und (279) setzen voraus, daß f in einer Umgebung von x_0 definiert, beliebig oft differenzierbar ist und für das Restglied*):

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \tag{280}$$

wenn $0 < \vartheta < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ gilt.

Für ganzrationale Funktionen n-ten Grads wird $R_{n+1} = 0$ [vgl. auch 8.3.2. (246)].

Die Reihenentwicklungen der wichtigsten reellen Funktionen sind mit Angabe des Konvergenzintervalls in Tabelle 22 zusammengefaßt.

Tabelle 22. Reihenentwicklungen reeller Funktionen

Potenzreihe	Konvergenzintervall X
$(a + x)^m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} a^{m-n} x^n$ $\quad (m \in P)$ (*binomische Reihe*)	$(-a; +a)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots$	$(-1; 1)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + - \cdots$	$(-1; 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - + \cdots$	$(-1; 1)$
$\sqrt{1+} = 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 + - \cdots$	$(- .; 1)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3} x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 - + \cdots$	$(-1; 1)$
$a^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$ $\quad (a > 0)$	$(-\infty; +\infty)$

*) LAGRANGEsche Form des Restglieds

Tabelle 22 (Fortsetzung)

Potenzreihe	Konvergenz-intervall
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$(-\infty; +\infty)$
$\ln x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}\right\} = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \cdots\right]$	$(0; +\infty)$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$	$(-\infty; +\infty)$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$	$(-\infty; +\infty)$
$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$	$[-1; 1]$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$	$[-1; 1]$
$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	$(-\infty; +\infty)$
$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$(-\infty; +\infty)$
$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,k!}$ (GAUSSsches *Fehlerintegral*)	$(-\infty; +\infty)$

Näherungsformeln: Für Berechnungen in der technischen Praxis werden Funktionswerte nur selten mit einer größeren Genauigkeit als 1% benötigt, da durch Idealisierungen, Fertigungsungenauigkeiten, Spiel, experimentell ermittelte Werkstoffkennziffern usw. Unsicherheiten vorliegen, die eine genauere Rechnung sinnlos werden lassen. Die in Tabelle 23 dargestellten Näherungsformeln ergeben sich aus den Reihen der Tabelle 22 und ersparen daher das Aufsuchen der Funktionswerte in Tabellen. Die hinter den Näherungsformeln angegebenen Intervalle*) enthalten die Argumente x, welche den relativen Fehler nicht über 1% anwachsen lassen.

Der Abbruch der Potenzreihenentwicklung einer Funktion nach dem Glied, das x in der k-ten Potenz enthält, ergibt eine ganzrationale Funktion k-ten Grads als Näherung. Ihr Kurvenbild wird *Schmiegungsparabel* k-ter Ordnung genannt. In Bild 77 sind die *Schmiegungsparabeln* 1. bis 3. Ordnung zur Funktion $y = e^x$ dargestellt, die sich in einer Umgebung von $x = 0$ um so besser der Kurve von $y = e^x$ anschmiegen, je größer k ist.

Beispiele. 1. Die bei Bewegungsabläufen an Schubkurbelgetrieben auftretende Funktion $f(\alpha) = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}$ soll in eine Potenzreihe entwickelt werden. Die Substitution $x = -\lambda^2 \sin^2 \alpha$ führt auf $f(x) = \sqrt{1 + x}$ $= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \cdots$ nach Tabelle 22. Damit wird $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{8}\lambda^4 \sin^4 \alpha - \cdots$. Da das in der Praxis verwendete Koppelverhältnis $\lambda < 1$ ist und $\sin \alpha \leqq 1$ gilt, wird $|x| = \lambda^2 \sin^2 \alpha < 1$. Damit konvergiert die Reihe für sämtliche $\alpha \in [0; 2\pi)$. Falls $\lambda < 0{,}3$ verwendet wird, bleibt bei Verwendung der ersten beiden Glieder der Reihe (wegen $|x| \leqq 0{,}09 \sin^2 \alpha \leqq 0{,}09$) nach Tabelle 23 der relative Fehler unter 1%.

2. Nach Tabelle 23 wird näherungsweise $e^{0,10} = 1 + 0{,}10 = 1{,}10$. Der genauere Wert ist $e^{0,10} = 1{,}105$. Damit beträgt der relative Fehler des Näherungswerts ungefähr $(0{,}5 : 1{,}015)\% = 0{,}5\%$.

*) Genauere Angaben über die Intervallgrenzen, die in Wirklichkeit nicht symmetrisch zu $x = 0$ liegen, vgl. [13].

Tabelle 23. Näherungsformeln für Potenzreihen

Näherungsformel	$\left\lvert\frac{\Delta f}{f}\right\rvert \leqq 1\%$ für
$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$	—
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$	$\lvert x\rvert < 0{,}25$
$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$	$\lvert x\rvert < 0{,}26$
$\sqrt[4]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{4}$	$\lvert x\rvert < 0{,}29$
$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{n}$	—
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$	$\lvert x\rvert < 0{,}16$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{3}$	$\lvert x\rvert < 0{,}20$
$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{4}$	$\lvert x\rvert < 0{,}23$

Näherungsformel	$\left\lvert\frac{\Delta f}{f}\right\rvert \leqq 1\%$ für
$\sin x \approx x$	$\lvert x\rvert < 0{,}24$ $\lvert x\rvert < 13{,}9°$
$\cos x \approx 1$	$\lvert x\rvert < 0{,}14$ $\lvert x\rvert < 8{,}0°$
$\tan x \approx x$	$\lvert x\rvert < 0{,}17$ $\lvert x\rvert < 9{,}9°$
$e^x \approx 1 + x$	$\lvert x\rvert < 0{,}13$
$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$	$\lvert x\rvert < 0{,}16$
$\arcsin x \approx x$	$\lvert x\rvert < 0{,}24$
$\arctan x \approx x$	$\lvert x\rvert < 0{,}17$
$\sinh x \approx x$	$\lvert x\rvert < 0{,}24$
$\cosh x \approx x$	$\lvert x\rvert < 0{,}15$

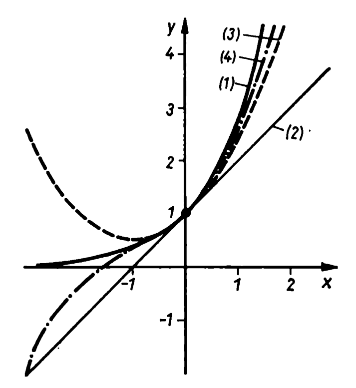


Bild 77. Schmiegungsparabeln von (1) $y = e^x$ an der Stelle $x = 0$; (2) $y = 1 + x$ (1. Ordnung); (3) $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (2. Ordnung); (4) $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ (3. Ordnung)

9.5. Fourier-Reihen

Eine periodische Funktion, deren Definitionsbereich sich über eine Periode in endlich viele Teilintervalle zerlegen läßt und die in jedem dieser Teilintervalle stetig und monoton ist, kann in eine FOURIER-*Reihe*, deren Glieder Sinus- und Cosinusfunktionen sind, der allgemeinen Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{wenn} \quad p = 2\pi \tag{281}$$

oder

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right), \quad \text{wenn} \quad p = 2l \tag{282}$$

entwickelt werden.

In den Stetigkeitsbereichen wird die Funktion f mit $y = f(x)$ durch die FOURIER-Reihe dargestellt. An den Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen) ist der Wert der Reihe gleich dem arithmetischen Mittel der beiden unterschiedlichen einseitigen Grenzwerte von f. Die Berechnung der FOURIER-*Koeffizienten* a_0, a_n und b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — FOURIER-*Analyse* oder *harmonische Analyse* genannt — erfolgt für:

(281) aus:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (283)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \qquad (284)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx \qquad (285)$$

(282) aus:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx \qquad (286)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\,dx \qquad (287)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\,dx \qquad (288)$$

Sonderfälle: Ist f eine *gerade Funktion*, wird $b_n = 0$ und:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_0 = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

bzw.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \qquad a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\,dx$$

Ist f eine *ungerade Funktion*, wird $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\,dx$$

Die Berechnung der FOURIER-Koeffizienten nach (283) bis (288) ist nur dann möglich, wenn die Funktion analytisch vorliegt oder die Funktionsgleichungen (in den Teilintervallen) ohne großen Aufwand ermittelt werden können. Die dazu am häufigsten benötigten Integrale sind (I 60) aus Tabelle 29 mit $a = 0$ und $b = n$ und (I 80a) bis (I 81b) aus Tabelle 31.

Liegt die Funktion als grafische Darstellung vor (beispielsweise von einem schreibenden Meßgerät erzeugt oder als Oszillogrammaufnahme), kann näherungsweise die Ermittlung der FOURIER-Koeffizienten mit *harmonischen Analysatoren* — das sind dem Planimeter analog ausgeführte mechanische Instrumente mit Fahrstift und Rechenwerk — oder numerisch erfolgen. Bei der numerischen Ermittlung der FOURIER-Koeffizienten entsteht eine endliche Reihe aus $4m$ ($m \in N$) Gliedern, wenn das Intervall für eine Periode in $4m$ Teile (z. B. $4m = 12$) geteilt wird. Mit den Ordinaten $y_0, y_1, \ldots, y_{4m-1}$ der Teilpunkte ergeben sich:

$$a_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{4m-1} y_i$$

$$a_n = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{4m-1} y_i \cos \frac{ni}{2m} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, 2m)$$

$$b_n = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{4m-1} y_i \sin \frac{ni}{2m} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, 2m - 1)$$

und somit:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{2m-1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + a_{2m} \cos 2mx \qquad (289)$$

Zur Reduzierung des Rechenaufwands wurden spezielle Rechenschemata entwickelt, u. a. in [9] und [23].

Tabelle 24 enthält Beispiele von FOURIER-Reihen häufig vorkommender periodischer Funktionen.

Tabelle 24. FOURIER-Reihen periodischer Funktionen

Bild	Funktionsgleichungen	
78	$f(x) = \begin{cases} A \wedge 0 < x < \pi \\ -A \wedge -\pi < x < 0 \\ f(x + 2k\pi) \end{cases}$	$f(x) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{4A}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$
79	$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\pi} x \wedge -\pi < x < \pi \\ f(x + 2k\pi) \end{cases}$	$f(x) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{2A}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right)$
80	$f(x) = \begin{cases} -A \wedge -\pi + c \leqq x \leqq -c \\ \frac{A}{c} x \wedge -c < x < c \\ A \wedge c \leqq x \leqq \pi - c \\ -\frac{A}{c}(x - \pi) \wedge \pi - c < x < \pi + c \\ f(x + 2k\pi) \end{cases}$	$f(x) = \frac{4A}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)c}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x = \frac{4A}{\pi c}\left(\sin c \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3c \sin 3x + \cdots\right)$
81	$f(x) = A\,\lvert\cos x\rvert$	$f(x) = \frac{2A}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} \cos 2nx\right)$ $= \frac{2A}{\pi}\left(1 + \frac{2}{1 \cdot 3}\cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5}\cos 4x + - \cdots\right)$
82	$f(x) = \begin{cases} A\,\lvert x\rvert \wedge -A < x \leqq A \\ f(x + 2kA) \end{cases}$	$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{A} x$ $= \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2}\left(\cos \frac{\pi}{A} x + \frac{1}{3^2}\cos \frac{3\pi}{A} x + \frac{1}{5^2}\cos \frac{5\pi}{A} x + \cdots\right)$

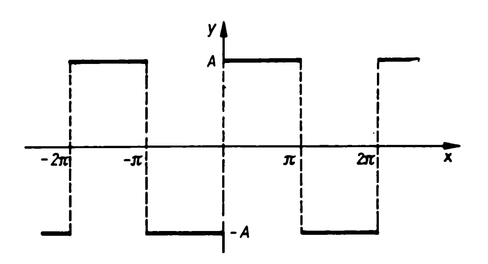


Bild 78. Rechteckkurve

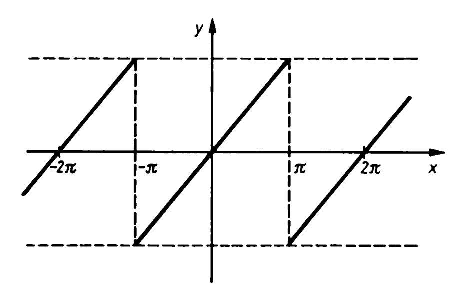


Bild 79. Sägezahnkurve

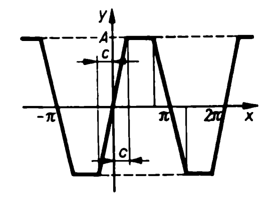


Bild 80. Trapezkurve

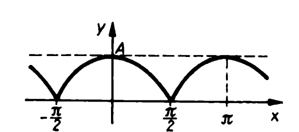


Bild 81. Gleichgerichteter Wechselstrom

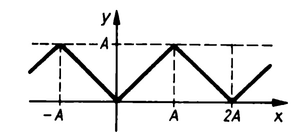


Bild 82. Dreieckskurve

10. Grenzwerte

10.1. Grenzwerte reeller Zahlenfolgen

Eine unendliche Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ hat eine reelle Konstante g als *Grenzwert* (*Limes*), wenn fast alle*) Glieder der Folge in einer *ε-Umgebung* von g liegen.
Dabei ist die ε-Umgebung von g das Intervall $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$ und ε eine beliebig kleine positive Zahl.

Definition: Die Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ hat den *Grenzwert* g, wenn sich für jede beliebige (kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß $|u_n - g| < \varepsilon$ für sämtliche $n \geqq n_0(\varepsilon)$.

Symbolische Schreib- und Sprechweisen sind:

$$u_n \to g \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = g$$

u_n strebt gegen g für n gegen ∞ bzw. der Limes von u_n für n gegen ∞ ist gleich g.

Sonderfall: Ist $g = 0$, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, so liegt eine *Nullfolge* vor.

Grenzwertformeln: Vorausgesetzt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ und $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$, dann folgen:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = u \pm v \tag{290}$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = u \cdot v \tag{291}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0) \tag{292}$$

*) exakter: alle bis auf endlich viele

Beispiele von Grenzwerten:

$$\lim_{n\to\infty} n^c a^n = 0, \quad \text{wenn} \quad |a| < 1 \quad \text{und} \quad c \in P \tag{293}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_a n = 0 \tag{294}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{295}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828\ldots \tag{296}$$

10.2. Grenzwerte reeller Funktionen

Eine Funktion f sei mindestens in einer Umgebung links von $x = a$, also für $x < a$, definiert. Durchläuft x eine beliebige Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ von links gegen a $(x \to a - 0)$ und hat die zugehörige Folge der Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ den reellen Grenzwert g^-, so wird g^- *linksseitiger Grenzwert* der Funktion genannt:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = g^- \Leftrightarrow f(x) \to g^- \quad \text{für} \quad x \to a - 0 \tag{297}$$

Analog ist auf eine rechtsseitige Umgebung von a bezogen der *rechtsseitige Grenzwert* definiert:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = g^+ \Leftrightarrow f(x) \to g^+ \quad \text{für} \quad x \to a + 0 \tag{298}$$

Ist die Funktion in einer Umgebung von $x = a$ (rechts- und linksseitig) definiert und stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert überein, so wird $g = g^+ = g^-$ (*allgemeiner*) *Grenzwert* der Funktion genannt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = g = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \tag{299}$$

Ist der Definitionsbereich einer Funktion f nach links bzw. nach rechts unbegrenzt und hat die Folge der Funktionswerte für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ eine reelle Zahl g als Grenzwert, wird die Funktion *konvergent* genannt:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = g \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = g \tag{300}$$

Existiert für $x \to a$ kein Grenzwert $g \in P$, so wird die Funktion an dieser Stelle *divergent* genannt. Wächst $|f(x)|$ für $x \to a$ über alle Grenzen, so liegt *bestimmte Divergenz* oder der *uneigentliche Grenzwert* vor:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \tag{301}$$

Grenzwertsätze:

Existieren für die Funktionen f_1 und f_2 die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = g_2$, so gelten für $x \to a$:

$$\lim\,[f_1(x) \pm f_2(x)] = g_1 \pm g_2 \tag{302}$$

$$\lim\,[f_1(x) \cdot f_2(x)] = g_1 \cdot g_2 \tag{303}$$

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2} \quad (g_2 \neq 0) \tag{304}$$

$$\lim f_1(x) = \lim f_1[f_2(x)] = f_1[\lim f_2(x)] = f_1(g_2) \tag{305}$$

Regel von DE L'HOSPITAL: Falls $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$, gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} \tag{306}$$

Führt (306) wiederum auf sog. *unbestimmte Ausdrücke* „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$", kann (Differenzierbarkeit an der Stelle $x = a$ vorausgesetzt) analog die 2. Ableitung im Zähler und im Nenner gebildet werden usf. Andere unbestimmte Ausdrücke wie „$0 \cdot \infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0" und „∞^0" lassen sich durch Umformung auf die ersten beiden zurückführen, so daß (306) angewendet werden kann. Einige wichtige Grenzwerte von Funktionen:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \qquad (n \in N) \tag{307}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \qquad (a \in P) \tag{308}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \tag{309}$$

Beispiele. 1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 2 \cdot 3^1 = 6$ [nach (307) oder] $= \lim\limits_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6$ [nach (306)].

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} 2 \cos x = 1 \cdot 2 = 2$ [nach (303) oder] $= 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$ $= 2 \cdot 1 = 2$ [nach (308)].

11. Differentialrechnung

11.1. Ableitung einer Funktion

Für die in einer Umgebung von P_0 stetig vorausgesetzte Funktion $f\colon y = f(x)$ (Bild 83) wird:

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{310}$$

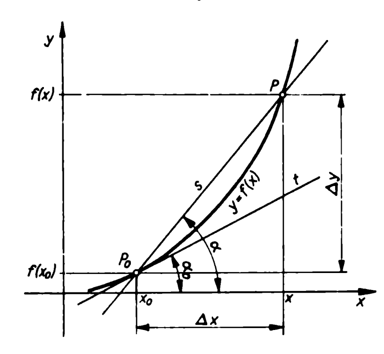


Bild 83. Differenzen- und Differentialquotient

als *Differenzenquotient* dieser Funktion definiert. Geometrisch stellt er die Steigung der durch P_0 und P gelegten Sekante s der Kurve dar. Bewegt sich P auf der Kurve gegen P_0, so findet eine Drehung der zugehörigen Sekanten um P_0 statt, die im Grenzfalle $x \to x_0$ in die in P_0 an die Kurve gelegte Tangente t übergehen. Analytisch wird die Steigung der Tangente:

$$\tan \alpha_0 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \tag{311}$$



Grenzwert des Differenzenquotienten (310) und, falls dieser Grenzwert existiert, die (erste) *Ableitung* oder der (erste) *Differentialquotient* von f an der Stelle x_0 genannt. Die Ermittlung dieser Ableitung wird als *Ableiten* oder *Differenzieren* und die Funktion an der Stelle x_0 als *differenzierbar* bezeichnet, falls $f'(x_0)$ existiert. Die wichtigsten Folgerungen daraus sind:

1. Ist eine Funktion f an jeder Stelle $x \in X \subseteqq P$, d. h. über ihren Definitionsbereich, differenzierbar, so wird analog (311) deren Ableitung wiederum eine Funktion:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \tag{312}$$

2. Notwendig für die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 ist dort deren Stetigkeit. Damit braucht aber eine für $x \in X$ stetige Funktion nicht für alle $x \in X$ differenzierbar zu sein (vgl. Beispiel 2).
3. Eine Funktion ist an der Stelle x_0 differenzierbar, falls sowohl die *linksseitige Ableitung* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 - 0)$ als auch die *rechtsseitige Ableitung* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + 0)$ existieren und außerdem $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$, d. h. beide Grenzwerte übereinstimmen. Existiert nur eine der beiden Ableitungen, so wird die Funktion an der Stelle x_0 linksseitig bzw. rechtsseitig differenzierbar genannt.
4. Eine Funktion ist im abgeschlossenen Intervall $x \in [a, b]$ differenzierbar, wenn sie im Innern für $x \in (a, b)$ differenzierbar und an den Stellen $x = a$ bzw. $x = b$ rechtsseitig bzw. linksseitig differenzierbar ist.
5. Teils historisch bedingt, sind für die Ableitung (312) folgende Schreibweisen üblich und gleichwertig:

$$y',\ y'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,{}^{*)},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$$

   Ist t die unabhängige Veränderliche, so schreibt man die Ableitung von $x = \varphi(t)$ in der Form $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$.
6. Die als Tangentensteigung geometrisch veranschaulichte Ableitung einer Funktion ist besonders für die Verknüpfung naturwissenschaftlich-technischer Größen unter dem Ableitungsbegriff von Bedeutung, wie die folgenden Beispiele zeigen (Tabelle 25):

Tabelle 25. Beispiele von Ableitungen aus der Physik

Variable der Ausgangsfunktion		Ableitung	Symbolisch
Abhängige	Unabhängige		
Weg s	Zeit t	Geschwindigkeit v	$v = \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$
Geschwindigkeit v	Zeit t	Beschleunigung a	$a = \dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$
Temperaturabnahme T	Zeit t	Abkühlungsgeschwindigkeit v	$v = -\dot{T} = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$
Magn. Fluß Φ	Zeit t	Quellenspannung U_q	$U_q = \dot{\Phi} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
Steigungswinkel α	Weg s	Krümmung k	$k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$
Durchbiegung η	Trägerkoordinate x	Biegungswinkel φ	$\varphi = \eta'(x)$
Biegemoment M_b	Trägerkoordinate x	Querkraft F_Q	$F_Q = -\frac{\mathrm{d}M_b}{\mathrm{d}x}$

*) gelesen: d — y nach d — x; analog auch die beiden folgenden Schreibweisen

Beispiele. 1. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 1$ ist $f'(1) = 2$, da nach (311)

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x + 1) = 2 = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

2. Die Funktion $f(x) = |x^2 - 1|$ ist an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$ nicht differenzierbar, da $f'(-1 - 0) = -2 \neq f'(-1 + 0) = 2$ und $f'(1 - 0) = -2 \neq f'(1 + 0) = 2$ (Bild 84). Die Kurve besitzt in diesen Punkten Knickstellen, ist aber für alle $x \in P$ stetig.

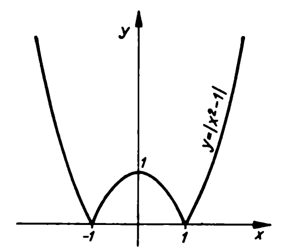


Bild 84. An den Stellen $|x| = 1$ nicht differenzierbare Funktion

3. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da der rechtsseitige Grenzwert nicht existiert, d. h. $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, obwohl die Funktion im Definitionsbereich $[0; +\infty)$ stetig ist. In diesem Falle verläuft die Tangente an der Stelle $x = 0$ parallel zur y-Achse.

4. Die Ableitung von $f: y = x^{-1}$ an der Stelle $x = 0$ existiert nicht, da dort die Funktion selbst nicht existiert (Polstelle).

11.2. Differentiationsregeln

Unter der Voraussetzung, $f: y = f(x)$ ist eine für alle $x \in X \subseteq P$ differenzierbare Funktion, gelten folgende Gesetze:

1. Die Ableitung einer Konstanten C ist Null:

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0 \tag{313}$$

2. Bei der Ableitung einer mit einem konstanten Faktor a versehenen Funktion bleibt dieser erhalten:

$$\varphi(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow \varphi'(x) = a \cdot f'(x) \tag{314}$$

3. Die Ableitung einer algebraischen Summe von Funktionen ist gleich der algebraischen Summe der Ableitungen der Summanden:

$$f(x) = u_1(x) \pm u_2(x) \pm \cdots \pm u_n(x) \Rightarrow f'(x) = u_1'(x) \pm u_2'(x) \pm \cdots \pm u_n'(x) \tag{315}$$

4. Ableitung eines Produkts von Funktionen:

$$f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdots u_n(x) \Rightarrow$$
$$f'(x) = u_1'(x)\, u_2(x) \cdots u_n(x) + u_1(x)\, u_2'(x) \cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)\, u_2(x) \cdots u_n'(x) \tag{316}$$

Speziell für zwei Faktoren $u_1(x) = u$ und $u_2(x) = v$ lautet die *Produktregel*:

$$f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv' \tag{317}$$

5. Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit} \quad v(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{[v(x)]^2} \tag{318}$$

wenn speziell:

$$u(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2} \tag{319}$$

6. Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} mit $x = \varphi(y)$ zur Funktion f mit:

$$y = f(x) \quad \text{ist} \quad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0) \tag{320}$$

7. Ableitung einer mittelbaren Funktion (*Kettenregel*): Eine mittelbare Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = g[h(x)]$ ist für alle $x \in X \subseteqq P$ differenzierbar, sofern $z = h(x)$ bzw. $y = g(z)$ für alle $x \in X$ bzw. $z \in Z$ differenzierbar sind, und ihre Ableitung lautet:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{321}$$

$h(x)$ wird innerer und $g(z)$ äußerer Funktionswert der Funktion genannt. (321) läßt sich auch auf mehrere miteinander verkettete Funktionen anwenden. Analog ergibt sich für $f(x) = g\{h[\varphi(x)]\}$ mit $y = g(z)$, $z = h(w)$ und $w = \varphi(x)$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} \tag{322}$$

Die Ableitung einer elementaren Funktion ist wieder eine elementare Funktion. Unter Verwendung der Ableitungsschreibweise $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ ergeben sich die Ableitungen an der Stelle x, sofern die Funktion dort differenzierbar ist (Tabelle 26).

Tabelle 26. Ableitungen elementarer Funktionen

	$f(x) =$	$f'(x) =$		$f(x) =$	$f'(x) =$
(D 1)	$C =$ konst.	0	(D 11)	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(D 2)	x^n	nx^{n-1}	(D 12)	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
(D 2a)	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	(D 13)	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
(D 2b)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	(D 14)	$\sinh x$	$\cosh x$
(D 3)	$mx + b$ ($m, b =$ konst.)	m	(D 15)	$\cosh x$	$\sinh x$
(D 4)	a^x	$a^x \ln a$	(D 16)	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
(D 4a)	e^x	e^x	(D 17)	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
(D 5)	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	(D 18)	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(D 5a)	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	(D 19)	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
(D 6)	$\sin x$	$\cos x$	(D 20)	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
(D 7)	$\cos x$	$-\sin x$	(D 21)	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
(D 8)	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$			
(D 9)	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$			
(D 10)	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			

Beispiele. 1. Die 1. Ableitung der ganzrationalen Funktion n-ten Grads mit der Funktionsgleichung $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ wird unter Anwendung von (313), (314), (315) und (D 2) zu:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1} \tag{323}$$

2. Die Ableitung von $y = \sin x \cos x$ wird nach der Produktregel (317) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$. Nach vorhergehender Umformung mit Hilfe der Additionstheoreme in $y = (1/2)\sin(2x)$ und Anwendung der Kettenregel (321) mit $z = 2x$ erhält man $dy/dz = (1/2)\cos z$ als äußere und $dz/dx = 2$ als innere Ableitung, so daß $y = 2 \cdot (1/2)\cos z = \cos(2x)$, was wegen $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ mit dem nach der Produktregel gewonnenen Ergebnis übereinstimmt.

11.3. Höhere Ableitungen

Ist die Ableitungsfunktion f' einer differenzierbaren Funktion f wiederum differenzierbar, so nennt man deren Ableitung f'' die 2. Ableitung der Funktion f. Für die 2. Ableitung sind folgende Schreibweisen gleichwertig:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}{}^{*)} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f'(x) \tag{324}$$

Allgemein schreibt man die *n-te Ableitung*:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \tag{325}$$

Beispiele. 1. Die höheren Ableitungen der ganzrationalen Funktion mit $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ werden

$$y'' = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

$$y''' = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2)\,a_n x^{n-3}$$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1a_n = n!\,a_n$$

2. Für die Exponentialfunktion mit $y = e^x$ ergibt sich $y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = e^x$.

11.4. Differential

Erfährt die Variable x der an der Stelle x differenzierbaren Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ (Bild 85) eine Änderung um $\Delta x = dx$, so ändert sich der Funktionswert um

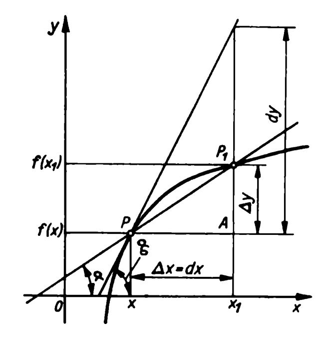


Bild 85. Differential dy

$\Delta y = \Delta x \tan \alpha$. Die Änderung d$y$ des Funktionswerts an der gleichen Stelle $x_1 = x + \Delta x$, für die in P an die Kurve gelegte Tangente, wird *Differential* der Funktion genannt und ist

$$dy = df(x) = \Delta x \tan \alpha_0 = f'(x)\,dx \tag{326}$$

Für hinreichend kleine Δx ergibt sich die besonders in der Fehlerrechnung verwendete Beziehung

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx \tag{327}$$

*) gesprochen: d — 2 — y nach d — x-Quadrat

Beispiel. Das Differential für $f(x) = \ln x$ ist $\mathrm{d} \ln x = \frac{1}{x} \Delta x = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Für $x = 1$ und $\Delta x = 1$ wird $\Delta y = (\ln 2 - \ln 1)/1 = 0{,}693$ und $\mathrm{d}y = 1$, also $\Delta y \neq \mathrm{d}y$. Für $x = 1$ und $\Delta x = 0{,}01$ wird $y = (\ln 1{,}01 - \ln 1)/0{,}01 = 0{,}00995/0{,}01 = 0{,}995$ und $\mathrm{d}y = 0{,}01/1$, also $\Delta y \approx \mathrm{d}y = 0{,}01$.

11.5. Ableitung bei Kurvengleichungen in verschiedenen Darstellungsformen

Ableitung bei *Parameterdarstellung*: Sind die Gleichungen einer Kurve in Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ gegeben, so ergeben sich die ersten beiden Ableitungen mit dem Parameter t als unabhängiger Variablen aus:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{328}$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \tag{329}$$

Ableitung bei Darstellung in *Polarkoordinaten*: Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten $\varrho = f(\varphi)$ dargestellt, so ergibt sich wegen $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$ (vgl. 7.3.2.) mit φ als Parameter:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{\varrho} \sin \varphi + \varrho \cos \varphi}{\dot{\varrho} \cos \varphi - \varrho \sin \varphi}, \quad \text{wobei} \quad \dot{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi} \tag{330}$$

Ableitung von *implizit* gegebenen Kurvengleichungen: Ist die Gleichung einer Kurve in der impliziten Darstellung $F(x, y) = 0$ gegeben, so erhält man deren Ableitung entweder durch partielles Differenzieren:

$$y' = -F_x/F_y \tag{331}$$

oder durch Differentiation beider Seiten von $F(x, y) = 0$ nach x unter Berücksichtigung der Kettenregel (321). Das sogenannte logarithmische Differenzieren ist Spezialfall von (331) und im 4. Beispiel unten dargelegt.

Beispiele. 1. Welche Steigung besitzt die gespitzte Zykloide $x = r(t - \sin t)$; $y = r(1 - \cos t)$ für den Parameterwert $t = (\pi/2)$? Mit $\dot{x} = r(1 - \cos t)$; $\dot{y} = r \sin t$ wird nach (328) $y'(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ und damit $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dies entspricht der Steigung im Punkte $\left(r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right); r\right)$; vgl. hierzu Bild 53.

2. Welche Steigung besitzt die archimedische Spirale $\varrho = a\varphi$ für $\varphi = 3\pi/4 = 135°$? Nach (330) wird $y'(\varphi) = \frac{a \sin \varphi + a\varphi \cos \varphi}{a \cos \varphi - a\varphi \sin \varphi} = \frac{\tan \varphi + \varphi}{1 - \varphi \tan \varphi}$ und damit die Steigung unabhängig von a. Für $\varphi = 3\pi/4$ wird damit die gesuchte Steigung $y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3\pi - 4}{4 + 3\pi} \approx 0{,}4$.

3. Gesucht ist die Gleichung der in $P_1(x_1; y_1)$ an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gelegten Tangente. Nach Multiplikation mit a^2b^2 erhält man die Ellipsengleichung in der Form $F(x, y) = 0$ zu $x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2 = 0$. Mit $F_x = 2b^2x$ und $F_y = 2a^2y$ wird nach (331) die Kurven- und damit Tangentensteigung $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$ und nach (197) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2x}{a^2y}$ oder $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$.

4. Gesucht ist die 1. Ableitung von $y = x^{\varphi(x)}$. Logarithmieren beider Seiten führt auf $\ln y = \varphi(x) \ln x$. Beide Seiten nach x differenziert ergibt $\frac{1}{y}y' = \varphi'(x) \ln x + \varphi(x)\frac{1}{x}$, und somit wird $y' = y\left(\varphi'(x) \ln x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)$.

11.6. Grafische Differentiation

Häufig sind die in der technischen Praxis zu differenzierenden Funktionen oder Kurven nicht in analytischer Form gegeben, sondern durch grafische Verfahren als Verbindung konstruierter Punktfolgen oder durch Schreibstifte aufgezeichnet entstanden. Die so vorliegende Ausgangs-

kurve wird dann zweckmäßig grafisch differenziert, indem man punktweise nach Augenmaß oder mit instrumentellen Hilfsmitteln*) Tangenten an die Kurve legt.

Im Bild 86 wird dies an der grafischen Differentiation einer Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ veranschaulicht: Es werden die Parallelen zu den Tangenten durch den zu wählenden Pol P auf der Zeitachse gezogen. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Geschwindigkeitsachse geben mit ihren Ordinaten die zugehörigen Ableitungen an, die wiederum über der Zeitachse aufgetragen (gestrichelte Parallelen zur t-Achse)

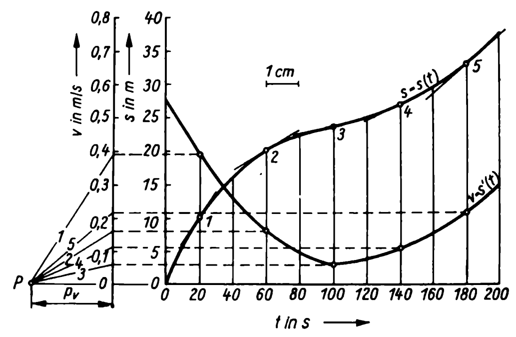


Bild 86. Grafische Differentiation

die Punkte der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion als sogenannte *Differentialkurve* ergeben. Der Abstand p des Pols vom Ursprung ist dabei von den Maßstabsfaktoren der dargestellten Größen abhängig. Mit $m_t = \bar{t}/t$, $m_s = \bar{s}/s$ und $m_v = \bar{v}/v$, wobei $\bar{t}$, $\bar{s}$ und $\bar{v}$ die zeichnerischen Längen der dargestellten Größen sind, wird der Polabstand für die Geschwindigkeitsbestimmung:

$$p_v = m_v m_t / m_s \tag{332}$$

Analog für die Beschleunigungsbestimmung:

$$p_a = m_a m_t / m_v \tag{333}$$

und allgemein für die Größen x, y und y':

$$p = m_{y'} m_x / m_y \tag{334}$$

Im (verkleinert dargestellten) Bild 86 wurden gewählt: $m_s = 1\ \text{cm}/5\ \text{m}$, $m_t = 1\ \text{cm}/20\ \text{s}$ und $m_v = 1\ \text{cm}/(0{,}1\ \text{m/s})$, so daß nach (332)

$$p_v = \frac{1\ \text{cm} \cdot 1\ \text{cm} \cdot 5 \cdot 10^2\ \text{cm}}{10\ \text{cm/s} \cdot 20\ \text{s} \cdot 1\ \text{cm}} = 2{,}5\ \text{cm}$$

11.7. Kurvenuntersuchungen

Die folgenden Kriterien der Kurvendiskussion gestatten es, den Verlauf der Kurve einer Funktion so zu erfassen, daß besonders deren qualitativ ausgezeichnete Punkte und Eigenschaften primär bestimmt werden. Dazu gehören im allgemeinen die Untersuchungen auf

1. Definitionsbereich und Wertevorrat (vgl. 8.1.),
2. Symmetrieeigenschaften, Monotonie und Periodizität (vgl. 8.2.),
3. Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$ (vgl. 10.2.),
4. Nullstellen (vgl. 8.3.2.),
5. Pol- und Lückenstellen (vgl. 8.3.3.),
6. Qualität der Steigung und Krümmung,
7. relative Extrempunkte,
8. Wendepunkte und Wendetangente.

Zur quantitativ genauen Zeichnung können darüber hinaus beispielsweise**) weitere Punkte der Kurve bestimmt oder ihr Verlauf durch die zugehörigen Krümmungskreise approximiert werden.

*) beispielsweise Spiegellineal oder Derivimeter

**) Weiterführende Gesichtspunkte der Kurvenuntersuchung sind der Spezialliteratur (Differentialgeometrie) zu entnehmen.

11.7.1. Qualität der Steigung und Krümmung

Die der Funktionsgleichung $y = f(x)$ entsprechende Kurve hat an der Stelle x_0 oder im Punkt $P_0(x_0; y_0)$

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{steigende Tendenz,}\\
\text{fallende Tendenz,}\\
\text{waagerechte Tangente,}\\
\left.\begin{array}{l}\text{konvexe Krümmung,}\\ \text{konkave Krümmung,}\end{array}\right\}{}^{*)}\\
\text{keine Krümmung } (k=0),
\end{array}\right\}\text{ falls }\left\{\begin{array}{l}
f'(x_0)>0\\
f'(x_0)<0\\
f'(x_0)=0\\
\left.\begin{array}{l}f''(x_0)>0\\ f''(x_0)<0\end{array}\right\}\text{ Tangente }\left\{\begin{array}{l}\text{unterhalb}\\ \text{oberhalb}\end{array}\right\}\text{ der Kurve}\\
f''(x_0)=0
\end{array}\right.
$$

Die quantitative Ermittlung der Krümmung k oder des Krümmungsradius r kann nach (339) oder (340) aus 11.7.4. erfolgen.

11.7.2. Relative Extrempunkte

Ein Kurvenpunkt P_0 ist *relativer Extrempunkt*, wenn er, auf seine Umgebung bezogen, Höchstpunkt (*Maximum*) oder Tiefstpunkt (*Minimum*) ist.

1. Notwendig für die Existenz eines Extrempunkts an der Stelle x_0 ist das Verschwinden der 1. Ableitung:

$$f'(x_0) = 0 \tag{335}$$

2. Ein Extrempunkt an der Stelle liegt wirklich vor (hinreichende Bedingung), wenn zusätzlich gilt:

$$f''(x_0) \neq 0 \tag{336}$$

$$\text{und zwar }\left.\begin{array}{l}\text{ein Maximum,}\\ \text{ein Minimum,}\end{array}\right\}\text{ falls }\left\{\begin{array}{l}f''(x_0)<0\\ f''(x_0)>0\end{array}\right.$$

3. Wird neben (335) auch $f''(x_0) = 0$, dann ist so lange weiter zu differenzieren, bis die an der Stelle x_0 erste nicht verschwindende Ableitung eintritt. Ist diese erste nicht verschwindende Ableitung
   - von gerader Ordnung ($f^{(2n)}(x_0) \neq 0$), so liegt ein Extrempunkt**) vor, und zwar

$$\left.\begin{array}{l}\text{ein Maximum,}\\ \text{ein Minimum,}\end{array}\right\}\text{ falls }\left\{\begin{array}{l}f^{(2n)}(x_0)<0\\ f^{(2n)}(x_0)>0\end{array}\right.$$

   - von ungerader Ordnung ($f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$), so liegt ein Wendepunkt vor (vgl. 11.7.3.).

11.7.3. Wendepunkt und Wendetangente

Im *Wendepunkt* besitzt die Steigung einer Kurve einen relativen Extremwert, und die Kurve geht von konkavem zu konvexem Verhalten oder umgekehrt über.

1. Notwendig für die Existenz eines Wendepunkts an der Stelle x_0 ist das Verschwinden der 2. Ableitung:

$$f''(x_0) = 0 \tag{337}$$

2. Ein Wendepunkt liegt wirklich vor (hinreichende Bedingung), wenn zusätzlich gilt:

$$f'''(x_0) \neq 0 \tag{338}$$

---

*) von unten, **) Extrempunkt höherer Ordnung

3. Gilt außer (337) und (338) auch noch (335), so liegt speziell ein Wendepunkt mit waagerechter Kurventangente (Terrassenpunkt) vor.
4. Gilt außer (337) und (338) auch noch $f'''(x_0) = 0$, so ist wie in 11.7.2. unter Punkt 3. zu verfahren.

Die Darstellung der Kurve in einer Umgebung des Wendepunkts wird durch die Tangente im Wendepunkt (*Wendetangente*) erleichtert, da sich die Kurve dort gut anschmiegt und die Tangente im Wendepunkt die Kurvenseite wechselt. Ist x_w die Stelle eines Wendepunkts, so stellt $f'(x_w)$ die Steigung der Wendetangente dar.

Beispiel. Die reelle Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ ist zu diskutieren und deren Kurve darzustellen.

1. Der Definitionsbereich enthält alle reellen $x \neq \pm 1$ oder $X = P \setminus \{-1, +1\}$, da die Nennerfunktion für $x = \pm 1$ verschwindet und ein Quotient mit dem Nenner Null nicht definiert ist. Der Wertebereich enthält alle reellen Funktionswerte, d. h. $Y = P$.

2. Da $f(x) = -f(-x)$, ist die Kurve zentralsymmetrisch mit $(0; 0)$ als Symmetriezentrum, d. h., die Funktion ist ungerade. Die nach der Quotientenregel gebildete 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ wird für alle $|x| < \sqrt{3}$ negativ, daher verläuft die Kurve im Intervall $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ streng monoton fallend und in den Intervallen $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ und $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ monoton steigend.

3. Da $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (nach Partialdivision), wird $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + \dfrac{1/x}{1 - 1/x^2}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x$ $= \pm\infty$. Das bedeutet, die in der Zerlegung auftretende echt gebrochenrationale Funktion $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ verschwindet für $x \to \pm\infty$, und die Winkelhalbierende $y = x$ (1. Summand) wird zur Asymptote für die Kurve.

4. Die Nullstellen folgen aus $x^3 = 0$ zu $x_N = 0$ (dreifache reelle Nullstelle), da für $x = 0$ die Nennerfunktion nicht verschwindet.

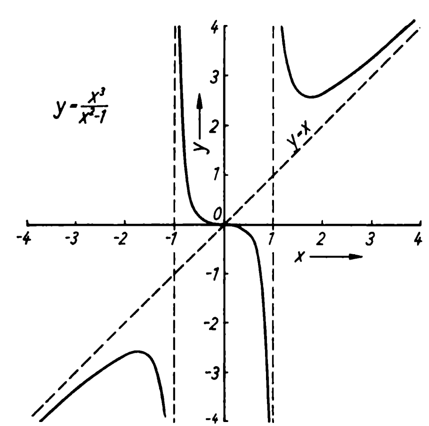


Bild 87. Beispiel einer gebrochenrationalen Funktion

5. Die Polstellen folgen aus $x^2 - 1 = 0$ zu $x_{P_1} = -1$ und $x_{P_2} = +1$ als Nullstellen der Nennerfunktion (Polstellen 1. Ordnung). Lückenstellen existieren nicht, da Zähler- und Nennerfunktion nicht gleichzeitig verschwinden.

6. Analog der 1. Ableitung wird nach der Quotientenregel $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Da $h(x) < 0$ für $|x| < 1$, $h(x) > 0$ für $|x| > 1$, $g(x) > 0$ für $x > 0$ und $g(x) < 0$ für $x < 0$, wird in den Intervallen $(-\infty; -1)$ und $(0; 1)$: $f''(x) < 0$, d. h. konkaver Kurvenverlauf, und in den Intervallen $(-1; 0)$ und $(1; +\infty)$: $f''(x) > 0$, d. h. konvexer Kurvenverlauf.

7. Nach (335) ist notwendig, daß $f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$ mit den Lösungen $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Für $x_{1,2} = 0$ wird die hinreichende Bedingung (336) nicht erfüllt, da $f''(0) = 0$, während

$f''(\pm\sqrt{3}) \neq 0$, und zwar $f''(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}/2 > 0$ und $f''(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}/2 < 0$. Damit liegen an der Stelle x_3 ein Minimum und an der Stelle x_4 ein Maximum vor. Wegen $f(\pm\sqrt{3}) = \pm 3\sqrt{3}/2$ haben die Extrempunkte folgende Koordinaten: Minimum $(\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}/2)$ und Maximum $(-\sqrt{3};\ -3\sqrt{3}/2)$.

8. Wegen $f''(0) = 0$ muß die folgende Ableitung an dieser Stelle untersucht werden. Da $f'''(x) = -6 \cdot \dfrac{x^4 + 6x^2 + 1}{(x^2 - 1)^4}$, folgt $f'''(0) \neq 0$, und gemäß Punkt 3 in 11.7.2. hat die Kurve im Ursprung (0; 0) einen Wendepunkt mit der x-Achse als Kurventangente. Die Kurve ist in Bild 87 grafisch dargestellt.

11.7.4. Kurvenkrümmung

Die *Krümmung* $k(x)$ der Kurve zur Funktionsgleichung $y = f(x)$ an der Stelle x ist als Änderungsgeschwindigkeit des Anstiegswinkels der Kurve mit der Bogenlänge s, also als 1. Ableitung des Steigungswinkels α nach der Bogenlänge s, definiert. Mit $\alpha = \arctan f'(x)$ und dem Bogendifferential $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ (Bild 88) erhält man damit:

$$k(x) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + [f'(x)]^2)^3}} \qquad (339)$$

Für hinreichend kleines $f'(x) \approx 0$ erhält man speziell die für Verformung eines auf Biegung beanspruchten prismatischen Stabs, dessen unverformte Längsachse mit der x-Achse zusammenfällt, wichtige Beziehung $k(x) \approx f''(x)$.

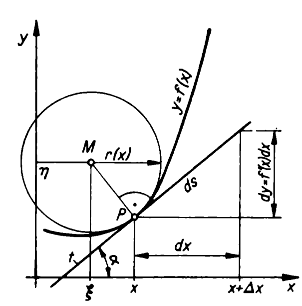


Bild 88. Krümmung

Der *Krümmungsradius* $r(x)$ an dieser Stelle x ist der absolute Betrag des reziproken Werts der Krümmung:

$$r(x) = \frac{1}{|k(x)|} = \frac{\sqrt{(1 + [f'(x)]^2)^3}}{|f''(x)|} \qquad (340)$$

Der zugehörige Kreis wird als *Krümmungskreis* bezeichnet. Er berührt die Kurve an dieser Stelle mit mindestens übereinstimmender 1. und 2. Ableitung, so daß er als *Schmiegungskreis* in einer Umgebung dieser Stelle mit für die technische Praxis ausreichender Genauigkeit die Kurve selbst darstellt.

Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte*) einer Kurve liegt wiederum auf einer Kurve, die *Evolute* genannt wird, während die ursprüngliche Kurve *Evolvente* heißt. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts an der Stelle x oder die Parameterdarstellung der Evolute mit x als Parameter lauten:

$$\xi = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}(1 + [f'(x)]^2); \qquad \eta = f(x) + \frac{1}{f''(x)}(1 + [f'(x)]^2) \qquad (341)$$

*) Gesamtheit der Mittelpunkte der Krümmungskreisschar

Ist die Gleichung der Kurve in Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ gegeben, so lauten die zu (339) und (341) analogen Ausdrücke:

$$k(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \tag{342}$$

$$\xi = x - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}; \qquad \eta = y + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \tag{343}$$

Beispiel. Der Krümmungsradius der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ soll allgemein an der Stelle x ermittelt und auf relative Extremwerte untersucht werden. Mit $y' = 2x$ und $y'' = 2$ erhält man nach (340) $r(x) = \sqrt{(1 + 4x^2)^3}/2$. Dies ist die Funktionsgleichung einer geraden Funktion, die für $(-\infty; 0)$ streng monoton fallend und für $(0; +\infty)$ streng monoton steigend verläuft. Das bedeutet für wachsende $|x|$ eine ständige Zunahme der Krümmungsradien oder Krümmungsabnahme. Der Radikant nimmt für $x = 0$ sein Minimum an, so daß $r_{\min} = r(0) = 0{,}5$ kleinster Krümmungsradius ist und damit die Kurve im Ursprung ihre maximale Krümmung besitzt. Punkte extremer Krümmung werden Scheitelpunkte genannt.

11.8. Extremwertprobleme

Bei Extremwertaufgaben handelt es sich stets darum, für eine von anderen Größen abhängige Größe die *optimale* Lösung zu finden. Dies können sowohl Maximal- als auch Minimalwerte sein, wie beispielsweise die Ermittlung maximaler Biegesteifigkeit eines Profilquerschnitts oder minimalen Materialaufwands für die Fertigung eines Erzeugnisses. Ist die zu optimierende Größe von einer Variablen abhängig, so ist nach Aufstellung der Funktion (335) anzuwenden. Hängt sie von mehreren Variablen ab, so sind diese häufig durch Nebenbedingungen verknüpft, und das Problem läßt sich nach Elimination auf die Untersuchung einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen zurückführen. Liegt speziell eine lineare Funktion mit linearen Nebenbedingungen vor, so spricht man von *linearer Optimierung.* Die hinreichende Bedingung (336) braucht nicht herangezogen zu werden, wenn durch Anschauung oder durch logische Schlußfolgerung offensichtlich ist, daß die Lösung der gesuchte Extremwert sein muß.

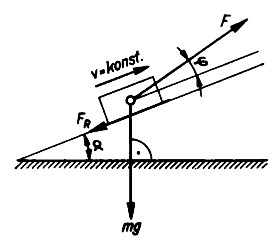


Bild 89. Extremwertproblem an der schiefen Ebene

Beispiele. 1. Es liegen n Meßwerte $l_1, l_2, \ldots, l_n$ für eine (nicht bekannte) Größe X vor. Gesucht wird die Größe x als wahrscheinlichster oder scheinbarer Wert von X so, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen $x - l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ein Minimum annimmt (Methode der kleinsten Quadrate). Damit ist $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - l_i)^2$ auf ein Minimum hin zu untersuchen. Mit (335) wird $f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n} (x - l_i) = 0$ mit der Lösung $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i$ als dem arithmetischen Mittel aller n Meßwerte. Wegen $f''(x) = 2 \cdot n > 0$ liegt nach (336) wirklich ein Minimum vor.

2. Unter welchem Winkel φ muß die Kraft F wirken, damit bei kleinstem Kraftbetrag die Masse m mit konstanter Geschwindigkeit die schiefe Ebene $(\alpha < 90°)$ hochgleitet, wenn der Reibungswiderstand F_R infolge der Gleitreibung berücksichtigt wird (Bild 89)? Die drei Kräfte bilden ein Gleichgewichtssystem, ihre Vektorsumme und daher auch die ihrer Komponenten längs der schiefen Ebene müssen Null sein, so daß $F_R + mg \sin\alpha - F\cos\varphi = 0$. Die neben F und φ auftretende Variable F_R läßt sich durch die Nebenbedingung (COULOMBsches Reibungsgesetz): $F_R = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\varphi)$ eliminieren, und Auflösung nach F liefert schließlich $F = \dfrac{mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\mu\sin\varphi + \cos\varphi} = f(\varphi)$. Da der Zähler dieser Funktion kon-

stant ist, wird vorteilhaft die Nennerfunktion $h(\varphi) = \mu \sin \varphi + \cos \varphi$ auf ein Maximum hin untersucht. Aus $h'(\varphi) = \mu \cos \varphi - \sin \varphi = 0$ folgt: $\mu = \tan \varphi$ oder $\varphi = \arctan \mu = \varrho$ als Lösung. Der Kraftaufwand ist dann am geringsten, wenn der Anstellwinkel φ gleich dem Reibungswinkel ϱ ist. Daß wirklich $h(\varphi)$ dafür ein Maximum und somit F ein Minimum annimmt, kann mit (336) wegen $h''(\varphi) < 0$ für $\varphi = \varrho > 0$ nachgewiesen werden.

11.9. Differentiation von Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen

11.9.1. Partielle Ableitungen und Differentiationsregeln

Unter der Voraussetzung, eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen x und y mit der Gleichung $z = f(x, y)$ ist über einer Umgebung der Stelle $(x_0; y_0)$ partiell differenzierbar, versteht man unter den *partiellen Ableitungen*:

$$f_x(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)\ ^{*)} \tag{344}$$

bzw.
$$f_y(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \tag{345}$$

von $z = f(x, y)$ an der Stelle $(x_0; y_0)$ nach x bzw. nach y die gewöhnlichen Ableitungen (im Sinne von (311) aus 11.1. bei konstantem $y = y_0$ bzw. konstantem $x = x_0$). Geometrisch veranschaulicht sind diese partiellen Ableitungen die Steigungen derjenigen Tangenten, die sich in $P_0(x_0; y_0; z_0)$ an die Schnittkurven der Fläche $z = f(x, y)$ mit den Ebenen $y = y_0$ bzw. $x = x_0$ legen lassen. Analog zu (312) sind $z_x = f_x(x, y)$ und $z_y = f_y(x, y)$ wieder Funktionen der unabhängigen Variablen x und y, wenn $z = f(x, y)$ über einen bestimmten Definitionsbereich partiell differenzierbar ist. Bei n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erhält man die partielle Ableitung $f_{xk} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ nach der k-ten Variablen, indem man die Funktion bei konstanten $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ nach x_k differenziert.
Durch nochmalige partielle Differentiation einer partiellen Ableitung erhält man die *zweiten partiellen Ableitungen,* und zwar nach zweimaliger partieller Ableitung nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{346}$$

zweimaliger partieller Ableitung nach y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{347}$$

partieller Ableitung zuerst nach x und dann nach y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \tag{348}$$

und in umgekehrter Reihenfolge:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \tag{349}$$

Analog lassen sich die n-ten partiellen Ableitungen $(n > 2)$ bilden. Die partiellen zweiten Ableitungen (348) und (349) sind gleich, sofern sie stetig sind. Dies bedeutet, daß es auf die Reihenfolge der Differentiationen nicht ankommt (Satz von SCHWARZ).

---

*) gesprochen: $d - f$ nach $d - x$ partiell

Sofern für $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ die partiellen Ableitungen existieren, gilt (vgl. 11.2.):

$$\frac{\partial(u \pm v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x} \tag{350}$$

$$\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u \tag{351}$$

$$\frac{\partial(u/v)}{\partial x} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} v - \frac{\partial v}{\partial x} u\right) \tag{352}$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{353}$$

Beispiel. Für $f(x, y) = x^3y^2 + y\,e^x$ lauten die ersten partiellen Ableitungen: $f_x(x, y) = 3x^2y^2 + y\,e^x$ und $f_y(x, y) = 2x^3y + e^x$ und zweiten partiellen Ableitungen: $f_{xx}(x, y) = 6xy^2 + y\,e^x$, $f_{yy}(x, y) = 2x^3$ und $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6x^2y + e^x$.

11.9.2. Vollständiges oder totales Differential

Existieren im Definitionsbereich der Funktion $z = f(x, y)$ die stetigen partiellen Ableitungen, so wird:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{354}$$

totales oder *vollständiges Differential* dieser Funktion genannt. Analog zu 11.4. stellt dz die Änderung des Funktionswerts der in P an die Fläche $z = f(x, y)$ gelegten Tangentialebene dar, wenn x die Änderung $\mathrm{d}x = \Delta x$ und y die Änderung $\mathrm{d}y = \Delta y$ erfährt. Mit $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erhält man allgemein das totale Differential für n unabhängige Variablen:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \tag{355}$$

Für hinreichend kleine Änderungen Δx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ergibt sich als Erweiterung von (324):

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z \tag{356}$$

Beispiel. Welchen Wert haben das totale Differential dz und die Funktionsänderung Δz von $z = xy^2$ bezogen auf die Stelle $x = 5{,}00$; $y = 1{,}00$, wenn $\Delta x = \mathrm{d}x = 0{,}100$ und $\Delta y = \mathrm{d}y = 0{,}010$ gegeben sind? An der Stelle $(x; y)$ erhält man nach (354): $\mathrm{d}z = y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$ und nach Einsetzen der gegebenen Werte $\mathrm{d}z = 0{,}100 + 0{,}100 = 0{,}200$. Für Δz ergibt sich $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = 5{,}10 \cdot 1{,}010^2 - 5{,}00 \cdot 1{,}00^2 = 0{,}203$. Damit ist $\mathrm{d}z \approx \Delta z$.

11.9.3. Fehlerrechnung

Hängt eine Größe Y von n Größen X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) über die Funktionsgleichung $Y = f(X_i)$ ab und werden die X_i mit den (fehlerbehafteten) Werten x_i gemessen, so läßt sich ein $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bestimmen, das mit Wahrscheinlichkeit um $\pm\Delta y$ von Y abweicht, so daß $y - |\Delta y| < Y < y + |\Delta y|$. Sind die Δx_i die bei der Messung der X_i angenommenen absoluten Fehler mit $x_i - |\Delta x_i| < X < x_i + |\Delta x_i|$, so ergibt sich der *absolute maximale Fehler* von y unter Anwendung von (355) und (356) aus 11.9.2. zu

$$\Delta y_{\max} = \pm\left[\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right|\right] \tag{357}$$

Ist speziell Y nur von der Größe X abhängig, so folgt analog aus (324) — als Spezialfall von (357):

$$\Delta y_{\max} = |f'(x)|\,\Delta x \tag{358}$$

Der *relative maximale Fehler* ergibt sich allgemein zu $\Delta y_{\max}/y$.
Ist y von der Form $y = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$, so ergibt sich nach Logarithmieren der relative maximale Fehler:

$$\frac{\Delta y_{\max}}{y} = \pm\left[\left|\frac{f_1'(x_1)}{f_1(x_1)}\Delta x_1\right| + \left|\frac{f_2'(x_2)}{f_2(x_2)}\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{f_n'(x_n)}{f_n(x_n)}\Delta x_n\right|\right] \tag{359}$$

Beispiel. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E aus der Verlängerung eines mit der Kraft F beanspruchten Drahts vom Querschnitt A und der Länge L (unbelastet) kann nach dem HOOKEschen Gesetz aus $E = \frac{L \cdot F}{\Delta l \cdot A}$ erfolgen. Gemessen wurden: $L = (2680 \pm 2)$ mm, $F = (100 \pm 0{,}1)$ N, $\Delta l = (2{,}23 \pm 0{,}01)$ mm und $A = (0{,}803 \pm 0{,}0045)$ mm². Wie groß ist der relative maximale Fehler des so bestimmten Elastizitätsmoduls? Nach (359) wird

$$\frac{\Delta E_{\max}}{E} = \pm\left[\left|\frac{\Delta L}{L}\right| + \left|\frac{\Delta F}{F}\right| + \left|\frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l}\right| + \left|\frac{\Delta A}{A}\right|\right] = \pm\left[\frac{2}{2680} + \frac{0{,}1}{100} + \frac{0{,}01}{2{,}23} + \frac{0{,}0045}{0{,}803}\right]$$

$$= \pm(0{,}00075 + 0{,}001 + 0{,}0045 + 0{,}006) = \pm 0{,}0123 \approx \pm 1\%.$$

12. Integralrechnung

12.1. Unbestimmtes Integral und Fundamentalintegrale

Ist eine Funktion $f = \{(x; y) \mid y = f(x)\}$ gegeben und diejenige Funktion F gesucht, die differenziert f ergibt, so liegt als Umkehrung der Differentiation die Aufgabe einer *Integration* vor. Diese Integration liefert keine eindeutige Lösung, sondern eine unendliche Menge F von Funktionen mit dem Parameter $C \in P$, der sogenannten *Integrationskonstanten.* Symbolisch wird geschrieben:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x) + C]\,\mathrm{d}x \tag{360}$$

wobei
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x) + C] = f(x) \tag{361}$$

Jede Lösung von (360) für einen bestimmten Parameterwert C wird *partikuläres Integral* und die Gesamtheit aller Lösungen *allgemeines Integral* des *unbestimmten Integrals* $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mit dem *Integranden* $f(x)$ genannt.

Tabelle 27. Fundamentalintegrale

(I 1)	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $n \neq -1 \quad [n = -1$ s. (I 2)$]$	(D 2)
(I 2)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C; \quad x \neq 0$	(D 5a)
(I 3)	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	(D 7)
(I 4)	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	(D 6)
(I 5)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	(D 9)
(I 6)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$	(D 8)
(I 7)	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C; \; 0 < a \neq 1$	(D 4)
(I 7a)	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	(D 4a)
(I 8)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	(D 10)
	$= -\arccos x + C'$	(D 11)
(I 9)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$	(D 12)
	$= -\operatorname{arccot} x + C'$	(D 13)
(I 10)	$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$	(D 15)
(I 11)	$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$	(D 14)
(I 12)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	(D 16)
(I 13)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C; \; x \neq 0$	(D 17)
(I 14)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C$	(D 18)
	$= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$	
(I 15)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C$	(D 19)
	$= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C; \; x \geqq 1$	
(I 16a)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{artanh} x + C$	(D 20)
	$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C; \; \lvert x\rvert < 1$	
(I 16b)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{arcoth} x + C$	(D 21)
	$= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C; \; \lvert x\rvert > 1$	

Geometrisch stellt die Lösungsmenge oder das allgemeine Integral eines unbestimmten Integrals eine einparametrige Kurvenschar zueinander in Richtung der y-Achse parallelverschobener Kurven mit übereinstimmender Steigung an einer bestimmten Stelle dar. Ist zusätzlich zu f ein Punkt (Anfangs-, Randbedingung o. ä.) gegeben, erhält man eine bestimmte Integralkurve als geometrische Darstellung genau einer partikulären Lösung von (360).

Aus den Ableitungen der elementaren reellen Funktionen nach Tabelle 26 aus 11.2. ergeben sich durch Umkehrung die *Fundamentalintegrale,* wobei sich die Hinweise hinter den allgemeinen Integralen auf die Ableitungen beziehen (Tabelle 27).

12.2. Integrationsregeln und -methoden

Aus den Differentiationsregeln über den konstanten Faktor einer Funktion und über die Differentiation von Summen und Differenzen ergeben sich folgende Integrationsregeln:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \tag{362}$$

Konstante Faktoren können vor das Integral gezogen werden.

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm \cdots \pm h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \cdots \pm \int h(x)\,dx \tag{363}$$

Eine algebraische Summe wird integriert, indem man die Summe der Integrale der Summanden bildet.
Die Integrationsmethoden gestatten es, durch geeignete Operationen eine Vielzahl unbestimmter Integrale auf Fundamental- oder bereits gelöste Integrale zurückzuführen.

Partielle Integration

Aus $F(x) = u(x)\,v(x) = uv$ und $F'(x) = f(x) = u'v + uv'$ folgt durch Integration beider Seiten:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \tag{364}$$

Ist der Integrand Produkt zweier Funktionen, so führt diese Umformung dann zum Ziel, wenn der rechts stehende Integralausdruck ein bereits bekanntes Integral oder ein solches niederer Ordnung (vgl. Rekursionsformeln, Abschn. Ma, S. 107) ist.

Beispiel. Gegeben $\int x\sin x\,dx$. Setzt man nach (364) $u = x$, $v' = \sin x$, so ergibt sich $v = -\cos x$, $u' = 1$ und $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$. Damit ist das unbekannte Integral auf das Fundamentalintegral (I 4) zurückgeführt.

Integration durch Substitution

Nach der Beziehung:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\frac{d\varphi(z)}{dz}\,dz \tag{365}$$

wobei $x = \varphi(z)$ und $dx = \frac{d\varphi(z)}{dz}\,dz$, d. h. durch Einführung einer neuen Veränderlichen z, ist mitunter ein Zurückführen auf Grundintegrale möglich. Durch die Substitution $f(x) = z$ folgen die allgemeinen Formeln:

(I 17) $$\int f(x)\,f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x)]^2 + C$$

(I 18) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C; \quad f(x) \neq 0$$



Beispiel. Die Substitution $ax + b = z$ und damit $dx = \frac{1}{a}\,dz$ bringt die Umformung $\int (ax + b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int z^n\,dz$ zustande. Damit wird nach (I 1) bzw. (I 2)

$$\int (ax + b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)} + C; & n \neq -1 \\ \ln \sqrt[a]{|ax + b|} + C; & n = -1 \end{cases}$$

Integration nach Partialbruchzerlegung

Ist der Integrand eine echt gebrochenrationale Funktion der Form:

$$R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m} \quad \text{mit} \quad m > n \tag{366}$$

und sind ferner Zähler- und Nennerfunktion teilerfremd, so läßt sich $f(x)$ in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen, nachdem die Wurzeln der Gleichung $N(x) = 0$ bestimmt sind. Die unkomplizierteren Partialbrüche sind dann einer Integration zugänglich. Ist $f(x)$ eine unecht gebrochenrationale Funktion, dann läßt sie sich durch Division in die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegen. Je nach der Art der Wurzeln von $N(x) = 0$ erhält man folgende Fälle:

1. $N(x) = 0$ hat voneinander verschiedene und einfache reelle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es wird angesetzt

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n} \tag{367}$$

wobei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konstante Größen sind, die sich durch Koeffizientenvergleich beider Seiten oder durch andere geeignete Methoden bestimmen lassen.

2. $N(x) = 0$ hat reelle Wurzeln, von denen einige mehrfach vorhanden sind, z. B. $x_1 = x_2 = x_3$, $x_4 = x_5$, $x_6, x_7, \ldots, x_n$. Hier setzt man

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^3} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \frac{A_3}{x - x_1} + \frac{A_4}{(x - x_4)^2} + \frac{A_5}{x - x_4} + \frac{A_6}{x - x_6} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n} \tag{368}$$

3. $N(x) = 0$ hat voneinander verschiedene einfache komplexe Wurzeln. Je zwei konjugiert komplexe Wurzeln der Nennerfunktion werden zusammengefaßt, so daß die Partialbruchzerlegung folgende Form annimmt:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \cdots \tag{369}$$

wobei die Nenner der Partialbrüche die Produkte zweier Wurzelfaktoren mit konjugiert komplexen Wurzeln sind.

4. $N(x) = 0$ hat mehrfache komplexe Wurzeln: Die Zerlegung in Partialbrüche erfolgt unter Berücksichtigung des unter 2. und 3. Gesagten.

Beispiele. 1. $\int \frac{9x - 31}{x^2 - 8x + 15}\,dx = \int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx$. $N(x) = 0$ liefert die Wurzeln $x_1 = 5, x_2 = 3$, und es wird nach (367) $\frac{9x - 31}{x^2 - 8x + 15} = \frac{A_1}{x - 5} + \frac{A_2}{x - 3}$. Nach Beseitigung der Nenner und Ordnen ergibt sich $9x - 31 = (A_1 + A_2)\,x - (3A_1 + 5A_2)$. Durch Vergleich der Koeffizienten beider Seiten erhält man $A_1 = 7$, $A_2 = 2$. Damit wird

$$\int \frac{9x - 31}{x^2 - 8x + 15}\,dx = 7\int \frac{dx}{x - 5} + 2\int \frac{dx}{x - 3} = 7\ln|x - 5| + 2\ln|x - 3| + C.$$

2. $\int \frac{5x+6}{x^2-8x+16}\,dx = \int \frac{A_1}{(x-4)^2}\,dx + \int \frac{A_2}{x-4}\,dx$ nach (368), da $x^2 - 8x + 16 = 0$ die Doppelwurzel $x_1 = x_2 = 4$ liefert. Nach Beseitigung der Nenner auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{5x+6}{x^2-8x+16} = \frac{A_1}{(x-4)^2} + \frac{A_2}{x-4}$ und Ordnen nach Potenzen von x ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten: $A_1 = 26$ und $A_2 = 5$. Damit wird

$$\int \frac{5x+6}{x^2-8x+16}\,dx = \int \frac{26}{(x-4)^2}\,dx + \int \frac{5}{x-4}\,dx = 5\ln|x-4| - \frac{26}{x-4} + C.$$

Integration nach Reihenentwicklung

Läßt sich der Integrand in eine Potenzreihe entwickeln, so darf man diese Reihe, sofern sie konvergiert, gliedweise integrieren.

Beispiel. Das besonders in der Statistik auftretende GAUSSsche Fehlerintegral $F = a\int_{-t_1}^{t_1} e^{-t^2}\,dt$, dessen Integrand die zur y-Achse axialsymmetrische Glockenkurve darstellt, muß durch Reihenentwicklung gelöst werden. Nach Tabelle 22 ergibt sich $e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + - \cdots$ und unter Berücksichtigung der Symmetrie:

$$F = 2a\int_0^{t_1}\left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + - \cdots\right)dt = 2a\left(t_1 - \frac{t_1^3}{3\cdot 1!} + \frac{t_1^5}{5\cdot 2!} - \frac{t_1^7}{7\cdot 3!} + - \cdots\right)$$

für alle $|t_1| < \infty$.

12.3. Integraltabellen*)

Tabelle 28. Integrale algebraischer Funktionen

Ist der Integrand eine algebraisch rationale Funktion [bis (I 30)], so läßt sich das Integral stets in geschlossener Form angeben, während dies bei algebraisch irrationalen Integranden nicht mehr in jedem Falle möglich ist.

(I 19) $\int (a \pm bx)^n\,dx = \pm\frac{(a \pm bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C; \quad n \neq -1$

(I 19a) $= \pm\frac{1}{b}\ln|a \pm bx| + C; \quad n = -1$

(I 20) $\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bx| + C$

(I 21) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right) + C$

(I 22) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(I 23a) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{x}{a} + C; \quad \left|\frac{x}{a}\right| < 1$

(I 23b) $= \frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\frac{x}{a} + C; \quad \left|\frac{x}{a}\right| > 1$

(I 24) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a} + C$

(I 25) $\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| + C$

*) Fundamentalintegrale s. 12.1. Tab. 27, S. 101



Tabelle 28 (Fortsetzung)

(I 26a) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C; \quad n = 1; \quad$ vgl. (I 17)

(I 26b) $\quad = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C; \quad n > 1$

(I 27a) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C; \quad b^2 - 4ac < 0$

(I 27b) $\quad = -\frac{2}{2ax+b} + C; \quad b^2 - 4ac = 0$

(I 27c) $\quad = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C; \quad b^2 - 4ac > 0$

(I 28) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}; \quad$ vgl. (I 27)

(I 29) $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)\,a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$

(I 30) $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{A}{2a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

(I 31) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

(I 32) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

(I 33) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

(I 34) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(I 35) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

(I 36) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

(I 37) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C$

(I 38) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcosh}\left|\frac{a}{x}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} + C$

(I 39) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{arsinh}\frac{a}{x} + C = -\frac{1}{2a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}-a} + C$

(I 40) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}} = \frac{1}{b}\ln\left(bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right) + C$

(I 41) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b}{a}x\right) + C$

(I 42a) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C; \quad a > 0$

(I 42b) $\quad = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C; \quad a < 0$

(I 43) $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = (c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1})\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

wobei $f(x)$ eine ganzrationale Funktion n-ten Grades, die Koeffizienten c_i und k Konstanten sind, die nach Differentiation beider Seiten durch Koeffizientenvergleich ermittelt werden.

Tabelle 28 (Fortsetzung)

(I 44) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

(I 45) $\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\operatorname{arsinh}\left(\frac{b}{a}x\right) + C$

(I 46) $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} - \frac{a^2}{2b}\arccos\left(\frac{b}{a}x\right) + C$

(I 47) $\int \sqrt{ax^2 - b}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2 - b} - \frac{b^2}{2a}\operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{b}x\right) + C$

(I 48) $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}a^2x\right)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a} + C$

(I 49) $\int x^2\sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}a^2x\right)\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

(I 50) $\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}a^2x\right)\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$

Tabelle 29. Integrale transzendenter Funktionen

Bei transzendenten Integranden läßt sich das Integral noch seltener in geschlossener Form angeben, als es bei algebraisch irrationalen der Fall ist. Die geschlossene Auflösung ist u. a. stets möglich, wenn der Integrand eine rationale Funktion einer trigonometrischen Funktion (I 70) oder einer Exponentialfunktion (I 59) ist.

(I 51) $\int \ln(ax)\,\mathrm{d}x = x[\ln(ax) - 1] + C$

(I 52) $\int \frac{1}{x}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C$

(I 53) $\int \ln(a + bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a + bx}{b}[\ln(a + bx) - 1] + C$

(I 54) $\int \mathrm{e}^{a \pm bx}\,\mathrm{d}x = \pm\frac{1}{b}\mathrm{e}^{a \pm bx} + C$

(I 55) $\int \mathrm{e}^x x^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - + \cdots + (-1)^n n!] + C$

(I 56) $\int \mathrm{e}^{-x} x^n\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!] + C$

(I 57) $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) + C$

(I 58) $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(\frac{b}{a}\sin bx + \cos bx\right) + C$

(I 59) $\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x = \int \bar{R}(t)\,\mathrm{d}t$

d. h., ist der Integrand eine rationale Funktion einer Exponentialfunktion, so führt stets die Substitution $t = \mathrm{e}^{ax}$ und damit $\mathrm{d}x = (1/at)\,\mathrm{d}t$ zum Ziel.

(I 60) $\int \sin(a + bx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\cos(a + bx) + C$

(I 61) $\int \cos(a + bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\sin(a + bx) + C$

(I 62) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ (I 63) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$

Tabelle 29. (Fortsetzung)

(I 64) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\tan x| + C$

(I 65) $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{a} \sin \varphi \ln \left| \tan \frac{x + \varphi}{2} \right| + C; \quad \tan \varphi = \frac{a}{b}$

(I 66) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2 \cot 2x + C$

(I 67) $\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (m - n) x}{m - n} - \frac{\sin (m + n) x}{m + n} \right) + C; \quad |m| \neq |n|$

(I 68) $\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (m + n) x}{m + n} + \frac{\sin (m - n) x}{m - n} \right) + C; \quad |m| \neq |n|$

(I 69) $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos (m + n) x}{m + n} + \frac{\cos (m - n) x}{m - n} \right) + C; \quad |m| \neq |n|$

(I 70) $\int R (\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) \, dx = \int \bar{R}(t) \, dt$

d. h., ist der Integrand eine rationale Funktion von trigonometrischen Funktionen, so führt die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ stets zum Ziel. Es ist dann $dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$, $\cot x = \frac{1 - t^2}{2t}$.

(I 71) $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

(I 72) $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$

(I 73) $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

(I 74) $\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

(I 75) $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$

(I 76) $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$

(I 77) $\int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + C$

(I 78) $\int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + C$

Tabelle 30. Rekursionsformeln

Hierbei wird der Integrand in einen ähnlichen umgeformt, wobei der konstante Exponent n stufenweise einen kleineren Wert annimmt.

(I 79) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \frac{1}{2(n - 1)} \left(\frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} + (2n - 3) \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n-1}} \right); \quad n \neq 1$

(I 80) $\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$

(I 81) $\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$

(I 82) $\int \frac{\sin x}{x^n} \, dx = -\frac{\sin x}{(n - 1) x^{n-1}} + \frac{1}{n - 1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} \, dx; \quad n > 1$

(I 83) $\int \frac{\cos x}{x^n} \, dx = -\frac{\cos x}{(n - 1) x^{n-1}} - \frac{1}{n - 1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} \, dx; \quad n > 1$

(I 84) $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n - 1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$

(I 85) $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n - 1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

Tabelle 30. (Fortsetzung)

(I 86)	$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx; \quad n \neq 1$
(I 87)	$\int \cot^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x \, dx; \quad n \neq 1$
(I 88)	$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx; \quad n > 0$
(I 89)	$\int \sinh^n x \, dx = \frac{1}{n} \sinh^{n-1} x \cosh x - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} x \, dx$
(I 90)	$\int \cosh^n x \, dx = \frac{1}{n} \cosh^{n-1} x \sinh x + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} x \, dx$

Tabelle 31. Spezielle Integrale der Rekursionsformeln

(I 80a)	$\int x \sin nx \, dx = \frac{1}{n^2} (\sin nx - nx \cos nx) + C$
(I 80b)	$\int x^2 \sin nx \, dx = \frac{1}{n^3} [(2 - n^2x^2) \cos nx + 2nx \sin nx] + C$
(I 81a)	$\int x \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2} (nx \sin nx + \cos nx) + C$
(I 81b)	$\int x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{n^3} [(n^2x^2 - 2) \sin nx + 2nx \cos nx] + C$
(I 84a)	$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin (2x) + C$
(I 85a)	$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin (2x) + C$

12.4. Bestimmtes Integral

Das *bestimmte Integral* $\int_a^b f(x) \, dx$ ist eine Konstante, die sich folgendermaßen ergibt: In die Lösung des zugehörigen unbestimmten Integrals $\int f(x) \, dx$ wird die Variable x erst mit der *oberen Grenze* $b \in P$ und dann mit der *unteren Grenze* $a \in P$ belegt, um diese Funktionswerte dann voneinander zu subtrahieren:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x) + C]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \tag{370}$$

Die *Integrationskonstante* C hebt sich hierbei auf.

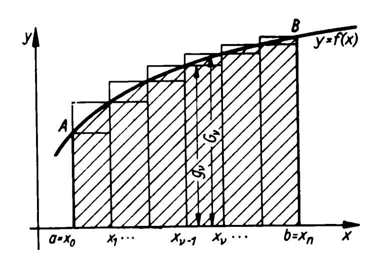


Bild 90. Bestimmtes Integral



Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe

Verfeinert man durch Hinzufügen weiterer Teilpunkte auf der x-Achse die Intervalleinteilung für das ein- und umbeschriebene Treppenpolygon (Bild 90) und existiert (unabhängig von der Art der Verfeinerung) für $(x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0$ der gemeinsame Grenzwert A der Folgen der sogenannten *Obersummen* $\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(x_\nu - x_{\nu-1})$ und *Untersummen* $\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x_\nu - x_{\nu-1})$, so ist A das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Das bestimmte Integral A kann als Maßzahl der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ und der x-Achse geometrisch veranschaulicht werden.

Regeln über bestimmte Integrale

Bei der Vertauschung der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \tag{371}$$

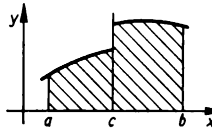


Bild 91. Sprungstelle im Integrationsintervall

Liegen im Integrationsintervall Unstetigkeiten oder Sprungstellen (Bild 91 für $x = c$), so kann man, wenn $a < c < b$, stückweise integrieren:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{372}$$

Mit $a \leqq x_m \leqq b$ und $f(x_m) = y_m$ als Mittelwert aller Ordinaten gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)\,f(x_m) \tag{373}$$

12.5. Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale liegen vor, wenn das Integrationsintervall unendlich groß ist oder die integrierbare Funktion im Integrationsintervall nicht beschränkt ist.

Unendlich großes Integrationsintervall

Das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert oder konvergiert dann, wenn:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A \tag{374}$$

d. h., wenn ein endlicher Grenzwert A vorhanden ist. Analoges gilt, wenn die untere Grenze $a \to -\infty$ oder wenn beide Grenzen gegen Unendlich gehen: $a \to -\infty$ und $b \to +\infty$.

Funktionen mit Unendlichkeitsstellen

Ist $f(x)$ für $x = a$ nicht vorhanden, so liegt ein uneigentliches Integral bezüglich der unteren Grenze a vor. Es existiert bzw. konvergiert, wenn:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x \to a+0} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A \tag{375}$$

Analoges gilt für den gleichen Zustand an der oberen Grenze oder an beiden Grenzen.

Beispiele. 1. Gegeben $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$. Dann ist gemäß (374):

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

2. Gegeben $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Dann ist

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{b\to1-0\\ a\to-1+0}} \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to1-0} \arcsin b - \lim_{a\to-1+0} \arcsin a = \pi/2 + \pi/2 = \pi$$

3. Gegeben $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x}$. Dann ist nach (374):

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x} = \lim_{b\to\infty} \ln(1+b) = \infty$$

d. h. divergent.

12.6. Anwendungen der Integralrechnung

12.6.1. Flächenberechnung*)

Wird die Fläche A von den Kurven mit den Gleichungen $y = 0$ (x-Achse), $x = a$, $x = b$ und $y = f(x)$ (vgl. Bild 90) begrenzt, so wird:

$$A = \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{376}$$

Vorzeichen von A: Sofern $a \leqq x \leqq b$ und in diesem Integrationsintervall alle $f(x) \geqq 0$, wird $A \geqq 0$. Sind umgekehrt alle $f(x) \leqq 0$ (Kurve im allgemeinen unterhalb der x-Achse), wird $A \leqq 0$.

Interessiert der absolute Betrag der Maßzahl der Fläche, so sind in (376) rechts die Betragsstriche zu setzen. Hat die Kurve $y = f(x)$ im Integrationsintervall Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, so liefert (376) die Differenz der oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke mit den unterhalb der x-Achse liegenden Flächenstücken. Wird in diesem Falle der Betrag der gesamten Fläche gesucht, so ist stückweise von Nullstelle zu Nullstelle zu integrieren und die Summe der absoluten Beträge der Teilflächen zu bilden (vgl. Beispiel 1).

Wird die Fläche A von der oberen Kurve $y = f(x)$ und der unteren Kurve $y = g(x)$, d. h. $f(x) \geqq g(x)$, im Integrationsintervall $a \leqq x \leqq b$ begrenzt (vgl. Bild 92), so erhält man für die schraffierte Fläche:

$$A = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \tag{377}$$

Besitzen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ Schnittpunkte in $a \leqq x \leqq b$, so ist stückweise von Schnittpunkt zu Schnittpunkt zu integrieren und bei Anwendung von (377) die Summe der absoluten Beträge der Teilflächen zu bilden.

*) vgl. auch 12.7.1. Doppelintegrale

Ist die Begrenzungskurve in Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ gegeben und sind t_1 bzw. t_2 die Parameterwerte, welche der unteren Grenze $x = a$ bzw. der oberen Grenze $x = b$ entsprechen, so wird analog zu (376)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}\,\mathrm{d}t \tag{378}$$

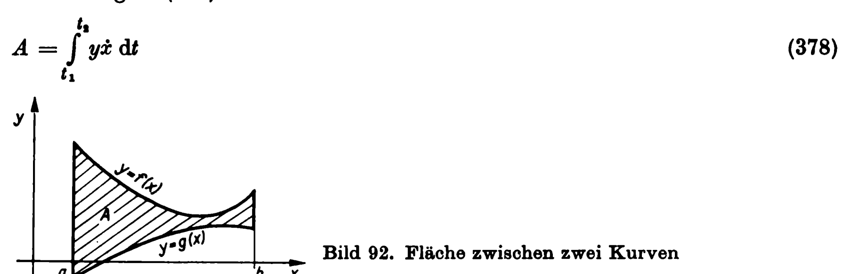


Bild 92. Fläche zwischen zwei Kurven

Sektorformeln

Die Fläche, die von der in Polarkoordinaten dargestellten Kurve $\varrho = f(\varphi)$ und den zu φ_1 und φ_2 zugehörigen Radiusvektoren eingeschlossen wird (Bild 93), ergibt sich durch Integration der sektorförmigen Flächendifferentiale $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\,\varrho^2\,\mathrm{d}\varphi$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi \tag{379}$$

Sind die φ_1 bzw. φ_2 entsprechenden Parameterwerte t_1 bzw. t_2 und ist die Begrenzungskurve in Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ gegeben, so erhält man analog zu (378):

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}\,\mathrm{d}t \tag{380}$$

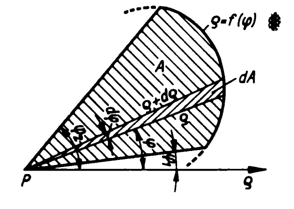


Bild 93. Sektorfläche

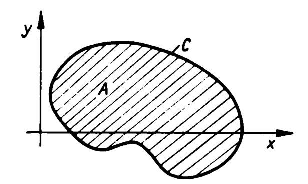


Bild 94. Fläche innerhalb geschlossener Kurve

Wird speziell die Fläche von der in Parameterdarstellung gegebenen Kurve C ganz umschlossen (Bild 94), so schreibt man (380) als Umlaufintegral längs der Kurve C symbolisch:

$$A = \oint_{(C)} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t \tag{381}$$

Beispiele. 1. Die Fläche einer Normalparabel (vgl. Bild 63) mit dem Abschnitt a auf der Parabelachse ist infolge der Symmetrie

$A = 2\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\,x\sqrt{x}\,\Big|_0^a = \frac{4}{3}\,a\sqrt{a}$. Diese Fläche beträgt 2/3 der sie umschließenden Rechteckfläche $2a\sqrt{a}$.

2. Zu ermitteln ist der absolute Betrag der Fläche, die von der Kurve $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ und der x-Achse zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ begrenzt wird. Da die Funktion an der Stelle $x = 1$ das Vorzeichen wechselt, zerfällt A in die Teilflächen $A_1(0 \leqq x \leqq 1)$ oberhalb und $A_2(1 \leqq x \leqq 3)$ unterhalb der x-Achse.

Mit

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

und $$A_2 = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_1^3 = -\frac{32}{12}$$

wird somit $$A = |A_1| + |A_2| = \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12}.$$

3. Die Abhängigkeit zwischen Druck p und Volumen V eines Gases bei konstanter Temperatur ist nach BOYLE-MARIOTTE durch pV = konst. = c gegeben. Im p,V-Diagramm (Bild 95) stellt die Fläche unter

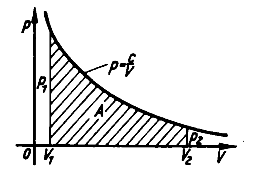


Bild 95. Expansionsarbeit als Fläche im p, V-Diagramm

der Kurve $p = c/V$ zwischen V_1 und V_2 die Expansionsarbeit W des Gases bei Druckabfall von p_1 auf p_2 dar:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = c \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = c \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = c \ln \frac{V_2}{V_1}$$

12.6.2. Volumenberechnung*) von Rotationskörpern

Die in Bild 90 dargestellte Fläche, begrenzt von den Kurven $y = 0$, $x = a$, $x = b$ und $y = f(x) \geqq 0$, erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen *Rotationskörper*, dessen Volumen sich aus der Integration aller Scheibendifferentiale mit $dV_x = \pi[f(x)]^2\,dx$ ergibt:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \tag{382}$$

Ist die y-Achse Rotationsachse und wird die erzeugende Fläche von dieser Achse, den Geraden $y = c$ und $y = d$ und der Kurve $x = \varphi(y) \geqq 0$ begrenzt, so wird analog:

$$V_y = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2\,dy \tag{383}$$

Wird die erzeugende Fläche durch eine in Parameterdarstellung gegebene Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t) \geqq 0$ begrenzt, so wird:

$$V_x = \pi \left| \int_{t_1}^{t_2} y^2 \dot{x}\,dt \right| \tag{384}$$

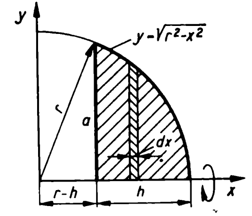


Bild 96. Volumen des Kugelsegments

*) vgl. auch 12.7.3.

Mit (384) läßt sich auch das Volumen des Rotationskörpers bestimmen, der durch Rotation einer Fläche erzeugt wird, die von einer geschlossenen, stetigen und doppelpunktfreien Kurve C, die oberhalb der x-Achse verläuft, erzeugt wird.

Beispiel. Das Volumen des Kugelsegments (Bild 96) beträgt nach (382)

$$V_x = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r} = \pi\left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Da $a^2 + (r - h)^2 = r^2$, folgt $V_x = \pi h(3a^2 + h^2)/6$ nach Elimination von r.

12.6.3. Kurvenlängen

Die Maßzahl für die *Bogenlänge* $s = \widehat{AB}$ der (stückweise stetig differenzierbaren) Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ (vgl. Bild 90) ist:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \tag{385}$$

Analog ergeben sich bei Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ der Kurvengleichung:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \tag{386}$$

bei Verwendung von Polarkoordinaten $\varrho = f(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2)$:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2}\,d\varphi \quad \text{mit} \quad \dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{d\varphi} \tag{387}$$

und für die Länge der Raumkurve $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ im Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt \tag{388}$$

Beispiele. 1. Die Länge s der Kreisevolvente bei der Abwicklung eines Halbkreises mit dem Radius r ist zu bestimmen, vgl. Bild 56. Aus der Parameterdarstellung $x = r(\cos t + t \sin t)$; $y = r(\sin t - t \cos t)$ dieser Evolvente folgt $\dot{x} = rt \cos t$ und $\dot{y} = rt \sin t$. Daher wird nach (386)

$$s = \int_0^\pi \sqrt{r^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = r\int_0^\pi t\,dt = \frac{1}{2}rt^2\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}r\pi^2$$

2. Die Länge s der Kardioide $\varrho = 2a(1 - \cos\varphi)$ ist zu bestimmen, vgl. Bild 57. Da $\varrho^2 = 4a^2(1 - \cos\varphi)^2$ und $\dot{\varrho}^2 = 4a^2 \sin^2\varphi$, wird nach (387)

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\varphi}\,d\varphi$$

Wegen $\sqrt{1 - \cos\varphi} = \sqrt{2}\sin(\varphi/2)$ folgt $s = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -8a\left[\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 16a$ (nach Substitution $\varphi/2 = z$, $d\varphi = 2\,dz$).

12.6.4. Mantelflächen von Rotationskörpern

Die in Bild 90 dargestellte (stückweise stetig differenzierbare) obere Begrenzungskurve mit der Gleichung $y = f(x)$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse die *Mantelfläche* A_M des Rotationskörpers. Ihre Maßzahl errechnet sich aus:

$$A_M = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \tag{389}$$

oder, wenn die erzeugende Kurve in Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ gegeben ist:

$$A_M = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \tag{390}$$

Beispiel. Die Mantelfläche des Rotationsparaboloids, das durch Rotation der Normalparabel in den Grenzen $0 \leqq x \leqq h$ um die x-Achse erzeugt wird, berechnet sich nach (389) aus $y = f(x) = \sqrt{x}$,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ y'^2 = \frac{1}{4x} \text{ zu } A_M = 2\pi \int_0^h \sqrt{x + 1/4}\, dx = \frac{4\pi}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^h = \frac{\pi}{6}(4h+1)\sqrt{4h+1}.$$

12.7. Mehrfache Integrale

12.7.1. Doppelintegrale

Das Integral der im Intervall $y_1 \leqq y \leqq y_2$ stetigen Funktion $F(y) = \int\limits_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y)\, dx$ wird *Doppelintegral* genannt und in der Form:

$$V = \int\limits_{y=y_1}^{y=y_2} \left\{ \int\limits_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{391}$$

geschrieben. Geometrisch läßt sich dieses Doppelintegral als Maßzahl des Volumens veranschaulichen, das der über dem in der x,y-Ebene liegenden Bereich A errichtete allgemeine Zylinder bis zur Fläche mit der Gleichung $z = f(x, y)$ einnimmt (Bild 97). Die Berechnung von

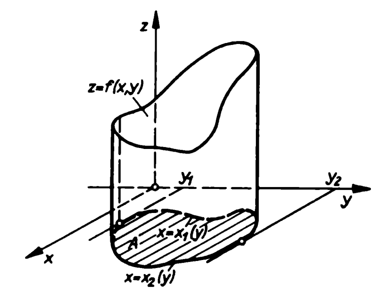


Bild 97. Volumen als Doppelintegral

(391) geschieht durch Zurückführen auf ein einfaches Integral derart, daß zuerst das innere Integral — mit variablen Grenzen — und dann das äußere in den konstanten Grenzen — geometrisch als *Stützgeraden* bezeichnet — gelöst wird.

Wird der ebene Bereich A durch die Funktionen $y = y_1(x)$ und $y = y_2(x)$ im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$, d. h. zwischen den beiden Stützgeraden $x = x_1$ und $x = x_2$, gegeben, so wird analog zu (391):

$$V = \int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} \left\{ \int\limits_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{392}$$

Für den Spezialfall $f(x, y) = 1$ erhält man aus (391) bzw. (392) die Maßzahl der Fläche A als Doppelintegral:

$$A = \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, dx \tag{393}$$

Beispiele. 1. Die endliche Fläche A zwischen den beiden Parabeln $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ ist zu bestimmen. Da sich beide Kurven in (0; 0) und (1; 1) schneiden, wird nach (393)

$$A = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Zu bestimmen ist das Volumen des Körpers, dessen Grundfläche die Fläche aus Beispiel 1 ist und dessen Deckfläche durch das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$ gebildet wird. Nach (392) ergibt sich

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{1}{3} x^{3/2} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \frac{6}{35}.$$

12.7.2. Dreifache Integrale

Analog dem Doppelintegral in 12.7.1. wird:

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \left\{ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \left[\int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \tag{394}$$

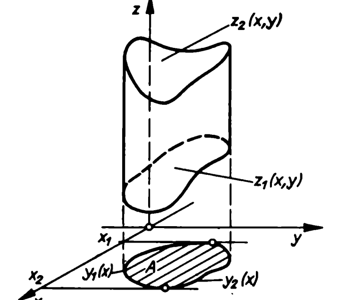


Bild 98. Volumen als Dreifachintegral

ein *dreifaches Integral* genannt. Für $f(x, y, z) = 1$ erhält man speziell die Maßzahl des Volumens eines Körpers, dessen Grund- bzw. Deckfläche von den Flächen $z_1(x, y)$ bzw. $z_2(x, y)$ gebildet werden und deren Projektion auf die x,y-Ebene einen ebenen Bereich A liefert, der von den Kurven $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwischen den Sperrgeraden x_1 und x_2 gebildet wird (Bild 98):

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\, dy\, dx \tag{395}$$

Die Berechnung eines dreifachen Integrals erfolgt durch schrittweises Zurückführen erst auf ein Doppelintegral und dann auf ein einfaches Integral.

12.7.3. Volumenberechnung

Aus (392) in 12.7.1. und (382) bis (384) in 12.6.2. geht hervor, daß nicht in jedem Falle eine Volumenberechnung die Integration aller *Volumendifferentiale* $dV = dx\, dy\, dz$ über ein dreifaches Integral nach (395) erfordert.

Der Ansatz eines einfachen Integrals durch Integration aller *Scheibendifferentiale* $dV = q(z)\, dz$ liefert als Verallgemeinerung von (382):

$$V = \int_{z_1}^{z_2} q(z)\, dz \tag{396}$$

Dabei stellt $q(z)$ die Maßzahl der zur x,y-Ebene parallelen Querschnittsfläche des Körpers in der Höhe z dar $(z_1 \leqq z \leqq z_2)$. Der Ansatz nach (392) stellt geometrisch die unter dem Integralbegriff erklärte Summation aller *Faden-* oder *Säulendifferentiale* $\mathrm{d}V = z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ dar.
In vielen Fällen führt die Verwendung von der Gestalt des Körpers *angepaßten Koordinaten* zu einfacheren Integrationen. Die wichtigsten *Koordinatentransformationen* des in kartesischen

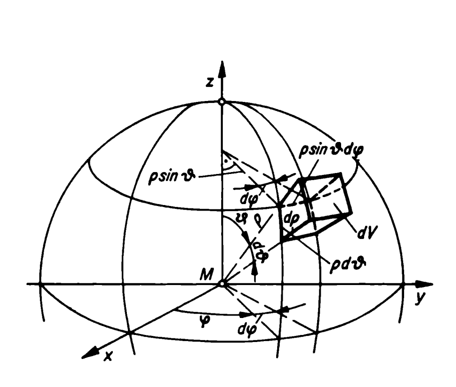


Bild 99. Kugelkoordinaten

Bild 100. Zylinderkoordinaten

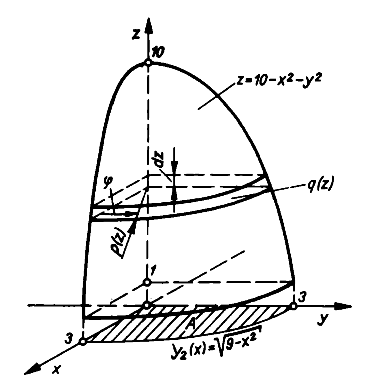


Bild 101. Volumenberechnung

Koordinaten dargestellten Volumendifferentials $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sind in *Kugelkoordinaten* (Bild 99) mit $x = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$; $y = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$; $z = \varrho \cos\vartheta$, wobei $(0 \leqq \varrho < +\infty,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$:

$$\mathrm{d}V = \varrho^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi \tag{397}$$

und in Zylinderkoordinaten (Bild 100) mit $x = \varrho \cos\varphi$; $y = \varrho \sin\varphi$; $z = z$, wobei $(0 \leqq \varrho < +\infty,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$:

$$\mathrm{d}V = \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z \tag{398}$$

Beispiel. Zu berechnen ist das Volumen des von den Flächen mit den Gleichungen $x^2 + y^2 + z - 10 = 0$, $z = 1$, $x = 0$ und $y = 0$ begrenzten und im 1. Oktanten liegenden Körpers. Er ist Teil eines Rotationsparaboloids mit der z-Achse als Rotationsachse (Bild 101).

1. Das Volumen aus der Integration von Scheibendifferentialen: Wegen $q(z) = \frac{1}{4}\pi(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}(10 - z)\,\mathrm{d}z$ wird $V = \frac{\pi}{4}\int\limits_1^{10}(10 - z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}\left[10z - \frac{1}{2}z^2\right]_1^{10} = \frac{81}{8}\pi$.

2. Das Volumen aus der Integration aller Volumendifferentiale in kartesischen Koordinaten: Wegen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ als Stützgeraden, $y_1 = 0$ und $y_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$ als Begrenzungskurven der Projektion in der x,y-Ebene, $z_1 = 1$ als Grundfläche und $z_2(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ als Deckfläche des Körpers wird nach (395):

$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_1^{10-x^2-y^2} dz\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (9 - x^2 - y^2)\, dy\, dx = \frac{2}{3} \int_0^3 (9 - x^2) \sqrt{9 - x^2}\, dx.$$

Nach Zerlegung des Integranden in $9\sqrt{9 - x^2} - x^2\sqrt{9 - x^2}$ läßt sich mit Hilfe von I(32) und I(48) gliedweise integrieren und die Übereinstimmung mit dem Ergebnis unter 1. feststellen.

3. Das Volumen aus der Integration aller Volumendifferentiale in Zylinderkoordinaten: Wegen $z_1 = 1$, $z_2 = 10$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_1 = 0$ und $\varrho(z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10 - z}$ folgt nach (398) und (395):

$$V = \int_1^{10} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{10-z}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz = \int_1^{10} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (10 - z)\, d\varphi\, dz = \frac{\pi}{4} \int_1^{10} (10 - z)\, dz = \frac{81}{8} \pi.$$

12.8. Linienintegrale*)

Unter dem *Linienintegral* der drei Funktionen $F_i[x(t); y(t); z(t)]$ $(i = 1, 2, 3)$ längs der in Parameterdarstellung $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ gegebenen Raumkurve C von P_1 bis P_2 versteht man das Integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{F_1[x(t), y(t), z(t)]\, \dot{x} + F_2[x(t), y(t), z(t)]\, \dot{y} + F_3[x(t), y(t), z(t)]\, \dot{z}\}\, dt \tag{399}$$

oder symbolisch kürzer:

$$\int_{P_1}^{P_2} (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) \tag{400}$$

Beispiel. Welchen Wert hat das Linienintegral längs der Parabel $y = x^2$ von $P_1(0; 0)$ bis $P_2(2; 4)$, wenn $F_1(x, y) = x + y$ und $F_2(x, y) = xy$? Mit $x = t$; $y = t^2$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ als gewählter Parameterdarstellung des Wegs von P_1 nach P_2 längs der Parabel erhält man nach (400):

$$\int_{P_1}^{P_2} [(x + y)\, dx + x \cdot y\, dy] = \int_0^2 (t + t^2 + 2t^4)\, dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\Big|_0^2 \approx 17{,}5.$$

12.9. Näherungsverfahren der Integration

12.9.1. Numerische Berechnung bestimmter Integrale

Läßt sich ein bestimmtes Integral analytisch nur schwer oder gar nicht in geschlossener Form lösen oder liegt die Begrenzungskurve einer Fläche nur grafisch vor, so können folgende Näherungsverfahren angewendet werden:

Das Intervall $(a = x_0) \leqq x \leqq (b = x_{2n})$ (Bild 102) sei in eine gerade Anzahl $2n$ Teilintervalle der Größe $(b - a)/2n$ aufgeteilt. Die Fläche A, die von der Kurve, den Ordinaten y_a und y_b und der x-Achse eingeschlossen wird, ergibt sich dann angenähert nach folgenden Formeln:

1. *Sehnen- oder Trapezformel.* Zieht man die Sehnen $\overline{P_0P_2}$, $\overline{P_2P_4}$, …, $\overline{P_{2n-2}P_{2n}}$, so ergibt sich A angenähert zu S als Summe von n Trapezinhalten:

$$A \approx S = \frac{b - a}{n} \left[\frac{1}{2} (y_a + y_b) + y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}\right] \tag{401}$$

wobei $A > S$ $\{A < S\}$, wenn $f(x)$ von der Abszisse aus konkav {konvex} ist.

*) vgl. auch 14.4.

2. *Tangentenformel.* Legt man in $P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1}$ die Tangenten an die Kurve und bringt man die Ordinaten $y_a, y_2, y_4, \ldots, y_{2n}$ zum Schnitt mit den zugehörigen Tangenten, so folgt A besser angenähert als Summe von n Trapezen:

$$A \approx T = \frac{b-a}{n}\,[y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}] \tag{402}$$

wobei $A > T$ $\{A < T\}$, wenn die Kurve für $a \leqq x \leqq b$ von der Abszisse aus konvex {konkav} ist.

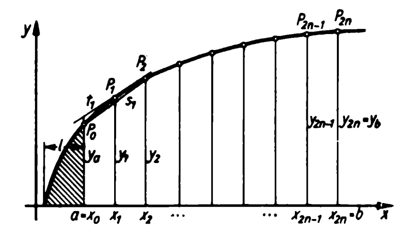


Bild 102. Numerische Flächenberechnung

3. Simpsonsche *Regel.* Mittelt man die Ergebnisse von Trapez- und Tangentenformel, indem man wegen der größeren Genauigkeit die Tangentenformel zweimal verwendet, so ergibt sich eine noch günstigere Lösung:

$$A = \bar{A} = \frac{S + 2T}{3} = \frac{b-a}{6n}\,[y_a + y_b + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})] \tag{403}$$

Diese Simpsonsche Regel liefert den Flächeninhalt unter der Kurve dann genau, wenn diese eine ganzrationale Funktion höchstens dritten Grads ist.

4. Keplersche *Faßregel.* Unterteilt man von a bis b nur in zwei Intervalle durch den Zwischenwert $x_1 = (a + b)/2$, also $n = 1$, so erhält man die Faßregel als Spezialfall der Simpsonschen Regel:

$$A \approx K = \frac{b-a}{6}\,(y_a + 4y_1 + y_b) \tag{404}$$

5. Lambertsche *Regel.* Hat die Kurve Stellen, für die $f'(x) \to \pm\infty$, so kann man bei überschläglichen Rechnungen den Streifen der Breite l (in Bild 102 die schraffierte Fläche), wenn dort die Kurve angenähert parabelförmig verläuft, näherungsweise einsetzen mit:

$$L = 2ly_a/3 \tag{405}$$

Beispiele. 1. Es sollen die Ergebnisse der Näherungsformeln der wahren Fläche A unter der Kurve $y = x^{1/2}$ im Bereich $1 \leqq x \leqq 11$ gegenübergestellt werden.

x_i	y_i	Sehnenformel (401)	Tangentenformel (402)	Simpsonsche Regel (403)	Keplersche Regel (404)
$x_0 = 1$	1,0000	0,5000		1,0000	1,0000
$x_1 = 2$	1,4142		1,4142	5,6568	
$x_2 = 3$	1,7321	1,7321		3,4642	
$x_3 = 4$	2,0000		2,0000	8,0000	
$x_4 = 5$	2,2361	2,2361		4,4722	
$x_5 = 6$	2,4495		2,4495	9,7980	9,7980
$x_6 = 7$	2,6458	2,6458		5,2916	
$x_7 = 8$	2,8284		2,8284	11,3136	
$x_8 = 9$	3,0000	3,0000		6,0000	
$x_9 = 10$	3,1623		3,1623	12,6492	
$x_{10} = 11$	3,3166	1,6583		3,3166	3,3166
Summe $\sum$		11,7723	11,8544	70,9622	14,1146
$\int_1^{11} x^{1/2}\,dx = 23,6553 = A$	$\approx$	$S = 2 \cdot 11,7723$; $S = 23,5446$	$T = 2 \cdot 11,8544$; $T = 23,7088$	$\bar{A} = \frac{1}{3} \cdot 70,9622$; $\bar{A} = 23,6541$	$K = \frac{5}{3} \cdot 14,1146$; $K = 23,5243$
Rel. Fehler: $\left\lvert\frac{\Delta A}{A}\right\rvert \cdot 100\%$		$\approx 0,5\%$	$\approx 0,2\%$	$\approx 0,005\%$	$\approx 0,6\%$

2. Bestimmt man A unter der Kurve des 1. Beispiels in $0 \leqq x \leqq 1$ nach (405), so wird $L = \frac{2}{3} = A$, was mit dem wahren Wert $\int\limits_0^1 x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}$ genau übereinstimmt.

12.9.2. Grafische Integration

Die gesuchte Integralkurve $y = \int f(x)\,dx$ wird aus der vorliegenden Kurve $y' = f(x)$ durch Konstruktion nach Bild 103 ermittelt.

Auf der gegebenen Kurve werden die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ (im Bild ist $n = 5$) so angenommen, daß auch ausgezeichnete Stellen (Extremwerte, Nullstellen) mit erfaßt werden. Die Parallelen zur x-Achse durch $A_1, \ldots, A_n$ schneiden die y-Achse in $B_1, \ldots, B_n$. Die durch die Ordinaten $y_1', \ldots, y_n'$ entstehenden Intervallstreifen sind durch Zwischenordinaten $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{n-1}}$ so zu teilen, daß die schraffierten Flächenstücke in jedem Intervall annähernd gleich sind. Ist C_1 ein Punkt auf y_1', der auf der Integralkurve liegen soll, so zieht man zu $\overline{PB_1}$ durch C_1 die Parallele, die $\overline{y_1}$ in $\overline{C_1}$ schneidet. Durch $\overline{C_1}$ wird die Parallele zu $\overline{PB_2}$ bis zum Schnitt mit der nächsten Zwischenordinate $\overline{y_2}$ gezogen usw. Der so entstehende Polygonzug stellt die Integralkurve derjenigen stückweise stetigen Kurve dar, die aus den Parallelen zur x-Achse besteht. Die Schnittpunkte der y_i' mit den Strecken des Polygonzugs sind die Punkte $C_1, \ldots, C_n$ der gesuchten

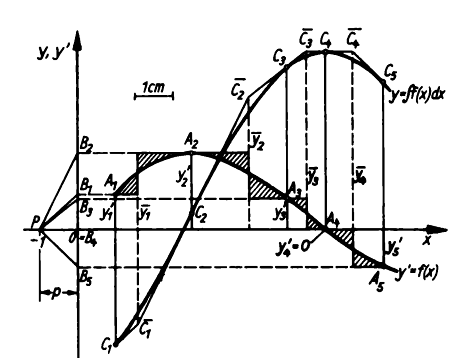


Bild 103. Grafische Integration

Integralkurve, die vom Polygonzug in diesen Punkten tangiert wird. Die Differenz der Ordinaten von C_n und C_1 gibt dann die Größe der Fläche an, die von $y' = f(x)$ und der x-Achse von x_1 bis x_n begrenzt wird. Sind die Maßstäbe auf den Achsen gleich, dann beträgt der Polabstand $p = 1$ cm, sofern 1 Koordinateneinheit $\triangleq$ 1 cm. Aus Gründen der zweckmäßigen Ausnutzung der Zeichenfläche wird es oft nötig sein, die Maßstäbe verschieden zu wählen. Sind A die auf der x-, B die auf der y- und C die auf der y'-Achse abgebildeten Größen und $m_A = \bar{A}/A$, $m_B = \bar{B}/B$ und $m_C = \bar{C}/C$ die entsprechenden Maßstabsfaktoren, so ergibt sich der Polabstand zu $p = m_A m_C/m_B$. ($\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ sind die zeichnerischen Längen von A, B, C.) (Der Maßstab für 1 cm ist der Bildverkleinerung wegen eingetragen.)

Es wurden kinematische Vorrichtungen geschaffen, die es gestatten, häufig auftretende Integrationen auf instrumentellem Wege auszuführen. Die entwickelten Instrumente dienen hauptsächlich der mechanischen Herstellung von Integralkurven und der mechanischen Berechnung von Flächen, Momenten u. a.

1. *Integraphen.* Liegt $y' = f(x)$ grafisch vor (Bild 103), dann läßt sich die Integralkurve $y = \int f(x)\,dx$ durch *Integraphen* instrumentell zeichnen, indem mit einem Fahrstift die gegebene Kurve entlanggefahren wird, wobei ein Schreibstift die Integralkurve automatisch zieht.

2. *Planimeter.* Mit Hilfe der Planimeter läßt sich der Flächeninhalt einer mit einem Fahrstift umfahrenen Fläche ermitteln. Bei länglichen Flächenbereichen findet das *Linearplanimeter* Anwendung, während im allgemeinen das *Polarplanimeter* am gebräuchlichsten ist (Bild 104). Dieses Gerät besteht aus dem Polarm *1* mit dem während der Messung ortsfesten Pol *2* und dem Planimeterkörper *3* mit Meßrolle *4*. *1* und *3* sind gelenkig miteinander verbunden. Am Ende des mit *3* verbundenen Fahrstabs *5* befindet sich der Fahrstift *6* oder eine Planglasplatte mit Ringmarke, womit während der Messung die Fläche

im Uhrzeigersinn umfahren wird. Beim Umfahren der Fläche rollt die im Planimeterkörper gelagerte Meßrolle ab, so daß sich am Meßwerk *7* mit Hilfe eines Nonius *8* das Ergebnis vierstellig ablesen läßt. Die Länge des aus dem Planimeterkörper herausragenden Fahrstabs läßt sich verändern und dadurch bei maßstäblich vorhandenen Flächen deren wahre Größe sofort ablesen. Im allgemeinen wird der Pol außerhalb der zu messenden Fläche aufgestellt. Ist dies nicht möglich, so kann er auch innerhalb der Fläche liegen; dann muß zum abgelesenen Wert auf der Meßrolle die Planimeterkonstante — Fläche des

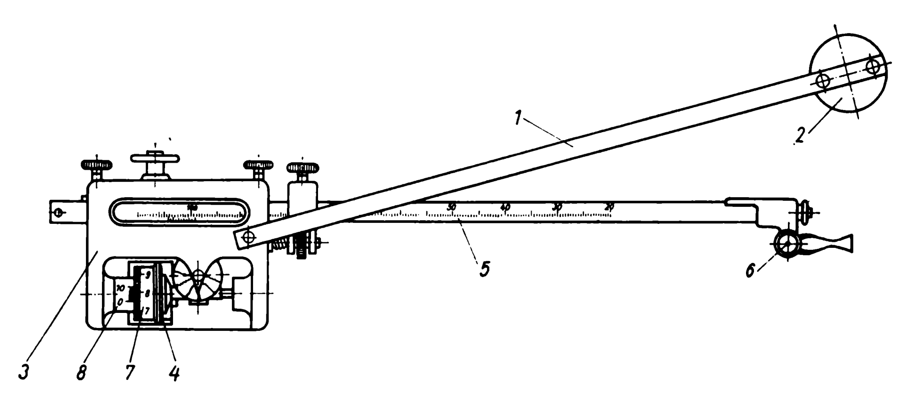


Bild 104. Polarplanimeter

Kreises, die der Polarm bei einer Umdrehung überstreicht — addiert werden. Vor den Messungen empfiehlt es sich, den relativen Fehler des Instruments zu ermitteln, indem man mit Hilfe des beigefügten Kontrolllineals eine Fläche bekannter Größe (Kontrollfläche) umfährt. Weiterhin kann die zu messende Fläche zweimal aus zueinander symmetrischen Ausgangsstellungen des Instruments heraus umfahren werden.

3. *Integratoren*. Linear-Potenzplanimeter mit Zahnradgetriebe sind Instrumente, mit denen gleichzeitig für beliebig geformte ebene Figuren der Flächeninhalt, das statische Moment und das Trägheitsmoment mechanisch durch Umfahren der Figur ermittelt werden.

13. Gewöhnliche Differentialgleichungen

13.1. Definitionen und Grundbegriffe

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* (Dgl.)*) ist eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion einer unabhängigen Variablen, in der mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion auftritt.

Die *Ordnung* einer Dgl. wird bestimmt durch die höchste auftretende Ableitung dieser Funktion. Daher lautet allgemein eine Dgl. n-ter Ordnung in impliziter Darstellung:

$$\Phi[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0, \qquad (y^{(n)}(x) \neq 0) \tag{406}$$

Der *Grad* einer Dgl. stimmt mit dem größten Exponenten der auftretenden Potenzen von $y(x)$ und den zugehörigen Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$, ... überein, sofern die Funktion Φ eine rationale Funktion ist. Daher ist eine Einteilung in *lineare* Dgl. (1. Grads) und *nichtlineare* Dgl. möglich.

Die *allgemeine Lösung* (*allgemeines Integral*) einer Dgl. n-ter Ordnung ist die Menge aller Funktionen, deren Funktionswerte und Ableitungen die Dgl. erfüllen. Sie enthält genau n Integrationskonstanten oder *Parameter* $C_1, C_2, \dots, C_n \in P$.

Werden sämtliche Parameter mit jeweils einer ganz bestimmten Zahl belegt, so erhält man eine *spezielle Lösung* oder ein *partikuläres* Integral der Dgl. Geometrisch veranschaulicht stellt die allgemeine Lösung eine n-parametrige Kurvenschar und jede partikuläre Lösung eine bestimmte Kurve (*Integralkurve*) dieser Schar dar.

*) im folgenden verwendete Abkürzung für gewöhnliche Differentialgleichung

13.2. Differentialgleichungen 1. Ordnung

Ihre allgemeine Form in impliziter Darstellung folgt aus (406) für $n = 1$. Es folgen nur die für die Praxis wichtigsten und elementar lösbaren Typen der *expliziten* Dgl. 1. Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y) \tag{407}$$

13.2.1. Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Ist in (407) $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, so lassen sich wegen $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in der Dgl.

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y) \tag{408}$$

die Variablen trennen: $\mathrm{d}y/h(y) = g(x)\,\mathrm{d}x$. Die Integration beider Seiten liefert die allgemeine Lösung von (408):

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel. Die Trennung der Variablen in $y' = y \cos x$ führt auf $\mathrm{d}y/y = \cos x\,\mathrm{d}x$, und die Integration beider Seiten liefert $\ln y = \sin x + C^*$. Vor Auflösung nach y ist es zweckmäßig, $C^* = \ln C$ zu setzen, so daß $\ln (y/C) = \sin x$ (nach Anwendung der Logarithmengesetze) und schließlich $y = C e^{\sin x}$ als allgemeine Lösung folgt.

13.2.2. Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen

Mitunter läßt sich durch eine geeignete Substitution eine Dgl. in eine solche mit trennbaren Variablen überführen. Möglich ist dies bei folgenden Typen (Tabelle 32):

Tabelle 32. Substitution bei Differentialgleichungen

Differentialgleichung	Substitution	Bemerkung
$y' = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$	$u = \frac{y}{x}$	Vgl. Beispiel unten
$y' = \psi(ax + by + c)$	$u = ax + by + c$	
$y' = \psi\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ mit $D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}$	$D = 0$: $u = ax + by + c$ $D \neq 0$: $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$	x_0 und y_0 sind das Lösungspaar des Systems $ax + by + c = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Beispiel. Die Frage nach der Formgebung eines Schneidwerkzeugs, welches das Schnittgut unter gleichbleibendem Winkel schneidet, führt nach Umformung auf die Differentialgleichung $y' = \frac{by/x + 1}{b - y/x} = \psi(y/x)$. Die Substitution $u = y/x$ ergibt $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x\, x + u = \frac{bu + 1}{b - u}$ und nach der Trennung der Variablen $\int \frac{u}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u - b \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Durch Integration nach (I 9) und (I 18), Wiedereinführung von y und Umstellung folgt als allgemeines Integral $\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{b \arctan y/x}$. Dies ist eine Schar logarithmischer Spiralen (Bild 52), die sich analytisch einfacher nach Transformation auf Polarkoordinaten in der Form $\varrho = C e^{b\varphi}$ darstellen läßt.

13.2.3. Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Allgemeine Form:

$$g_1(x)\,y' + g_0(x)\,y + g(x) = 0, \qquad g_1(x) \neq 0 \tag{409}$$

Mit $\frac{g_0(x)}{g_1(x)} = f(x)$ und $-\frac{g(x)}{g_1(x)} = s(x)$ erhält man die *Normalform der inhomogenen linearen Dgl.* 1. Ordnung:

$$y' + f(x)\,y = s(x)\ ^{*)}, \qquad s(x) \neq 0 \tag{410}$$

oder, wenn $s(x) = 0$, die Normalform der *homogenen* linearen Dgl. 1. Ordnung:

$$y' + f(x)\,y = 0 \tag{411}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. (411) folgt durch *Trennung der Variablen:*

$$y_h = K \exp\left(-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\ ^{**)} \tag{412}$$

K Integrationskonstante

Die allgemeine Lösung y der inhomogenen Dgl. (410) wird durch *Variation der Konstanten* ermittelt. Dabei wird anstelle von K in (412) der noch zu ermittelnde Term $K(x)$ gesetzt:

$$y = K(x) \exp\left(-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{413}$$

Die Differentiation dieses Ansatzes und Einsetzen in (410) liefert $K'(x)$ und anschließende Integration schließlich:

$$K(x) = \int s(x) \exp\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x + C \tag{414}$$

Damit wird die allgemeine Lösung von (410):

$$y = \exp\left(\int -f(x)\,\mathrm{d}x\right) \left[\int s(x) \exp\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x + C\right] \tag{415}$$

Ausmultiplizieren von (415) läßt erkennen: Die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen Dgl. ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Dgl.:

$$y = y_h + y_p \tag{416}$$

Beispiel. Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung $y' + y \cos x = (\sin 2x)/2$ ist zu ermitteln!
Die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Dgl. lautet (analog Beispiel aus 13.2.1.): $y_h = k \exp(-\sin x)$. Variation der Konstanten liefert als Ansatz der allgemeinen Lösung: $y = K(x) \exp(-\sin x)$. Diese Gleichung nach x differenziert, ergibt $y' = K'(x) \exp(-\sin x) - K(x) \cos x \exp(-\sin x)$, und beides eingesetzt führt auf $K'(x) = \exp \sin x \cdot (\sin 2x)/2$. Hieraus folgt $K(x)$ durch Substitution $z = \sin x$ und anschließende partielle Integration $K(x) = \exp \sin x (\sin x - 1) + C$. Eingesetzt ergibt das als allgemeines Integral der gegebenen Dgl. $y = C\,\mathrm{e}^{-\sin x} + \sin x - 1$.

13.2.4. Näherungsverfahren

13.2.4.1. Grafische Lösung mit Isoklinenverfahren

In der expliziten Form der Dgl. 1. Ordnung wird mit $y' = f(x, y)$ jedem Wertepaar $(x_0; y_0)$ eine Steigung $f'(x_0; y_0)$ zugeordnet.
Das Wertetripel $(x_0; y_0; f'(x_0; y_0))$ wird ein *Linienelement* und die Menge aller Linienelemente das *Richtungsfeld* genannt. Jede Kurve, deren Linienelemente auch Linienelemente dieses Richtungsfeldes sind, ist

---

*) $s(x)$ wird als *Störfunktion* bezeichnet
**) $\exp x = \mathrm{e}^x$

Integralkurve der Dgl. Das punktweise Zeichnen des Richtungsfelds wird oft dadurch erleichtert, daß die Kurven dargestellt werden, welche die Punkte gleicher konstanter Steigung y' enthalten. Für jede dieser Isoklinen ergibt sich somit die Gleichung $c = f(x, y)$.

Beispiel. Mit Hilfe des Richtungsfelds ist für $x \geqq 0$ diejenige Integralkurve der Dgl. $y'x = 2y$ zu ermitteln, die $P_0(2; 1)$ enthält. Die Gleichung der Isoklinen lautet: $y = cx/2$. Die Isoklinen sind Geraden durch den Ursprung und in Bild 105 für $c = 0$, $1/2$, 1, $3/2$ und 2 mit ihren Linienelementen eingezeichnet.

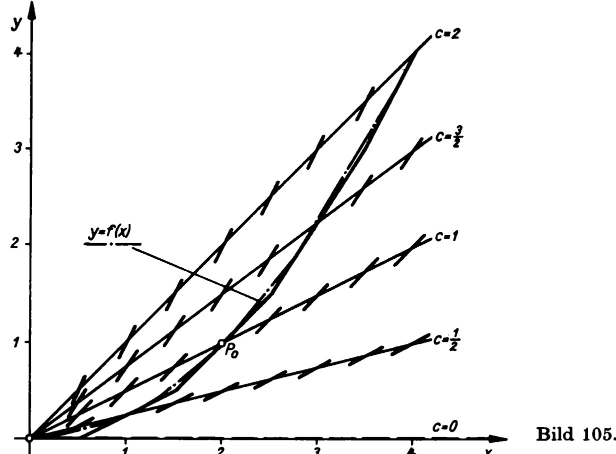


Bild 105. Isoklinenverfahren

Das Linienelement für P_0 wird nach beiden Seiten bis etwa zur Streifenmitte zwischen den benachbarten Isoklinen gezeichnet und dort durch die jeweiligen Linienelemente in derselben Weise fortgesetzt. Der entstehende Polygonzug tangiert dann jeweils in den Schnittpunkten mit den Isoklinen die gesuchte Integralkurve, welche die Gleichung $y = x^2/4$ $(x \geqq 0)$ hat.

13.2.4.2. Numerische Lösung mit Runge-Kutta-Verfahren

Ist die durch den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ verlaufende Lösungskurve der Dgl. $y' = f(x, y)$ innerhalb eines bestimmten Intervalls I gesucht, wird I mit der *Schrittweite* h unterteilt, und an jeder Stützstelle $x_y = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ werden die Werte:

$$k_{1i} = hf(x_i; y_i)$$

$$k_{2i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{k_{1i}}{2}\right)$$

$$k_{3i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{k_{2i}}{2}\right)$$

$$k_{4i} = hf(x_i + h; y_i + k_{3i})$$

berechnet. Nach Runge-Kutta ergibt sich dann:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \frac{1}{6}\,(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})$$

Die Genauigkeit des Verfahrens wächst mit Verkleinerung der Schrittweite, was aber andererseits höheren Rechenaufwand erfordert. Die Berechnung der günstigsten Schrittweite kann [6] entnommen werden.

13.3. Differentialgleichungen 2. Ordnung

13.3.1. Auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführbare Differentialgleichungen

Von der in expliziter Darstellung vorliegenden Dgl. 2. Ordnung:

$$y'' = \varphi(x, y, y') \tag{417}$$

lassen sich die folgenden speziellen Typen auf eine Dgl. 1. Ordnung zurückführen:

1. $y'' = \varphi(x)$: durch sofort mögliches Integrieren,
2. $y'' = \varphi(y)$: Multiplikation beider Seiten mit $2y'$ führt wegen

$$2y'y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'^2) \quad \text{auf} \quad y' = \pm\sqrt{2\int \varphi(y)\,\mathrm{d}y + C},$$

3. $y'' = \varphi(y')$: mit Substitution $y' = u$ wird auf $u' = \varphi(u)$ zurückgeführt,
4. $y'' = \varphi(x, y')$: mit Substitution $y' = u$ wird auf $u' = \varphi(x, u)$ zurückgeführt,
5. $y'' = \varphi(y, y')$: mit Substitution $y' = u$ wird auf $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u = \varphi(u, y)$ zurückgeführt.

Beispiele. 1. Gesucht ist die Weg-Zeit-Funktion beim freien Fall einer Masse ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands, wenn $\ddot{s} = -g =$ konst. gegeben ist und zur Zeit $t = 0$ der Weg $s = h$ und die Geschwindigkeit $v = 0$ sein sollen. Die erste Integration führt auf die Dgl. 1. Ordnung $\dot{s} = -gt + C_1$, und nochmalige Integration ergibt $s = -gt^2/2 + C_1t + C_2$. Die beiden Anfangsbedingungen ergeben $C_1 = 0$ und $C_2 = h$, so daß schließlich $s = h - gt^2/2$.

2. Die Dgl. für den freien Fall mit der Annahme eines geschwindigkeitsproportionalen Luftwiderstands lautet $m\ddot{s} + k\dot{s} = -mg$. Die Substitution $u = \dot{s}$ führt auf $\dot{u} + ku/m = -g$, also auf eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung (vgl. 13.2.3.). Nach Ermittlung des allgemeinen Integrals der zugehörigen homogenen Dgl. zu $u_h = C\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$ und Variation der Konstanten erhält man aus $u = C\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$ die allgemeine Lösung $s = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}gt + C_2$. Mit den gleichen Anfangsbedingungen wie im 1. Beispiel wird speziell $s = h - \frac{m^2}{k^2}g\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}t - 1\right)$.

13.3.2. Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Homogene Differentialgleichung

Das allgemeine Integral dieser Dgl.:

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{418}$$

mit den Konstanten a_1 und a_0 ergibt sich infolge des Lösungsansatzes $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ und wegen $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$ aus der Lösungsmenge der algebraischen Gleichung 2. Grads (*charakteristische Gleichung*):

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{419}$$

Je nach dem Charakter*) der Lösungen λ_1 und λ_2 von (419) erhält man als allgemeines Integral dieser besonders für gedämpfte Schwingungserscheinungen wichtigen Dgl.:

$D = \frac{a_1^2}{4} - a_0$	Allgemeines Integral	Praktische Bedeutung
$D > 0$	$y_h = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$	aperiodisches Kriechen
$D = 0$	$y_h = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$	aperiodischer Grenzfall
$D < 0$, d. h. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathrm{j}$	$y_h = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ $= \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ $= C\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi_0)$	gedämpfte harmonische Schwingung ($C_1, C_2, C, A, B, \varphi_0 =$ konst.)

*) vgl. 6.2.3.



Inhomogene Differentialgleichung

Ein partikuläres Integral der inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x) \qquad (420)$$

kann allgemein durch Variation der Konstanten (vgl. 13.2.3.), speziell durch Erniedrigung der Ordnung (vgl. 13.3.1), oder über einen Lösungsansatz bei speziellen Formen der Störfunktion $s(x)$ ermittelt werden. Die allgemeine Lösung von (420) ergibt sich dann aus $y = y_h + y_p$.

Bei Variation der Konstanten wird als partikuläres Integral $y_p = C_1(x)\, z_1(x) + C_2(x)\, z_2(x)$ angesetzt, wenn $y_h = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x)$ die allgemeine Lösung von (418) darstellt. $C_1(x)$ und $C_2(x)$ folgen dann aus der Integration von $C_1'(x)$ und $C_2'(x)$, die sich aus dem Gleichungssystem ergeben (vgl. Beispiel 1):

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, z_1(x) + C_2'(x)\, z_2(x) &= 0, \\ C_1'(x)\, z_1'(x) + C_2'(x)\, z_2'(x) &= s(x) \end{aligned} \qquad (421)$$

Der Lösungsansatz für die folgenden Störfunktionen erspart das Integrieren (Tabelle 33).

Tabelle 33. Lösungsansätze für Störfunktionen

	Störfunktion $s(x)$	Lösungsansatz y_p	
1.	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_0$	$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$	
2.	$A e^{\alpha x}$	$a e^{\alpha x}$	$(\lambda \neq \alpha)$
3.	$A \cos \omega x$ $B \sin \omega x$ $A \cos \omega x + B \sin \omega x$	$a \cos \omega x + b \sin \omega x$	$(\lambda \neq j\omega)$
4.	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_0)\, e^{\alpha x}$	$(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0)\, e^{\alpha x}$	$(\lambda \neq \alpha)$
5.	$(A \cos \omega x + B \sin \omega x)\, e^{\alpha x}$	$(a \cos \omega x + b \sin \omega x)\, e^{\alpha x}$	$(\lambda \neq \alpha)$

Falls in 2. bis 5. α bzw. $j\omega$ eine k-fache Lösung ($k = 1, 2$) von (419) ist, muß den Lösungsansätzen noch der Faktor x^k hinzugefügt werden (vgl. Beispiel 2). Die noch zu bestimmenden Koeffizienten b_k bzw. a und b ergeben sich durch Koeffizientenvergleich der differenzierten und in (420) eingesetzten Lösungsansätze mit der vorliegenden Störfunktion. Ist die Störfunktion eine Summe der in 1. bis 5. dargestellten Terme, so wird analog auch der Lösungsansatz als Summe angesetzt (vgl. Beispiel 1).

Beispiele. 1. Gegeben ist die inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung $y'' - 5y' + 6y = \cos x + 4\, e^x$.
Die zugehörige homogene Dgl. $y'' - 5y' + 6y = 0$ hat, da $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ die Lösungen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$ hat, die allgemeine Lösung $y_h = C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{2x}$. Der Lösungsansatz für das partikuläre Integral der inhomogenen Dgl. lautet (nach 2. und 3. aus Tabelle 33):

$$y_p = a \cos x + b \sin x + c\, e^x, \qquad y_p' = -a \sin x + b \cos x + c\, e^x \qquad y_p'' = -a \cos x - b \sin x + c\, e^x$$

Eingesetzt erhält man $5(a - b) \cos x + 5(a + b) \sin x + 2c\, e^x = \cos x + 4\, e^x$ und aus dem Koeffizientenvergleich: $5(a - b) = 1$, $5(a + b) = 0$, $2c = 4$ folgen $c = 2$, $a = 1/10$, $b = -1/10$ damit die allgemeine Lösung unter Berücksichtigung von (416)

$$y = C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{2x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + 2\, e^x.$$

Variation der Konstanten würde mit $z_1(x) = e^{3x}$ und $z_2(x) = e^{2x}$ das System (421)

$$C_1'(x)\, e^{3x} + C_2'(x)\, e^{2x} = 0, \qquad 3C_1'(x)\, e^{3x} + 2C_2'(x)\, e^{2x} = \cos x + 4\, e^x$$

mit den Lösungen $C_1'(x) = -e^{-3x} \cos x - 4e^{-2x}$ und $C_2'(x) = e^{-2x} \cos x + 4e^{-x}$ ergeben. Unter Verwendung von (I 58) ergeben sich nach Integration

$$C_1(x) = \frac{1}{10}\, e^{-3x} \sin x - \frac{3}{10}\, e^{-3x} \cos x - 2\, e^{-2x} \quad \text{und} \quad C_2(x) = -\frac{2}{10}\, e^{-2x} \sin x + \frac{4}{10}\, e^{-2x} \cos x + 4\, e^{-x}$$

und somit $y_p = 0{,}1 \cos x - 0{,}1 \sin x + 2\, e^x$ wie oben nach Lösungsansatz.

2. Gegeben $y'' - 5y' + 6y = 3\,e^{2x}$ mit $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$ (vgl. Beispiel 1). Da $\lambda_2 = 2 = \alpha$ (in 2. von Tabelle 33), muß angesetzt werden: $y_p = ax\,e^{2x}$. Differenziert folgen $y_p' = a\,e^{2x} + 2ax\,e^{2x}$ und $y_p'' = 4a\,e^{2x} + 4ax\,e^{2x}$. y_p' und y_p'' in die gegebene Dgl. eingesetzt, ergibt $-a\,e^{2x} = 3\,e^{2x}$ und somit $a = -3$, so daß

$y = y_h + y_p = C_2\,e^{3x} + (C_1 - 3x)\,e^{2x}$.

14. Vektoralgebra und Vektoranalysis

14.1. Dreidimensionaler Vektor

Während *skalare Größen* eindeutig durch die Angabe einer Maßzahl und Maßeinheit (z. B. Temperatur, Masse, Zeit) bestimmt sind, ist zur eindeutigen Charakterisierung von *vektoriellen Größen* (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Drehmoment) zusätzlich noch die Angabe einer *Richtung* erforderlich.

Definitionen:
Ein *dreidimensionaler freier*) Vektor* $\boldsymbol{a} = (a_x\, a_y\, a_z)$ ist ein geordnetes Zahlentripel, wobei a_x, a_y und a_z die *Koordinaten* oder *skalaren Komponenten* des Vektors $\boldsymbol{a}$ heißen.
Geometrisch ist $\boldsymbol{a}$ die Gesamtheit aller *gleich langen, parallelen* und *gleichsinnig gerichteten* Strecken $\overrightarrow{P_1P_2}$, für die gilt:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1 \quad \text{und} \quad a_z = z_2 - z_1 \tag{422}$$

(Bild 106). Häufig wird nur ein Repräsentant von $\boldsymbol{a}$, z. B. $\overrightarrow{P_1P_2}$, als Vektor bezeichnet.

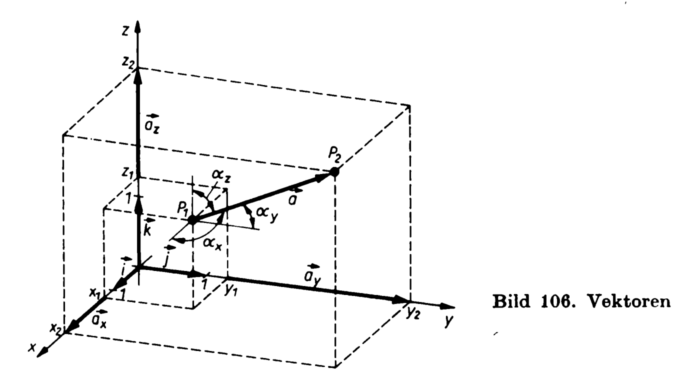


Bild 106. Vektoren

Nach 5.2.1. sind Vektoren einreihige Matrizen. Eine Unterscheidung zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren kann aber im Rahmen dieses Abschnitts entfallen, da es belanglos ist, ob die Koordinaten eines Vektors waagerecht oder senkrecht angeordnet werden.

Daher die Schreibweisen:

$$\boldsymbol{a} = (a_x\, a_y\, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{423}$$

Der Betrag $|\boldsymbol{a}| = a > 0$ des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist die Maßzahl der Streckenlänge $\overline{P_1P_2}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{424}$$

Komponenten von $\boldsymbol{a}$ sind die Vektoren (vgl. Bild 106):

$$\boldsymbol{a}_x = (a_x\, 0\, 0), \quad \boldsymbol{a}_y = (0\, a_y\, 0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{a}_z = (0\, 0\, a_z) \tag{425}$$

*) im Gegensatz zum gebundenen Vektor, z. B. dem linienflüchtigen Vektor in der Statik starrer Körper, für den nur eine Verschiebung längs einer Geraden (Wirkungslinie) erlaubt ist. Diese Unterscheidung ist für die Vektoralgebra aber belanglos.

Spezielle Vektoren sind:

— der *Einheitsvektor* $\boldsymbol{e}$ mit beliebiger Richtung und $|\boldsymbol{e}| = 1$,
— die *Grund-* oder *Basisvektoren*

$$\boldsymbol{i} = (1\ 0\ 0), \quad \boldsymbol{j} = (0\ 1\ 0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{k} = (0\ 0\ 1) \tag{426}$$

als Einheitsvektoren längs der positiven Koordinatenachsen,
— der *Nullvektor* $\boldsymbol{o}$ mit $|\boldsymbol{o}| = 0$ und ohne definierte Richtung und
— der *Ortsvektor* $\boldsymbol{r}_0$ eines Raumpunktes P_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$

$$\boldsymbol{r}_0 = (x_0\ y_0\ z_0) \tag{427}$$

dessen Anfangspunkt im Ursprung O des Koordinatensystems liegt.

Die *Richtungscosinus* von $\boldsymbol{a}$ sind:

$$\cos\alpha = a_x/a, \quad \cos\beta = a_y/a \quad \text{und} \quad \cos\gamma = a_z/a \tag{428}$$

wobei (vgl. Bild 106) α, β, γ die Winkel sind, die $\boldsymbol{a}$ mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, und

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{429}$$

14.2. Vektoralgebra

Gleichheit zweier Vektoren: $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind genau dann gleich, wenn sie in sämtlichen Koordinaten übereinstimmen:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z = b_z \tag{430}$$

Addition und *Subtraktion* von Vektoren: Dabei werden die entsprechenden Koordinaten addiert bzw. subtrahiert:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \tag{431}$$

Aus (431) und (425) folgt:

$$\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a} \tag{432}$$

Geometrisch ergeben sich die *Vektorsumme* $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ bzw. die *Vektordifferenz* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ nach Bild 107 bzw. Bild 108 als die gerichteten Diagonalen im Parallelogramm, das die Vektoren aufspannen.

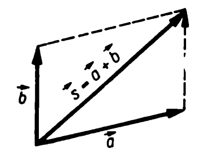


Bild 107. Vektorsumme

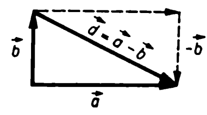


Bild 108. Vektordifferenz

Produkt eines Vektors $\boldsymbol{a}$ *mit einem Skalar* λ *bzw.* μ*:*

$$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda = (\lambda a_x\ \lambda a_y\ \lambda a_z) \tag{433}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = \mu\lambda\boldsymbol{a} \tag{434}$$

$$(\lambda + \mu)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{b} \tag{435}$$

$$\boldsymbol{a} \parallel \lambda\boldsymbol{a} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \lambda\boldsymbol{a}, \text{ falls } \lambda > 0 \text{ und} \\ \boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \lambda\boldsymbol{a}, \text{ falls } \lambda < 0 \text{ (Bild 109)} \end{cases}$$

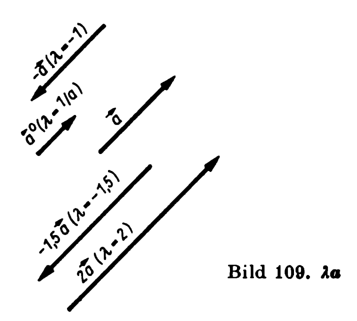


Bild 109. $\lambda\boldsymbol{a}$

Aus (433) und (431) folgt:

$$\boldsymbol{a} = (a_x\ a_y\ a_z) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{436}$$

Die aus den Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ und den Skalaren λ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) gebildete Vektorsumme:

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\boldsymbol{a}_i \tag{437}$$

wird *Linearkombination* der Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ genannt. n Vektoren werden *linear abhängig* genannt, wenn mindestens einer eine Linearkombination eines anderen ist, anderenfalls sind sie *linear unabhängig.*

$\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind linear abhängig oder *kollinear* (parallel), falls

$$\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}\ (\lambda \neq 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \wedge |\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{b}| \tag{438}$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sind linear abhängig oder *komplanar* (in einer Ebene liegend), falls

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \tag{439}$$

Mehr als 3 Vektoren im Raum sind stets linear abhängig.

Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{440}$$

Folgerungen aus (440) sind:

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |a| \tag{441}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{442}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = (\lambda\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1 \tag{443}$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{444}$$

Orthogonalitätsbedingung der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{445}$$

Komponente $\boldsymbol{a}_b$ von $\boldsymbol{a}$ längs des Vektors $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}_b = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}/b^2) \cdot \boldsymbol{b} \tag{446}$$

Vektorprodukt zweier Vektoren:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab \sin \sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \tag{447}$$



Damit ist $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ein Vektor, der sowohl senkrecht auf $\boldsymbol{a}$ als auch auf $\boldsymbol{b}$ steht, dessen Betrag gleich der Maßzahl der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gebildeten Parallelogrammfläche ist und der in der Reihenfolge $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ein Rechtssystem bildet.

Folgerungen von (447) sind:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \tag{448}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{449}$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o} \tag{450}$$

und

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \tag{451}$$

Parallelitätsbedingung zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \tag{452}$$

Mehrfache Produkte von Vektoren:
Spatprodukt oder gemischtes Produkt:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{453}$$

wobei

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{454}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \tag{455}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0, \quad \text{falls } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{c} \text{ komplanar} \tag{456}$$

Dreifaches Vektorprodukt:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \tag{457}$$

Skalarprodukt zweier Vektorprodukte:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix} \tag{458}$$

Vektorprodukt zweier Vektorprodukte:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d}] \cdot \boldsymbol{c} - [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}] \cdot \boldsymbol{d} \tag{459}$$

Beispiele. 1. Die Arbeit W infolge der Kraft $\boldsymbol{F}$ längs des unter $\varphi =$ konst. zur Richtung von $\boldsymbol{F}$ verlaufenden Wegs $\boldsymbol{s}$ ist das skalare Produkt $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = Fs \cos \varphi$.

2. In einer zur z-Achse senkrechten Ebene greift im durch seinen Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ gegebenen Punkt P die Kraft $\boldsymbol{F}$ unter dem Winkel $\varphi = \sphericalangle\, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}$ an. Der Vektor $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ mit seinem Betrag $M = rF \sin \varphi$ stellt dann das Moment von $\boldsymbol{F}$, bezogen auf O bzw. die z-Achse, dar (Bild 110).

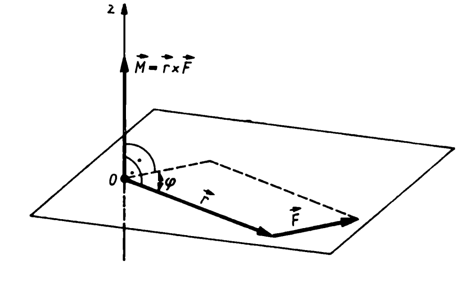


Bild 110. Moment als vektorielles Produkt

14.3. Vektorielle Darstellung von Kurven und Flächen im Raum

Für die analytische Behandlung räumlicher Probleme ist es oft zweckmäßig, zur vektoriellen Darstellung räumlicher Gebilde überzugehen.
Aus der Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ einer *Raumkurve* ergibt sich deren vektorielle Darstellung:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \tag{460}$$

Dabei durchläuft die Pfeilspitze des (vom Parameter t abhängigen) veränderlichen Ortsvektors $\boldsymbol{r}(t)$ die Menge aller Punkte der Raumkurve (Bild 111).

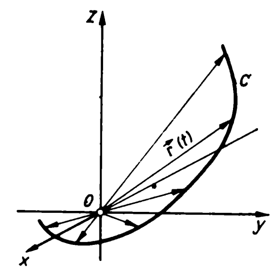


Bild 111. Raumkurve

Gilt in (460) speziell die lineare Abhängigkeit $x = x_0 + a_1t$; $y = y_0 + a_2t$; $z = z_0 + a_3t$, so erhält man:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k} + t(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{a} \tag{461}$$

als vektorielle Darstellung der *Gleichung einer Geraden* durch P_0 (Ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$) mit dem *Richtungsvektor* $\boldsymbol{a}$.
Ist der veränderliche Ortsvektor von zwei Parametern t und s abhängig, so ist:

$$\boldsymbol{r}(t, s) = x(t, s)\,\boldsymbol{i} + y(t, s)\,\boldsymbol{j} + z(t, s)\,\boldsymbol{k} \tag{462}$$

die vektorielle Parameterdarstellung einer *Fläche* im Raum. Speziell mit $x = x_0 + a_1t + b_1s$; $y = y_0 + a_2t + b_2s$; $z = z_0 + a_3t + b_3s$ erhält man aus (462) die vektorielle Darstellung einer *Ebene* im Raum mit:

$$\boldsymbol{r}(t, s) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \tag{463}$$

Analog kann die Darstellung des *Raums* (oder eines Raumstücks) in Abhängigkeit von den Parametern u, v und w vektoriell in der Form erfolgen:

$$\boldsymbol{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\,\boldsymbol{i} + y(u, v, w)\,\boldsymbol{j} + z(u, v, w)\,\boldsymbol{k} \tag{464}$$

Beispiele. 1. $\boldsymbol{r}(t) = (a \cos t)\,\boldsymbol{i} + (a \sin t)\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}/2\pi$ mit $0 \leqq t \leqq 2\pi$ ist die vektorielle Darstellung einer vollen Windung der Schraubenlinie mit der Ganghöhe c auf einem Zylindermantel mit dem Radius a.
2. Die Gleichung der gekrümmten Fläche des in Bild 101 dargestellten Paraboloids lautet $\boldsymbol{r}(t, s) = (s \cos t)\,\boldsymbol{i} + (s \sin t)\,\boldsymbol{j} + (10 - s^2)\,\boldsymbol{k}$ mit $0 \leqq t \leqq \pi/2$ und $0 \leqq s \leqq 3$.

14.4. Vektoranalysis

Differentiation eines Vektors nach einem Skalar

Analog zu 11.1. werden auch Vektoren differenziert. Für den von t abhängigen Vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = a_1(t)\,\boldsymbol{i} + a_2(t)\,\boldsymbol{j} + a_3(t)\,\boldsymbol{k}$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{k} \tag{465}$$

Der Vektor $\boldsymbol{a}$ wird differenziert, indem man seine Komponenten differenziert. Dies gilt entsprechend auch für höhere Ableitungen. Ferner gelten, sofern $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$:

(D 22) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \quad (\lambda \in P)$$

(D 23) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$$

(D 24) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$$

(D 25) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$$

Felder

In einem *skalaren Feld* wird jedem Punkt $P(x; y; z)$ eines räumlichen Bereichs genau ein Funktionswert der *Ortsfunktion* zugeordnet:

$$U(P) = U(x; y; z) \tag{466}$$

Die *Niveauflächen* des skalaren Felds (466) haben mit C als Scharparameter die Gleichung:

$$U(x; y; z) = C \tag{467}$$

In zweidimensionalen Feldern (z. B. z = konst.) treten anstelle der Niveauflächen die *Niveaulinien*:

$$U(x; y) = C \tag{468}$$

In einem *Vektorfeld* wird jedem Raumpunkt P ein Vektor $\boldsymbol{a}$ (Feldvektor) der vektoriellen Ortsfunktion zugeordnet:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x; y; z) = \begin{pmatrix} P(x; y; z) \\ Q(x; y; z) \\ R(x; y; z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \tag{469}$$

Differentialoperatoren

Nabla-Operator:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{470}$$

LAPLACE-*Operator:*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \nabla \cdot \nabla \tag{471}$$

Gradient U ist ein Vektorfeld, das dem Feld (466) durch:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla U \tag{472}$$

zugeordnet ist. In einem bestimmten Punkt ist (472) ein Feldvektor, dessen Richtung mit derjenigen des größten Anstiegs von U zusammenfällt und dessen Betrag diese größte Änderung angibt. Er ist *Normalenvektor* auf der betreffenden Niveaufläche.

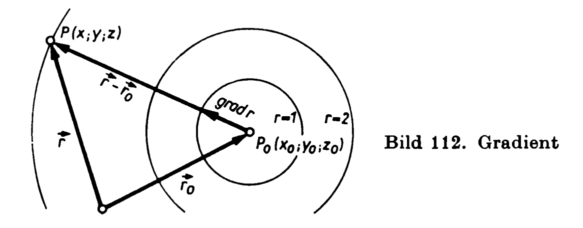


Bild 112. Gradient

Ist (466) speziell das *sphärische Feld* $U(P) = r$ mit $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} > 0$, bezogen auf den festen Punkt P_0, so wird im beliebigen Punkt P (Bild 112):

$$\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{r - r_0} \tag{473}$$

Rotor von $\boldsymbol{a}$ ist das (469) zugeordnete Vektorfeld:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \boldsymbol{k} \tag{474}$$

Divergenz von $\boldsymbol{a}$ ist das skalare Feld:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{475}$$

Gilt $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, wird das Vektorfeld *quellenfrei* genannt. Ferner gelten, wenn U und V zwei skalare Felder und $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei Vektorfelder:

$$\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U \tag{476}$$

$$\nabla U\boldsymbol{a} = U\nabla \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\nabla U \tag{477}$$

$$\nabla \times (U\boldsymbol{a}) = U(\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \times \nabla U \tag{478}$$

$$\nabla \times (\nabla U) = \boldsymbol{o} \tag{479}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0 \tag{480}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\nabla \times \boldsymbol{b}) \tag{481}$$

Linienintegral*) eines Vektorfelds

Sind P, Q und R stetige Funktionen von x, y und z und ist C eine Raumkurve**), heißt:

$$K = {}^{(C)}\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = {}^{(C)}\int_{P_1}^{P_2} [P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y + R\, \mathrm{d}z] \tag{482}$$

Linienintegral des Vektorfelds (469), erstreckt über C von $P_1(x_1; y_1; z_1)$ bis $P_2(x_2; y_2; z_2)$. Liegt C in der Form (460) vor, so wird (482) wegen

$$\mathrm{d}r = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$K = \int_{t_1}^{t_2} [P(t)\, \dot{x} + Q(t)\, \dot{y} + R(t)\, \dot{z}]\, \mathrm{d}t \tag{483}$$

Wegunabhängigkeit von K oder $K = 0$ bei geschlossenem Weg C liegt vor, falls:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{484}$$

*) auch Kurvenintegral genannt
**) genauer: eine stückweise glatte Raumkurve



Erfüllt ein Vektorfeld $\boldsymbol{a}$ die Bedingung (484), wird es *wirbelfrei* oder *Potentialfeld* genannt, und es existiert eine *Ortsfunktion* $U(x; y; z)$ — *Potentialfunktion* des Vektorfelds $\boldsymbol{a}$ genannt, deren totales Differential der Integrand von (482) ist:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{485}$$

U kann aus der Integration der Gleichungen (485) bestimmt werden. Ist das Vektorfeld in (482) ein Kraftfeld, so gibt (482) die Arbeit längs des Wegs C an.

Oberflächenintegrale

Hat ein Vektorfeld $\boldsymbol{a}$ in einem Raumgebiet, welches das Flächenstück F (Bild 113) ganz enthält, stetige Komponenten, so heißt:

$$I = {}^{(F)}\iint \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{486}$$

das über F erstreckte *Oberflächenintegral* des Vektorfelds $\boldsymbol{a}$. Ist die Fläche F in der Form (462) dargestellt, geht (486) in:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{a} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \right) \tag{487}$$

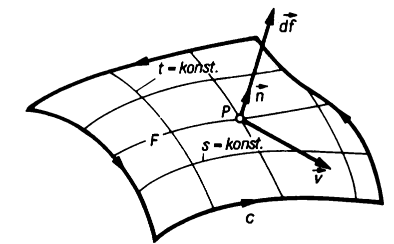


Bild 113. Gekrümmtes Flächenstück

über. Ist das Vektorfeld in (486) *Geschwindigkeitsfeld* $\boldsymbol{v}$ einer stationären (d. h. zeitlich unveränderlichen) Strömung, so stellt:

$$\Phi = \frac{V}{t} {}^{(F)}\iint \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{488}$$

den *Fluß* als das in der Zeit t durch F strömende Flüssigkeitsvolumen dar.
Integralsatz von STOKES: Der Fluß des Rotors von $\boldsymbol{a}$ durch F ist gleich dem Linienintegral von $\boldsymbol{a}$ längs der Randkurve von F:

$$^{(F)}\iint \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = {}^{(C)}\oint \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{489}$$

Integralsatz von GAUSS: Der Fluß von $\boldsymbol{a}$ durch die das Raumstück V begrenzende geschlossene Oberfläche F (mit nach außen gerichteter Normalen) ist gleich dem Raumintegral der Divergenz von $\boldsymbol{a}$ über dem Raumstück V:

$$^{(F)}\oiint \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = {}^{(V)}\iiint \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}V \tag{490}$$

15. Nomografie

15.1. Grundbegriffe

Ein *Nomogramm* oder eine Rechentafel ist ein konstruiertes System bezifferter Geraden oder Kurven, in dem ein bestimmter Gleichungstyp für gewisse Variablenbereiche grafisch erfaßt und die gesuchte Größe über einen Ablesevorgang ermittelt wird. Die Kurven als Träger der bezifferten Teilung werden *Leitern* oder *Skalen* genannt.

Der Einsatz eines Nomogramms ist dann rationell, wenn:

1. der Zeitaufwand gegenüber numerischer Ermittlung des Ergebnisses wesentlich geringer ist (häufige Wiederkehr des gleichen, verhältnismäßig komplizierten Rechnungsgangs mit anderen Variablenbelegungen),
2. grobe Berechnungsfehler ausgeschaltet werden,
3. Ablesefehler durch eine übersichtliche und einfache Gestaltung weitestgehend vermieden werden und
4. die geforderte Genauigkeit gewährleistet wird, was in der technischen Praxis überwiegend der Fall ist.

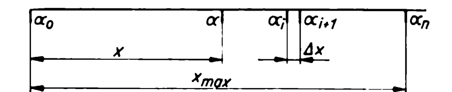


Bild 114. Trägergerade mit Skalenteilung

Der Zahlenwert $\alpha = \{A\}$ der aus Zahlenwert und Maßeinheit $[A]$ bestehenden Größe $A = \{A\} \cdot [A]$ wird zeichnerisch als Länge x dargestellt (Bild 114). Damit bilden sämtliche α von einem Anfangswert α_0 bis zu einem Endwert α_n eine Zahlenfolge, die grafisch als Punktfolge zur Skalen- bzw. Leiterteilung führt. Die Skalenteilung erfolgt nach einer geeigneten Zuordnungsvorschrift:

$$x = l[f(\alpha) - f(\alpha_0)] \tag{491}$$

(491) wird *Leitergleichung* genannt, wobei die Länge l als Modul oder Zeicheneinheit aus der maximal zur Verfügung stehenden Skalenlänge x_{max} bestimmt werden kann*):

$$l = \frac{x_{max}}{f(\alpha_n) - f(\alpha_0)} \tag{492}$$

Der Bezifferungssprung $\Delta\alpha$ zweier benachbarter Zahlenwerte ergibt sich aus (491) unter Anwendung von (327) in 11.4. zu:

$$\Delta\alpha = \Delta x / |lf'(\alpha)| \tag{493}$$

Dabei wird meist der Teilstrichabstand $\Delta x \geqq 1$ mm gewählt.

Tabelle 34. Gebräuchlichste Funktionsteilungen

Art der Teilung	Leitergleichung
Linear[I]	$x = l(\alpha - \alpha_0)$
Logarithmisch	$x = l(\lg \alpha - \lg \alpha_0)$ [II]
Quadratisch	$x = l(\alpha^2 - \alpha_0^2)$
Reziprok	$x = l\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0}\right)$

[I] auch regulär oder gleichförmig genannt
[II] l ist die Länge einer logarithmischen Einheit oder Dekade

*) (492) setzt für $f(\alpha)$ Monotonie voraus, was bei den gebräuchlichsten Funktionsteilungen der Fall ist.

Beispiele. 1. Für die auf der Zunge eines Rechenstabs befindliche Reziprokskala ergibt sich wegen $x_{max} = 250$ mm (Skalenlänge), $\alpha_0 = 10$ und $\alpha_n = 1$ der Modul
$l = \dfrac{x_{max}}{\lg a_n - \lg \alpha_0} = \dfrac{250\text{ mm}}{\lg 1 - \lg 10} = -250$ mm (für $l < 0$ gegenläufig geteilt) und damit die Leitergleichung $x = -250\text{ mm}\,(\lg \alpha - 1)$. Aus (493) folgt wegen $\mathrm{d}(\lg \alpha)/\mathrm{d}\alpha = M_{10}/\alpha$ in einer Umgebung der Ziffer $\alpha = 5$ mit $\Delta\alpha = 0{,}05$: $\Delta x = (250\text{ mm} \cdot 0{,}434/5) \cdot 0{,}05 \approx 1{,}1$ mm als Abstand benachbarter Teilstriche.

2. Auf einer Länge $x_{max} = 190$ mm soll eine reziproke Teilung von $\alpha_0 = 0{,}5$ bis $\alpha_n = 10$ aufgetragen werden. Aus (492) ergibt sich $l = \dfrac{x_{max}}{1/\alpha_n - 1/\alpha_0} = \dfrac{190\text{ mm}}{1/10 - 2} = -100$ mm. Mithin lautet die Leitergleichung $x = -100\text{ mm}\left(\dfrac{1}{\alpha} - 2\right)$ oder $x = 100\text{ mm}\left(2 - \dfrac{1}{\alpha}\right)$. Aus ihr lassen sich die Abstände der Zahlenwerte von $\alpha_0 = 0{,}5$ aus berechnen. Für ganzzahlige α sind sie in der folgenden Wertetabelle festgehalten:

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dfrac{x}{\text{mm}}$	100	150	166,7	175	180	183,3	185,7	187,5	188,9	190

15.2. Verstreckung von Kurven — Funktionspapiere

Sowohl für das Arbeiten mit einem Nomogramm als auch für dessen Konstruktion ist es oft zweckmäßig, Kurven — als grafische Darstellung von Funktionen in einem mit linear geteilten Leitern versehenen kartesischen Koordinatensystem — durch geeignete Maßnahmen zu verstrecken, d. h. in Geraden zu überführen. Eine für eine Vielzahl von Aufgabentypen zum Ziele führende Möglichkeit besteht darin, die Leitern des Koordinatensystems mit einer nichtlinearen Teilung zu versehen.

Tabelle 35. Funktionstypen für Funktionspapiere

Funktionspapier	Leitergleichungen der Achsen	Zur Geraden verstreckter Funktionstyp	Zeichnerische Steigung m	Schnittpunktsabstand b mit β-Achse
Millimeterpapier	$x = l_x(\alpha - \alpha_0)$ $y = l_y(\beta - \beta_0)$	lineare Funktion $\beta = A\alpha + B$	$A\,\dfrac{l_y}{l_x}$	$l_y(A\alpha_0 + B - \beta_0)$
Einfachlogarithmisches Papier	$x = l_x(\alpha - \alpha_0)$ $y = l_y(\lg \beta - \lg \beta_0)$	Exponentialfunktion $\beta = Aq^\alpha$	$\dfrac{l_y}{l_x} \lg q$	$l_y \lg \dfrac{Aq^{\alpha_0}}{\beta_0}$
Doppeltlogarithmisches Papier	$x = l_x(\lg \alpha - \lg \alpha_0)$ $y = l_y(\lg \beta - \lg \beta_0)$	Potenzfunktion $\beta = A\alpha^n$	$n\,\dfrac{l_y}{l_x}$	$l_y \lg \dfrac{A\alpha_0^n}{\beta_0}$

Zieht man durch die Teilungspunkte der Koordinatenachsen Parallelen zu den Achsen, so entsteht ein Funktionsnetz, das in verschiedensten Ausführungen als gedrucktes Formblatt (*Funktionspapier*) bezogen werden kann. Die wichtigsten Funktionspapiere sind das *Millimeterpapier* mit linearer Teilung beider Achsen, das *einfachlogarithmische Papier* mit einer linear und einer logarithmisch geteilten Achse (Bild 115) und das *doppeltlogarithmische Papier* mit logarithmischer Teilung beider Achsen (Bild 116). Für diese Funktionspapiere sind in Tabelle 35 die Funktionstypen zusammengestellt, die, zeichnerisch dargestellt, jeweils zu Geraden der Form $y = mx + b$ verstreckt werden (A, B, q und n sind reelle Konstanten). Der qualitative Einfluß von A und q bei Exponentialfunktionen bzw. von A und n bei Potenzfunktionen auf den Verlauf der Geraden ist aus Bild 115 bzw. Bild 116 ersichtlich.

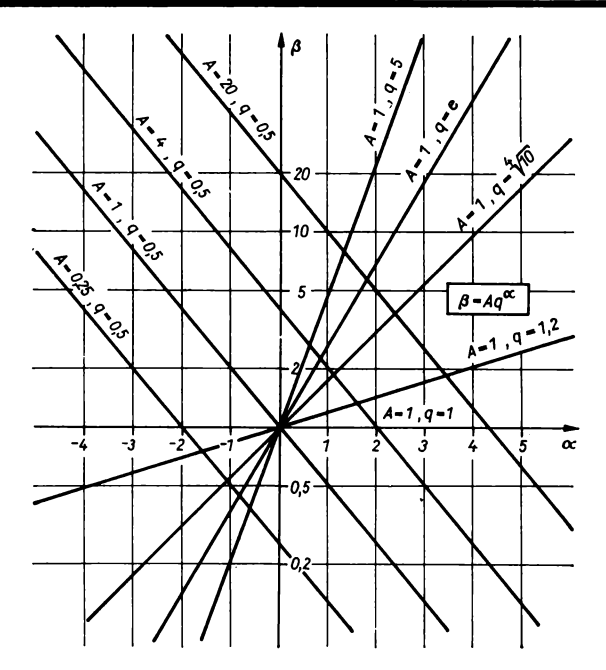


Bild 115. Verstreckung auf einfachlogarithmischem Papier

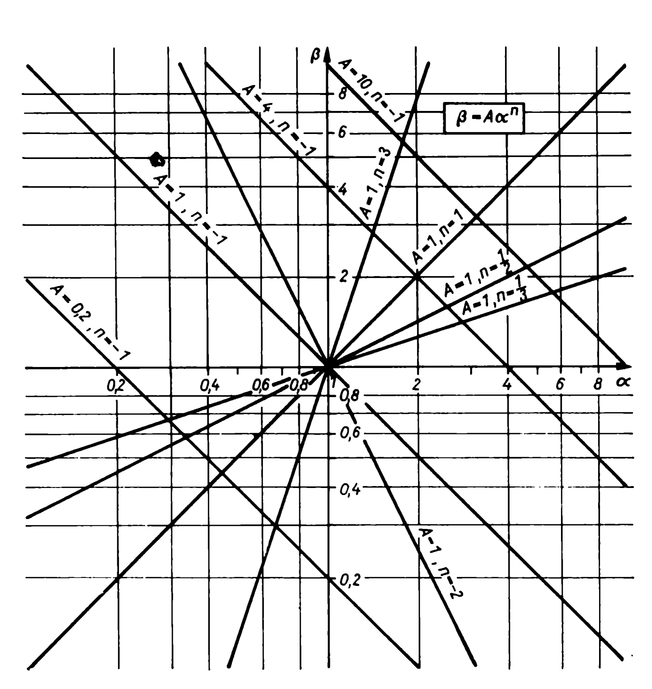


Bild 116. Verstreckung auf doppeltlogarithmischem Papier

15.3. Netztafeln

In einer *Netztafel* läßt sich eine Gleichung mit 3 Variablen grafisch erfassen. Ein die Gleichung erfüllendes Wertetripel erhält man dabei allgemein als Schnittpunkt dreier Kurven aus drei Kurvenscharen.

Werden speziell zwei Variablen durch ein Netz senkrecht zueinander liegender Geradenscharen, d. h. durch die Parallelen zu den Achsen eines rechtwinklig kartesischen Koordinatensystems, und die dritte Variable (Parameter) als Kurvenschar in diesem Netz dargestellt, so spricht man von *kartesischen Netztafeln*. Bei linear geteilten Koordinatenachsen ist diese Tafel identisch mit der geometrischen Veranschaulichung einer Funktion $\gamma = f(\alpha, \beta)$ als „Karte“ der Fläche im Raum mit den „Höhenlinien“ $\gamma =$ konst. als Kurvenschar der abhängigen Variablen. Wegen des verhältnismäßig großen Aufwands bei der Konstruktion einer Schar gekrümmter Kurven, der größeren erforderlichen Konzentration beim Ablesen und der Interpolationsschwierigkeiten werden geradlinige Netztafeln bevorzugt, in denen die Kurvenschar der dritten Variablen ebenfalls eine Geradenschar ist.

Kartesische Netztafel mit Geradenschar

Die allgemeine Form einer Gleichung mit 3 Variablen $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ läßt sich dann in einer kartesischen Geradentafel darstellen, wenn sie auf die Form:

$$f_1(\alpha) \cdot f_3(\gamma) + f_2(\beta) \cdot g_3(\gamma) + h_3(\gamma) = 0 \qquad (494)$$

gebracht werden kann. (494) wird *Schlüsselgleichung* der kartesischen Geradenschar genannt; $f_1(\alpha)$ bzw. $f_2(\beta)$ sind die Funktionen, nach denen die α- und β-Achse geteilt sind, und $f_3(\gamma)$, $g_3(\gamma)$ und $h_3(\gamma)$ sind beliebige Funktionen des Parameters γ.
Spezialfälle von (494) mit parallelen Geraden oder einem Strahlenbüschel als γ-Schar im Millimeter-, einfachlogarithmischen oder doppeltlogarithmischen Netz sind die in der Tabelle 36 mit ihren Schlüsselgleichungen angegebenen Funktionstypen.

Tabelle 36. Funktionstypen

Kartesisches α,β-Netz	γ-Schar des Parameters	Schlüsselgleichung
Linear*)	Parallele Geraden	$\beta = A\alpha + B\gamma$
(Millimeterpapier)	Strahlenbüschel	$\beta = A\alpha\gamma + B$
Einfachlogarithmisch*)	Parallele Geraden	$\beta = A\gamma B^{\alpha}$
	Strahlenbüschel	$\beta = A\gamma^{\alpha}$
Doppeltlogarithmisch*)	Parallele Geraden	$\beta = A\gamma\alpha^{n}$
	Strahlenbüschel	$\beta = A\alpha^{\gamma}$

*) Leitergleichungen für α und β vgl. Tabelle 34

Beispiel. Zur Ermittlung der Maschinengrundzeit t beim Drehen ist die Beziehung $t = l/ns$ für eine konstante Bearbeitungslänge $l = 100$ mm, den Drehzahlbereich 90 min$^{-1} \leqq n \leqq$ 1400 min^{-1} bei Drehzahlstufung nach R 20/6 und ein Intervall für den Vorschub 0,1 mm $\leqq s \leqq$ 2,5 mm als Netztafel darzustellen. Die Tafel soll das Format 150 mm · 200 mm (Hochformat) nicht überschreiten. Wegen der Drehzahlstufung ist besonders die Drehzahl als Parameter geeignet, d. h. $\gamma = n$/min. Bei linearer Teilung der Achsen würde mit $\beta = t$/min und $\alpha = s$/mm die darzustellende Beziehung in die Zahlenwertgleichung $\beta = 100/\gamma \cdot \alpha$ übergehen. Für konstante γ ergibt sich die Kurvenschar $\beta = C/\alpha$ und damit eine Schar von Hyperbeln. Diese Variante scheidet wegen der oben aufgeführten Nachteile und der zusätzlich sehr ungünstigen Zeichenfeldausnutzung aus.
Mit $C = A \cdot \gamma$ und $n = -1$ gehört aber $\beta = C/\alpha$ zum Typ nach Tabelle 36, so daß bei logarithmischer Teilung beider Achsen eine Netztafel mit einer Parallelenschar entworfen werden kann. Aus den gegebenen

Intervallen für α und γ wird $\beta_{\min} = 0{,}0286$ und $\beta_{\max} = 11{,}1$ berechnet. Mit $\alpha_0 = 0{,}1$, $\alpha_n = 2{,}5$, $\beta_0 = 0{,}028$ und $\beta_n = 11{,}1$ wird nach (492):

$$l_x = \frac{150\ \text{mm}}{\lg 2{,}5 - \lg 0{,}1} = 107\ \text{mm} \quad \text{und} \quad l_y = \frac{200\ \text{mm}}{\lg 11{,}1 - \lg 0{,}028} = 77\ \text{mm}.$$

Der einfacheren Berechnung wegen werden $l_x = 100$ mm und $l_y = 75$ mm gewählt. Damit können nach den Leitergleichungen $x = 100\ \text{mm}\ (\lg \alpha + 1)$ und $y = 75\ \text{mm}\ (\lg \beta + 1{,}553)$ die beiden Achsen geteilt und danach die Geradenlagen der γ-Schar berechnet werden (die erste Gerade ist durch zwei Punkte, jede weitere durch einen Punkt auf den Achsen bestimmt). Bild 117 zeigt das so konstruierte Nomogramm.

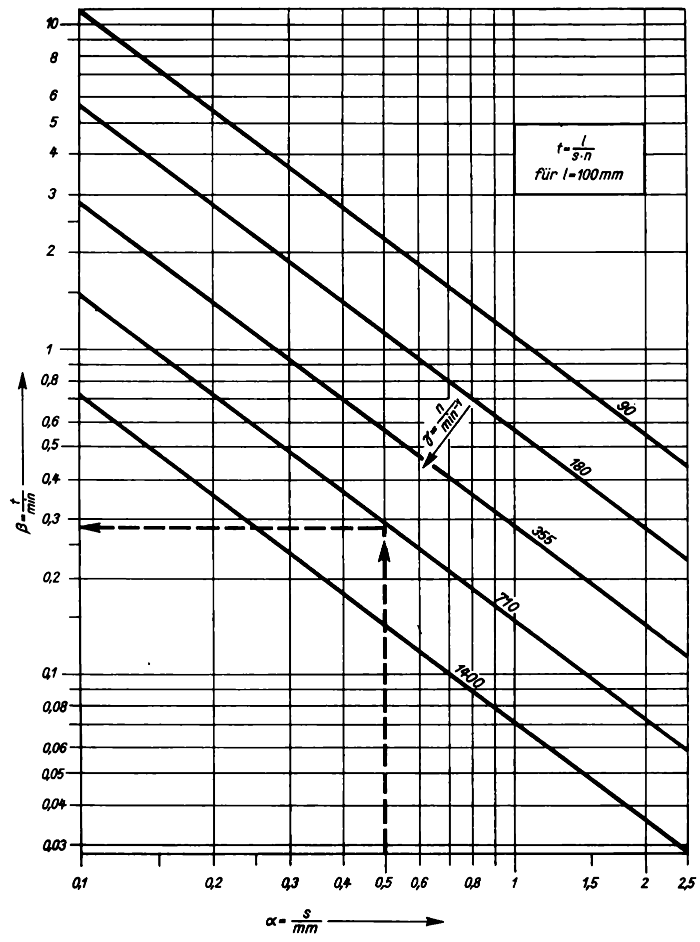


Bild 117. Ablesebeispiel: für $n = 710\ \text{min}^{-1}$ und $s = 0{,}5$ mm $\Rightarrow t = 0{,}28$ min

15.4. Fluchtlinientafeln

Während sich das eine Gleichung erfüllende Wertetripel in einer Netztafel als Schnittpunkt dreier Kurven repräsentiert, liegen in einer *Fluchtlinientafel**) die drei Werte des Tripels auf einer Geraden (*Fluchtlinie*), die durch die diesen Werten entsprechenden Punkte auf den Leitern hindurchgeht. Die Ablesung entlang einer Geraden mit einem geeigneten Ableselineal,

*) auch *Fluchten-* oder *Leitertafeln* genannt

die gute Übersichtlichkeit und die verhältnismäßig einfache Herstellbarkeit sind als Vorteile gegenüber den Netztafeln zu beachten. Dies gilt insbesondere für diejenigen Tafeln, in denen sämtliche Leitern als Teilungsträger Geraden*) sind.

15.4.1. Parallele geradlinige Leitern

Doppelleitern für zwei Variablen

Diese bestehen aus zwei meist zur Deckung gebrachten Funktionsleitern, auf denen je eine Variable dargestellt ist. Auf der so mit zwei Skalen versehenen Trägergeraden liegen die sich entsprechenden Wertepaare gegenüber (vgl. Beispiel 1). Müssen beide Leitern in einem bestimmten Abstand voneinander liegen (z. B. Grund- und Sinusteilung auf dem Rechenstab), so wird eine Ablesegerade (Läuferstrich) erforderlich.

Drei parallele Leitern

Nicht jeder Gleichungstyp ist in einer Fluchtlinientafel mit drei parallelen Leitern darstellbar. Sind die Leitern für α, β und γ in dieser Reihenfolge nach den Leitergleichungen:

$x = l_x[f_1(\alpha) - f_1(\alpha_0)]$, $y = l_y[f_2(\beta) - f_2(\beta_0)]$ und $z = l_z[f_3(\gamma) - f_3(\gamma_0)]$

geteilt, so folgt aus der Prinzipskizze nach Bild 118 die Darstellbarkeit aller der Typen, die folgender Schlüsselgleichung gehorchen:

$$C[f_3(\gamma) - f_3(\gamma_0)] = A[f_1(\alpha) - f_1(\alpha_0)] + B[f_2(\beta) - f_2(\beta_0)] \tag{495}$$

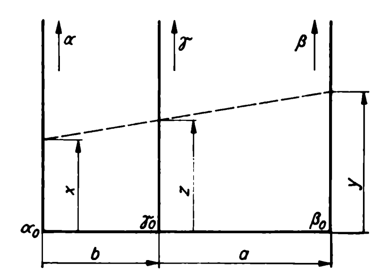


Bild 118. Drei parallele Leitern

Dabei sind die Konstanten A, B und C mit den Zeicheneinheiten und den mit Richtungssinn versehenen Leiterabständen a und b verknüpft durch:

$$\frac{C}{(a+b)\,l_z} = \frac{A}{al_x} = \frac{B}{bl_y} \tag{496}$$

Mit $a, b > 0$, wenn diese nach rechts und $a, b < 0$, wenn diese nach links gerichtet sind, kann die γ-Leiter zur Außenleiter gemacht werden, falls $a \cdot b < 0$ $(a \neq -b)$ gewählt wird. Die Entwurfsschritte gehen aus Beispiel 2 hervor.

Beispiele. 1. Der Drehzahlfaktor f_n bei der Lebensdauerberechnung von Wälzlagern wird in Abhängigkeit von der Drehzahl n mit $f_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}03\,\dfrac{n}{\text{min}^{-1}}}}$ angegeben. Zur Ermittlung von f_n ist für den Drehzahlbereich $100\ \text{min}^{-1} \leq n \leq 1\,000\ \text{min}^{-1}$ ein Nomogramm mit der Gesamtlänge von 125 mm als Doppelleiter zu entwickeln. Mit $n/\text{min}^{-1} = \alpha$, $f_n = \beta$, $\alpha_0 = 100$ und $\alpha_n = 1\,000$ ergeben sich aus $\beta = (0{,}03\alpha)^{-1/3}$: $\beta_0 = 0{,}693$ und $\beta_n = 0{,}322$. Werden beide Skalen logarithmisch**) geteilt, so ergeben sich die Zeicheneinheiten nach (492) zu $l_x = 125$ mm und $l_y = -377$ mm, d. h., die β-Leiter wird gegenläufig nach $y = -377$ mm $(\lg\beta + 0{,}159)$ geteilt. Die kleine Erweiterung der β-Leiter nach links liefert für $\beta = 0{,}7$ den Abstand von β_0 mit $y = -1{,}5$ mm. Die Doppelleiter ist — der Übersichtlichkeit und Verkleinerung wegen nur mit wenigen Skalenwerten versehen — in Bild 119 dargestellt.

*) Allgemein können sämtliche Leitern gekrümmt sein (Näheres ist der Spezialliteratur zu entnehmen).
**) vgl. Ing.-Taschenbücher oder Wälzlagerkataloge

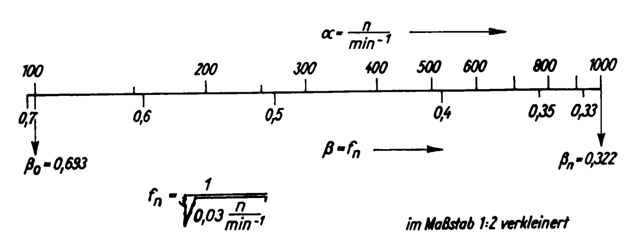


Bild 119. Doppelleitern

2. Das Gesetz des Beispiels aus 15.3. $t = l/ns$ ist unter gleichen Bedingungen als Fluchtlinientafel darzustellen. Die Ergebnisleiter für $\gamma = t/\text{min}$ soll Mittelleiter ($a, b > 0$) werden und auf ihr der Faktor 100 Berücksichtigung finden. Um die Leitern für $\alpha = s/\text{mm}$ und $\beta = n/\text{min}^{-1}$ nicht gegenläufig teilen zu müssen, wird die Beziehung in der Form $100/\gamma \triangleq \alpha \cdot \beta$ in der Leitertafel dargestellt. Logarithmiert folgt $-(\lg \gamma - 2) = \lg \alpha + \lg \beta$ und damit eine Relation vom Typ (495) mit $A = B = 1$, $C = -1$, $f_3(\gamma_0) = 2$, $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = 0$ und logarithmisch geteilten Leitern. Nach (495) wird $l_x, l_y > 0$ und $l_z < 0$ wegen $C = -1$ und $a, b > 0$. Die Abmessungen zur Darstellung des Nomogramms ergeben sich aus folgenden Teilschritten:

1. Berechnung und Wahl der Zeicheneinheiten l_x und l_y aus $x_{\max} = y_{\max} = 200$ mm, $\alpha_0 = 0{,}1$, $\alpha_n = 2{,}5$, $\beta_0 = 90$ und $\beta_n = 1400$ nach (493):

$$l_x \leqq \frac{200\ \text{mm}}{\lg 2{,}5 - \lg 0{,}1} = 143\ \text{mm}, \quad l_y \leqq \frac{200\ \text{mm}}{\lg 1400 - \lg 90} = 168\ \text{mm}.$$

   Gewählt werden: $l_x = 140$ mm, $l_y = 160$ mm.

2. Berechnung der Leiterabstände aus (496) unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Nomogrammbreite von 150 mm. Aus $A/al_x = B/bl_y$ folgt $a:b = 8:7$. Wählt man wegen $a + b \leqq 150$ mm und ganzzahliger Abstandsverhältnisse $a + b = 150$ mm, so werden damit $a = 80$ mm und $b = 70$ mm.

3. Berechnung von l_z aus (496) zu $l_z = \dfrac{C}{A} \cdot \dfrac{a}{a+b}\, l_x = -\dfrac{80}{150} \cdot 140\ \text{mm} = -74{,}6$ mm.

4. Herstellung der Leiterteilungen unter Verwendung der Leitergleichungen $x = 140\ \text{mm}\ (\lg \alpha + 1)$, $y = 160\ \text{mm}\ (\lg \beta - 1{,}954)$ und $z = -74{,}6\ \text{mm}\ (\lg \gamma - 1{,}046)$. γ_0 folgt dabei aus $100/\gamma_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0$ zu $\gamma_0 = 11{,}1$ und somit $\lg \gamma_0 = 1{,}046$.

Das Nomogramm ist in Bild 120 dargestellt.

15.4.2. Drei nicht parallele Leitern

Sind die drei Leitern nicht sämtlich parallel, so können drei Grundfälle unterschieden werden: 1. die Leitern schneiden sich alle in einem Punkt, 2. zwei parallele Leitern werden von der dritten geschnitten, und 3. die Leitern bilden ein Dreieck.

Drei durch einen Punkt gehende Leitern

Bei beliebigen Schnittwinkeln φ und ψ der Leitern und mit $x = l_x f_1(\alpha)$, $y = l_y f_2(\beta)$ und $z = l_z f_3(\gamma)$ als Funktionsteilung ergibt sich aus den geometrischen Beziehungen nach Bild 121 die Schlüsselgleichung:

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{l_z f_3(\gamma)} = \frac{\sin \psi}{l_x f_1(\alpha)} + \frac{\sin \varphi}{l_y f_2(\beta)} \tag{497}$$

Die Konstanten lassen für die Konstruktion des Nomogramms noch die Wahl der Gesamthöhe $h = z_{\max}$, der Gesamtbreite b und der Lage von α_n und β_n auf einer Geraden zu, welche die γ-Achse in γ_n senkrecht schneidet.

Bei gleichen Schnittwinkeln $\varphi = \psi = \varepsilon$ vereinfacht sich (497) zu:

$$\frac{2\cos\varepsilon}{l_z f_3(\gamma)} = \frac{1}{l_x f_1(\alpha)} + \frac{1}{l_y f_2(\beta)} \tag{498}$$

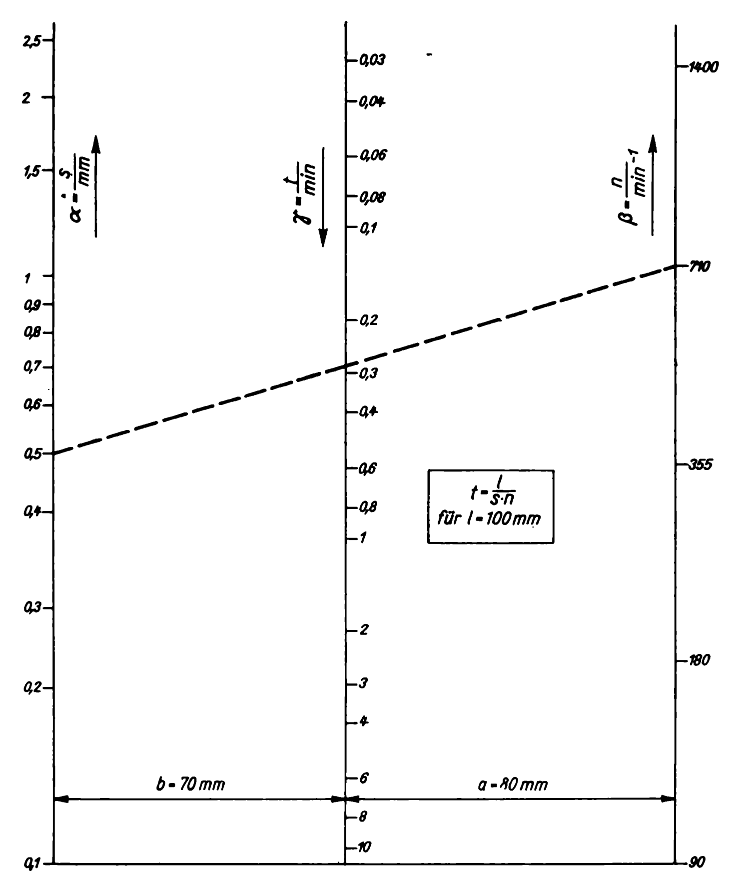


Bild 120. Ablesebeispiel: für $n = 710\ \text{min}^{-1}$ und $s = 0{,}5$ mm $\Rightarrow t = 0{,}28$ min

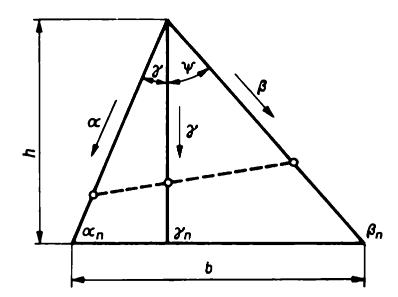


Bild 121. Drei Leitern mit gemeinsamem Schnittpunkt

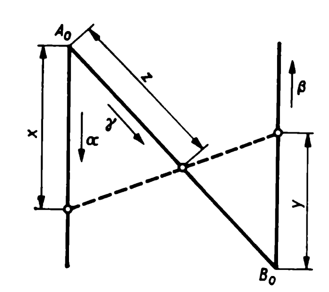


Bild 122. Der N-Typ

Zwei parallele Leitern (N-Typ)

Der Aufbau dieses Nomogramms geht aus Bild 122 hervor. Die Teilungen der α- und γ-Leiter beginnen bei A_0, die Teilung der β-Leiter bei B_0. Mit $\overline{A_0B_0} = a$ und den Leitergleichungen $x = l_x f_1(\alpha)$ und $y = l_y f_2(\beta)$ ergibt sich nach Anwendung des Strahlensatzes die Schlüsselgleichung:

$$l_z f_3(\gamma) = l_x f_1(\alpha) / l_y f_2(\beta) \tag{499}$$

wobei $l_z f_3(\gamma) = \frac{z}{a - z}$, so daß $z = \frac{a l_z f_3(\gamma)}{1 + l_z f_3(\gamma)}$. Da eine Gleichung vom Typ (499) logarithmiert auch vom Typ (495) ist, kann sie entweder über drei parallele und logarithmisch geteilte Leitern oder aber als N-Typ dargestellt werden. Welche Art man wählt, hängt vom Gleichungstyp, den Variablenbereichen und der erreichbaren Ablesegenauigkeit ab.

15.5. Zusammengesetzte Nomogramme

Sind mehr als drei Variablen in der darzustellenden Gleichung enthalten, so läßt sich diese über das Einführen von Hilfsveränderlichen in mehrere Gleichungen aufspalten, von denen jede höchstens drei Variablen besitzt und nach 15.3. oder 15.4. als Nomogramm dargestellt werden kann. Übrig bleibt nur die zweckmäßige Verbindung der Einzelnomogramme zu einem Gesamtnomogramm.

Bei vier Variablen α, β, δ, ε wird sich meist die Gleichung $\varepsilon = f(\alpha, \beta, \delta)$ durch Einführen der Hilfsveränderlichen γ in die zwei Gleichungen $\gamma = f_1(\alpha, \beta)$ und $\varepsilon = f_2(\gamma, \delta)$ zerlegen lassen.

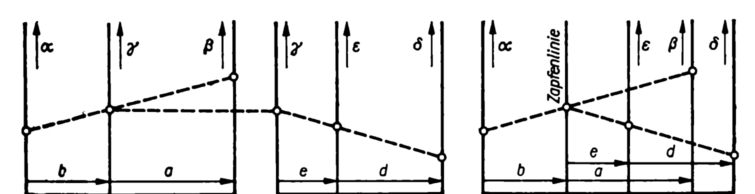


Bild 123. Verknüpfung der Einzelnomogramme zur Leitertafel mit vier Variablen über die γ-Leiter als Zapfenlinie

Verknüpfung von Leitertafeln

Gehören nach Zerlegung die beiden letzten Gleichungen zum Schlüsselgleichungstyp (495), so wird in der ersten Tafel dreier Leitern die γ-Leiter zur Ergebnisleiter und in der zweiten Tafel als Eingangsleiter gewählt. Gleiche Zeicheneinheit l_z und gleicher Anfangswert γ_0 für beide γ-Leitern gestatten die Zusammenfassung beider Nomogramme, indem beide γ-Leitern zur Deckung gebracht werden können (Bild 123). Die beiden Ablesegeraden schneiden sich auf der γ-Leiter, die wegen dieser Eigenschaft *Zapfenlinie* genannt wird. Die Zapfenlinie braucht nicht beziffert zu werden, falls die Zwischenergebnisse für γ nicht benötigt werden. Die Gesamtbreite des Nomogramms nach Bild 123 wird:

$$B = b + e + d \tag{500}$$

wegen $a, b, d, e > 0$ und $e + d > a$.

Analog lassen sich auch Leitertafeln mit nicht nur parallelen Leitern zusammensetzen.

Beispiel. Das Gesetz für die Maschinengrundzeit $t = l/ns$ (vgl. Beispiel aus 15.3. und 2. Beispiel aus 15.4.1.) ist in einer Leitertafel darzustellen. Gegeben sind die Intervalle: $10 \leq \alpha = \frac{l}{\text{mm}} \leq 200$, $90 \leq \beta = \frac{n}{\text{min}^{-1}} \leq 1400$ und $0{,}1 \leq \delta = \frac{s}{\text{mm}} \leq 2{,}5$ und die maximalen Abmessungen 150 mm · 210 mm für das Nomogramm (Hochformat). $\varepsilon = \alpha/\beta\delta$ wird nach Einführung von γ zerlegt in $\gamma = \alpha/\beta$ und $\varepsilon = \gamma/\delta$. Logarithmieren beider Gleichungen führt in jedem Falle auf die Zugehörigkeit zur Schlüsselgleichung (495) mit $C = A = -B = 1$ für die ersten drei und analog $E = C = -D = 1$ für die drei weiteren Leitern. Die Leitern sind damit zueinander parallel, die β- und die δ-Leiter gegenläufig geteilt.

Rechnungsgang: Nach (492) ergeben sich als Zeicheneinheiten für die

$$\alpha\text{-Leiter: } l_x = \frac{210 \text{ mm}}{\lg 200 - \lg 10} = 161 \text{ mm}$$

$$\beta\text{-Leiter: } l_y = \frac{210 \text{ mm}}{\lg 90 - \lg 1400} = -176 \text{ mm}$$

$$\delta\text{-Leiter: } l_u = \frac{210 \text{ mm}}{\lg 0{,}1 - \lg 2{,}5} = -150 \text{ mm}$$

einfacherer Rechnung und Verhältnisse wegen wird gewählt:

$$l_x = -l_y = -l_u = 150 \text{ mm}.$$

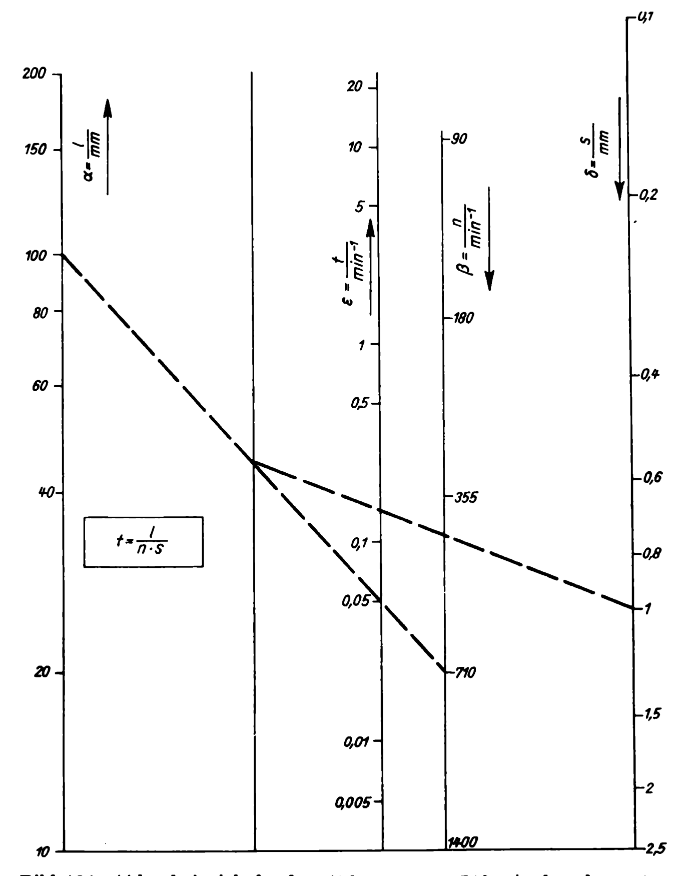


Bild 124. Ablesebeispiel: für $l = 100$ mm $n = 710 \text{ min}^{-1}$ und $s = 1$ mm $\Rightarrow t = 0{,}15$ min

Aus (496) folgt $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}\frac{l_y}{l_x} = 1$ und $l_z = \frac{C}{A}\frac{a}{a+b} l_x = 75$ mm.

Analog $\frac{d}{e} = \frac{C}{D}\frac{l_u}{l_z} = 2$ und $l_v = \frac{E}{C}\frac{d}{d+e} l_z = 50$ mm.

Da mit $a/b = 1$, $d/e = 2$, $B \leqq 150$ mm und (500) noch über zwei geometrische Größen verfügt werden kann, werden $a = 1{,}5e$ *) und $B = 144$ mm gewählt, so daß sich schließlich $a = b = 48$ mm, $e = 32$ mm

*) Es kann auch $a = e$ oder $a = e + d$ gewählt werden, was jeweils zum Aufeinanderfallen zweier Leitern (Doppelleiter) führt.

und $d = 64$ mm als Leiterabstände ergeben. Es folgen die Leitergleichungen für die

α-Leiter: $x = 150 \text{ mm} (\lg \alpha - 1)$, β-Leiter: $y = -150 \text{ mm} (\lg \beta - 3{,}146)$,

δ-Leiter: $u = -150 \text{ mm} (\lg \delta - 0{,}398)$, ε-Leiter: $v = 50 \text{ mm} (\lg \varepsilon + 2{,}545)$.

Damit ist die Teilung der Leitern möglich. Das Nomogramm ist in Bild 124 dargestellt (die Teilung läßt sich in wahrer Größe wesentlich verfeinern).

Verknüpfung von Netztafeln

Die für den Nomogrammbenutzer günstigste Zusammenfassung von Einzelnetztafeln zu einem Gesamtnomogramm ist abhängig von: darzustellenden Gleichungstypen, Anzahl der Variablen, Wahl der Parameter und der Art der Skalenteilungen. Abgesehen von Sonderfällen werden im allgemeinen die Netztafeln so verbunden, daß auf der Ergebnisleiter der ersten Netztafel und auf der Eingangsleiter der

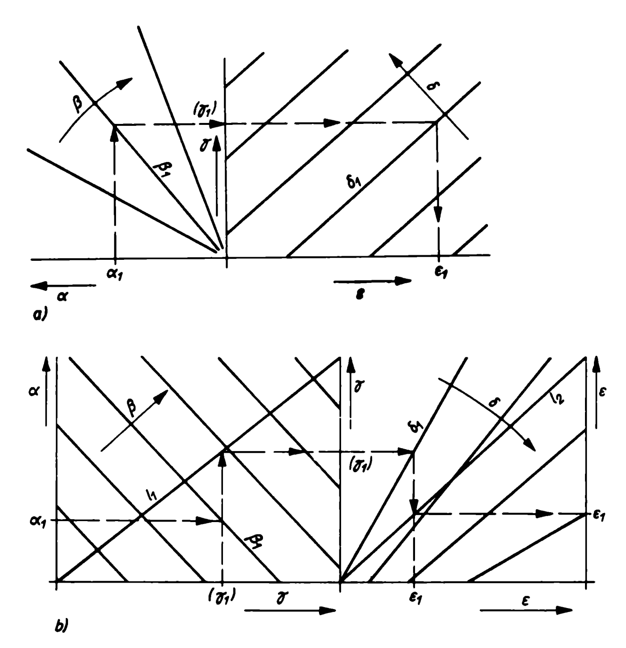


Bild 125. Verknüpfung von Netztafeln

zweiten Tafel die Hilfsvariable γ erscheint und beide Leitern parallel liegen oder bei gleicher Teilung aufeinanderfallen. Im Bild 125a haben beide γ-Leitern gleiche Lage und Teilung. Sie fallen (unbeziffert) aufeinander, und die Ablesung erfolgt in der Reihenfolge α_1, β_1, (γ_1), δ_1 und führt über die gestrichelte Pfeilrichtung zum Ergebnis ε_1. Im Bild 125b liegen beide γ-Leitern senkrecht zueinander. Über die *Leitlinie* l_1 wird das Zwischenergebnis (γ_1) auf die vertikale γ-Eingangsleiter der zweiten Netztafel projiziert. Analog ermöglicht auch die Leitlinie l_2 einen solchen Ausgang für ε_1, daß eine weitere Netztafel nach rechts angeschlossen werden kann. Die Ablesung erfolgt entlang der *Lauflinie* in gestrichelter Pfeilrichtung α_1, β_1, (γ_1), δ_1 zu ε_1, also von links nach rechts in Schreibrichtung, was arbeitspsychologisch günstig ist.

Literaturverzeichnis

[1] *Autorenkollektiv:* Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen. 12. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981

[2] *Autorenkollektiv:* Analysis für Ingenieur- und Fachschulen. 14. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981



[3] *Autorenkollektiv:* Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[4] *Bartsch, H.-J.:* Mathematische Formeln. 18. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[5] *Birnbaum, H., Denkmann, N.:* Mathematik-Aufgaben für Ingenieure. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973
[6] *Bräuning, G.:* Gewöhnliche Differentialgleichungen. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[7] *Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.:* Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. 20. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1981
[8] *Dietrich, G., Stahl, H.:* Matrizen und Determinanten und ihre Anwendung in Technik und Ökonomie. 5. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[9] *Greuel, O.:* Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker. 10. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982
[10] *Hasse, M.:* Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. 6. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1974
[11] Kleine Enzyklopädie Mathematik. 10. Aufl. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1977
[12] Lehrgang der Elementarmathematik. 17. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[13] *Müller, F.:* Fünfstellige Logarithmen und andere mathematische Tafeln. 17. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974

Weiterführende Literatur

[14] *Autorenkollektiv:* Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. 2 Bände. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1983
[15] *Beyer, O., Hackel, H., Pieper, V., Tiedge, J.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976
[16] *Bialy, H., Olbrich, M.:* Optimierung. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[17] *Dreszer, J.:* Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[18] *Fucke, R., Kirch, K., Nickel, H.:* Darstellende Geometrie. 10. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[19] *Göldner, K.:* Mathematische Grundlagen der Systemanalyse. 2 Bände. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982
[20] *Götzke, H.:* Netzplantechnik — Theorie und Praxis. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1971
[21] *Grabowski, H., Fucke, R., Schroedter, R.:* Praktische Mathematik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
[22] *Harbath, K., Riedrich, Th.:* Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[23] *Haupt, D.:* Mengenlehre. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973
[24] *Körber, K.-H., Pforr, E.-A.:* Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[25] *Korowkin, P.:* Ungleichungen. 7. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973
[26] *Kästner, H.:* Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen für dezimalgeteilten Altgrad. 22. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976
[27] *Lehmann, H.:* Der Rechenstab und seine Verwendung. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[28] Lexikon der Mathematik. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1978
[29] *Lochmann, G.:* Nomografie. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[30] *Mangoldt, H., Knopp, W.:* Einführung in die höhere Mathematik. 4 Bände. 15., 14., 14., 2. Aufl. — Leipzig: S. Hirzel Verlag 1974, 1972, 1975, 1975
[31] *Manteuffel, K., Seiffart, E.:* Lineare Algebra. 2. Aufl. — Leipzig: BSB G. B. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[32] *Meinhold, P., Wagner, E.:* Partielle Differentialgleichungen. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[33] *Meinhold, P., Miltzlaff, G.:* Feld- und Potentialtheorie. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[34] *Müller, P. H., Neumann, P., Storm, R.:* Tafeln der mathematischen Statistik. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[35] *Netz, H.:* Formeln der Mathematik. 3. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1977
[36] *Nollau, V.:* Statistische Analyse. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[37] *Ose, G.:* Linearoptimierung. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[38] *Pforr, E.-A., Schirotzek, W.:* Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen. 3. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[39] *Piskunow, N. S.:* Differential- und Integralrechnung. 2 Teile. 2. bzw. 3. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970, 1973

[40] *Schell, H.-J.:* Unendliche Reihen. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[41] *Schöne, W.:* Differentialgeometrie. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1975
[42] *Segeth, W.:* Elementare Logik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972
[43] *Sieber, N., Sebastian, H.-J., Zeidler, G.:* Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen. 3. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[44] Siebenstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[45] *Simon, H., Stahl, K., Grabowski, H.:* Mathematik (Reihe: Nachschlagebücher für Grundlagenfächer). 14. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[46] *Storm, R.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[47] *Wenzel, H.:* Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2 Teile. 2., 1. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978 bzw. 1973
[48] *Werth, E., Gröll, H.:* Nomographie. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1964

Op Operationsforschung

Von Dr. rer. nat. Alfred Kirchheim, Weimar (Abschn. 1., 2., 6., 7. und 8.), *und Dr. sc. techn. Heinz Krause, Weimar* (Abschn. 3., 4. und 5.)

Inhaltsverzeichnis

Wichtigste Formelzeichen und Symbole

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

Formelzeichen	Bedeutung	Formelzeichen	Bedeutung
A	zufälliges Ereignis	$U(X)$	Stichprobenfunktion
a	Parameter der Beta-Verteilung	$U(x)$	Schätzfunktion
B	Bestimmtheitsmaß	u	Schätzwert
b	Parameter der Beta-Verteilung	Var (X)	Varianz von X
Cov (X_1, X_2)	Kovarianz zwischen X_1 und X_2	X	Zufallsvariable, Stichprobenvariable
E	sicheres Ereignis		
$E(X)$	Erwartungswert von X	x	Stichprobenwert
$F(x)$	Verteilungsfunktion	$\bar{x}$	Stichprobenmittelwert
$f(x)$	Dichtefunktion	$\emptyset$	unmögliches Ereignis
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A	λ	Parameter der POISSON-Verteilung
p	Parameter der Binomialverteilung, Parameter der Beta-Verteilung	μ	Parameter der Normalverteilung
		$\varrho(X_1, X_2)$	Korrelationskoeffizient zwischen X_1 und X_2
q	Parameter der Beta-Verteilung	σ^2	Parameter der Normalverteilung
$r(x, y)$	Stichprobenkorrelationskoeffizient	$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung
s^2	Stichprobenstreuung		

Netzwerktheorie

Formelzeichen	Bedeutung	Formelzeichen	Bedeutung
$BP(k)$	bedingte Pufferzeit des Vorgangs k	KA	Koppelabstand
$D(k)$	Dauer des Vorgangs k	$l(i, j)$	Weglänge zwischen den Knoten P_i und P_j
$FAT(k)$	frühestmöglicher Anfangstermin des Vorgangs k	min$D$	Minimaldauer
$FET(k)$	frühestmöglicher Endtermin des Vorgangs k	ND	Normaldauer
$FP(k)$	freie Pufferzeit des Vorgangs k	PT	Plantermin
$FT(K)$	frühestmöglicher Termin des Ereignisses K	$SAT(k)$	spätestmöglicher Anfangstermin des Vorgangs k
$\mathfrak{G}$	Graph	$SET(k)$	spätestmöglicher Endtermin des Vorgangs k
$GP(K)$	Ereignispufferzeit des Ereignisses K	$ST(K)$	spätestmöglicher Termin des Ereignisses K
$GP(k)$	Gesamtpufferzeit des Vorgangs k	$UP(k)$	unabhängige Pufferzeit des Vorgangs k

Lagerhaltung, Zuverlässigkeitstheorie, Bedienungstheorie

Formelzeichen	Bedeutung	Formelzeichen	Bedeutung
$a(t)$	Ausfallrate	K	Kosten, Lagerhaltungskosten
$b(t)$	Lagerbestand	$m(t)$	Lagermangel (Fehlmenge im Zeitpunkt t)
$c(t)$	Lagerkosten		
d	Liefermenge, Durchsatz	$N(t)$	Anzahl der Erneuerungen von 0 bis t
$G(t)$	Zuverlässigkeitsfunktion		
$H(t)$	Erneuerungsfunktion	q	maximaler Lagerbestand

Formelzeichen	Bedeutung	Formelzeichen	Bedeutung
$R(t)$	kumulative Belieferung	$s(t)$	Lagerbedarf im Zeitpunkt t
$r(t)$	Lagerbelieferung	T	Lebensdauer, Dauer eines Lagerzyklus, Verweilzeit
S	Bedienungsdauer		
$S(t)$	kumulativer Bedarf bis zum Zeitpunkt t	T_q	Wartezeit
		W	Wartezeit

1. Einführung

Die Operationsforschung ist ein Anwendungsgebiet der modernen Mathematik und zugleich wichtiges Instrument zur Leitung gesellschaftlicher Prozesse. Auf diesem Gebiet findet ein ständiges Verschmelzen von mathematischen Verfahren und Methoden mit Fragestellungen aus der Wirtschaft, dem Militärwesen und anderen Bereichen statt. Andererseits wirken die Probleme der Operationsforschung zurück auf die Entwicklung verschiedener Spezialgebiete der Mathematik und in der Anwendung auf die Leitungstätigkeit in der Gesellschaft. So übten z. B. Planungsaufgaben und die damit verbundenen Optimierungsfragen auf die lineare Algebra und auf nichtlineare Verfahren der Analysis großen Einfluß aus. Dies hatte zur Folge, daß neue theoretische Erkenntnisse gewonnen wurden bzw. schon bekanntes mathematisches Wissen neu aufbereitet werden konnte.

Die Aufgaben der Operationsforschung erfordern, anhand eines nichtmathematischen Problems dessen wesentliche Größen und Beziehungen untereinander und zur Umwelt herauszuarbeiten. Diese Größen und Beziehungen werden mathematisch formuliert und bilden in ihrer Gesamtheit ein *mathematisches Modell.* Der inhaltliche Kern des mathematischen Modells ist die Wechselwirkung zwischen Mathematik und nichtmathematischer Aufgabenstellung. Das Modell wird zunächst als mathematischer Ansatz formuliert. Der folgende Schritt ist die Prüfung der *Lösbarkeit* des Modells. Die Lösbarkeit umfaßt praktisch:

- die Lösbarkeit im eigentlichen Sinne („Existiert eine Lösung für das vorliegende mathematische Modell?“) und
- die Konstruktion bzw. das Suchen eines Lösungsverfahrens, um im Falle der Existenz einer Lösung diese anzugeben.

Sie hat direkten oder indirekten Einfluß auf die Formulierung des Modells. Ausgehend von der praktischen Aufgabenstellung wird man zuerst immer versuchen, das Modell so aufzubauen, daß man bekannte Lösungsverfahren anwenden kann.

1.1. Modellklassen der Operationsforschung

Die Unterscheidung der Modelle der Operationsforschung kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen: nach der Aufgabenstellung, der mathematischen Formulierung, der zeitlichen Entwicklung, der Problemstruktur usw.

Von der praktischen Problemstellung her unterscheidet man zwischen *Planungsmodellen, Steuerungsmodellen, Datenerfassungsmodellen, Datenauswertungsmodellen* und anderen.

Mathematisch wird zwischen deterministischen und stochastischen Modellen unterschieden. Bei *deterministischen Modellen* werden zufällige Einflüsse (Störungen, unvollständige Informationen usw.) vernachlässigt, um den mathematischen Aufwand bei der Modellierung und Lösung zu reduzieren sowie Interpretationsschwierigkeiten bei der Anwendung der Lösung zu vermeiden. *Stochastische Modelle* stellen meist eine bessere Widerspiegelung der Realität dar, berücksichtigen sie doch die Dialektik zwischen Zufall und Notwendigkeit, die in deterministischen Modellen nicht beachtet wird. Andererseits ist die Berücksichtigung stochastischer Einflüsse oft mit höherem Aufwand bei der Modellierung, der Lösung und der Umsetzung in die Praxis verbunden.

Neue Modellklassen ergeben sich bei der Berücksichtigung der zeitlichen Entwicklung. Sind die

zeitlichen Veränderungen in einem Planungszeitraum so gering, daß man sie vernachlässigen kann, arbeitet man mit *statischen Modellen*. Diese Modelle stellen ebenfalls eine Vereinfachung dar. Das gegenwärtige Entwicklungstempo der Wissenschaft, Technik und der Wirtschaft erfordert eine Berücksichtigung der Zeit, d. h. die Anwendung *dynamischer Modelle*. Die Lösungsverfahren der dynamischen Modelle liefern die Verfahren der dynamischen Optimierung und der Theorie der Steuerung.
In einer weiteren Einteilung der Modelle wird die Struktur des Problems und somit das Modell selbst berücksichtigt. Kann man das vorliegende konkrete Problem durch lineare Ausdrücke beschreiben, so spricht man von *linearen Modellen*. Am bekanntesten sind die Modelle der linearen Optimierung. Werden nichtlineare Beziehungen in das Modell aufgenommen, erhält man *Modelle und Verfahren der nichtlinearen Optimierung*, die häufig mit hohem rechnerischem Aufwand verbunden sind.

1.2. Vorbemerkung zum Abschnitt Operationsforschung

Im vorliegenden Abschnitt sind neben der Theorie der *Netzwerke* und deren Anwendung in der *Netzplantechnik*, der *linearen* und *nichtlinearen Optimierung* sowie *Modellen der Operationsforschung* (Lagerhaltung, Zuverlässigkeitstheorie, Bedienungstheorie) wegen ihrer Bedeutung bei der Leitung und Planung von Wissenschaft, Technik und Gesellschaft auch Gebiete der *angewandten Mathematik* (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik) enthalten. Für interessierte Leser wird das Studium der weiterführenden Literatur, die am Schluß dieses Abschnitts aufgeführt ist, empfohlen.

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

2.1. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Literatur: [11, 12, 17, 18, 27, 34, 45, 47, 49, 57, 61]

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand aus zunächst spielerischen Überlegungen bezüglich verschiedener Glücksspiele. Das Bemühen, Prozesse mit zufälligen Eigenschaften mathematisch zu beschreiben (z. B. in der Quantenphysik, Ökonomie, Technik, Soziologie, Biologie), gab und gibt diesem Gebiet ständig neue Impulse. Es entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitstheorie, deren wesentliche Arbeitsmethoden unmittelbar der Mengentheorie, der Algebra und der Theorie der reellen Funktionen entnommen sind. Ihre Bedeutung nimmt zu, je stärker Systeme bzw. Prozesse mit Störungen in Leitung und Planung einbezogen werden.

2.1.1. Zufällige Ereignisse und ihre Verknüpfung

Das zufällige Ereignis ist Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unter einem *zufälligen Ereignis* verstehen wir einen Zustand, dessen Eintreffen nicht im voraus feststeht. Da man i. allg. einen Zustand durch eine Menge von Werten festlegt, soll hier definiert werden:
Der Zustand a ist eingetroffen, wenn ein Element der dazugehörenden, beschriebenen Menge A eintrifft. a liegt vor, wenn x mit $x \in A$ beobachtet wurde. Das zufällige Ereignis zu a bezeichnet man dann durch die Menge A.

Beispiel. Die Menge $\{2, 4, 6\}$ beschreibt das zufällige Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln.

Die Verknüpfungsregeln zwischen Ereignissen lassen sich durch die Mengenoperationen definieren.

1. Komplementärereignis:

$\bar{A}$ ist das Komplementärereignis von A. $\bar{A}$ tritt ein, wenn A nicht eintritt und umgekehrt. $\bar{A}$ entspricht der *Komplementärmenge* von A (bzw. der logischen Verneinung).

$$x \in \bar{A}, \quad \text{wenn} \quad x \notin A \quad \text{bzw.} \quad x \notin \bar{A}, \quad \text{wenn} \quad x \in A \qquad (1)$$

2. *Summe von Ereignissen:*

Unter $S = A + B$ versteht man das Ereignis, das eintritt, wenn A oder B eintritt. S entspricht der *Mengenvereinigung* von A und B (bzw. der logischen Disjunktion).

$$S = A + B \Leftrightarrow (x \in A \text{ oder } x \in B \Rightarrow x \in S) \tag{2}$$

3. *Produkt von Ereignissen:*

Unter $C = A \cdot B$ versteht man das Ereignis, das eintritt, wenn A und B eintreten. C entspricht dem *Mengendurchschnitt* von A und B (bzw. der logischen Konjunktion).

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow (x \in A \text{ und } x \in B \Rightarrow x \in C) \tag{3}$$

$\emptyset$ ist das *unmögliche Ereignis*; es tritt nie ein (leere Menge). E ist das *sichere Ereignis*, es tritt immer ein (umfassende Menge). Entsprechend den Verknüpfungsregeln gilt für jedes *zufällige Ereignis A*

$$A + \bar{A} = E; \qquad A \cdot \bar{A} = \emptyset \tag{4}$$

Die Beziehungen zwischen Ereignissen werden durch die Begriffe fremd, abhängig und unabhängig ausgedrückt. Die Ereignisse A und B sind fremd, wenn sie nicht gemeinsam auftreten können:

$$A \cdot B = \emptyset \tag{5}$$

Zwei Ereignisse A und B sind (stochastisch) abhängig, wenn das Eintreffen von A das Eintreffen von B oder umgekehrt beeinflußt.

Beispiele. 1. $\{1\}$: Würfeln einer Eins; $\{2\}$: Würfeln einer Zwei. $\{1\} \cdot \{2\} = \emptyset$. Beide Ereignisse sind fremd. 2. A: Der Kohleverbrauch übersteigt die Kennzahlen. B: Der Winter ist besonders hart. A hängt von B ab.

2.1.2. Wahrscheinlichkeit

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit P wird die Notwendigkeit gemessen, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt.*) Sie ist eine Funktion der Ereignisse und somit eine Mengenfunktion. Diese wird durch folgende Axiome definiert:

1. Für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A gilt:

$$0 \leqq P(A) \leqq 1 \tag{6}$$

2. Für das *sichere Ereignis E* gilt:

$$P(E) = 1 \tag{7}$$

3. Wenn A und B fremd sind, so gilt:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{8}$$

Neben dieser mathematischen Definition empfehlen sich folgende Interpretationen für die Anwendung: $P(A) \cdot 100\%$ gibt die Sicherheit für A. Wenn man A hinreichend lang beobachtet, dann tritt A in $P(A) \cdot 100\%$ aller Fälle auf.

Aus den Axiomen (7) und (8) folgt:

$$P(\emptyset) = 0, \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{9}$$

Für ein Produkt zweier Ereignisse gilt eine zum Axiom (8) analoge Gleichung, wenn die Ereignisse *unabhängig* sind:

$$A, B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \tag{10}$$

---

*) Das Symbol P stammt von dem Wort probability, Wahrscheinlichkeit.

Wenn A und B abhängig sind, verwendet man die Wahrscheinlichkeit für bedingte Ereignisse. Unter dem *bedingten Ereignis* A/B versteht man das Eintreffen von A, wenn B schon eingetreten ist. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann:

$$P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A) \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt: Wenn A und B unabhängig sind, dann gilt:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{bzw.} \quad P(B/A) = P(B) \qquad (12), (13)$$

2.1.3. Zufallsvariable

Den Zustand eines Systems beschreibt man i. allg. durch Zustandsvariable. Zufällige Ereignisse können durch die Werte der Zustandsvariablen beschrieben werden, die beobachtet wurden. Diese Variablen bilden die zufälligen Ereignisse auf reelle Zahlen (Meßwerte) ab. Die Abbildungen werden als *Zufallsvariable* oder *stochastische Variable* bezeichnet. Eine Zufallsvariable ist eine Zustandsvariable mit zufällig schwankenden Werten, die nicht im voraus angebbar sind. Zufallsvariable werden durch große lateinische Buchstaben bezeichnet, ihre Werte durch kleine. Zwei Zufallsvariablen sind stochastisch unabhängig, wenn die dazugehörigen zufälligen Ereignisse unabhängig sind.

Beispiele. 1. Kosten für einen bestimmten Vorgang bei verschiedenen Projekten,
2. Dauer eines Vorgangs (z. B. im PERT-Netzplan),
3. Druckfestigkeit von Beton,
4. Anzahl von Maschinenausfällen in einer Schicht,
5. Bedarf an Ersatzteilen.

2.1.4. Verteilungsgesetze

Um ein System mit der Zustandsvariablen X zu steuern, benötigt man Informationen über die Sicherheit, mit der X bestimmte Werte bzw. Wertebereiche annimmt. Diese Wahrscheinlichkeit ist dem Verteilungsgesetz von X zu entnehmen. Es wird mathematisch durch die Verteilungsfunktion formuliert. Unter der *Verteilungsfunktion* $F(x)$ der Zufallsvariablen X versteht man den Ausdruck:

$$F(x) = P(X \leqq x) \tag{14}$$

$F(x)$ liefert für jeden fixierten x-Wert die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsvariable X keinen Wert größer als x annimmt. $X \leqq x$ ist ein zufälliges Ereignis. $F(x)$ ist keine Funktion von X, sondern von einer deterministischen Variablen x.

Eigenschaften von $F(x)$:

– $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$ (15)

– $F(x)$ ist monoton wachsend:

$$x_0 < x_1 \Leftrightarrow F(x_0) \leqq F(x_1) \tag{16}$$

– Sind a, b zwei vorgegebene Werte ($a \leqq b$):

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) \tag{17}$$

Eine *diskrete* Zufallsvariable X bzw. Verteilung liegt vor, wenn X nur diskrete, abzählbar viele Werte annimmt. Bei diskreten Zufallsvariablen verwendet man die Verteilungsfunktion seltener und gibt unmittelbar die Wahrscheinlichkeit für jeden diskreten Wert an.

Eine *stetige* Zufallsvariable X bzw. Verteilung liegt vor, wenn X jeden Wert in einem endlichen



oder unendlichen Bereich annimmt und $F(x)$ differenzierbar ist. Diese Ableitung nennt man *Dichtefunktion* von X.

Dichtefunktion von X: $$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{18}$$

Verteilungsfunktion von X: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v \tag{19}$$

Eigenschaften von $f(x)$:

— $f(x) \geqq 0$ auf $(-\infty, \infty)$ (20)

— $f(x)$ ist integrierbar: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (21)

Die am häufigsten angewandten Verteilungsgesetze sind in 2.1.7. erläutert.

2.1.5. Verteilungsparameter

Mit Hilfe der Verteilungsparameter charakterisiert man Zufallsvariable bzw. Beziehungen zwischen ihnen. Weitere Parameter, wie *Quantile, Schiefe, Exzeß* u. a. *Momente höherer Ordnung,* werden hier nicht behandelt. Siehe weiterführende Literatur.

Erwartungswert

Ist X eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ annehmen kann, dann ist $p_i = P(X = a_i)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ Ist X eine stetige Zufallsvariable, so gehört die Dichtefunktion $f(x)$ dazu.
Unter dem Erwartungswert von X versteht man:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} p_i a_i & \text{für diskretes } X, \quad (22\text{a}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} v f(v)\,\mathrm{d}v & \text{für stetiges } X. \quad (22\text{b}) \end{cases}$$

Eigenschaften des Erwartungswertes:

— $E(X)$ entspricht dem Mittelwert der unendlich vielen Beobachtungswerte von X.
— Hat man k verschiedene Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_k$, dann gilt:

$$E(X_1 + \cdots + X_k) = E(X_1) + \cdots + E(X_k) \tag{23}$$

Varianz

Die Varianz charakterisiert die zufälligen Schwankungen der Zufallsvariablen. Unter der Varianz von X versteht man:

$$\mathrm{Var}\,(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - E(X)^2 \tag{24}$$

Aus der Definition (24) erhält man folgende Eigenschaften:

— $\mathrm{Var}\,(X)$ entspricht der Streuung der unendlich vielen Beobachtungswerte von X.
— $\mathrm{Var}\,(X) \geqq 0$; die Gleichheit stellt eine Entartung dar.
— Sind X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen, so ist:

$$\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2) + 2E\{[X_1 - E(X_1)]\,[X_2 - E(X_2)]\} \tag{25}$$

Kovarianz

Sind zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig, dann gilt:

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) \tag{26}$$

Mit Hilfe der Differenz $E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2)$, die als Kovarianz von X_1, X_2 bezeichnet wird, charakterisiert man die Stärke der Abhängigkeit.

$$\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = E\{[X_1 - E(X_1)]\,[X_2 - E(X_2)]\} \tag{27}$$

Der Wert von Cov (X_1, X_2) wird nicht nur von der Stärke der Abhängigkeit, sondern auch von den Varianzen der Zufallsvariablen bestimmt. Als Parameter der Abhängigkeit verwendet man den *Korrelationskoeffizienten* zwischen X_1 und X_2:

$$\varrho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X_1) \cdot \mathrm{Var}\,(X_2)}} \tag{28}$$

Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten:

- Sind X_1 und X_2 unabhängig $\Rightarrow \varrho(X_1, X_2) = 0$ (Die Umkehrung der Schlußfolgerung gilt nicht. Man nennt zwei Variablen mit $\varrho = 0$ nur unkorreliert).
- Für den Wert von $\varrho(X_1, X_2)$ gilt: $\quad -1 \leqq \varrho(X_1, X_2) \leqq 1$ (29)
- Ist $|\varrho(X_1, X_2)| = 1$, so besteht zwischen X_1 und X_2 ein linearer Zusammenhang $X_2 = aX_1 + b$.

2.1.6. Das Verhalten der Verteilungsparameter bei linearer Transformation

Eine *lineare Transformation* der Zufallsvariablen X ist

$$Y = aX + b \tag{30}$$

a Maßstabänderung, b Nullpunktverschiebung

Die lineare Transformation bewirkt

- beim Erwartungswert: $E(aX + b) = aE(X) + b$ (31)
- bei der Varianz: $\mathrm{Var}\,(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}\,(X)$ (32)
- bei der Kovarianz: $\mathrm{Cov}\,(X_1, aX_2 + b) = a\,\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$ (33)
- beim Korrelationskoeffizienten: $\varrho(X_1, aX_2 + b) = \varrho(X_1, X_2)$ (34)

Mit Hilfe der Beziehungen (31) und (32) kann man jede Zufallsvariable X mit $E(X)$ und $\mathrm{Var}\,(X) > 0$ in eine normierte Zufallsvariable Z mit $E(Z) = 0$ und $\mathrm{Var}\,(Z) = 1$ überführen durch:

$$Z = [X - E(X)]/\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)} \tag{35}$$

2.1.7. Beispiele für Verteilungsgesetze

Aus der Vielzahl bekannter Verteilungsgesetze sollen hier einige oft angewandte erläutert werden [11].

Binomialverteilung

Die diskrete Zufallsvariable X kann nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ annehmen. X genügt der Binomialverteilung, wenn für die Wahrscheinlichkeit gilt ($0 \leqq k \leqq n$):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \tag{36}$$

Beispiel. $p \cdot 100\%$ sei der Ausschußprozentsatz einer Warenlieferung. Es wird eine Stichprobe von n Wareneinheiten gezogen. Die Anzahl X an schlechten Wareneinheiten in der Stichprobe genügt dem Wahrscheinlichkeitsgesetz (36).

Poisson-Verteilung

Die diskrete Zufallsvariable X kann nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ annehmen. Für das Wahrscheinlichkeitsgesetz der POISSON-Verteilung gilt mit $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \tag{37}$$

Beispiel. λ sei die mittlere Anzahl von Maschinenausfällen pro Schicht und X die der Maschinenausfälle. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz von X kann häufig durch (37) beschrieben werden.

Normalverteilung

Die stetige Zufallsvariable X kann jeden Wert im Intervall $(-\infty, \infty)$ annehmen. In Bild 1 ist die Dichtefunktion von X dargestellt.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{38}$$

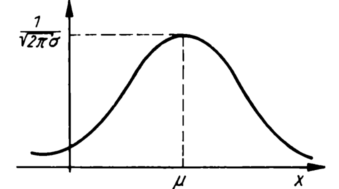


Bild 1. Dichtefunktion der Normalverteilung

Die dazugehörige Verteilungsfunktion kann man nach (19) durch Integraltransformation auf eine normierte Form bringen:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{39}$$

$\Phi(z)$ ist die Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung. Ihre Werte sind tabelliert.

Beispiele. 1. Zwischentermine in PERT-Netzplänen
2. Streckgrenze von Stahl.

Beta-Verteilung

Die Vorgangsdauer in PERT-Netzplänen wird durch Beta-Verteilungen beschrieben. Für die Dichtefunktion einer allgemeinen Beta-Verteilung gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^p\,(b-x)^q}{B(p+1, q+1)\,(b-a)^{p+q-1}} & \text{für} \quad a \leqq x \leqq b, \quad (40\text{a}) \\ 0 & \text{für} \quad x < a \quad \text{oder} \quad x > b \quad (40\text{b}) \end{cases}$$

$f(x)$ nimmt sein Maximum an der Stelle m an:

$$m = (aq + bp)/(p + q) \tag{41}$$

Um diesen Ausdruck und das Arbeiten mit der Beta-Verteilung zu vereinfachen, wählt man beim PERT-Modell für die Parameter p und q die Werte $p = 2 + \sqrt{2}$, $q = 2 - \sqrt{2}$.

2.1.8. Parameter einiger Verteilungen

Anhand der Gln. (22) und (23) kann man für jede Verteilungsart den Erwartungswert und die Varianz berechnen*) (Tabelle 1).

Tabelle 1. Parameter verschiedener Verteilungsgesetze

Verteilung von X	Erwartungswert $E(X)$	Varianz Var (X)
Binomialverteilung	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	λ	λ
Normalverteilung	μ	σ^2
Beta-Verteilung	$\dfrac{a+b+m(p+q)}{p+q+2}$	$\left(\dfrac{b-a}{p+q+2}\right)^2 \dfrac{(p+1)(q+1)}{p+q+3}$
Beta-Verteilung für PERT	$(a+b+4m)/6$	$\{(b-a)/6\}^2$

2.1.9. Stochastische Prozesse

Um den dynamischen Charakter der Zustandsvariablen auf die Zufallsvariablen zu übertragen, werden die *stochastischen Variablen* als Funktionen der Zeit (allgemein: eines Parameters t) aufgefaßt. Man spricht dann von *zufälligen Funktionen, zufälligen* oder *stochastischen Prozessen.* Diese Prozesse werden durch die jeweilige zufällige Funktion und den dazugehörigen Definitionsbereich I angegeben: $\{X(t), t \in I\}$.
Fixiert man t, dann ist $X(t)$ eine statische Zufallsvariable**). Die Realisierung von $X(t)$ für veränderliches t in I stellt eine Funktion dar (*Trajektorie des stochastischen Prozesses*).
Um einen stochastischen Prozeß zu beschreiben, fixiert man zu einem beliebig vorgegebenen n die willkürlichen Zeitpunkte $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ $(t_i \in I)$. Für diese Punkte bestimmt man die Verteilungsfunktion:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P[X(t_1) \leqq x_1, X(t_2) \leqq x_2, \ldots, X(t_n) \leqq x_n] \quad (42)$$

Aus Gl. (11) folgt dann:

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}) \cdot P[X(t_n) \leqq x_n / X(t_1) \leqq x_1, \ldots, X(t_{n-1}) \leqq x_{n-1}] \quad (43)$$

Aus den Zuständen in $(n-1)$ Zeitpunkten und der bedingten Wahrscheinlichkeit (*Übergangswahrscheinlichkeit*) erhält man die mögliche Information über den zufälligen Prozeß im Zeitpunkt t_n.
Stochastische Prozesse, für deren Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P[X(t_n) \leqq x_n / X(t_1) \leqq x_1, \ldots, X(t_{n-1}) \leqq x_{n-1}] = P[X(t_n) \leqq x_n / X(t_{n-1}) \leqq x_{n-1}] \quad (44)$$

gilt, nennt man *markovsch.* Diese Eigenschaft bedeutet, daß man die gesamte mögliche Information über den Zustand im Zeitpunkt t_n aus der Information im Zeitpunkt t_{n-1} gewinnen kann. Die Informationen der Zeitpunkte $t_{n-2}, t_{n-3}, \ldots, t_1$ liefern keinen weiteren Beitrag. Prozesse mit dieser Eigenschaft werden als Markov-*Prozesse* bezeichnet.

*) Die dazugehörigen Ableitungen sind mitunter recht kompliziert.
**) s. 2.1.1. bis 2.1.7. dieses Abschnitts



Wenn I bei einem MARKOV-Prozeß eine Teilmenge der ganzen Zahlen darstellt, dann ist $\{X(t), t \in I\}$ eine MARKOV-Kette. Eine wichtige Rolle spielen die stationären Prozesse. Man unterscheidet *Stationarität* im engeren und weiteren Sinne. Ein stochastischer Prozeß ist stationär im engeren Sinne, wenn für jedes t gilt:

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1 + t, \ldots, t_n + t) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \tag{45}$$

Aus (45) folgt dann

$$E[X(t)] = \text{konst.}, \qquad \text{Var}\,[X(t)] = \text{konst.}, \tag{46}$$

$$\text{Cov}\,[X(t_1), X(t_2)] = R(t_2 - t_1) \tag{47}$$

Stationarität im weiteren Sinne liegt vor, wenn man für den stochastischen Prozeß nur die Gültigkeit der Gln. (46) und (47) fordert [7].

Stationäre Prozesse sind für Trenduntersuchungen von Bedeutung. Es gilt festzustellen, ob ein stochastischer Prozeß durch einen stationären Prozeß mit überlagerter deterministischer Zeitfunktion (Trendfunktion) dargestellt werden kann.

Beispiel: POISSON-Prozeß: Der POISSON-Prozeß ist ein MARKOV-Prozeß. $X(t)$ sei die Anzahl der im Zeitraum t eintreffenden Ereignisse (z. B. die Anzahl der Maschinenausfälle). Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann:

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

2.2. Mathematische Statistik

Literatur: [11, 12, 18, 27, 33, 34, 36, 37, 43, 47, 57]

2.2.1. Stichprobenmodell und Stichprobenfunktion

Meßwerte oder Beobachtungen einer Zufallsvariablen sind die einzigen Informationen zur Bestimmung des Verteilungsgesetzes. Um diese Informationen mit möglichst wenig Verlust gezielt auszuwerten, wendet man die Wahrscheinlichkeitstheorie an. Da Meßwerte feste Zahlen sind und die Wahrscheinlichkeitstheorie mit zufälligen Ereignissen bzw. Zufallsvariablen arbeitet, wurde das *Stichprobenmodell* eingeführt.

Von der Zufallsvariablen X liegen n Meßwerte vor: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sie stellen eine Stichprobe vom Umfang n von X dar. x_i sind die *Stichprobenwerte* ($i = 1, \ldots, n$), die als Beobachtungswerte der Zufallsvariablen X_i aufgefaßt werden. Dies geschieht für jeden Meßwert x_i ($i = 1, \ldots, n$). Das Modell einer zufälligen Stichprobe besteht aus den n Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, wobei die X_i als *Stichprobenvariable* bezeichnet werden. Für diese Variablen setzt man voraus, daß alle dem gleichen Verteilungsgesetz wie X genügen und paarweise stochastisch unabhängig sind. X und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind identisch verteilt; d. h.

$$P(X_1 \leqq x) = \cdots = P(X_n \leqq x) = P(X \leqq x) = F(x; a_1, a_2, \ldots, a_k) \tag{48}$$

$F(x; a_1, \ldots, a_k)$ ist die Verteilungsfunktion von X. Sie hängt von den Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ab. Diese können z. B. sein:

- p bei der Binomialverteilung,
- μ, σ^2 bei Normalverteilung,
- a, b, p, q bei der Beta-Verteilung.

Bei den meisten Anwendungen setzt man den Typ des Verteilungsgesetzes voraus, wobei die unbekannten Parameter anhand von Stichproben zu schätzen sind.

Aus (48) folgt, daß für alle Stichprobenvariablen gilt:

$$E(X_1) = \cdots = E(x_n) = E(X); \qquad \text{Var}\,(X_1) = \cdots = \text{Var}\,(X_n) = \text{Var}\,(X) \tag{49}$$

Die mathematische Statistik liefert Funktionen in den Stichprobenvariablen, mit deren Hilfe die Parameter geschätzt werden. Diese Funktionen nennt man *Statistiken*, *Stichproben-* oder

Schätzfunktionen. Gilt es, die k Parameter der Verteilungsfunktion zu bestimmen, benötigt man k Stichprobenfunktionen:

$$\begin{array}{lll} U_1(X_1, \dots, X_n) & \text{für} & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ U_k(X_1, \dots, X_n) & \text{für} & a_k \end{array}$$

Treten an die Stelle der Stichprobenvariablen die Stichprobenwerte, so liefert die Schätzfunktion einen *Schätzwert*:

$$\begin{array}{lllll} U_1(x_1, \dots, x_n) & = & u_1 & \approx & a_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_k(x_1, \dots, x_n) & = & u_k & \approx & a_k \end{array}$$

Im folgenden soll nur ein Parameter unbekannt sein: $a_1 = a$; $U_1(X_1, \dots, X_n) = U(X_1, \dots, X_n) = U$. Da die Stichprobenfunktionen Zufallsvariable sind, kann man $E(U)$ und Var (U) bilden. Diese Parameter beschreiben die Eigenschaften der Schätzfunktion, die dadurch charakterisiert wird.

Man unterscheidet:

— *erwartungstreue (unverzerrte, biasfreie) Schätzfunktionen*
  Eine Stichprobenfunktion $U(X_1, \dots, X_n)$ ist für a erwartungstreu, wenn gilt:

$$E[U(X_1, \dots, X_n)] = a \tag{50}$$

— *wirksamste Schätzfunktionen*
  Eine erwartungstreue Schätzfunktion ist am wirksamsten, wenn Var $[U(X_1, \dots, X_n)]$ minimal bezüglich aller erwartungstreuen Schätzfunktionen ist.

— *konsistente Schätzfunktionen*
  Eine Schätzfunktion ist konsistent, wenn U in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang stochastisch gegen den Parameterwert konvergiert:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} U(X_1, \dots, X_n) = a\right] = 1, \tag{51a}$$

  bzw. wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so daß für alle $n > N$:

$$P[|U(X_1, \dots, X_n) - a| < \varepsilon] > 1 - \varepsilon' \tag{51b}$$

2.2.2. Mittelwert und Streuung

Da Erwartungswert und Varianz wichtige Parameter einer Zufallsvariablen X sind, sollen für diese beiden Größen Schätzfunktionen angegeben werden. Die unbekannten Parameterwerte werden mit $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = \text{Var}\,(X)$ bezeichnet.
Zur Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ gehören die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$. Die Schätzfunktionen und Schätzwerte sind:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{52}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 \tag{53}$$

$\overline{X}$ bzw. $\overline{x}$ ist der *Mittelwert*, und S^2 bzw. s^2 ist die *Streuung* der vorliegenden Stichprobe. Beide Schätzfunktionen sind für das Stichprobenmodell erwartungstreu.
Auf Grund der großen Bedeutung für die Praxis und ihrer Vielseitigkeit wird weiterhin vorausgesetzt, daß X normalverteilt ist. Dies gilt für alle Stichprobenvariablen X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Unter dieser Voraussetzung ist $\overline{X}$ eine wirksamste Schätzfunktion.

Ausgehend von der Normalverteilung für X (für die Grundgesamtheit) kann man die Verteilungsgesetze für die Schätzfunktionen (für die Stichprobe) herleiten.
Ist X normalverteilt mit $E(X) = \mu$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2$, dann ist:

– $\bar{X}$ normalverteilt mit $E(\bar{X}) = \mu$, und $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ (54)

– und $(n-1)\,S^2/\sigma^2$ ist χ^2-verteilt mit $(n-1)$ Freiheitsgraden bei

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{und} \quad \text{Var}(S^2) = 2\sigma^4/(n-1) \tag{55}$$

In den meisten Anwendungen sind die Werte μ und σ unbekannt. In der Verteilung von $\bar{X}$ befinden sich somit zwei unbekannte Werte, von denen einer durch $\bar{X}$ geschätzt wird. Man kann in diesem Fall nicht mit Gl. (54) arbeiten, sondern muß zu einer weiteren Verteilung übergehen, in der an die Stelle des unbekannten Parameters σ^2 die Schätzfunktion S^2 tritt.
Die Schätzfunktion

$$T = (\bar{X} - \mu)\sqrt{n}/S \tag{56}$$

genügt der *Student-* oder *t-Verteilung* von $n-1$ Freiheitsgraden. Die wichtigsten Werte der Verteilungsfunktionen für χ^2-Verteilung und t-Verteilung sind in Tabellen erfaßt.

2.2.3. Vertrauensbereich oder Konfidenzintervall

Um über die Genauigkeit der Schätzwerte etwas aussagen zu können, gibt man mit Hilfe der Schätzfunktionen zufällige Intervalle an, die mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit den tatsächlichen Parameterwert a enthalten. Das zufällige Intervall bezeichnet man als *Konfidenzbereich* und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit als *statistische Sicherheit.* Unter dem *Vertrauensintervall* soll eine Beobachtung (Realisierung) des Konfidenzintervalls verstanden werden.
Für die beiden Parameter μ und σ^2 einer Normalverteilung gilt:

1. Wenn σ^2 bekannt; Vertrauensbereich für μ:

$$\bar{x} - 1{,}96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + 1{,}96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{mit 95\% Sicherheit} \tag{57}$$

$$\bar{x} - 2{,}57\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + 2{,}57\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{mit 99\% Sicherheit} \tag{58}$$

2. Wenn σ^2 unbekannt; Vertrauensbereich für μ:

$$\bar{x} - t_{n-1}(0{,}95)\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + t_{n-1}(0{,}95)\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{mit 95\% Sicherheit} \tag{59}$$

$$\bar{x} - t_{n-1}(0{,}99)\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + t_{n-1}(0{,}99)\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{mit 99\% Sicherheit} \tag{60}$$

   Die Werte für $t_{n-1}(0{,}95)$ bzw. $t_{n-1}(0{,}99)$ sind der Tabelle 2 zu entnehmen.

3. Vertrauensbereich für σ^2:
   Man erhält keinen symmetrischen Vertrauensbereich wie bei (57), (58) bzw. (59), (60). Es gilt:

$$\sigma^2 < (n-1)\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}(0{,}05)} \quad \text{mit 95\% Sicherheit} \tag{61}$$

$$\sigma^2 > (n-1)\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}(0{,}95)} \quad \text{mit 95\% Sicherheit} \tag{62}$$

   Die Werte für χ^2_{n-1} sind der Tabelle 3 zu entnehmen.

Tabelle 2. Auszug aus der Student-Verteilung

$n-1$	9	19	24	60	120	∞
$t_{n-1}(0{,}95)$	2,262	2,093	2,064	2,02	1,980	1,960
$t_{r-1}(0{,}99)$	3,250	2,861	2,797	2,70	2,617	2,576

Tabelle 3. Auszug aus der χ^2-Verteilung

$n-1$	9	19	24	60	100
$\chi^2_{n-1}(0{,}05)$	3,33	10,1	13,8	43,2	77,9
$\chi^2_{n-1}(0{,}95)$	16,90	30,1	36,4	79,1	124,3

2.2.4. Vergleich von Stichproben

Von einer Zufallsvariablen X werden unabhängig voneinander zu verschiedenen Zeitpunkten oder unterschiedlichen Bedingungen zwei Stichproben gezogen. Es ist zu entscheiden, ob die Parameter von X sich entsprechend den Bedingungen ebenfalls geändert haben oder gleichgeblieben sind.
Die Bedingungen werden mit B_1 und B_2 bezeichnet. Es ist zu untersuchen, ob gilt:

$$E(X/B_1) = E(X/B_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}(X/B_1) = \operatorname{Var}(X/B_2) \tag{63}$$

Die Stichproben sind $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}$ unter der Bedingung B_1 und $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}$ unter der Bedingung B_2; wobei im allgemeinen $m \neq n$. Man berechnet für jede Stichprobe die Stichprobenwerte:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}; \qquad s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \tag{64}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}; \qquad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \tag{65}$$

Folgende Fragen sind zu beantworten:

1. Sind die Streuungen gleich ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)?
Dabei ist $\sigma_1^2 = \operatorname{Var}(X/B_1)$ und $\sigma_2^2 = \operatorname{Var}(X/B_2)$.

Man berechnet den Quotienten:

$$F = \begin{cases} s_1^2/s_2^2, \text{ wenn } s_1^2 \geqq s_2^2 \text{ ist; } (m-1,\ n-1) \text{ Freiheitsgrade} & (66\text{a}) \\ s_2^2/s_1^2, \text{ wenn } s_1^2 < s_2^2 \text{ ist; } (n-1,\ m-1) \text{ Freiheitsgrade} & (66\text{b}) \end{cases}$$

Anhand des F-Wertes wird folgende Entscheidung gefällt:
Wenn $F \geqq F_0$ (F_0 ist der Wert aus der FISHER-Tabelle) für $(m-1,\ n-1)$ bzw. $(n-1,\ m-1)$ Freiheitsgrade zu vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit ist, dann muß man $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ annehmen; d. h., der Unterschied zwischen s_1^2 und s_2^2 ist wesentlich oder signifikant.
Wenn $F < F_0$ ist, dann liegt nur ein zufälliger oder statistischer Unterschied zwischen s_1^2 und s_2^2 vor.

2. Sind die Mittelwerte gleich ($\mu_1 = \mu_2$)?
Dabei ist $\mu_1 = E(X/B_1)$ und $\mu_2 = E(X/B_2)$.

Liegt kein signifikanter Unterschied zwischen den Streuungen vor, so sind die Mittelwerte zu vergleichen. Man berechnet:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(m-1)\,s_1^2 + (n-1)\,s_2^2}{m+n-2}}} \cdot \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \tag{67}$$



Die Entscheidung lautet:

Wenn $|t| \geqq t_{m+n-2}(0{,}95)$, dann ist $t_{m+n-2}(0{,}95)$ aus der Tabelle 2 zu entnehmen. Bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 muß man $\mu_1 \neq \mu_2$ annehmen; d. h., der Unterschied zwischen μ_1 und μ_2 ist wesentlich oder signifikant.

Wenn $F < F_0$ und $|t| < t_{m+n-2}$, dann kann anhand der Stichproben kein Einfluß von B_1 bzw. B_2 auf X nachgewiesen werden.

2.2.5. Korrelationskoeffizient

An einem System werden die beiden stochastischen Zustandsvariablen X und Y beobachtet. Es gilt festzustellen, ob zwischen X und Y ein Zusammenhang besteht; d. h., es ist der Wert von $\varrho(X, Y)$ zu schätzen. Wenn $\varrho = 0$ ist, so liegt Unabhängigkeit vor.

Die Stichprobe von (X, Y) besteht aus Zahlenpaaren $(x_1, y_1); \ldots; (x_n, y_n)$.

Aus diesen Stichprobenwerten berechnet man den *Stichprobenkorrelationskoeffizienten* $r(x, y)$, den Schätzwert für $\varrho(X, Y)$:

$$r(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} \tag{68}$$

Für r gilt:

1. $-1 \leqq r(x, y) \leqq 1$
2. Wenn $t = r\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r^2}$ mit $|t| > t_{n-2}(0{,}95)$ erfüllt ist, dann besteht zwischen X und Y ein Zusammenhang ($\varrho \neq 0$).

2.2.6. Lineare Regression

Literatur: [19]

$Y, X_1, X_2, \ldots, X_k$ sind $k + 1$ Zufallsveränderliche. Sollen die Zusammenhänge zwischen Y und X_i untersucht werden, so wird für die *Regressionsfunktion* eine lineare Funktion angesetzt:

$$E(Y/X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \tag{69}$$

$$\text{Var}\,(Y/X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \sigma^2 \tag{70}$$

wobei die bedingte Varianz nicht von $X_1, \ldots, X_k$ abhängt. Die Werte von $\sigma^2, \alpha_0, \ldots, \alpha_k$ sind unbekannt. Man nennt die $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *lineare Regressionskoeffizienten* von Y bezüglich der Einflußgrößen $X_1, \ldots, X_k$.

Aufgabe der Regressionsanalyse ist es, $\sigma^2, \alpha_0, \ldots, \alpha_k$ zu schätzen. Dabei liefert die Methode der kleinsten Quadrate Schätzwerte für diese Parameter. Die Stichprobe besteht aus n Zeilen mit $k + 1$ Zahlen. Bei einer Probe gibt man die Werte $x_1, \ldots, x_k$ vor und mißt dann die sich einstellenden Werte von Y. Dabei ergibt sich folgendes Zahlenschema (Tabelle 4).

Tabelle 4. Stichprobe für die Regressionsanalyse

Y	X_1	X_2	$\cdots$	X_k
y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}
y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nk}

Aus den Werten y_i und x_{ij} wird folgendes lineares Gleichungssystem aufgebaut:

$$\begin{array}{llll} n a_0 & + \sum_{i=1}^{n} x_{i1} a_1 & + \cdots + \sum_{i=1}^{n} x_{ik} a_k & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} a_0 & + \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 a_1 & + \cdots + \sum_{i=1}^{n} x_{ik} x_{i1} a_k & = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik} a_k & + \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ik} a_1 & + \cdots + \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 a_k & = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{ik} \end{array} \tag{71}$$

Die Lösungen $a_0 = \hat{a}_0$; $a_1 = \hat{a}_1, \ldots, a_k = \hat{a}_k$ sind Schätzwerte für $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$. Man erhält somit für die Regressionsfunktion den Ansatz:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \cdots + \hat{a}_k x_k \tag{72}$$

Den Schätzwert für σ^2 liefert mit $\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{i1} + \cdots + \hat{a}_k x_{ik}$ die *Reststreuung*:

$$s_R^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{73}$$

Man beachte, daß $\hat{y}$ kein Schätzwert für Y, sondern für den Erwartungswert $E(Y/X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k)$ ist.
Die lineare Regression wird häufig dazu verwendet, die Eingangs- und Ausgangsbeziehungen von Systemen durch lineare Ansätze zu approximieren. Um die Güte der linearen Approximation zu messen, vergleicht man die Reststreuung s_R^2 mit der *Gesamtstreuung* s_y^2 der Stichprobe $y_1, \ldots, y_n$:

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \tag{73a}$$

Den Ausdruck $B = 1 - (s_R^2/s_y^2)$ bezeichnet man als *Bestimmtheitsmaß*. Der lineare Ansatz approximiert die Meßwerte y_i gut, wenn B wertmäßig nahe bei 1 liegt.

Beispiel. Um den Einfluß der Maschinenausfälle in einer technologischen Linie auf den Produktions-Iststand (Wert) zu ermitteln, wird eine lineare Regressionsanalyse durchgeführt.

y: Iststand der täglichen Produktion (z. B. in Mark)
x_i: tägliche Betriebsdauer von Maschine M_i (z. B. in Stunden) $i = 1, 2, \ldots, 6$

Mit Hilfe eines Rechners wurden folgende Regressionskoeffizienten und Testgrößen berechnet:

	Testgröße für den Regressionskoeffizienten
$a_0 =$ 11384	
$a_1 =$ 728,7	2,50
$a_2 =$ 1031,2	1,43
$a_3 =$ 462,2	0,87
$a_4 =$ 1074,3	1,02
$a_5 =$ 5842,8	−2,56
$a_6 =$ 3556,5	2,20

Das Bestimmtheitsmaß beträgt 0,40.
Vergleicht man die Testgrößen für die Regressionskoeffizienten mit den Werten der Student-Verteilung, so kann man einen wesentlichen Einfluß nur für x_1, x_5 und x_6 feststellen. Dabei ist zu beachten, daß eine numerische Ungenauigkeit bei den Regressionskoeffizienten auftritt, da auf Grund des technologischen Zusammenhangs eine starke stochastische Abhängigkeit zwischen den Einflußgrößen vorliegt. Das Bestimmtheitsmaß 0,40 ist zu klein. Daher muß der vorliegende Regressionsansatz abgelehnt werden. Anhand einer umfangreicheren Stichprobe und unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten zwischen den Einflußgrößen ist eine neue Regressionsrechnung durchzuführen (Tabelle 5).

Tabelle 5. Daten für eine Regressionsanalyse ($n = 23$, $k = 6$)

y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
16074	16,75	11,42	13,00	13,00	13,00	10,33
24213	19,17	6,67	10,08	11,08	11,08	11,08
27414	21,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
30741	20,50	12,25	12,25	12,25	12,25	12,25
35812	19,92	21,00	20,25	21,00	21,00	21,00
23745	10,50	19,33	21,00	21,00	21,00	21,00
24690	15,50	20,17	12,75	20,17	20,17	20,17
25932	10,67	21,00	21,00	21,00	21,00	21,00
22429	19,25	12,50	9,33	9,33	12,50	12,50
29634	14,17	20,50	20,50	20,50	20,50	20,50
31741	18,00	15,08	16,42	16,42	17,42	17,42
35768	20,67	19,75	19,75	19,75	19,75	19,75
34594	20,33	18,83	18,83	19,33	19,33	19,33
30786	20,50	21,00	21,00	21,00	21,00	21,00
26856	20,25	20,25	17,25	17,25	20,25	20,25
30488	20,00	20,75	21,00	21,00	21,00	21,00
22004	18,42	17,50	20,50	20,50	20,50	20,50
28946	20,17	15,58	17,33	17,33	17,33	17,33
31046	18,75	20,50	20,50	20,00	20,00	20,00
25261	17,30	19,67	19,25	21,00	21,00	21,00
19438	16,58	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
28771	13,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
28265	17,17	20,50	21,00	21,00	21,00	21,00

3. Netzwerktheorie

3.1. Grundlagen der Netzwerktheorie*)

Literatur: [4]

Ein Netzwerk oder Graph G besteht aus einer Menge K von Elementen erster Art, den *Knoten*, und einer Menge U von Elementen zweiter Art, den *Kanten* oder *Bogen*. Die Kanten oder Bogen stellen dabei die Verbindungslinie zwischen zwei Knoten dar. Ist einem Element $u \in U$ ein geordnetes Paar (nicht notwendig verschiedener) Knotenpunkte X, $Y \in K$ zugeordnet, so bezeichnet man u als *Bogen*. Ist einem Element $u \in U$ dagegen ein ungeordnetes Paar von Knotenpunkten X, $Y \in K$ zugeordnet, so bezeichnet man u als *Kante*. Enthält der Graph G ausschließlich Bogen, so heißt er *gerichtet*, enthält der Graph G ausschließlich Kanten, so heißt er *ungerichtet*.

Ein *Untergraph* besteht aus einer Untermenge aller Knoten und einer Untermenge aller Bogen bzw. Kanten des ursprünglichen Graphen. Ein *Teilgraph* besteht aus der Menge aller Knoten des ursprünglichen Graphen, aber nur aus einem Teil seiner Bogen bzw. Kanten. Verläuft ein Bogen vom Knoten X zum Knoten Y, so ist X *Vorgänger* von Y und Y *Nachfolger* von X.

Ein *Weg* ist eine Folge von Bogen oder Kanten $u_1, u_2, \ldots, u_n$, wobei u_k einen Endpunkt mit u_{k-1} und den anderen Endpunkt mit u_{k+1} gemeinsam hat. Ein Weg darf keinen Knoten zweimal enthalten. Im Fall von Bogen fällt der Endpunkt des Bogens u_k mit dem Anfangspunkt des Bogens u_{k+1} zusammen. Man spricht dann von einer *Bahn*. Häufig wird in der Literatur aber auch im Fall gerichteter Graphen der Begriff *Weg* verwendet. Ein geschlossener Kantenzug, welcher keinen Knoten mehrmals enthält, wird als *Kreis* bezeichnet. Im Fall gerichteter Graphen bezeichnet man eine geschlossene Folge von Bogen als *Zyklus*.

In der Praxis ist die Interpretation gewisser Zusammenhänge durch Graphen bzw. Netzwerke relativ häufig anzutreffen, so bei Verkehrsnetzen, Versorgungsnetzen, Warenflußplänen, Leitungsschemata, elektrischen Schaltungen, chemischen Strukturformeln, Stammbäumen.

*) in der mathematischen Literatur auch Graphentheorie

Aus der Graphentheorie leiten sich eine Reihe von praxiswirksamen Modellen und Lösungsverfahren ab, von denen hier genannt sein sollen:

- Konstruktion von Minimalgerüsten,
- Färbungsprobleme,
- Bestimmung von optimalen Wegen,
- Probleme beim Fließen elektrischen Stroms.

3.2. Einige Netzwerkmodelle

3.2.1. Problem des kürzesten Weges*) in einem gerichteten Graphen

Gegeben sei ein gerichtetes Netzwerk, das aus den Knoten $P_0, P_1, \ldots, P_n$ besteht und zyklenfrei ist. Die Bewertungen $l(i, j)$ der Bogen mögen dabei die Weglängen zwischen jeweils zwei Knoten P_i und P_j darstellen. Zu bestimmen ist der kürzeste Weg zwischen zwei ausgewählten Knoten P_0 und P_n z. B. eines Verkehrsnetzes. Im nachfolgend beschriebenen Algorithmus wird jedem Knoten P_i eine Bewertungszahl B_i zugeordnet, welche der Länge des kürzesten Weges vom Anfangsknoten P_0 zu dem betrachteten Knoten entspricht.

1. Der Ausgangsknoten P_0 erhält die Bewertung $B_0 = 0$.
2. Bewertung eines beliebigen Knotens P_j:
   Sämtliche Vorgänger P_i von P_j mögen dabei schon bewertet sein. Man bildet dann
   $$B_j = \min_{\{P_i/\text{Vorläufer von } P_j\}} [B_i + l(i, j)]$$
   und erhält so die Bewertung des Knotens P_j. Derjenige Bogen, der für die Berechnung von P_j ausschlaggebend war, wird markiert.
3. Auf diese Weise wird, mit P_0 beginnend, schrittweise die Bewertung der Knoten vorgenommen. Ist der Knoten P_n bereits erreicht, so ist zu 4. überzugehen, sonst zu 2.
4. Von P_0 nach P_n führt eine durchgehend markierte Folge von Bogen, welche den gesuchten kürzesten Weg angibt. Beim Aufsuchen dieses kürzesten Weges beginnt man beim Knoten P_n.

Beispiel. In folgendem Netzwerk ist der kürzeste Weg zwischen den Knoten P_1 und P_{12} zu bestimmen (Bild 2).
Der kürzeste Weg läuft über die Knoten $P_1 - P_4 - P_7 - P_8 - P_{11} - P_{12}$ und hat die Länge 12.
Die Bestimmung des kürzesten Weges bei ungerichteten Graphen erfolgt ähnlich, man vergleiche dazu etwa [11].

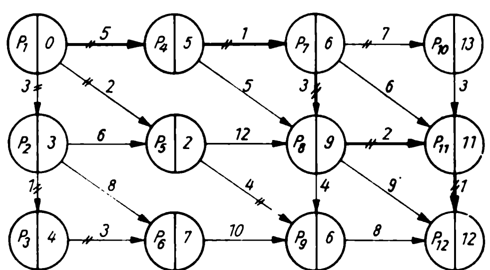


Bild 2. Kürzester Weg durch ein Netzwerk

3.2.2. Bestimmung eines Teilgraphen kürzester Gesamtkantenlänge

Eine Menge von Orten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ soll so verbunden werden, daß die Gesamtlänge der ausgewählten Kanten zu einem Minimum wird. Gegeben sind mit $l(i, j)$ die Längen der möglichen Verbindungen zwischen allen Knoten.
Voraussetzung für das anschließend angegebene Lösungsverfahren ist, daß es nicht zwei Kanten mit gleicher Länge gibt. Diese Voraussetzung kann man immer erfüllen, indem man die Längen solcher Kanten geringfügig ändert.

*) streng mathematisch: Problem der kürzesten Bahn



Das sehr einfache Lösungsverfahren besteht aus folgenden Schritten:

1. Bestimmen der Kante mit kürzester Länge, d. h. Berechnung von min $l(i, j)$.
2. Bestimmen der Kante kürzester Länge aus den restlichen Kanten. Allerdings besteht dabei die Bedingung, daß diese mit den bereits zuvor ausgewählten Kanten keinen Kreis bildet.
3. Sind alle Knoten bereits im Teilgraph enthalten? Wenn ja, so ist der Teilgraph bestimmt, ansonsten wiederholte Anwendung von Schritt 2.

Beispiel. Die Orte $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ sollen derart an ein Versorgungsnetz angeschlossen werden, daß die Gesamtlänge der notwendigen Leitungen ein Minimum wird. Anschlußstelle sei P_0. Gegeben ist das Netzwerk aller möglichen Entfernungen (Bild 3). Der Reihe nach werden folgende Kanten ausgewählt (in Klammern die Länge): $P_2 - P_3(10)$, $P_9 - P_{10}(11)$, $P_8 - P_9(18)$, $P_0 - P_1(19)$, $P_5 - P_7(20)$, $P_7 - P_8(25)$, ($P_5 - P_8$ entfällt wegen Kreisbildung), $P_3 - P_4(28)$, $P_{10} - P_{11}(29)$, $P_0 - P_2(30)$, $P_2 - P_5(31)$, ($P_1 - P_3$ entfällt wegen Kreisbildung), $P_4 - P_6(33)$.
Das Netz hat dann die Gestalt, wie sie im Bild 4 angegeben ist.

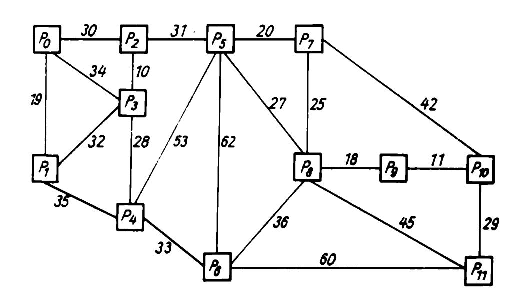


Bild 3. Netzwerk zur Berechnung eines Teilgraphen kürzester Länge

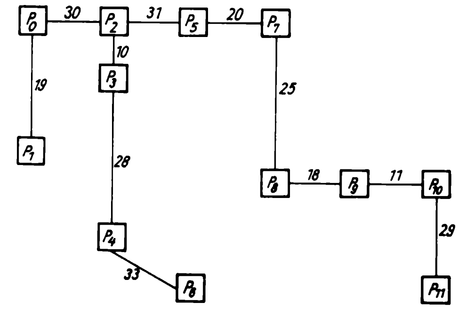


Bild 4. Teilgraph kürzester Länge

3.3. Netzplantechnik

Literatur: [9, 11, 12, 13, 14, 21, 23, 48]

3.3.1. Bedeutung und Aufgaben

Die Netzplantechnik stellt das zur Zeit wichtigste Anwendungsgebiet der allgemeinen Netzwerktheorie dar. Sie dient zur Lösung folgender Hauptaufgaben:

1. Grafische Darstellung von Abhängigkeiten zwischen Vorgängen, aus denen sich ein Gesamtprozeß zusammensetzt. Diese grafische Darstellung erfolgt durch ein Netzwerk.
2. Berechnung von Terminen und Pufferzeiten für die Vorgänge und Ereignisse (z. B. frühest- und spätestmögliche Anfangs- und Endtermine). Dazu wendet man verschiedene Verfahren an.

Die Netzplantechnik dient zur wissenschaftlichen Behandlung von Abläufen aller Art, die sich aus einer Vielzahl miteinander verflochtener Vorgänge zusammensetzen (Bauablaufpläne, Investitionsvorbereitungen, Produktionsabläufe, Generalreparaturen, Projektierungsarbeiten, Vorbereitung von Massenveranstaltungen, Planung des Schulunterrichts, Planung komplizierter Operationen).

3.3.2. Grundbegriffe

Ein *Netzplan* ist ein spezielles Netzwerk. Es müssen u. a. folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Ein Netzplan ist ein gerichtetes Netzwerk.
2. Ein Netzplan enthält keine isolierten Bogen und Knoten.
3. Ein Netzplan ist zyklenfrei.

Grundelemente eines Netzplans sind die *Vorgänge* (Aktivitäten) als zeitbeanspruchende Elemente (Arbeitsgänge, Lieferfristen, technologische Pausen, ...).
Bei einer der beiden möglichen Grunddarstellungen eines Netzplans treten *Ereignisse* auf, die die Anfangs- und Endpunkte eines oder mehrerer Vorgänge darstellen.

3.3.3. Verfahren des kritischen Weges (CPM)*)

3.3.3.1. Strukturanalyse

Der erste Arbeitsschritt in der Netzplantechnik ist die Strukturanalyse, die aus folgenden Arbeitsabschnitten besteht:

Aufstellen der Vorgangsliste

Bevor die Abhängigkeiten zwischen den Vorgängen eines Objekts grafisch in Form eines Netzplans dargestellt werden, müssen in dieser Vorgangsliste in einer Spalte für jeden Vorgang der oder die Vorgänge angegeben werden, die unmittelbar vor dem Beginn des betrachteten Vorgangs abgeschlossen sind. An die Stelle dieser Spalte der Vorläufer kann man auch eine Spalte der unmittelbaren Nachfolger setzen. In einer weiteren Spalte ist schließlich für jeden Vorgang die benötigte Zeitdauer in einheitlichen Zeitangaben (Stunden, Tage, Wochen, ...) anzugeben. Diese Angaben dienen als Grundlage für die sich an das Aufstellen des Netzplanes anschließende Zeitrechnung (Beispiel: Tabelle 6).
Das Beispiel endet mit dem Errichten der Kellerwände, da andernfalls der Umfang des Netzplanes zu groß würde. Es wurden in die Vorgangsliste die Spalten Vorläufer und Nachfolger aufgenommen, obwohl eine davon überflüssig ist.

Tabelle 6. Vorgangsliste, Verfahren des kritischen Weges

Vorgang		Vorläufer	Nachfolger	Dauer
a	Planung	—	b, e, g	5
b	Baustelleneinrichtung, Gerätebereitstellung	a	c, d, f, h	3
c	Aushub der Fundamente	b	i	6
d	Kanalisation	b	k	14
e	Ziegelbestellung	a	f	1
f	Anlieferung der Ziegel	b, e	k	15
g	Bestellung von Zement und Kies	a	h	1
h	Anlieferung von Zement und Kies	b, g	i	5
i	Gießen Betonfundamente	c, h	k	4
k	Setzen Kellerwände	d, f, i	—	7

Aufstellen eines Vorgangspfeilnetzes

Zum Umsetzen der Vorgangsliste in eine grafische Darstellung gibt es zwei Möglichkeiten. Zunächst soll das Vorgangspfeilnetz als die historisch ältere Form besprochen werden. Zwischen den Grundelementen eines Netzwerks und eines Netzplans erfolgt folgende Zuordnung (Tabelle 7):

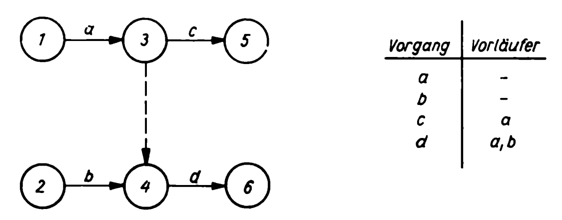
Tabelle 7. Zuordnung Netzwerk — Netzplan im Vorgangspfeilnetz

Netzwerk	Netzplan	Darstellung
Knoten	Ereignis	(4)
Pfeil (Bogen)	Vorgang	(3)———→(5)
	Scheinvorgang	(3)– – – –→(4)

*) CPM — Critical Path Method



Um gewisse Abhängigkeiten eindeutig darstellen zu können, müssen *Scheinvorgänge* eingeführt werden (Bild 5). Zuweilen (z. B. bei der Matrixdarstellung von Netzplänen) dienen Scheinvorgänge zur eindeutigen Bezeichnung von Vorgängen, die parallel laufen und das gleiche Anfangs- und Endereignis haben. Vorausgesetzt wird dabei, daß im Netzplan nur die Ereignisse numeriert sind. Ein Vorgang wird dann durch sein Anfangs- und Endereignis bezeichnet (Bild 6).



Vorgang	Vorläufer
a	-
b	-
c	a
d	a, b

Bild 5. Ausschnitt aus einem Netzplan mit Scheinvorgang zur eindeutigen Darstellung eines Zusammenhangs

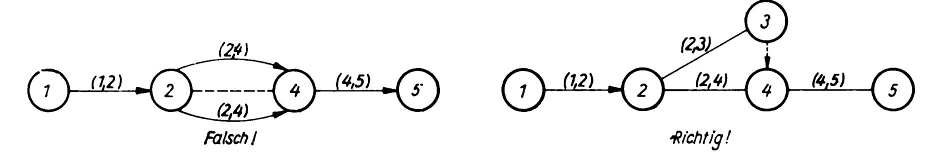


Bild 6. Scheinvorgang zur eindeutigen Vorgangsbezeichnung

Für das Beispiel „Errichten eines Gebäudes" (Tabelle 6) ergibt sich folgendes Vorgangspfeilnetz (Bild 7):

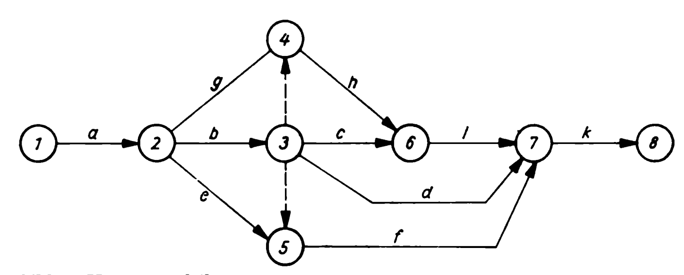


Bild 7. Vorgangspfeilnetz

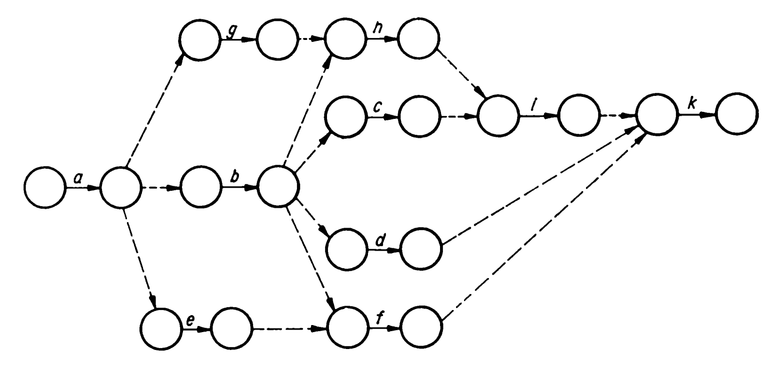


Bild 8. Vorgangspfeilnetz mit Scheinvorgängen zur Darstellung sämtlicher Abhängigkeiten

Beim Aufstellen eines Vorgangspfeilnetzes bereiten die Scheinvorgänge oft Schwierigkeiten. Man kann die Darstellung vereinfachen, wenn sämtliche Abhängigkeiten als Scheinvorgänge gezeichnet werden. Das Aufstellen des Netzplans ist dann bedeutend einfacher (Bild 8). Stellt man in der nach Bild 8 betrachteten Netzplandarstellung vereinfachend die Vorgänge nicht als Pfeile, sondern nur als Kästchen und die Abhängigkeiten nicht als unterbrochene, sondern als durchgehende Pfeile dar, erhält man eine zweite Form der Netzplandarstellung (Bild 9).

Aufstellen eines Vorgangsknotennetzes

In dieser Darstellungsform besteht zwischen den Grundelementen eines Netzwerks und des Netzplanes folgende Zuordnung (Tabelle 8):

Tabelle 8. Zuordnung Netzwerk — Netzplan im Vorgangsknotennetz

Netzwerk	Netzplan	Darstellung
Knoten	Vorgang	[a]
Pfeil (Bogen)	Abhängigkeit	[a] → [b]

Ereignisse gibt es bei dieser Netzplandarstellung nicht mehr. Für das Beispiel ergibt sich der Netzplan (Bild 9).

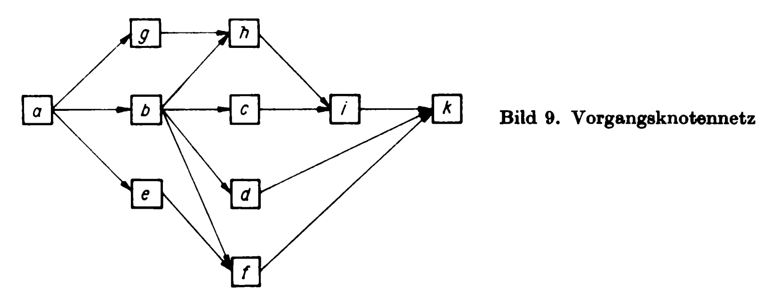


Bild 9. Vorgangsknotennetz

3.3.3.2. Zeitrechnung

Bei der Zeitrechnung muß zwischen den Zeitangaben unterschieden werden, die sich auf den Vorgang beziehen, und solchen, die sich auf das Ereignis beziehen.

Vorgangsbezogene Zeitangaben des Vorgangs k

$D(k)$ Dauer (vorgegeben),
$FAT(k)$ frühestmöglicher Anfangstermin,
$SAT(k)$ spätestmöglicher Anfangstermin,
$FET(k)$ frühestmöglicher Endtermin,
$SET(k)$ spätestmöglicher Endtermin

$GP(k)$ Gesamtpufferzeit
$FP(k)$ freie Pufferzeit
$BP(k)$ bedingte Pufferzeit
$UP(k)$ unabhängige Pufferzeit

Ereignisbezogene Zeitangaben des Ereignisses K

$FT(K)$ frühestmöglicher Termin
$ST(K)$ spätestmöglicher Termin
$GP(K)$ Ereignispufferzeit

Rechnen im Vorgangspfeilnetz

Früher war die Berechnung der Termine in einer Matrixdarstellung des Netzplanes üblich. Heute ist man von dieser Form des Verfahrens des kritischen Weges fast völlig abgekommen. Die wichtigsten Termine werden im Netzplan direkt festgehalten, die anderen meist in einer zugehörigen Tabelle.

Es ergeben sich folgende Formeln für die Berechnung im Vorgangspfeilnetz:

ereignisbezogene Zeitangaben:

$$FT(K) = \max_{\{I/\text{Vorläufer von } K\}} [FT(I) + D(I, K)] \tag{74}$$

$$ST(K) = \min_{\{L/\text{Nachfolger von } K\}} [ST(L) - D(K, L)] \tag{75}$$

$$GP(K) = ST(K) - FT(K) \tag{76}$$

vorgangsbezogene Zeitangaben:

$$FAT(K, L) = FT(K) \tag{77}$$

$$SAT(K, L) = SET(K, L) - D(K, L) \tag{78}$$

$$FET(K, L) = FAT(K, L) + D(K, L) \tag{79}$$

$$SET(K, L) = ST(L) \tag{80}$$

$$GP(K, L) = ST(L) - FT(K) - D(K, L) \tag{81}$$

$$FP(K, L) = FT(L) - FT(K) - D(K, L) \tag{82}$$

$$BP(K, L) = GP(K, L) - FP(K, L) \tag{83}$$

$$UP(K, L) = \max [0, FT(L) - ST(K) - D(K, L)] \tag{84}$$

Im Beispiel in 3.3.3.1. wird die Berechnung dieser Zeitangaben durchgeführt. Die ereignisbezogenen Zeitangaben werden dabei direkt in den Netzplan eingetragen. In die Knoten, welche die Ereignisse darstellen, werden die Angaben wie nach Bild 10 angeordnet. Ausführung Bild 11.

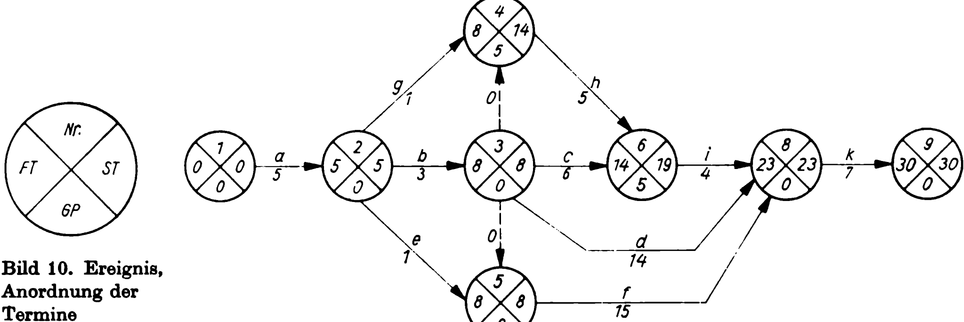


Bild 10. Ereignis, Anordnung der Termine

Bild 11. Verfahren des kritischen Weges im Vorgangspfeilnetz

Tabelle 9. Termine und Pufferzeiten

Vorgang		*FAT*	*SAT*	*FET*	*SET*	*GP*	*FP*	*BP*	*UP*
a	1 – 2	0	0	5	5	0	0	0	0
b	2 – 3	5	5	8	8	0	0	0	0
c	3 – 6	8	13	14	19	5	0	5	0
d	3 – 8	8	9	22	23	1	1	0	1
e	2 – 5	5	7	6	8	2	2	0	2
f	5 – 8	8	8	23	23	0	0	0	0
g	2 – 4	5	13	6	14	8	2	6	2
h	4 – 6	8	14	13	19	6	1	5	0
i	6 – 7	14	19	18	23	5	5	0	0
k	8 – 9	23	23	30	30	0	0	0	0

Die vorgangsbezogenen Zeitangaben sind der besseren Übersicht wegen in eine gesonderte Tabelle einzutragen (siehe Tabelle 9).

Bei der Berechnung der Termine wird für das Endereignis $FT = ST$ gesetzt. Diese Festlegung dient ausschließlich zum besseren Sichtbarmachen des kritischen Weges.
Bei einer Anzahl von Vorgängen ist die Gesamtpufferzeit — und damit natürlich auch die anderen Pufferzeiten — gleich Null. Für diese Vorgänge gilt:

$$FAT(K) = SAT(K), \qquad FET(K) = SET(K) \tag{85}$$

Derartige Vorgänge bezeichnet man als ***kritisch***, da bei ihnen keine zeitlichen Verschiebungen oder Ausdehnungen der Vorgangsdauer möglich sind. Es existiert eine ununterbrochene Folge solcher kritischen Vorgänge vom Anfangs- bis zum Schlußereignis des Netzplans. Addiert man die Zeitdauer dieser Vorgänge, so ergibt sich die frühestmögliche Abschlußzeit des Gesamtobjekts.
Die Folge dieser kritischen Vorgänge bezeichnet man als ***kritischen Weg***.

Rechnen im Vorgangsknotennetz

Auch für das Rechnen im Vorgangsknotennetz ist eine Matrixdarstellung bekannt. Bedeutend häufiger erfolgt — wie hier beschrieben — die Rechnung direkt im Netzplan. Der besseren Übersicht wegen sind die Pufferzeiten in einer gesonderten Tabelle angegeben (Tab. 9).

Für die Berechnung im Vorgangsknotennetz ergeben sich folgende Gleichungen:

$$FAT(k) = \max_{\{i/\text{Vorläufer von } k\}} [FET(i)] \tag{86}$$

$$FET(k) = FAT(k) + D(k) \tag{87}$$

$$SAT(k) = SET(k) - D(k) \tag{88}$$

$$SET(k) = \min_{\{l/\text{Nachfolger von } k\}} [SAT(l)] \tag{89}$$

$$GP(k) = SAT(k) - FAT(k) = SET(k) - FET(k) = SET(k) - FAT(k) - D(k) \tag{90}$$

$$FP(k) = \min_{\{l/\text{Nachfolger von } k\}} [FAT(l)] - FAT(k) - D(k) = \min_{\{l/\text{Nachfolger von } k\}} [FAT(l)] - FET(k) \tag{91}$$

$$BP(k) = GP(k) - FP(k) \tag{92}$$

$$UP(k) = \max \left\{ 0;\ \min_{\{l/\text{Nachfolger von } k\}} [FAT(l)] - \max_{\{i/\text{Vorläufer von } k\}} [SET(i)] - D(k) \right\} \tag{93}$$

Sämtliche Angaben sind vorgangsbezogen. Ereignisbezogene Zeitangaben sind im Vorgangsknotennetz nicht vorhanden, da keine Ereignisse mehr existieren.

Berechnung der Zeitangaben für das Beispiel:

Die Vorgangstermine werden nach Bild 12 in die Knoten eingetragen.
Man kann entweder die Pufferzeiten in eine gesonderte Tabelle eintragen oder aber eine Mittelspalte im Vorgangsknoten einführen. Auf eine Angabe sei hier verzichtet, da diese bereits in der Tabelle 9 angegeben sind.
Das Verfahren des kritischen Weges im Vorgangsknotennetz ist in Bild 13 angegeben.
Wieder setzt man für den Endvorgang $FET = SET$. Dies dient wie bei dem Vorgangspfeilnetz ausschließlich zum besseren Erkennen des kritischen Weges.

Der kritische Weg ergibt sich als Folge der Vorgänge, für die die Gln. (85) gelten.



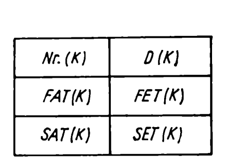


Bild 12. Vorgang, Anordnung der Termine

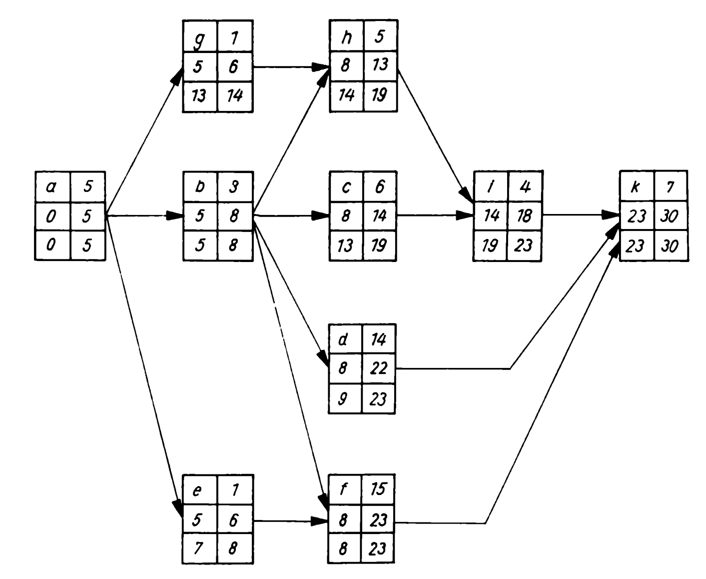


Bild 13. Verfahren des kritischen Weges im Vorgangsknotennetz

Verkürzen im Netzplan

Bei der Anwendung des Verfahrens des kritischen Weges wurde bisher die Festlegung getroffen, daß für das Endereignis $FT = ST$ bzw. für den Schlußvorgang $FET = SET$ gilt. Diese Voraussetzung bedeutet, daß der berechnete frühestmögliche Abschlußtermin des Gesamtobjekts genau mit dem spätestmöglichen Termin — etwa einem Plantermin PT — übereinstimmt. In der Praxis wird dies aber äußerst selten der Fall sein.

Gilt $PT > FET$ (Schlußvorgang), so ergibt sich aus dem Verfahren des kritischen Weges, daß das betrachtete Objekt noch vor dem vorgesehenen Plantermin fertiggestellt werden kann.

Häufig wird aber auch $PT < FET$ (Schlußvorgang) sein. In diesem Fall muß die Zeitdauer gewisser Vorgänge verkürzt werden — etwa durch Einsatz besserer Technologien, durch Mehrschichtarbeit, Einsatz zusätzlicher Arbeitskräfte. Eine solche Verkürzung hat aber nur bei den Vorgängen Sinn, die entscheidend für das Erreichen des frühestmöglichen Abschlußtermins für das Gesamtobjekt waren. Es gibt zwei Möglichkeiten des Verkürzens im Netzplan:

Verkürzungen auf dem kritischen Weg:

Es werden Vorgänge ausschließlich auf dem kritischen Weg insgesamt um die Zeit [FET (Schlußvorgang) — PT] verkürzt. Dabei kann der kritische Weg mehrmals seinen Verlauf ändern, so daß sich auf den neuen kritischen Wegen weitere Verkürzungen erforderlich machen.

Verkürzen auf dem kritischen Weg und den sog. subkritischen Wegen:

Es werden neben dem kritischen Weg auch alle zu den dort verkürzten Vorgängen parallellaufenden subkritischen Wege betrachtet. Das sind Folgen von Vorgängen, die auf dem kritischen Weg beginnen und dort wieder enden (ausgenommen im Fall mehrerer Anfangs- oder Schlußvorgänge) und deren Schlupf kleiner als die notwendige Verkürzung [FET (Schlußvorgang) — PT] ist. Zeitverkürzungen werden nun auf dem kritischen Weg und den subkritischen Wegen vorgenommen.

3.3.4. Metrapotentialmethode (MPM)

Bei einer genaueren Untersuchung der in Tabelle 6 dargestellten Vorgangsliste stellt man fest, daß einige technologische Besonderheiten nicht berücksichtigt wurden.

1. Wartezeiten

Zwischen den Vorgängen i (Gießen Betonfundamente) und k (Setzen Kellerwände) ist eine technologische Pause nötig, um eine gewisse Abbindezeit einzuhalten. Wir wollen annehmen, daß diese Pause 1 Zeiteinheit betragen muß.

2. Überlappungen

Zwischen dem Vorgang b (Baustelleneinrichtung, Gerätebereitstellung) einerseits und den Vorgängen f (Anlieferung der Ziegel) und h (Anlieferung von Zement und Kies) andererseits ist eine zeitliche Überlappung möglich. Die Anlieferung der Baumaterialien könnte bereits beginnen, bevor alle Geräte bereitgestellt sind. Wir nehmen an, daß diese Überlappung 2 Zeiteinheiten betragen kann.
Eine weitere Überlappung ist zwischen den Vorgängen d (Kanalisation) und k (Setzen Kellerwände) möglich; wir wollen annehmen, maximal von 3 Zeiteinheiten.
Ein überarbeiteter Netzplan (in der Darstellung als Vorgangsknotennetz) hätte dann die Gestalt nach Bild 14.

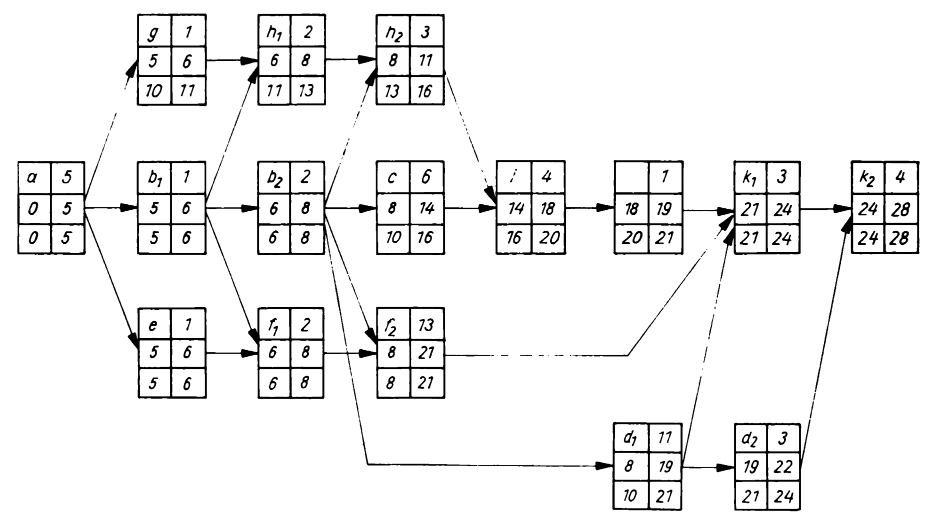


Bild 14. Vorgangsknotennetz mit Überlappungen und Wartezeiten

Die Berechnung der Termine nach CPM erfolgte gleich im Netzplan. Man sieht deutlich, daß das Einarbeiten von Wartezeiten, Überlappungen (und weiteren zusätzlichen Bedingungen) zu einer beträchtlichen Vergrößerung des Netzplans führt. Diesen Schwierigkeiten geht man bei der nachfolgend beschriebenen Methode aus dem Wege.

3.3.4.1. Grundlagen

Die Metrapotentialmethode stellt einen Spezialfall aus der Gruppe der Potentialmethoden dar. Es gelten folgende Grundlagen:

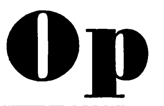
— Die grafische Darstellung erfolgt als Vorgangsknotennetz.
— Die Abhängigkeitspfeile werden mit Zeitwerten versehen. Diese werden als *Koppelabstand* (*KA*) bezeichnet und stellen den Abstand zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten aufeinanderfolgender Vorgänge dar.

Ist *k* ein Vorgang und *l* sein Nachfolger, so sind folgende Varianten des Koppelabstandes möglich:

1. Anfang(*k*) — Anfang(*l*)
2. Anfang(*k*) — Ende(*l*)
3. Ende(*k*) — Anfang(*l*)
4. Ende(*k*) — Ende(*l*)

Folgende *Ablauffolgen* sind zu berücksichtigen:

1. normale Ablauffolge
2. verzögerte Ablauffolge
3. überlappte Ablauffolge



CPM stellt einen Spezialfall der Potentialmethoden dar, nämlich die Kopplung Ende(k)—Anfang(l) unter Voraussetzung der normalen Ablauffolge.
Der Metrapotentialmethode MPM liegt die Kopplung Anfang(k)—Anfang(l) zugrunde.

Zur Berechnung der Koppelabstände dienen folgende Formeln:

Normale Ablauffolge: $KA = D(k)$ (94)

Verzögerte Ablauffolge: $KA = D(k) + W$, wobei W die *Wartezeit* darstellt (95)

Überlappte Ablauffolge: $KA = D(k) - U$, wobei U die *Überlappung* darstellt. (96

3.3.4.2. Strukturanalyse

Bei der MPM wird die Vorgangsliste um die Spalten Verzögerung und Überlappung erweitert. Außerdem sind in einer zusätzlichen Spalte die Koppelabstände KA zu berechnen.

Für das Beispiel ergibt sich Tabelle 10.

Tabelle 10. Vorgangsliste, Metrapotentialmethode

Vorgang	Dauer	Vorläufer	Verzögerung	Überlappung	Koppelabstand
Start	0	—	—	—	—
a	5	Start	—	—	0
b	3	a	—	—	5
c	6	b	—	—	3
d	14	b	—	—	3
e	1	a	—	—	5
f	15	b	—	2	1
		e	—	—	1
g	1	a	—	—	5
h	5	b	—	2	1
		g	—	—	1
i	4	c	—	—	6
		h	—	—	5
k	7	d	—	3	11
		f	—	—	15
		i	1	—	5
Ziel	0	k	—	—	7

Der Netzplan hat die bereits in Bild 13 für das Verfahren CPM angegebene Gestalt, nur sind die Abhängigkeitspfeile mit Zeitwerten, den Koppelabständen, versehen.

MPM-Netzwerke werden in geschlossener Form gezeichnet, d. h. unter Umständen mit Hinzufügen eines *Start- und Zielvorgangs*. Dies ist bei der nachfolgenden Zeitrechnung von Bedeutung.

3.3.4.3. Zeitrechnung

Für die Berechnung der Termine für die Vorgänge gelten folgende Gleichungen:

$$FAT(k) = \max_{\{i/\text{Vorläufer von } k\}} [FAT(i) + KA(i, k)] \tag{97}$$

$$FET(k) = FAT(k) + D(k) \tag{98}$$

$$SAT(k) = \min_{\{l/\text{Nachfolger von } k\}} [SAT(l) - KA(k, l)] \tag{99}$$

$$SET(k) = SAT(k) + D(k) \tag{100}$$

Dabei berechnet man zweckmäßigerweise zunächst die Termine $FAT(k)$ und $SAT(k)$, anschließend durch Addition von $D(k)$ die Termine $FET(k)$ und $SET(k)$. Auf eine Angabe der Gleichungen für die Berechnung der Pufferzeiten wird verzichtet. Für unser Beispiel ergibt sich das Vorgangsknotennetz nach Bild 15.

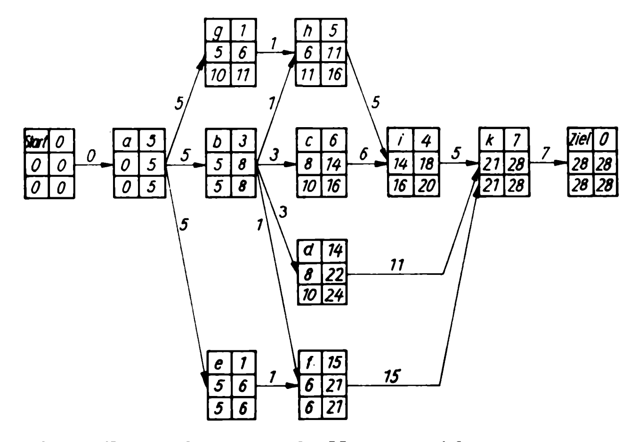


Bild 15. Vorgangsknotennetz der Metrapotentialmethode

Außer CPM und MPM sind weitere Netzplanmethoden bekannt, die wichtigste davon ist PERT*). Dieses Verfahren stellt eine Methode aus dem Bereich der Stochastik dar (vgl. etwa [9] und [20]).

3.3.5. Erweiterungen der Netzplantechnik

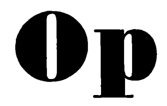
3.3.5.1. Kostenoptimierung

Durch das Verkürzen der Zeitdauer von Vorgängen unter ihre (kostenoptimale) *Normaldauer* entstehen im allgemeinen erhöhte zusätzliche Kosten. Günstig ist ein Verkürzen der Zeitdauer nur bei den Vorgängen, bei denen diese zusätzlichen Kosten am geringsten sind. Dazu wird die Kostenentwicklung für alle Vorgänge untersucht, welche für eine Verkürzung überhaupt in Frage kommen.

In Bild 16 ist der Kostenverlauf als Funktion der Vorgangsdauer dargestellt (punktierte Linie).

ND Normaldauer, K_{ND} Kosten, welche der Normaldauer entsprechen,
$\min D$ Minimaldauer, $K_{\min D}$ Kosten, welche der Minimaldauer entsprechen.

*) PERT — Program Evaluation and Review Technique (Technik der Programmbewertung und Programmprüfung, Methode zur Planung und Überwachung von Prozessen)



Häufig wird der Kostenverlauf durch eine Gerade zwischen den Punkten (ND, K_{ND}) und ($\min D$, $K_{\min D}$) angenähert (Bild 16). Man verkürzt die Zeitdauer bei den Vorgängen, bei denen der Winkel α des Kostenanstiegs den kleinsten Wert annimmt (vgl. etwa [9]).

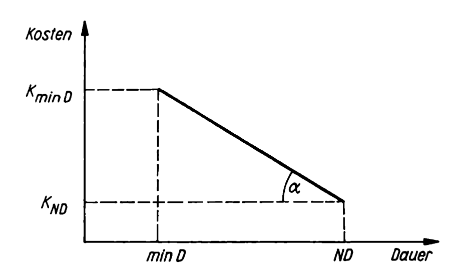


Bild 16. Kostenverlauf in Abhängigkeit von der Vorgangsdauer

3.3.5.2. Ressourcenbilanzierung und -ausgleich

Bei der Anwendung der Netzplantechnik ist eine möglichst gleichmäßige Auslastung der benötigten Ressourcen (Arbeitskräfte, Maschinen, Material, Investitionsmittel, ...) bzw. eine Einhaltung der vorhandenen Kapazitätsgrenzen von großer Bedeutung.

Man ordnet zunächst alle Vorgänge entsprechend den z. B. mit dem Verfahren des kritischen Weges berechneten Terminen in einem Diagramm über einer Zeitachse an. Für jeden Zeitabschnitt wird durch einfaches Summieren die benötigte Ressourcenmenge bestimmt. Dabei müssen im allgemeinen mehrere Ressourcengruppen getrennt betrachtet werden. Häufig wird sich eine sehr ungleichmäßige, teilweise auch über die verfügbare Kapazität hinausgehende Auslastung ergeben. Um einen möglichst gleichmäßigen Kapazitätsbedarf für den Gesamtzeitraum zu erreichen, gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Ausdehnen der Zeitdauer von nichtkritischen Vorgängen im Rahmen ihrer Pufferzeit. Die frei werdenden Maschinen, Arbeitskräfte usw. können an anderer Stelle zum Abbau von Kapazitätsspitzen eingesetzt werden.
2. Verschieben von nichtkritischen Vorgängen in Rahmen ihrer *Pufferzeit.*
3. Stauchen von kritischen und nichtkritischen Vorgängen.
4. Unterbrechen und Verschieben des nach der Unterbrechung liegenden Teils von nichtkritischen Vorgängen im Rahmen ihrer Pufferzeit.

Sollte die Anwendung von 1. bis 4. zu keiner befriedigenden Kapazitätsauslastung führen, läßt sich eine solche nur durch ein Verschieben des Endtermins des Gesamtobjekts erreichen (oder durch eine Veränderung des Netzplans, welches aber zugleich Veränderungen in der gewählten Technologie bedeuten würde).
Eine ausführliche Beschreibung dieser Problematik findet man z. B. bei Suchowizki/Radtschik [48].

4. Reihenfolgeprobleme

Literatur: [8]

Reihenfolgeprobleme besitzen in der Praxis große Bedeutung, sind jedoch mathematisch relativ schwierig zu behandeln. Nachfolgend einige spezielle Probleme, für die exakte Lösungsverfahren bekannt sind.

4.1. Maschinenbelegungsprobleme

4.1.1. Allgemeine Problemstellung

Eine Reihe von Arbeiten (Aufträgen, Erzeugnissen) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist mit Hilfe der Fertigungsstellen oder Maschinen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ zu erledigen (zu produzieren). Die Reihenfolge der Maschinen ist für jede Arbeit technologisch festgelegt, zu bestimmen ist eine günstige Reihen-

folge der Arbeiten. Ist diese Reihenfolge der Arbeiten für jede Maschine gleich, so ergeben sich $n!$ mögliche Reihenfolgen. Läßt man dagegen für jede Maschine eine andere Reihenfolge der Arbeiten zu, so ergeben sich insgesamt $(n!)^m$ mögliche Reihenfolgen.

Betrachten wir zur Illustration ein Problem mit 3 Arbeiten und 4 Maschinen. Die vorgegebene technologische Reihenfolge der Maschinen für die 3 Arbeiten läßt sich dann durch 3 zunächst voneinander unabhängige einfache Netzpläne darstellen (siehe Bild 17).
Festzulegen ist nun für jede der 4 Maschinen die Reihenfolge der 3 Arbeiten. Damit ergeben sich zusätzliche Abhängigkeiten, die 3 Teilnetzpläne werden zu einem Gesamtnetzplan verbunden. Für den Fall der in Bild 18 angegebenen möglichen Reihenfolgen würde sich folgender Gesamtnetzplan ergeben (Bild 19). Insgesamt gibt es $(3!)^4$ mögliche Produktionsabläufe, also auch mögliche Netzpläne. Von diesen $(3!)^4$ möglichen Ablaufplänen ist die optimale Variante zu bestimmen.

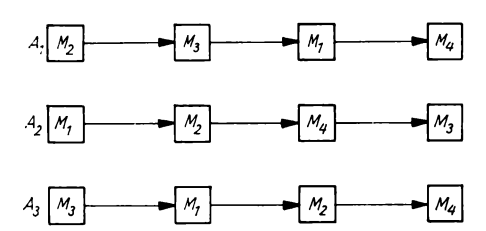


Bild 17. Technologische Reihenfolge der Maschinen

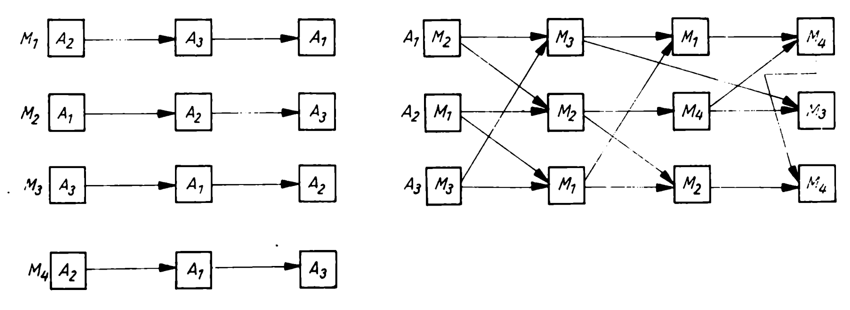


Bild 18. Mögliche Reihenfolge der Arbeiten

Bild 19. Netzplandarstellung des Produktionsablaufs

Dabei sind verschiedene *Optimalitätskriterien* möglich, so u. a.:

— minimale Gesamtbearbeitungszeit,
— maximale Maschinenauslastung,
— minimaler Kostenaufwand für Zwischenlagerung,
— minimale Terminüberschreitungen.

Im allgemeinen verwendet man das erste Optimalitätskriterium; man strebt also die *Minimierung der Zeit* an, die insgesamt von der Bearbeitung des ersten Auftrags auf der ersten Maschine bis zum Ende der Bearbeitung des letzten Auftrags auf der letzten Maschine vergeht.

Für das Maschinenbelegungsproblem ist eine Reihe von Lösungsverfahren bekannt geworden [8], [12], die aber alle einen relativ hohen Rechenaufwand erfordern. Nur für einige Spezialfälle liegen einfache Verfahren vor. Davon sollen nachfolgend zwei beschrieben werden.

4.1.2. 2 Maschinen A, B; *n* Erzeugnisse (Arbeiten)

Alle Erzeugnisse durchlaufen die Maschinen in der gleichen Reihenfolge, also zuerst Maschine A, dann Maschine B. Gegeben sind die Bearbeitungszeiten a_i und b_i der Erzeugnisse P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) auf beiden Maschinen. In welcher Reihenfolge müssen die n Erzeugnisse P_i gefertigt werden, damit die Gesamtdurchlaufzeit ein Minimum annimmt?



Zur Lösung verwendet man folgendes einfaches Verfahren von JOHNSON und BELLMAN:

1. Bestimmen der kleinsten aller Bearbeitungszeiten auf beiden Maschinen, also Bestimmung von min (a_i, b_i).
2. Wird das Minimum unter den a_i angenommen, so wird das zugehörige Erzeugnis P_i von vorn eingereiht; wird das Minimum dagegen unter den b_i angenommen, so erfolgt die Einreihung des entsprechenden Erzeugnisses P_i von hinten.
3. Das soeben eingereihte Erzeugnis P_i mit seinen zugehörigen Bearbeitungszeiten a_i und b_i wird gestrichen.
4. Sind alle Erzeugnisse bereits eingereiht? Wenn ja: Ende des Verfahrens, wenn nein: Anwendung von 1.

Beispiel siehe Tabelle 11.

Tabelle 11. Bearbeitungszeiten, Zweimaschinen-Problem

Erzeugnis	Bearbeitungszeit auf	
	Maschine A	Maschine B
P_1	3	2
P_2	5	6
P_3	8	7
P_4	1	6
P_5	9	6
P_6	8	4

Die Eintragungen in den Knoten haben die Bedeutungen, die in Bild 20 eingetragen sind.
Die optimale Bearbeitungsreihenfolge lautet: $P_4-P_2-P_3-P_5-P_6-P_1$. Die minimale Gesamtdurchlaufzeit und die Termine für die einzelnen Bearbeitungszeiten der Erzeugnisse auf den Maschinen errechnet man im Netzplan (Bild 21).

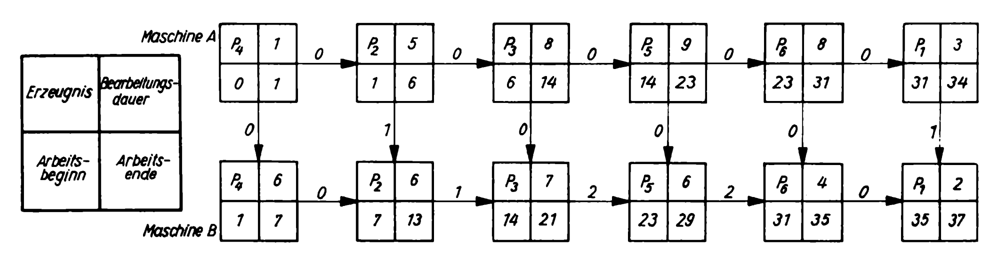


Bild 20 Bild 21

Bild 20. Knoten des Netzwerks, Anordnung der Termine
Bild 21. Terminrechnung für das Zweimaschinen-Problem

Die Zahlen an den Pfeilen werden nachträglich, d. h. nach Abschluß der Terminrechnung, eingetragen. Die Werte an den waagerechten Pfeilen stellen dabei *Maschinenstillstandszeiten* dar, sie ergeben sich aus der Differenz von Arbeitsende eines Erzeugnisses und Arbeitsbeginn des nachfolgenden Erzeugnisses. Die Werte an den senkrechten Pfeilen geben *Zwischenlagerzeiten* für die einzelnen Erzeugnisse an, sie ergeben sich aus der Differenz zwischen Arbeitsende bei einer Maschine und Arbeitsbeginn bei der nachfolgenden Maschine. *Übergangszeiten* zwischen den Maschinen werden von vornherein nicht berücksichtigt. Man kann sie sich in den *Bearbeitungszeiten* enthalten denken.
Die minimale Gesamtdurchlaufzeit in unserem Beispiel beträgt 37 Zeiteinheiten.

4.1.3. 3 Maschinen A, B, C; *n* Erzeugnisse (Arbeiten)

Sämtliche Erzeugnisse P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durchlaufen die 3 Maschinen in der gleichen Reihenfolge, nämlich A—B—C. Gegeben sind mit a_i, b_i und c_i wieder die Bearbeitungszeiten für jedes Erzeugnis P_i auf den 3 Maschinen. Gesucht ist die Reihenfolge der Erzeugnisse P_i, die die Gesamtdurchlaufzeit minimiert.

In folgenden Fällen kann das Dreimaschinenproblem auf ein Zweimaschinenproblem zurückgeführt und dann exakt gelöst werden:

$$\min_i a_i \geqq \max_i b_i \qquad \min_i c_i \geqq \max_i b_i \tag{101}$$

Es genügt dabei die Erfüllung einer der beiden Bedingungen. Das Dreimaschinenproblem wird dann auf ein Zweimaschinenproblem mit den Maschinen U und V reduziert. Die Bearbeitungszeiten für diese Maschinen werden wie folgt ermittelt:

$$u_i = a_i + b_i \qquad v_i = b_i + c_i \tag{102}$$

Die für die Maschinen U und V gefundene optimale Belegungsreihenfolge ist auch für die Maschinen A, B und C optimal. Die Zurückführung des Dreimaschinen-Problems auf das Zweimaschinen-Problem ist in Tabelle 12 angegeben.

Tabelle 12. Bearbeitungszeiten, Dreimaschinen-Problem und äquivalentes Zweimaschinen-Problem

Erzeugnis	Bearbeitungszeit auf			Bearbeitungszeit auf	
	Maschine A	Maschine B	Maschine C	Maschine U	Maschine V
P_1	8	5	7	13	12
P_2	2	1	8	3	9
P_3	11	3	8	14	11
P_4	3	4	6	7	10
P_5	8	6	10	14	16
P_6	5	5	9	10	14

Man erhält folgende optimale Reihenfolge für die Erzeugnisse: $P_2-P_4-P_6-P_5-P_1-P_3$ und berechnet im Netzplan die Termine und die Gesamtdurchlaufzeit (Bild 22):
Die Gesamtdurchlaufzeit beträgt 51 Zeiteinheiten. Zugleich erhält man wieder Maschinenstillstands- und Zwischenlagerzeiten.

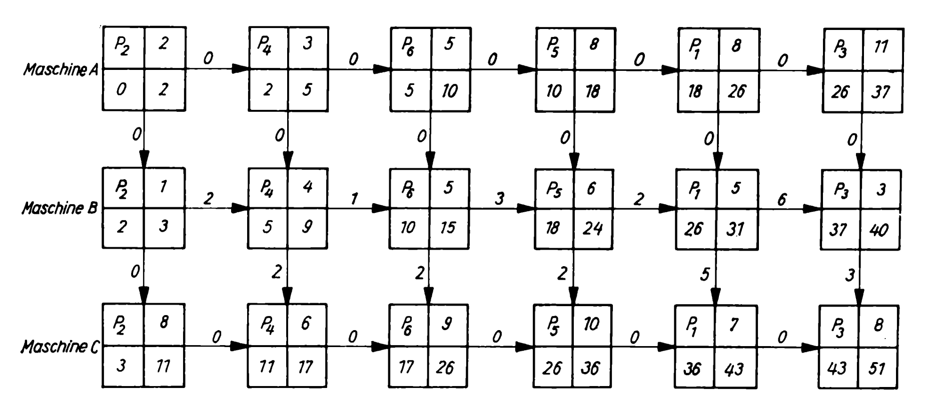


Bild 22. Terminrechnung für das Dreimaschinen-Problem

4.2. Rundfahrtprobleme

Rundfahrtprobleme treten bei der Berechnung von Versorgungstouren auf, aber auch bei Maschinenbelegungsproblemen.

Beispiele. Gegeben sind eine Anzahl von Punkten P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und die Matrix $C = (c_{ij})$ der Entfernungen von allen Punkten zu allen Punkten. Gesucht ist diejenige Verbindungstour für die n Punkte, die jeden Punkt einmal berührt und deren Gesamtlänge ein Minimum annimmt.



Es sind von einer Maschine n Aufträge P_i zu bearbeiten. Mit $U = (u_{ij})$ ist die Matrix aller Umrüstzeiten bekannt, die entstehen, wenn nach Auftrag P_i der Auftrag P_j gefertigt wird. Gesucht ist die Reihenfolge der Aufträge, die die Summe der Umrüstzeiten zu einem Minimum macht.

Zur numerischen Behandlung des Problems sei nur ein heuristisches Verfahren angegeben, das *Zeilenminimumverfahren:*

1. Man beginnt in einer Zeile der Entfernungsmatrix (hier mit i_1 bezeichnet) und bestimmt das minimale Element.
   Dieses wird in Spalte j_1 angenommen.
2. Der erste Teil der Rundfahrt führt damit vom Punkt P_{i1} zum Punkt P_{j1}. Zur Vermeidung eines Kurzzyklus sind alle Elemente der Spalten i_1 und j_1 zu streichen.
3. Die Rundfahrt muß bei dem Punkt P_{j1} fortgesetzt werden. Man geht dazu in die Zeile $i_2 = j_1$ und bestimmt wiederum das minimale Element. Es wird in Spalte j_2 angenommen.
4. Die bisher erhaltene Rundfahrt heißt damit $P_{i1} - P_{i2} - P_{j2}$. Zur Vermeidung eines Kurzzyklus werden alle Elemente der Spalte j_2 gestrichen.
5. Die Fortsetzung der Rundfahrt erfolgt bei Punkt P_{j2}. Man bestimmt dazu in Zeile $i_3 = j_2$ wieder das Minimum.
6. Das Verfahren wird in der eben beschriebenen Weise fortgesetzt, bis alle Punkte in die Rundfahrt einbezogen sind.

Tabelle 13. Matrix der Entfernungen

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	—	5	3	2	8	9	7
P_2	5	—	1	7	2	6	3
P_3	3	1	—	3	10	7	11
P_4	2	7	3	—	8	5	6
P_5	8	2	10	8	—	8	5
P_6	9	6	7	5	8	—	9
P_7	7	3	11	6	5	9	—

Beispiel. Tabelle 13
Bei Anwendung des Zeilenminimumverfahrens ergibt sich die Lösung: $P_1 - P_4 - P_3 - P_2 - P_5 - P_7 - P_6 - P_1$ mit der Gesamtlänge 31 Längeneinheiten.

Zur Gewinnung einer optimalen Lösung sei auf die Verfahren von LITTLE u. a. [6], CROES [1] oder HELLMICH [2] verwiesen.

5. Lineare Optimierung

Literatur: [11, 12, 16, 31, 38, 42, 50, 53]

5.1. Allgemeine Definition

Die lineare Optimierung zählt zu den bedeutenden mathematischen Grundlagen der Operationsforschung. Die ersten Veröffentlichungen wurden Ende der dreißiger Jahre aus der Sowjetunion bekannt, wo Produktionsplanungsprobleme der holzverarbeitenden Industrie mit Hilfe dieser neuen mathematischen Verfahren gelöst wurden. In den USA und England diente anfangs die lineare Optimierung in den vierziger Jahren besonders zur Lösung militärischer Probleme.

Die lineare Optimierung beschäftigt sich mit der Lösung *linearer Extremwertaufgaben.* Zu bestimmen sind die Werte von k Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ derart, daß eine lineare Funktion dieser Variablen einen Extremwert annimmt. Zugleich müssen die Werte dieser Variablen einer Anzahl von linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen genügen. Schließlich dürfen sämtliche Variablen nur nichtnegative Werte annehmen. Speziell könnte eine Maximierungs-

aufgabe der linearen Optimierung folgende Gestalt haben:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \Rightarrow \text{Maximum} \qquad \textit{Zielfunktion} \tag{103}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &\leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k &\leqq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k &\leqq b_m \end{aligned}\right\} \qquad \textit{Nebenbedingungen} \tag{104}$$

$$x_1 \geqq 0;\ x_2 \geqq 0;\ \ldots;\ x_k \geqq 0 \qquad \textit{Nichtnegativitätsbedingungen} \tag{105}$$

Jede Menge von Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, welche den Ungleichungen genügt, bezeichnet man als *Lösung*. Sind die Werte der Variablen zudem sämtlich nichtnegativ, hat man eine *zulässige Lösung* erhalten. Nimmt weiter die Funktion ihr Maximum an, so ist die betrachtete zulässige Lösung *optimal*.

Zur numerischen Behandlung dieser Aufgabe werden zunächst die Ungleichungen durch das Einführen sogenannter *Schlupfvariabler* in Gleichungen umgewandelt:

$$\begin{aligned} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \\ + c_{k+1}x_{k+1} + c_{k+2}x_{k+2} + \cdots + c_{k+m}x_{k+m} \Rightarrow \max \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + x_{k+1} \qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \qquad + x_{k+2} \qquad &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \qquad\qquad + x_{k+m} &= b_m \end{aligned} \tag{107}$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_k \geqq 0,\ x_{k+1} \geqq 0,\ x_{k+2} \geqq 0,\ \ldots,\ x_{k+m} \geqq 0 \tag{108}$$

wobei $c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_{k+m} = 0$ ist.

Setzt man nun zur Vereinfachung $k + m = n$, so erhalten wir:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \Rightarrow \max \tag{109}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{110}$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0 \tag{111}$$

Das Gleichungssystem der Nebenbedingungen besteht aus m Gleichungen mit n Unbekannten, wobei $n > m$ vorausgesetzt werden kann. Damit wird der Rang dieses Systems m betragen (falls nicht zwischen den Gleichungen lineare Abhängigkeiten bestehen). Von den n Spaltenvektoren der Matrix $A = (a_{ij})$ werden damit genau m linear unabhängig sein, die restlichen $(n - m)$ von diesen linear abhängig.

Die zu den m linear unabhängigen Vektoren gehörenden Variablen sind hier als *Basisvariable* bezeichnet, die restlichen als *Nichtbasisvariable*. Die Basisvariablen nehmen positive Werte an (abgesehen vom Fall der Entartung), die Nichtbasisvariablen sind gleich Null.

5.2. Simplexmethode

Zur Lösung von Aufgaben der Linearoptimierung existiert eine Anzahl von Verfahren, deren bekanntestes die Simplexmethode ist. Die Simplexmethode ist ein *Iterationsverfahren* und besteht aus folgenden Schritten:

Aufsuchen einer Anfangslösung (Ausgangslösung)

Das Problem beim Aufsuchen einer Anfangslösung besteht in der Festlegung von m Basisvariablen und der Ermittlung ihrer Werte. Dabei dürfen die Basisvariablen nur positive Werte annehmen. Besitzt das Problem die Gestalt der Gln. (106) bis (108), so ergibt sich mit $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+m}$ als ersten Basisvariablen und mit $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ als Nichtbasisvariablen sofort die Anfangslösung $x_{k+1} = b_1, x_{k+2} = b_2, \ldots, x_{k+m} = b_m$, welche unter der Voraussetzung $b_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ auch zulässig ist.
Hat das System der Nebenbedingungen dagegen die Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &\geqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k &\geqq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k &\geqq b_m \end{aligned} \tag{112}$$

so erhalten wir nach dem Einführen von Schlupfvariablen (x_{k+i}):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k - x_{k+1} \qquad\qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \qquad - x_{k+2} \qquad\quad &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \qquad\qquad\qquad - x_{k+m} &= b_m \end{aligned} \tag{113}$$

Bei Verwendung der Schlupfvariablen als ersten Basisvariablen wäre die Ausgangslösung $x_{k+1} = -b_1, x_{k+2} = -b_2, \ldots, x_{k+m} = -b_m$ nicht zulässig, falls $b_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ gilt.
Man führt in diesem Fall künstliche Variablen (y_i) ein:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k - x_{k+1} \qquad\qquad\qquad + y_1 \qquad\qquad\quad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \qquad - x_{k+2} \qquad\qquad\quad + y_2 \qquad &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \qquad\qquad\qquad - x_{k+m} \qquad\qquad + y_m &= b_m \end{aligned} \tag{114}$$

Diese künstlichen Variablen liefern dann eine erste zulässige Basislösung: $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_m = b_m$.
Da diese künstlichen Variablen nur ein Rechenhilfsmittel sind und für die praktische Lösung der Aufgabe keine Bedeutung haben, müssen sie in der optimalen Lösung den Wert Null annehmen, das heißt im Verlauf der Iteration aus Basisvariablen in Nichtbasisvariable umgewandelt werden. In der Zielfunktion erhalten sie deswegen bei Maximierungsaufgaben den Koeffizienten $(-M)$, bei Minimierungsaufgaben den Koeffizienten $(+M)$, wobei M eine sehr große Zahl darstellt*). Künstliche Variablen bieten auch eine Möglichkeit zum Bestimmen einer Anfangslösung, falls Gleichungen unter den Nebenbedingungen sind.
Allgemein wird bei der Bestimmung einer Anfangslösung das System der Nebenbedingungen nach den Basisvariablen und die Zielfunktion nach z aufgelöst:

$$z = z_0 - \bar{c}_{m+1}x_{m+1} - \bar{c}_{m+2}x_{m+2} - \cdots - \bar{c}_n x_n \tag{115}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{b}_1 - b_{1,m+1}x_{m+1} - b_{1,m+2}x_{m+2} - \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 &= \bar{b}_2 - b_{2,m+1}x_{m+1} - b_{2,m+2}x_{m+2} - \cdots - b_{2n}x_n \\ &\ \vdots \\ x_m &= \bar{b}_m - b_{m,m+1}x_{m+1} - b_{m,m+2}x_{m+2} - \cdots - b_{mn}x_n \end{aligned} \tag{116}$$

Dabei wird angenommen, daß $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die ersten Basisvariablen sind. Die b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = m + 1, m + 2, \ldots, n)$ sind die Koeffizienten der Nichtbasisvariablen, die sich bei Auflösung des Systems nach den Basisvariablen ergeben. Entsprechend sind die $\bar{c}_j$ $(j = m + 1, m + 2, \ldots, n)$ die Koeffizienten, die sich ergeben, wenn z durch die Nichtbasisvariablen ausgedrückt wird.
Die Ausgangsdaten werden in das *Simplextableau* eingetragen (Tabelle 14).

Speziell gilt im Fall der Maximierungsaufgabe

Basisvariable: $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+m}$

Nichtbasisvariable: $x_1, x_2, \ldots, x_k$

$\bar{b}_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, k)$

$b_{ij} = a_{ij}, \quad \bar{c}_j = -c_i, \quad z_0 = 0$

*) M muß bedeutend größer als alle anderen in der Zielfunktion vorkommenden Koeffizienten c_j sein.

Tabelle 14. Simplextableau

			$m+1$	$m+2$	...	k	...	n
			c_{m+1}	c_{m+2}	...	c_k	...	c_n
1	c_1	$x_1 = \bar{b}_1$	$b_{1,m+1}$	$b_{1,m+2}$	...	b_{1k}	...	b_{1n}
2	c_2	$x_2 = \bar{b}_2$	$b_{2,m+1}$	$b_{2,m+2}$	...	b_{2k}	...	b_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
l	c_l	$x_l = \bar{b}_l$	$b_{l,m+1}$	$b_{l,m+2}$	...	b_{lk}	...	b_{ln}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	c_m	$x_m = \bar{b}_m$	$b_{m,m+1}$	$b_{m,m+2}$	...	b_{mk}	...	b_{mn}
		$z = z_0$	$\bar{c}_{m+1}$	$\bar{c}_{m+2}$	...	$\bar{c}_k$	...	$\bar{c}_n$

Optimalitätstest

Eine Lösung der betrachteten Maximierungsaufgabe ist genau dann optimal, wenn für alle Nichtbasisvariablen gilt:

$$\bar{c}_j \geqq 0 \tag{117}$$

Bei einer Minimierungsaufgabe wäre die Lösung optimal, wenn für alle Nichtbasisvariablen gilt:

$$\bar{c}_j \leqq 0 \tag{118}$$

Bestimmung der neuen Basisvariablen

Ist die betrachtete Lösung noch nicht optimal, läßt sie sich durch Neuaufnahme einer bisherigen Nichtbasisvariablen in die Basis verbessern. Neue Basisvariable wird die Nichtbasisvariable x_k, für die gilt:

$$\bar{c}_k = \min_{\{j/\bar{c}_j<0\}} \bar{c}_j \tag{119}$$

Im Fall der Minimierungsaufgabe wird die neue Basisvariable x_k ermittelt aus:

$$\bar{c}_k = \max_{\{j/\bar{c}_j>0\}} \bar{c}_j \tag{120}$$

Ermittlung der neuen Nichtbasisvariablen

Für die neue Basisvariable x_k muß eine andere Variable aus der Basis ausscheiden. Diese neue Nichtbasisvariable (mit x_l bezeichnet) wird ermittelt aus:

$$\frac{\bar{b}_l}{b_{lk}} = \min_{\{i/b_{ik}>0\}} \frac{\bar{b}_i}{b_{ik}} \tag{121}$$

Dies gilt sowohl für Maximierungs- als auch für Minimierungsaufgaben.

Transformation des Koeffiziententableaus

Nach dem Austausch der Variablen x_k und x_l ist das System (110) der Nebenbedingungen nach den neuen Basisvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \ldots, x_m$ aufzulösen, bzw. diese Variablen und z sind durch die Nichtbasisvariablen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{k-1}, x_l, x_{k+1}, \ldots, x_n$ auszudrücken.

Diese Transformation wird im *Simplextableau* unter Verwendung folgender Transformationsformeln vorgenommen*):

— Element im Kreuzungspunkt der Zeile l und Spalte k:

$$1/b_{lk} \Rightarrow b'_{kl} \tag{122}$$

*) s. auch Abschn. MATHEMATIK, 6.4.2.3. Austauschverfahren

Da im neuen Tableau die Variablen x_k und x_l ausgetauscht werden, steht dieses Element jetzt in Zeile k und Spalte l.

— Elemente der alten Zeile l:

$$b_{lj}/b_{lk} \Rightarrow b'_{kj}; \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n; \; j \neq k); \quad b_l/b_{lk} \Rightarrow \bar{b}'_k \tag{123}$$

Diese Elemente stehen nun in der Zeile k des neuen Tableaus.

— Elemente der alten Spalte k:

$$-(b_{ik}/b_{lk}) \Rightarrow b'_{il}; \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; i \neq l); \quad -(\bar{c}_k/b_{lk}) \Rightarrow \bar{c}'_l \tag{124}$$

Diese Elemente stehen nun in der Spalte l des neuen Tableaus.

— Restliche Elemente des Tableaus:

$$\begin{aligned} &b_{ij} - (b_{ik}b_{lj}/b_{lk}) \Rightarrow b'_{ij}; \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = m+1, m+2, \ldots, n; \; i \neq l; \; j \neq k) \\ &\bar{b}_i - (\bar{b}_l b_{ik}/b_{lk}) \Rightarrow b_i'; \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; i \neq l) \\ &\bar{c}_j - (b_{lj}\bar{c}_k/b_{lk}) \Rightarrow \bar{c}_j'; \quad (j = m+1, m+2, \ldots, m; \; j \neq k) \\ &z_0 - (\bar{b}_l\bar{c}_k/b_{lk}) \Rightarrow z_0' \end{aligned} \tag{125}$$

Die neuen Werte werden in folgendes Tableau eingetragen (Tabelle 15):

Tabelle 15. Simplextableau nach der Transformation

			$m+1$	$m+2$	$\ldots$	l	$\ldots$	n
			c_{m+1}	c_{m+2}	$\ldots$	c_l	$\ldots$	c_n
1	c_1	$x_1 = \bar{b}_1$	$b_{1,m+1}$	$b_{1,m+2}$	$\ldots$	b_{1l}	$\ldots$	b_{1n}
2	c_2	$x_2 = \bar{b}_2$	$b_{2,m+1}$	$b_{2,m+2}$	$\ldots$	b_{2l}	$\ldots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
k	c_k	$x_k = \bar{b}_k$	$b_{k,m+1}$	$b_{k,m+2}$	$\ldots$	b_{kl}	$\ldots$	b_{kn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
m	c_m	$x_m = \bar{b}_m$	$b_{m,m+1}$	$b_{m,m+2}$	$\ldots$	b_{ml}	$\ldots$	b_{mn}
		z_0	$\bar{c}_{m+1}$	$\bar{c}_{m+2}$	$\ldots$	$\bar{c}_l$	$\ldots$	$\bar{c}_n$

Beispiel. Bestimme die Werte der Variablen x_1 und x_2, für welche z ein Maximum annimmt:

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 = z && x_1 + 2x_2 \leqq 10 \\ &x_1 + x_2 \leqq 3 && x_1 \geqq 0 \\ &2x_1 + x_2 \leqq 4 && x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

Einführen von Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = z \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ &x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \\ &x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0; \quad x_3 \geqq 0; \quad x_4 \geqq 0; \quad x_5 \geqq 0 \end{aligned}$$

Auflösen des Systems nach z und nach x_3, x_4, x_5 als erste Basisvariablen:

$$\begin{aligned} &z = 0 - (-4)\,x_1 - (-3)\,x_2 && x_4 = 4 - 2x_1 - x_2 \\ &x_3 = 3 - x_1 - x_2 && x_5 = 10 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Eintragen der Werte in das Simplextableau und anschließende Durchführung der Iterationsschritte:

			1	2
			4	3
3	0	3	1	1
4	0	4	2	1
5	0	10	1	2
		0	-4	-3

			4	2
			0	3
3	0	1	$-1/2$	$1/2$
1	4	2	$1/2$	$1/2$
5	0	8	$-1/2$	$1\,1/2$
		8	2	-1

			4	3
			0	0
2	3	2	-1	2
1	4	1	1	-1
5	0	5	1	-3
		10	1	2

Damit ist die optimale Lösung erreicht. Sie lautet:

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 5; \quad z = 10$

5.3. Modelle der Linearoptimierung

Literatur: [11, 12]

5.3.1. Produktionsplanung

In einem Betrieb können die Erzeugnisse $P_1, P_2, \ldots, P_n$ hergestellt werden. Zur Produktion dieser Erzeugnisse ist eine Anzahl von Ressourcen (Arbeitskräfte, verschiedene Maschinengruppen, Materialarten usw.) nötig. Diese zur Produktion benötigten Faktoren werden mit $F_1, F_2, \ldots, F_m$ bezeichnet. Mit a_{ij} sind die benötigten Aufwendungen, aufgeschlüsselt auf die verschiedenen Aufwandarten F_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ und bezogen auf eine Einheit der Erzeugnisse P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, gegeben. Die vorhandenen Maximalkapazitäten der Aufwandarten F_i bezeichnet man mit k_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Schließlich sind für die Erzeugnisarten P_j noch jeweils gewisse obere und untere Produktionsmengen p_j bzw. q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ bekannt*).
Gesucht ist das Produktionsprogramm des Betriebes, welches den Gesamtgewinn des Betriebes maximiert und die vorgegebenen Beschränkungen berücksichtigt. Mit c_j sind dabei die Gewinne je Erzeugniseinheit für die Produkte P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben. Wenn mit x_j die gesuchten Mengen der Erzeugnisse P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ und mit z der gesuchte Gesamtgewinn bezeichnet werden, erhält man folgendes mathematisches Modell:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \Rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqq k_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqq k_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqq k_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \geqq q_1; \quad x_2 \geqq q_2; \quad \ldots; \quad x_n \geqq q_n$$

$$x_1 \leqq p_1; \quad x_2 \leqq p_2; \quad \ldots; \quad x_n \leqq p_n$$

5.3.2. Zuschnittproblem

Aus Blechtafeln vorgegebener Größe sollen Blechteile $T_1, T_2, \ldots, T_m$ mit unterschiedlichen Abmessungen geschnitten werden. Für die Blechtafeln vorgegebener Größe sind dabei eine Reihe von möglichen Zuschnittvarianten $V_1, V_2, \ldots, V_n$ gegeben. Diese Zuschnittvarianten unterscheiden sich durch die Anzahl der in ihnen enthaltenen Blechteile. Mit a_{ij} kann die Anzahl der Teile T_i, die jeweils in einer nach Variante V_j aufgeteilten Blechtafel enthalten ist, als bekannt vorausgesetzt werden $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Weiter sind für die Blechteile T_i gewisse Mindestproduktionsmengen p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ gegeben.
In welcher Anzahl sind die einzelnen Zuschnittvarianten zu verwenden, damit das vorgegebene Produktionsprogramm mit einer insgesamt minimalen Anzahl von Blechtafeln realisiert werden kann?

*) Besonders die unteren Produktionsschranken sind deswegen von Bedeutung, weil in einem Betrieb unabhängig von einer Gewinnoptimierung zunächst einmal gewisse Planvorgaben erfüllt werden müssen.



Bezeichnet man mit x_j die Anzahl der Blechtafeln, die nach Variante V_j geschnitten werden, und mit z die gesuchte minimale Gesamtanzahl, so erhält man folgendes Modell:

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \Rightarrow \min$$

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & \geqq & p_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & \geqq & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots & + a_{mn}x_n & \geqq & p_m \end{array}$$

$$x_1 \leqq 0; \quad x_2 \leqq 0; \quad \ldots; \quad x_n \leqq 0$$

5.3.3. Maschinenzuordnung

Zur Fertigung der Erzeugnisse $P_1, P_2, \ldots, P_n$ können wahlweise die Maschinen $T_1, T_2, \ldots, T_m$ eingesetzt werden. Mit a_{ij} ergeben sich dabei unterschiedliche Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit, je nachdem, welche Maschine T_i zur Fertigung von Erzeugnis P_j eingesetzt wird ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Mit k_i sind die vorhandenen Kapazitäten der Maschinen T_i bekannt ($i = 1, 2, \ldots, m$), mit p_j die vorgeschriebenen Mindestproduktionsmengen für die einzelnen Erzeugnisse P_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Die Gewinne je Erzeugniseinheit mögen abhängig von den verwendeten Maschinen sein. Wird Erzeugnis P_j auf der Maschine T_i gefertigt, beträgt der Gewinn für eine Erzeugniseinheit c_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Mit x_{ij} wird die Anzahl der Erzeugnisse P_j bezeichnet, die auf Maschine T_i gefertigt wird ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), und mit z der gesuchte Gesamtbetriebsgewinn, welcher ein Maximum annehmen soll. Das Modell hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lllll} z = c_{11}x_{11} & + c_{12}x_{12} & + \cdots & + c_{1n}x_{1n} & \\ \quad + c_{21}x_{21} & + c_{22}x_{22} & + \cdots & + c_{2n}x_{2n} & \\ \quad \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \quad + c_{m1}x_{m1} & + c_{m2}x_{m2} & + \cdots & + c_{mn}x_{mn} & \Rightarrow \max \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_{11} & + a_{12}x_{12} & + \cdots & + a_{1n}x_{1n} & \leqq & k_1 \\ a_{21}x_{21} & + a_{22}x_{22} & + \cdots & + a_{2n}x_{2n} & \leqq & k_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} & + a_{m2}x_{m2} & + \cdots & + a_{mn}x_{mn} & \leqq & k_m \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} x_{11} & + x_{21} & + \cdots & + x_{m1} & \geqq & p_1 \\ x_{12} & + x_{22} & + \cdots & + x_{m2} & \geqq & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & + x_{2n} & + \cdots & + x_{mn} & \geqq & p_n \end{array}$$

$$x_{ij} \geqq 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

5.3.4. Arbeitszeitplan

Die Arbeitszeit eines Betriebes mit stark schwankendem Arbeitskräftebedarf laufe von 6 Uhr bis 20 Uhr. Möglicher Arbeitszeitbeginn sei jede volle Stunde von 6 Uhr bis 11 Uhr. Die Arbeitszeit beträgt 9 Stunden durchgehend, davon ist die fünfte oder sechste Stunde eine Pause.
Es besteht folgender Arbeitskräftebedarf:

von	bis	Anzahl der benötigten Arbeitskräfte
6.00	7.00	k_6
7.00	8.00	k_7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19.00	20.00	k_{19}

Mit welcher minimalen Anzahl von Arbeitskräften läßt sich dieser Bedarf abdecken?
Mit x_i ($i = 6, 7, \ldots, 11$) wird die Anzahl der Arbeitskräfte bezeichnet, die um i Uhr ihre Arbeit beginnt und in der 5. Stunde Pause macht. y_i seien die Arbeitskräfte, die um i Uhr ($i = 6, 7, \ldots, 11$) beginnen und in der 6. Stunde pausieren. Schließlich ist z die gesuchte minimale Anzahl an benötigten Arbeitskräften insgesamt.

Man erhält dann als mathematisches Modell:

$$z = x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} \Rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
&x_6 + y_6 && \geqq k_6\\
&x_6 + y_6 + x_7 + y_7 && \geqq k_7\\
&x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 && \geqq k_8\\
&x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 && \geqq k_9\\
&y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} && \geqq k_{10}\\
&x_6 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} && \geqq k_{11}\\
&x_6 + y_6 + x_7 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} && \geqq k_{12}\\
&x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} && \geqq k_{13}\\
&x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_{10} + x_{11} + y_{11} && \geqq k_{14}\\
&x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{11} && \geqq k_{15}\\
&x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} && \geqq k_{16}\\
&x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} && \geqq k_{17}\\
&x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} && \geqq k_{18}\\
&x_{11} + y_{11} && \geqq k_{19}
\end{aligned}$$

$x_6 \geqq 0,\ y_6 \geqq 0,\ \ldots,\ x_{11} \geqq 0,\ y_{11} \geqq 0$; ganzzahlig

5.3.5. Produktionsplanung und Lagerhaltung

Betrachtet wird die Produktion eines Erzeugnisses über 4 Zeiträume Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4. Mit b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist der Bedarf in Stück für die 4 Zeitabschnitte bekannt. Die Produktionskapazitäten in Stück für die 4 Zeiträume sollen k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ betragen. Die Produktionskosten je Stück haben dann die Höhe von c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. In den 4 Zeitabschnitten sind auch noch zusätzliche Produktionskapazitäten von k_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ Stück verfügbar, allerdings mit den erhöhten Produktionskosten von c_i' je Stück $(i = 1, 2, 3, 4)$. Für das Erzeugnis bestehen auch Einlagerungsmöglichkeiten, die Lagerkosten sind zeitabhängig und betragen l_i je Zeitraum Z_i und Stück $(i = 1, 2, 3, 4)$. Zu Beginn ist ein Lagerbestand von L_0 vorhanden, am Ende des 4. Zeitraumes wird ein Endlagerbestand von L_4 gefordert. Die Einlagerung und Bedarfsdeckung erfolgt jeweils am Ende eines Zeitraumes.
Welche Gestalt hat das kostenminimale Produktions- und Einlagerungsprogramm des Betriebs?
Bezeichnet man mit z die Gesamtkosten, mit x_i die Produktionsmenge in Stück im Zeitraum Z_i im Rahmen der normalen Produktionskapazitäten und mit y_i die Produktionsmenge in Stück im Zeitraum Z_i im Rahmen der zusätzlichen Produktionskapazitäten, so erhalten wir folgendes mathematische Modell:

$$\begin{aligned}
z = {} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4\\
& + c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 + c_4'y_4\\
& + L_0l_1\\
& + (L_0 + x_1 + y_1 - b_1)\, l_2\\
& + (L_0 + x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - b_1 - b_2)\, l_3\\
& + (L_0 + x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 - b_1 - b_2 - b_3)\, l_4 \Rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\leqq k_1 & \quad y_1 &\leqq k_1'\\
x_2 &\leqq k_2 & \quad y_2 &\leqq k_2'\\
x_3 &\leqq k_3 & \quad y_3 &\leqq k_3'\\
x_4 &\leqq k_4 & \quad y_4 &\leqq k_4'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + y_1 + L_0 \geqq b_1\\
&x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + L_0 \geqq b_1 + b_2\\
&x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + L_0 \geqq b_1 + b_2 + b_3\\
&x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + L_0 - L_4 \geqq b_1 + b_2 + b_3 + b_4
\end{aligned}$$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_4 \geqq 0,\ y_1 \geqq 0, \ldots, y_4 \geqq 0$

Weitere Modelle der linearen Optimierung werden u. a. in [11, 13 und 31] beschrieben.



5.4. Transportproblem

Literatur: [3, 5]

5.4.1. Formulierung

Gegeben sind m Ausgangsorte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mit den Aufkommensmengen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und n Zielorte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mit den Bedarfsmengen $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Es wird dabei

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{126}$$

vorausgesetzt. Betrachtet wird ein einheitliches und beliebig austauschbares Transportgut. Gegeben sind weiterhin mit c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ die Entfernungen oder die Transportkosten je Mengeneinheit von allen Ausgangsorten A_i zu allen Zielorten B_j. Gesucht sind Transportmengen x_{ij} von den Ausgangsorten A_i zu den Zielorten B_j derart, daß der Gesamttransportaufwand z ein Minimum annimmt.
Mathematisch ergibt sich folgende Formulierung:

$$\begin{aligned} z = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} \\ & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \Rightarrow \min \end{aligned} \tag{127}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} &= a_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad & \;\; \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} &= a_m \end{aligned} \tag{128}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad & \;\; \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} &= b_n \end{aligned} \tag{129}$$

$$x_{ij} \geqq 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{130}$$

Das System der Nebenbedingungen besteht aus $(m + n)$ Gleichungen, von denen wegen (126) genau $(m + n - 1)$ linear unabhängig sind. Der Rang dieses Systems beträgt also $(m + n - 1)$, die Anzahl der Basisvariablen ist damit ebenfalls $(m + n - 1)$.

5.4.2. Methode der Potentiale

Literatur: [15]

Zur numerischen Behandlung des Transportproblems könnte man die Simplexmethode verwenden. Wegen der speziellen Gestalt der Nebenbedingungen sind jedoch gesonderte Verfahren entwickelt worden. Hier wird die Methode der Potentiale beschrieben. Weitere Verfahren sind die *Ungarische Methode* (vgl. [31]) und die *Methode der lösenden Summanden* (vgl. [5]).

Bestimmung einer Anfangslösung

An eine Anfangslösung werden im wesentlichen zwei Anforderungen gestellt:

1. Die Anzahl der Basisvariablen muß $(m + n - 1)$ sein, die Lösung umfaßt also $(m + n - 1)$ Transportbeziehungen. Diese Forderung ist erfüllt, wenn mit jeder neu in die Lösung aufgenommenen Transportbeziehung entweder eine Zeilen- oder eine Spaltenkapazität ausgeschöpft wird. Nur mit der letzten Trans-

portmenge wird wegen (126) genau eine Zeilen- und eine Spaltenkapazität befriedigt. Da es m Zeilen- und n Spaltenkapazitäten gibt, beträgt die Anzahl der Transportbeziehungen genau $(m + n - 1)$.

2. Der Gesamttransportaufwand $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ soll möglichst niedrig sein. Es sind also solche c_{ij} mit Lieferbeziehungen x_{ij} zu besetzen, die relativ klein sind. Zur Verwirklichung dieser Forderung gibt es mehrere Möglichkeiten.

a) Gesamtminimumverfahren

Man beginnt mit der Besetzung des kleinsten Felds der Entfernungsmatrix $C = (c_{ij})$. Danach werden alle Felder gestrichen, die wegen Ausschöpfung der Zeilen- oder Spaltenkapazität nicht mehr besetzt werden dürfen. Von den noch verbleibenden Feldern wird nun wieder das kleinste besetzt. Das Verfahren endet, wenn sämtliche Zeilen- und Spaltenkapazitäten befriedigt sind.

b) Methode des doppelten Vorzuges

Die Reihenfolge der Besetzungen der Felder wird nicht durch ihre absolute Größe, sondern durch ihre relative Lage zu den anderen Zeilen- und Spaltenelementen festgelegt. Man markiert zunächst alle Zeilenminima der Entfernungsmatrix, danach alle Spaltenminima. Die Felder der Entfernungsmatrix zerfallen jetzt in drei Teilmengen (doppelt-, einfach- und unmarkiert). Entsprechend ihrer absoluten Größe werden (mit dem kleinsten Wert beginnend) die Felder durchnumeriert, zunächst die doppelt markierten, dann sämtliche einfach markierten und schließlich die unmarkierten. Auf der Basis der so festgelegten Reihenfolge werden nun die Besetzungen festgelegt. Nach jeder Besetzung werden wieder die Felder gestrichen, die nicht mehr besetzt werden dürfen.

c) Methode von VOGEL

Für alle Zeilen und Spalten der Entfernungsmatrix bildet man die Differenzen zwischen den beiden kleinsten Feldern. In der Reihe mit der größten Differenz erfolgt dann die Besetzung des kleinsten Felds. Danach werden die Felder gestrichen, die nicht mehr besetzt werden dürfen, und das Verfahren wird mit der Bestimmung neuer Differenzen fortgesetzt.

Optimalitätstest

Man führt Hilfsvariable (Potentiale) u_i und v_j derart ein, daß für alle mit einer Basisvariablen x_{ij} belegten Kostenfelder c_{ij} gilt:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0 \tag{131}$$

(131) stellt ein Gleichungssystem mit $(m + n - 1)$ Gleichungen (da es $m + n - 1$ Basisvariablen gibt) und $(m + n)$ Unbekannten u_i und v_j dar. Der Wert einer Unbekannten kann also frei gewählt werden, man setzt i. allg. $u_1 = 0$. Die Werte der anderen Variablen u_i und v_j lassen sich dann schrittweise ermitteln.
Eine Lösung ist genau dann optimal, wenn für alle restlichen c_{ij}, d. h. alle c_{ij}, die nicht mit einer Basisvariablen x_{ij} besetzt sind, gilt:

$$c_{ij} - u_i - v_j \geqq 0 \tag{132}$$

Bestimmung der neuen Basisvariablen

Neue Basisvariable wird die bisherige Nichtbasisvariable, für welche das Optimalitätskriterium am stärksten verletzt wird. Man bestimmt also

$$\bar{c}_{rp} = \min_{\{\bar{c}_{ij} < 0\}} \bar{c}_{ij} \tag{133}$$

wobei $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ gilt. x_{rp} wird dann neue Basisvariable.

Bestimmung der neuen Nichtbasisvariablen

Für x_{rp} muß eine andere Variable aus der Basis ausgeschieden werden. Man wendet dazu das *Polygonzugverfahren* an:

1. Streichung aller Basisvariablen x_{ij}, die allein in einer Zeile der Lösungsmatrix $X = (x_{ij})$ stehen.
2. Streichung aller Basisvariablen x_{ij}, die allein in einer Spalte der Lösungsmatrix $X = (x_{ij})$ stehen.
3. Wiederholung der Schritte 1. und 2., bis bei einem vollständigen Durchlauf beider Schritte keine Streichung mehr erfolgt. Die neue Basisvariable x_{rp} wird übrigens bereits als Basisvariable mitgezählt.



4. Die noch ungestrichenen Basisvariablen bilden die Eckpunkte eines geschlossenen Polygonzugs. Dieser wird gebildet, indem man, mit der neuen Basisvariablen beginnend, jeweils immer zu der Basisvariablen der gleichen Zeile oder Spalte übergeht. Die Eckpunkte des Polygonzugs werden dabei, wieder mit x_{rp} beginnend, abwechselnd mit (+) und (−) markiert.
5. Man bestimmt nun das Minimum aller mit − (Minus) markierten Basisvariablen. Es sei dies $x_{sq} = W$.
6. Alle ungestrichenen Basisvariablen werden wie folgt verändert:

$$x_{ij} \text{ mit } (+) \text{ gekennzeichnet: } x_{ij} + W \Rightarrow x_{ij} \tag{134}$$

$$x_{ij} \text{ mit } (-) \text{ gekennzeichnet: } x_{ij} - W \Rightarrow x_{ij}.$$

Speziell gilt dann: $x_{rp} = W$, $x_{sq} = 0$, d. h., x_{sq} wird neue Nichtbasisvariable. Nun folgt wieder der Optimalitätstest.

Beispiel. Es werde folgendes Transportproblem betrachtet (Tabellen 16 und 17).

Tabelle 16. Matrix der Entfernungen und Kapazitäten

	a_i ↓ b_j →	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		6	3	6	1	9
A_1	8	1	3	9	2	5
A_2	4	12	18	16	6	14
A_3	5	17	13	20	15	19
A_4	8	7	10	4	11	8

Tabelle 17. Gesamtminimumverfahren

	6	3	6	1	9
8	⑥ 1	① 3	9	① 2	5
4	12	18	16	6	④ 14
5	17	② 13	20	15	③ 19
8	7	10	⑥ 4	11	② 8

Gesamtminimumverfahren

Die Reihenfolge der Besetzungen ist:

$x_{11} = 6$, $x_{14} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{43} = 6$, $x_{45} = 2$,

$x_{32} = 2$, $x_{25} = 4$, $x_{35} = 3$

Der Wert der Zielfunktion beträgt $z = 190$.

Methode des doppelten Vorzugs (Tabelle 18)

Die Zahlen in Klammern hinter den Transportentfernungen geben die Reihenfolge der Besetzungen an. Durch vorzeitige Kapazitätsausschöpfungen ist diese Reihenfolge jedoch nicht immer einhaltbar. In diesem Beispiel ergeben sich der Reihe nach folgende Besetzungen:

$x_{11} = 6$, $x_{43} = 6$, $x_{14} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{32} = 2$,

$x_{45} = 2$, $x_{25} = 4$ und $x_{35} = 3$.

Die Methode des doppelten Vorzugs liefert damit die gleiche Lösung wie das Gesamtminimumverfahren.

Tabelle 18. Methode des doppelten Vorzugs

	6	3	6	1	9
8	⑥ 1 (1)	① 3 (4)	9 (10)	① 2 (3)	5 (5)
4	12 (13)	18 (18)	16 (16)	6 (6)	④ 14 (14)
5	17 (17)	② 13 (7)	20 (20)	15 (15)	③ 19 (19)
8	7 (8)	10 (11)	⑥ 4 (2)	11 (12)	② 8 (9)

Methode von VOGEL *(Tabelle 19)*

Die Reihenfolge der Besetzungen lautet: $x_{12} = 3$, $x_{11} = 5$, $x_{43} = 6$, $x_{24} = 1$, $x_{45} = 2$, $x_{21} = 1$, $x_{25} = 2$ und $x_{35} = 5$. Der Wert der Zielfunktion beträgt bei dieser Lösung $z = 195$. Auf Grund dieses Ergebnisses

könnte der Eindruck entstehen, daß die Methode von VOGEL schlechtere Ergebnisse als die beiden zuvor erwähnten Verfahren bringt. Bei der Mehrzahl der Beispiele liefert jedoch gerade diese Methode die günstigsten Lösungen!

Tabelle 19. Methode von VOGEL

	6	3	6	1	9	
8	(5) 1	(3) 3	9	2	5	1 1
4	(1) 12	18	16	(1) 6	(2) 14	6 6 6 2
5	17	13	20	15	(5) 19	2 2 2 2
8	7	10	(6) 4	11	(2) 8	3 3 1 1
	6	7	5	4	3	
	5		12	5	6	
	5				5	

Methode der Potentiale (Tabellen 20–22)

Als Ausgangslösung wird die mit dem Gesamtminimumverfahren und der Methode des doppelten Vorzugs erzielte Lösung verwendet.

Tabelle 20. Methode der Potentiale, Ausgangstableau

	6	3	6	1	9	u_i
8	(6) 1	$(1)^-$ 3	9	(1) 2	$(x)^+$ 5 [4]	0
4	12	18	16	6 [1]	(4) 14	5
5	17	$(2)^+$ 13	20	15	$(3)^-$ 19	10
8	7	10	(6) 4	11	(2) 8	−1
v_j	1	3	5	2	9	

Tabelle 21. Methode der Potentiale, Zwischenlösung

	6	3	6	1	9	u_i
8	(6) 1	3	9	$(1)^-$ 2	$(1)^+$ 5	0
4	12	18	16	$(x)^+$ 6 [5]	$(4)^-$ 14	9
5	17	(3) 13	20	15 [1]	(2) 19	14
8	7	10	(6) 4	11	(2) 8	3
v_j	1	−1	1	2	5	

Tabelle 22. Methode der Potentiale, optimale Lösung

	6	3	6	1	9	u_i
8	(6) 1	3	9	2	(2) 5	0
4	12	18	16	(1) 6	(3) 14	9
5	17	(3) 13	20	15	(2) 19	14
8	7	10	(6) 4	11	(2) 8	3
v_j	1	−1	1	−3	5	

Die optimale Lösung lautet:

$x_{11} = 6$, $x_{15} = 2$, $x_{24} = 1$, $x_{25} = 3$, $x_{32} = 3$,
$x_{35} = 2$, $x_{43} = 6$, $x_{45} = 2$

Der Wert des Gesamttransportaufwandes beträgt $z = 181$.
Bei dem eben betrachteten Beispiel wurden negative $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ in Kästchen als Index hinter das entsprechende c_{ij} geschrieben. Die Ecken des Polygonzugs wurden durch „+" und „−" gekennzeichnet.

5.4.3. Unausgeglichenes Transportproblem

Wie schon bemerkt, muß beim Transportproblem der linearen Optimierung immer die Bedingung $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ erfüllt sein. Sollte die Gleichheit der Gesamtkapazitäten verletzt sein, so muß das Transportproblem durch Einfügen eines fiktiven Erzeugers A_0 bzw. Verbrauchers B_0 mit der entsprechenden Differenzkapazität:

$$a_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{135}$$

bzw.

$$b_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{136}$$

wieder ausgeglichen gestaltet werden. In die zugehörige Zeile bzw. Spalte der Kosten- oder Entfernungsmatrix werden Nullen eingetragen.
Das unausgeglichene Transportproblem hat große Bedeutung bei der Modellierung von Standort- und Kapazitätsplanungsproblemen.

5.5. Nichtlineare Optimierung

Literatur: [16, 26, 29, 32, 38, 54, 60]

Viele Probleme der Praxis haben nichtlinearen Charakter, obwohl sie als Modelle der linearen Optimierung formuliert werden. Mit der mathematischen Behandlung derartiger Aufgabenstellungen befaßt sich die nichtlineare Optimierung.
Die Entwicklung dieser mathematischen Disziplin vollzog sich etwa gleichzeitig mit der der linearen Optimierung. 1951 veröffentlichten Kuhn und Tucker in [29] die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz optimaler Lösungen. Diese Arbeit bildete die Grundlage für die weitere Entwicklung der nichtlinearen Optimierung.

Die allgemeine Problemstellung der nichtlinearen Optimierung kann wie folgt dargestellt werden:
Zu bestimmen sind die Werte von k Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ derart, daß eine nichtlineare Funktion dieser Variablen einen Extremwert annimmt. Zugleich müssen die Werte dieser Variablen einer Anzahl von Nebenbedingungen genügen, die die Gestalt von nichtlinearen Funktionen besitzen. Schließlich dürfen sämtliche Variablen nur nichtnegative Werte annehmen.
Speziell könnte eine Maximumaufgabe der nichtlinearen Optimierung folgende Gestalt haben:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Rightarrow \max \tag{137}$$

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) &\leqq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) &\leqq b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_k) &\leqq b_m \end{aligned} \tag{138}$$

$$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_k \geqq 0 \tag{139}$$

Ein allgemeingültiges Verfahren zur Lösung von Aufgaben der nichtlinearen Optimierung existiert nicht. Nur für einige Spezialfälle konnten brauchbare Verfahren entwickelt werden.

1. *Linearisierung nichtlinearer Probleme*

Es soll zunächst der Fall betrachtet werden, daß die Zielfunktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkav ist. Die Nebenbedingungen $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) = b_i$ seien lineare Funktionen. Weiter sei die Zielfunktion trennbar, d. h. als Summe von k Funktionen darstellbar, die jeweils nur von einer Variablen abhängen:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) \tag{140}$$

Alle Funktionen $f_j(x_j)$, $j = 1, \ldots, k$, seien konkav. Jede Funktion $f_j(x_j)$ kann dann durch eine stückweise lineare Funktion angenähert werden. Man überführt so die nichtlineare in eine lineare Optimierungsaufgabe. Die Genauigkeit der Annäherung hängt von der Anzahl der Teilintervalle ab, die bei der linearen Interpolation der Funktion gewählt wurde. Eine genaue Beschreibung des Lösungsverfahrens findet man in [11].

2. *Quotientenoptimierung*

Die Zielfunktion $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ besitze die spezielle Gestalt:

$$z = \frac{c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k}{d_0 + d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_kx_k} \tag{141}$$

Die Nebenbedingungen haben die Gestalt linearer Funktionen. Nimmt für jede zulässige Lösung der Nenner der Zielfunktion einen positiven Wert an, so kann man dieser *hyperbolischen Optimierungsaufgabe* eine äquivalente lineare Optimierungsaufgabe zuordnen (vgl. [11]). Diese läßt sich mit einem der bekannten Verfahren lösen.

3. *Quadratische Optimierung*

Nichtlineare Optimierungsaufgaben mit linearen Nebenbedingungen und einer Zielfunktion der speziellen Gestalt:

$$z = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{k} c_ix_i \tag{142}$$

bezeichnet man als Probleme der quadratischen Optimierung. Dabei sind an die Matrix $C = (c_{ij})$ der Koeffizienten in der Zielfunktion noch weitere Bedingungen zu stellen.
Für den Spezialfall der quadratischen Optimierung ist eine Reihe von Lösungsverfahren entwickelt worden, von denen hier nur die Methoden von Beale, Frank und Wolfe und Hildreth und d'Esopo (alle in [29]) erwähnt werden sollen.

6. Modelle der Lagerhaltung

Literatur: [10, 11, 12, 28, 35, 40]

Ein bedeutender Teil der materiellen Produktion wird in Lagern für eine gewisse Zeit aufbewahrt. In der Wirtschaft erfüllen diese als Systemreserven eine wichtige Steuerfunktion in volkswirtschaftlicher und betriebswirtschaftlicher Hinsicht. Die Wirksamkeit eines Lagers als Stabilisator kann im allgemeinen erhöht werden, wenn man den Lagerumfang vergrößert. Dieses Vorgehen bindet aber andererseits Werte, die für die Dynamik der Wirtschaft verlorengehen. Die Lager stellen somit eine dialektische Einheit dar: stabilisierende Aufgaben verlangen umfangreiche Lager, die wirtschaftliche Beweglichkeit verlangt kleine Lager. Es ist die Aufgabe der Theorie der Lagerhaltung, mit Hilfe von mathematischen Verfahren diese beiden Komponenten so zu bemessen, daß das Lager ökonomisch günstig liegt.



6.1. Allgemeine Formulierung eines mathematischen Modells

Das Verhalten eines Lagers wird wie bei jedem System durch seine inneren Parameter bestimmt. Diese beschreiben die Zusammenhänge zwischen den beteiligten ökonomischen Größen. Als innere Parameter werden drei Gruppen von Kostenfaktoren betrachtet:

1. *unmittelbare Lagerkosten* $c_1(t)$:

   Sie werden durch die Investitionen für die Lageranlage, die Verwaltung, die Versicherungskosten, den Verschleiß u. ä. bestimmt.

   $c_1(t)$: Kosten je Mengen- und Zeiteinheit im Lager für den Zeitpunkt t.

2. *Fehlmengenkosten* $c_2(t)$:

   Diese Kosten entstehen durch ungedeckten Bedarf (Zeitverlust, Produktionsausfall u. ä.).

   $c_2(t)$: Kosten je fehlende Mengen- und Zeiteinheit.

3. *Beschaffungs- oder Belieferungskosten* $c_3(t)$:

   Diese Kosten entstehen durch Bestellung und Belieferung (Verträge, Verladen, Umstellung in Produktion u. ä.).

   $c_3(t)$: Kosten je Bestellung im Zeitpunkt t (unabhängig vom Umfang der Lieferung).

Der Zustand eines Lagers wird im wesentlichen durch den Bestand oder Mangel (fehlende Mengeneinheiten) charakterisiert. $b(t)$ ist der Lagerbestand im Zeitpunkt t. $m(t)$ ist die Fehlmenge oder der Mangel im Zeitpunkt t. Beide Funktionen hängen unmittelbar vom Bedarf und der Belieferung ab: $[b(t) \geqq 0;\ m(t) \geqq 0]$. $s(t)$ ist der Bedarf im Zeitpunkt t und $r(t)$ die Belieferung. Wenn man Belieferung und Bedarf steuern kann, dann hat man das System Lager unter Kontrolle.
Die gesamten Kosten der Lagerhaltung betragen für den Zeitraum t_0 bis $t_0 + T$:

$$K(T, r, s) = \int_{t_0}^{t_0+T} c_1(t)\, b(r, s)\, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_0+T} c_2(t)\, m(r, s)\, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} c(t_i) \tag{143}$$

$t_i \in [t_0, t_0 + T]$ und $t_i < t_{i+1}$ $\quad (i = 0, 1, \ldots, k - 1)$.

Die Funktionen $r(t)$, $s(t)$ sind so zu wählen, daß die Kosten möglichst günstig liegen. Falls Bedarf und Belieferung auf Grund technologischer Bedingungen festliegen, sind günstige Zeitintervalle zwischen zwei Bestellungen zu bestimmen. Die zu behandelnden Probleme haben deterministischen Charakter.
Im allgemeinen sind $r(t)$ und $s(t)$ Zufallsgrößen; d. h. auf Grund der Zeitabhängigkeit zufällige Prozesse. Entsprechend (143) sind die Kosten eine Zufallsvariable, die durch ihren Erwartungswert und ihre Varianz beschrieben wird. Für die Anwendung werden die Modelle noch spezialisiert.

6.2. Deterministische Modelle der Lagerhaltung

Die Funktionen $r(t)$ und $s(t)$ werden als lineare Funktionen vorgegeben. Es ist zu bestimmen, wann am günstigsten eine Belieferung erfolgen soll.
Die spezifischen Kosten hängen nicht vom Zeitpunkt t ab $[c_1(t) = c_1,\ c_2(t) = c_2,\ c_3(t) = c_3]$, und der Bedarf ist für jede Zeiteinheit konstant.

$r(t) = r$ Mengeneinheiten werden je Zeiteinheit benötigt,
$s(t) = s$ Mengeneinheiten werden je Zeiteinheit geliefert,
$t_0 = 0$: Beginn der Belieferung des Lagers,
T: neuer Belieferungsbeginn des Lagers.

T ist somit die Dauer eines Lagerzyklus. Mit d wird die Liefermenge bezeichnet, die dem Lagerdurchsatz im Zyklus entspricht. q ist der maximale Lagerbestand. Die Kapazität muß q entsprechen.

Damit ein Lagerprozeß stattfindet, muß $s > r$ sein. Für den Lagerbestand gilt:

$$b(t) = \begin{cases} (s-r)\,t & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq t_1 \\ d - rt & \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 \\ 0 & \text{für} \quad t_2 \leqq t < T \end{cases} \tag{144}$$

Bis zum Zeitpunkt t_1 erfolgt die Belieferung des Lagers:

$$d = st_1 \tag{145}$$

Der Lagerbestand ist zum Zeitpunkt t_2 aufgebraucht:

$$d = rt_2 \tag{146}$$

Ab t_2 tritt Mangel auf. Dies wird beschrieben durch:

$$m(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq t_2 \\ rt - d & \text{für} \quad t_2 \leqq t < T \end{cases} \tag{147}$$

Die zeitliche Veränderung des Lagerbestandes ist in Bild 23 dargestellt.

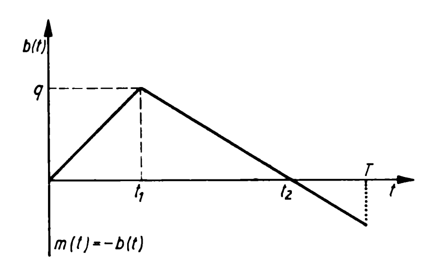


Bild 23. Zeitliche Veränderung des Lagerbestandes

Beachtet man, daß im Zyklus [0, T] eine Bestellung auftritt, dann erhält man für die Gesamtkosten in Abhängigkeit von T:

$$K(T, d) = c_1[1 - (r/s)]\, d^2/2r + c_2(rT - d)^2/2r + c_3 \tag{148}$$

Um den Lagervorgang zu optimieren, werden die Kosten je Zeiteinheit minimiert:

$$k(T, d) = c_1[1 - (r/s)]\, d^2/2rT + c_2(rT - d)^2/2rT + c_3/T \tag{149}$$

Für die Zyklusdauer T und den Durchsatz d erhält man als optimale Werte:

$$T_{\text{opt.}} = \sqrt{\frac{2c_3}{rc_1[1 - (r/s)]}} \cdot \sqrt{\frac{c_1[1 - (r/s)] + c_2}{c_2}} \tag{150a}$$

bzw.

$$d_{\text{opt.}} = \sqrt{\frac{2c_3 r}{c_1[1 - (r/s)]}} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1[1 - (r/s)] + c_2}} \tag{151a}$$

Wenn keine Fehlmengen auftreten, ist $c_2 = \infty$ zu setzen:

$$T_{\text{opt.}} = \sqrt{\frac{2c_3}{rc_1[1 - (r/s)]}} \tag{150b}$$

$$d_{\text{opt.}} = \sqrt{\frac{2c_3 r}{c_1[1 - (r/s)]}} \tag{151b}$$



6.3. Stochastische Modelle der Lagerhaltung

Auf Grund von Störungen treten *Bedarf*, *Belieferung* und *Belieferungszeitpunkt* gemeinsam oder teilweise als Zufallsgrößen auf. Sie sind stochastische Prozesse. Die Belieferungstermine können als ein Punktprozeß aufgefaßt werden.
$R(t)$ sei die kumulative Belieferung bis zum Zeitpunkt t und $S(t)$ der kumulative Bedarf. Somit existieren die beiden Prozesse $\{R(t), t \in T\}$ und $\{S(t), t \in T\}$.

Die allgemeine Behandlung von Lagerhaltungsvorgängen ist mit vielen Schwierigkeiten verbunden. Deshalb soll als Beispiel ein einfacher Fall angeführt werden.
Die Liefertermine sind deterministisch und haben konstanten Abstand. Den Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Terminen wählt man als Zeiteinheit (Zyklusdauer). Die Liefermenge je Zeiteinheit sei eine deterministische Größe r und der Bedarf je Zeiteinheit eine Zufallsvariable S (z. B. täglich verkaufte Benzinmenge einer Tankstelle, wöchentlich benötigte Ersatzteile u. ä.). Durch die Beschränkung auf eine Zeiteinheit kann der Prozeß $S(t)$ durch eine statische Zufallsvariable $S = S(t)$ beschrieben werden.

Für den *Bestand* bzw. den *Mangel* dieses Lagers gilt:

$$B = \begin{cases} r - S & \text{für} \quad r \geqq S \\ 0 & \text{für} \quad r < S \end{cases} \qquad M = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r \geqq S \\ S - r & \text{für} \quad r < S \end{cases} \tag{152}$$

Je nachdem, ob S eine diskrete oder stetige Zufallsvariable ist, hat man mit den Wahrscheinlichkeiten oder der Dichtefunktion zu arbeiten. Für die Erwartungswerte folgt:

$$E(B) = \begin{cases} \sum\limits_{s_i \leqq r} p_i(r - s_i) \\ \int\limits_0^r (r - s)\, f(s)\, \mathrm{d}s \end{cases} \qquad E(M) = \begin{cases} \sum\limits_{s_i > r}^{\infty} p_i(s_i - r) \\ \int\limits_r^{\infty} (s - r)\, f(s)\, \mathrm{d}s \end{cases} \tag{153}$$

Für den Erwartungswert der Kosten je Zeiteinheit gilt somit

für eine diskrete Zufallsvariable S:

$$E[K(r)] = c_1 E(B) + c_2 E(M)$$

$$E[K(r)] = c_1 \sum_{s_i \leqq r} p_i(r - s_i) + c_2 \sum_{s_i > r}^{\infty} p_i(s_i - r) \Rightarrow \min \tag{154a}$$

c_1: Kosten je nichtverbrauchte Mengeneinheit
c_2: Kosten je fehlende Mengeneinheit

für eine stetige Zufallsvariable S:

$$E[K(r)] = c_1 \int_0^r (r - s)\, f(s)\, \mathrm{d}s + c_2 \int_r^{\infty} (s - r)\, f(s)\, \mathrm{d}s \Rightarrow \min \tag{154b}$$

Aus den Bedingungen (154a) bzw. (154b) ermittelt man die *optimale Liefermenge r*.

7. Modelle der Zuverlässigkeitstheorie

Literatur: [11, 12, 25, 46]

Durch das Anwachsen der Komplexität und Kompliziertheit der gesellschaftlichen, technologischen und technischen Systeme wird es immer schwieriger, Aussagen über die Funktionstüchtigkeit und die damit verbundene Zuverlässigkeit zu machen. Die Systeme sind zwar leistungsstark, stellen aber hohe Anforderungen an die Konstruktion, Steuerung und Lenkung und Wartung. Mit dieser Problematik beschäftigt sich die Zuverlässigkeitstheorie.

7.1. Begriffe und Probleme der Zuverlässigkeitstheorie

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* wird hier die Wahrscheinlichkeit verstanden, daß das System funktionstüchtig bleibt. Die Funktionstüchtigkeit ergibt sich aus dem Verwendungszweck des Systems.
In den meisten Fällen unterscheidet man nur zwei Zustände: funktionstüchtig oder funktionsuntüchtig. Die Zustandsänderung hängt von der Zeit ab. Unter der *Lebensdauer* eines Systems, Teilsystems oder Elements versteht man den Zeitraum vom Einsatzbeginn bis zum Ausfall. Die Lebensdauer ist eine Zufallsvariable, die mit T bezeichnet wird. Die Verteilung von T gibt Auskunft über die Sicherheit des Systems oder Elements.
Die Eigenschaften von T sind mathematisch zu formulieren:

- $T \geqq 0$; d. h., für die Verteilungsfunktion $F(t)$ gilt $F(t) = 0$ für $t < 0$
- Die Wahrscheinlichkeit, in einem vorgegebenen Zeitintervall zuverlässig zu arbeiten, hängt vom Alter des Elements und der Länge des Zeitintervalls ab.

Daraus folgt:

$$F(t) = P(T \leqq t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t a(x)\,dx\right] \tag{155}$$

$a(t)$ bezeichnet man als *Ausfallrate* im Zeitpunkt t. Unter der *Zuverlässigkeitsfunktion* versteht man:

$$G(t) = P(T > t) = \exp\left[-\int_0^t a(x)\,dx\right] \tag{156}$$

$G(t)$ ist die *Zuverlässigkeit* oder *Sicherheit* des Elements im Zeitpunkt t.
Die Praxis liefert verschiedene Funktionen für $a(t)$:

$$a(t) = a \;(= \text{konst.}); \qquad G(t) = \exp(-at) \tag{157}$$

Die Lebensdauer genügt somit einer Exponentialverteilung. Da die Ausfallrate nicht von der Zeit abhängt, wird bei dieser Lebensdauerverteilung der Verschleiß nicht beachtet. Für die Parameter gilt:

$$\begin{aligned} &E(T) = 1/a; &&\mathrm{Var}(T) = 1/a^2 \\ &a(t) = abt^{b-1}; &&G(t) = \exp(-at^b) \end{aligned} \tag{158}$$

Die Verteilung zu dieser Zuverlässigkeitsfunktion nennt man WEIBULL-Verteilung. Die Parameter von T sind hierbei:

$$E(T) = \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)\Big/a^{1/b}; \qquad \mathrm{Var}(T) = \left[\Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)^2\right]\Big/a^{2/b} \tag{159}$$

Neben dem Ausdruck (155) gibt es noch andere Verteilungsarten für T, z. B.:

- *Gammaverteilung:* $F(t) = \int_0^t \frac{p^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-px}\,dx$

  Die dazugehörige Zuverlässigkeitsfunktion ist:

  $$G(t) = \int_{pt}^{\infty} \frac{x^{b-1}}{\Gamma(b)} e^{-x}\,dx$$

  mit den Parametern $E(T) = b/p$ und $\mathrm{Var}(T) = b/p^2$ (160)



— *logarithmische Normalverteilung:*

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\ln t - a)/\sigma} \exp(-x^2/2)\,dx$$

Für die Zuverlässigkeitsfunktion gilt:

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln t - a)/\sigma}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,dx \tag{161}$$

Die mittlere Lebensdauer und die Varianz betragen

$$E(T) = \exp(a + \sigma^2/2), \qquad \text{Var}(T) = [(\exp \sigma^2) - 1] \exp(2a + \sigma^2)$$

Ein neues Problem liegt vor, wenn man die Struktur eines Systems und die Zuverlässigkeit der Elemente kennt und aus dieser Information die Zuverlässigkeit des Systems ermittelt.

7.2. Zuverlässigkeit eines Systems

S sei ein System aus n Elementen $E_1, E_2, \ldots, E_n$. $G_i(t)$ ist die Zuverlässigkeitsfunktion von E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. T_S ist die Lebensdauer von S und T_i die Lebensdauer von E_i. Die beiden folgenden Strukturen werden betrachtet:

— Wenn eines der n Elemente ausfällt, dann fällt S aus. Die Zuverlässigkeitsfunktion von S ist $G_S(t) = P(T_S > t) = P(T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t)$.
Sind die n Elemente voneinander unabhängig, dann gilt:

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_i(t) \tag{162}$$

— S fällt erst dann aus, wenn alle n Elemente ausgefallen sind. Die n Elemente sind unabhängig:

$$G_S(t) = 1 - P(T_S \leqq t) = 1 - P(T_1 \leqq t, T_2 \leqq t, \ldots, T_n \leqq t)$$

$$G_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - G_i(t)] \tag{163}$$

Man kann auch Systeme mit allgemeinen Strukturen auf diese Weise untersuchen, wobei man Systemfunktionen (BOOLEsche Funktionen) verwendet [46].

7.3. Erneuerungsprozeß

Ein Erneuerungsprozeß liegt vor, wenn man die aufeinanderfolgend ausfallenden Elemente durch einwandfreie ersetzt. Der Prozeß wird durch die Anzahl der Ersetzungen beschrieben. $N(t)$ ist die Anzahl von Ersetzungen an einer vorgegebenen Stelle eines Systems im Zeitraum von 0 bis t. Da alle aufeinanderfolgenden Elemente von gleicher Art sind, haben sie alle die gleiche Lebensdauerverteilung mit der Verteilungsfunktion $F(t)$. Aus dieser Funktion kann man sukzessiv durch *Integralfaltungen* die Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$F_n(t) = P[N(t) \geqq n]$$

$$F_n(t) = \int_0^b F_{n-1}(t - v)\,dF(v) \quad \text{mit} \quad F_1(t) = F(t) \tag{164}$$

Zur Charakterisierung des Erneuerungsprozesses $\{N(t), t \in [0, \infty]\}$ bestimmt man Erwartungswert und Varianz.

$H(t) = E[N(t)]$ ist die *Erneuerungsfunktion* des Prozesses [21]. $H(t)$ gibt an, wieviel Elemente durchschnittlich im Zeitraum von 0 bis t erneuert werden. Diese Funktion genügt der Integralgleichung:

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-v)\,\mathrm{d}F(v) \tag{165}$$

bzw. berechnet sich nach:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \tag{166}$$

Für die Varianz von $N(t)$ gilt:

$$\mathrm{Var}\,[N(t)] = 2\int_0^t H(t-v)\,\mathrm{d}H(v) + H(t) - H^2(t) \tag{167}$$

Anhand von $F_n(t)$ kann man abschätzen, wieviel Ersetzungen bis zum Zeitpunkt t bei vorgegebener Sicherheit auftreten.
Soll der Ersatzteilbedarf bis zum Zeitpunkt t mit einer Sicherheit von mindestens 95% abgedeckt werden, dann hat man die Anzahl n von Ersatzteilen so groß zu wählen, daß $P[N(t) < n] \geqq 0{,}95$ ist.
Aus $F_n(t) = P[N(t) \geqq n] = 1 - P[N(t) < n]$ folgt $F_n(t) \leqq 0{,}05$. Die Berechnung von $F_n(t)$ ist nicht einfach, weil sich für die meisten Lebensdauerverteilungen die Integralfaltungen nicht geschlossen durchführen lassen. Deshalb ist auch eine Herleitung der Erneuerungsfunktion $H(t)$ nach (166) in praktischen Fällen selten möglich. Die Ermittlung erfolgt dann durch Stichproben.

Beispiel. Ersatz eines Teilsystems aus gleichen Elementen. Ein System (Gerät, Anlage o. ä.) enthält ein Teilsystem, das aus n gleichen Elementen besteht. Wenn ein Element ausfällt, muß es durch ein neues ersetzt werden. Man kann auch das Teilsystem insgesamt durch ein neues austauschen. Dieser Austausch kann vorausgeplant werden. Hierbei treten Kosten vom Umfang k_2 auf (darin sind enthalten der Preis des Teilsystems, die Lohnkosten und der Zeitaufwand), die sich relativ genau ermitteln lassen.
Fällt ein Element zufällig aus, dann sind die dabei auftretenden Kosten K eine stochastische Größe. Der Wert von K wird durch die Ausfalldauer der Produktionsausfälle, den Preis für ein Element, Lohnkosten usw. bestimmt. Um die Rechnung zu vereinfachen, ersetzt man K durch seinen Erwartungswert $E(K)$, den man anhand eines Mittelwerts aus den tatsächlich angefallenen Kosten schätzt. c sind die durchschnittlichen Kosten je Ausfall während des Einsatzes des Systems [Schätzwert für $E(K)$]. Die Einsatzdauer wird als diskrete Größe aufgefaßt. Sie wird durch ganzzahlige Vielfache der Zeiteinheit ausgedrückt. p_i ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Element, das $i - 1$ Zeiteinheiten alt ist, in der i-ten Zeiteinheit ausfällt ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Eine andere Interpretation für p_i erhält man durch die relativen Häufigkeiten, die man aus Messungen gewinnen kann. $p_i \cdot 100\%$ ist der Prozentsatz von Elementen, die in der i-ten Zeiteinheit ihres Einsatzes ausfallen. p_i wird als bekannt vorausgesetzt.
Für die durchschnittliche Lebensdauer eines Elements erhält man den Schätzwert:

$$\overline{T} = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i \tag{168}$$

In den praktischen Fällen sind nur endlich viele p_i größer als Null; d. h., ab einem bestimmten Indexwert i_0 gilt $p_i = 0$ (für $i > i_0$). Dem Verschleiß eines Elements in einer Zeiteinheit entspricht somit der Wert $1/\overline{T}$. Bei n Elementen hat man insgesamt einen Verschleiß von $n/\overline{T}$ Elementen je Zeiteinheit, der sofort ersetzt werden muß. Dadurch entstehen in jeder Zeiteinheit die Kosten:

$$k_1 = cn/\overline{T} \tag{169}$$

Auf diesen Wert k_1 stellen sich die Ersetzungskosten für die Instandhaltung des Teilsystems ein, wenn nur die ausgefallenen Elemente ersetzt werden. Ein Austausch des Teilsystems selbst erfolgt nicht. Im folgenden wird der Alterungsvorgang des Teilsystems anhand der Alterung der Elemente für die einzelnen Zeiteinheiten beschrieben. Dazu bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, daß ein Element in der k-ten Zeiteinheit ausfällt und durch ein neues ersetzt wird, wobei sein Alter nicht angegeben werden kann.
w_k ist die *Ausfallwahrscheinlichkeit* in der k-ten Zeiteinheit. Zu Beginn (Zeitpunkt 0) wird ein neues, komplettes Teilsystem eingebaut; d. h., jedes Element wird mit der Wahrscheinlichkeit 1 neu ($w_0 = 1$). Auf Grund der Alterung der Elemente gilt: $w_1 = p_1$ und $w_2 = p_2 + w_1 p_1$. Der Ausfall eines Elements in der

zweiten Zeiteinheit setzt sich aus folgenden einzelnen Ereignissen zusammen: entweder fällt das Element im Alter von zwei Zeiteinheiten aus (p_2), oder es fällt im Alter von einer Zeiteinheit aus (p_1), wobei es aber in der ersten Zeiteinheit eingesetzt wurde (w_1).
Die Wahrscheinlichkeiten für diese einzelnen Ereignisse sind in Klammern angegeben. Allgemein gilt:

$$w_k = \sum_{l=0}^{k} p_{k-l} w_l \qquad \text{mit} \qquad p_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad w_0 = 1 \tag{170}$$

Von den n Elementen fallen somit in der k-ten Zeiteinheit nach Einsatz des Teilsystems durchschnittlich nw_k Elemente aus. Diese Elemente müssen sofort ersetzt werden, so daß in der k-ten Zeiteinheit die Kosten cnw_k entstehen. Insgesamt hat man bis einschließlich der k-ten Zeiteinheit Kosten in der Höhe von

$$\sum_{l=1}^{k} ncw_l + k_2$$

k_2 ist der Kostenanteil für das komplette neue Teilsystem. Umgerechnet auf die Zeiteinheit hat man bis zum Zeitpunkt t durchschnittlich Kosten vom Wert:

$$k(t) = \frac{1}{t}\left(k_2 + nc \sum_{l=1}^{t} w_l\right) \tag{171}$$

Durch $k(t)$ ist zu entscheiden, ob es sinnvoll ist, nach einer gewissen Zeit das arbeitende Teilsystem komplett durch ein neues zu ersetzen. Dieser Ersatz ist günstiger, falls

$$\min_{t=1,2,3,\ldots} k(t) < k_1$$

Dem günstigsten Ersetzungszeitpunkt entspricht das Minimum von $k(t)$. Man muß das absolute Minimum ermitteln, da eine Reihe relativer Minima auftreten kann. Die Entwicklung von $k(t)$ wird im Bild 24 dargestellt.
Dieses Beispiel beschreibt einen *Einschwingungsvorgang* des Teilsystems gegen einen stationären Zustand, wobei man das Erreichen dieses Zustandes durch Unterbrechung bewußt verhindert.

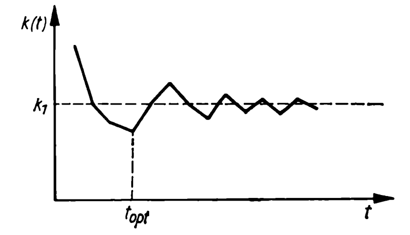


Bild 24. Entwicklung der Kosten je Zeiteinheit

8. Modelle der Bedienungstheorie

Literatur: [11, 24, 30, 39, 41]

Bei einer Reihe von ökonomischen Problemen hat man auf Grund der vorhandenen Verflechtungen zwischen Teilprozessen das Verhalten dieser Prozesse aufeinander abzustimmen. Die Koordinierung wird schwierig, wenn einer der Prozesse oder beide zufälligen Charakter besitzen (z. B. Anzahl von Maschinenausfällen einer Produktionsabteilung in einer Schicht und die Dauer, um einen Ausfall zu beheben).
Die beiden Teilprozesse sind: *Ausfälle* und *Reparaturen*. Es ist die Aufgabe der Bedienungstheorie, die Wechselwirkung zwischen den Teilprozessen mathematisch zu modellieren.

8.1. Begriffe der Bedienungstheorie

Der eine Teilprozeß besteht aus einer Folge von Forderungen an den anderen. Diese Folge bezeichnet man als *Forderungsstrom*, dessen Elemente (Träger der Forderungen) im Bedienungsvorgang teilweise oder vollständig befriedigt werden. Der Träger des Bedienungsvorgangs ist der *Bedienungsapparat*, Schalter oder die Servicestation. Alle drei Bezeichnungen

drücken das gleiche aus. Oft findet man mehrere Bedienungsapparate zu einem *Bedienungssystem* vereinigt.
Der Forderungsstrom wird durch die Anzahl $N(t)$ im Zeitintervall $(0, t)$ eintreffender Elemente beschrieben. Er stellt einen stochastischen Prozeß dar. In vielen Anwendungen kann man den Forderungsstrom durch einen POISSON-Prozeß beschreiben*):

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

Der Parameter λ ist die *Ankunftrate*, die angibt, wieviel Forderungen durchschnittlich in einer Zeiteinheit eintreffen. λ kann man durch den Mittelwert einer Stichprobe von $N(t)$ schätzen.
Der Bedienungsvorgang wird durch die jeweilige Bedienungsdauer beschrieben, die als Realisierung einer Zufallsvariablen aufzufassen ist. Die meisten Anwendungen benutzen spezielle gammaverteilte Bedienungsdauern S.
Die bekannteste Verteilung ist die ERLANG-Verteilung mit der Dichtefunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ \dfrac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} \exp(-k\mu t) & \text{für} \quad t \geqq 0 \end{cases} \tag{172}$$

Für $k = 1$ erhält man die *Exponentialverteilung*. Ihre Parameter sind $E(S) = \mu$ und $\text{Var}(S) = 1/\mu^2$. μ ist die durchschnittliche Bedienungsdauer je Forderung. Man nennt $1/\mu$ die *Bedienungsrate*. Der Teil des Forderungsstroms, der auf die Bedienung des Bedienungssystems wartet bzw. in das letztere eintritt, soll als *Eingangsstrom* bezeichnet werden. Der Forderungsstrom, der das Bedienungssystem verläßt, bildet den *Ausgangsstrom*. Das System aus Eingangsstrom, Bedienungssystem und Ausgangsstrom heißt *Wartesystem*. Die auf Bedienung wartenden Forderungen des Eingangsstroms bilden die *Warteschlange*.

8.2. Verschiedene Bedienungsmodelle — Wartesysteme

Entsprechend dem Forderungsstrom unterscheidet man *offene* und *geschlossene Wartesysteme*. Ein offenes Wartesystem liegt vor, wenn der Forderungsstrom $N(t)$ für fixiertes t unbeschränkt ist (z. B. Fahrkartenschalter, Tankstelle). Ist $N(t)$ beschränkt für fixierte t-Werte, dann liegt ein abgeschlossenes System vor (z. B. Maschinen in einer Produktionsabteilung). Die mathematische Behandlung abgeschlossener Systeme ist i. allg. nicht einfacher als im Falle offener Systeme.
Eine weitere Gruppierung der Wartesysteme ist durch die Organisation des Bedienungssystems oder des Eingangsstromes möglich.
Das Bedienungssystem kann aus parallel- und in Reihe geschalteten Bedienungsapparaten bestehen. Die *Reihenschaltung* wird durch die Qualität des Bedienungsvorgangs bestimmt. Durch *Parallelschaltung* erreicht man eine höhere Leistung des Bedienungssystems. Man kann in Reihe geschaltete Bedienungsapparate als einen Apparat auffassen, so daß im folgenden nur noch Bedienungssysteme mit parallelgeschalteten Apparaten betrachtet werden.
Eine *ungeordnete* Organisationsform des Bedienungssystems liegt vor, wenn alle Apparate gleichberechtigt sind. Bei einem *geordneten* Bedienungssystem existiert eine Hierarchie unter den Bedienungsapparaten. Diese kann man z. B. durch eine Bewertung der Servicestationen erreichen. Eine eintreffende Forderung wird durch den freien Apparat mit der niedrigsten Bewertung bedient.
Die Organisation des Eingangsstroms wird durch die Eintritts- und Auswahlordnung bestimmt. Die *Eintrittsordnung* gibt an, welcher Teil des Forderungsstroms zum Eingangsstrom wird bzw. welcher Teil des Eingangsstroms in das Bedienungssystem eintritt. Die Eintrittsmöglichkeit einer Forderung wird durch ihre Eintrittswahrscheinlichkeit beschrieben, die von der An-

*) s. 2.1.9.



zahl der Forderungen im Wartesystem abhängt. Das Verlassen des Wartesystems ohne Passieren des Bedienungssystems wird als *Verlust* bezeichnet und durch die Verlustwahrscheinlichkeit charakterisiert. Die Verlustwahrscheinlichkeit hängt häufig von der Zeit ab, die die Forderung im Wartesystem bleibt.
Der Eintritt aus dem Eingangsstrom in das Bedienungssystem erfolgt nach der *Auswahlordnung*. Es sollen vier bekannte Ordnungen angegeben werden:

- *natürliche Auswahlordnung:* Die Forderung, die am längsten wartet, wird zuerst bedient.
- *zufallsgesteuerte Auswahlordnung:* Die zu bedienende Forderung wird zufällig aus dem Eingangsstrom ausgewählt.
- *Vorrangsystem:* Die Forderungen sind bewertet (Priorität), wodurch die Dringlichkeit ihrer Bedienung festgelegt wird.
- *Stapelprozeß:* Die Forderung, die die kürzeste Zeit wartet, wird zuerst bedient.

Die Auswahlordnung ist wichtig für die jeweilige Forderung, aber nicht für den Zustand des Wartesystems.

8.3. Zustand eines Wartesystems

Der Zustand eines Wartesystems im Zeitpunkt t wird durch die Anzahl $X(t)$ der Forderungen in diesem System zum Zeitpunkt t bestimmt. Diese Anzahl $X(t)$ ist eine Zufallsvariable, die sich aus folgenden zwei Zufallsvariablen $X_q(t)$ und $X_s(t)$ ergibt:

$X_q(t)$ ist die Anzahl der Forderungen zum Zeitpunkt t in der Warteschlange (Länge der Schlange),
$X_s(t)$ ist die Anzahl der Forderungen zum Zeitpunkt t im Bedienungssystem.

$$X(t) = X_q(t) + X_s(t) \tag{173}$$

Man berechnet die Erwartungswerte $E[X_q(t)]$, $E[X_s(t)]$ für $t \to \infty$; d. h., meistens betrachtet man die Wartesysteme in einem Gleichgewichtszustand, der sich nach längerer Zeit einstellt (stationärer Zustand). Für endliche t-Werte ist die mathematische Behandlung nur in wenigen Fällen explizit durchführbar.
Die einzelne Forderung besitzt drei stochastische Zeitangaben:

- *Wartezeit T_q:* die Zeitdauer, die die Forderung im Eingangsstrom ist.
- *Bedienungs- oder Servicezeit S:* die Zeitdauer, die das Bedienungssystem für die Bedienung benötigt.
- *Verweilzeit T:* die Zeitdauer, die die Forderung im Wartesystem verweilt.

Für jede Forderung gilt:

$$T = T_q + S \tag{174}$$

Die Erwartungswerte dieser Zufallsvariablen sollen für ein spezielles Wartesystem angegeben werden.

Das Bedienungssystem besteht aus m parallelen Stationen, von denen jede die mittlere Bedienungszeit μ besitzt.
Der Eingangsstrom ist ein POISSON-Strom mit der Ankunftsrate λ. Aufgrund dieser Voraussetzung gilt für die Bedienungszeit $E(S) = \mu$. Das Wartesystem wird im stationären Zustand betrachtet. Für die durchschnittliche Länge der Warteschlange gilt:

$$E(X_q) = \frac{P(0)\,\varrho^{m+1}}{(m-1)!\,(m-\varrho)^2} \quad \text{mit} \quad \varrho = \lambda/\mu$$

$P(0)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß keine Forderung im Wartesystem ist. Der Erwartungswert des stationären Zustands ist

$$E(X) = \varrho + \frac{P(0)\,\varrho^{m+1}}{(m-1)!\,(m-\varrho)^2}.$$

Die mittlere Verweilzeit und Wartezeit betragen:

$$E(T) = E(X)/\lambda \quad \text{und} \quad E(T_q) = E(X_q)/\lambda$$

Diese Formeln gelten bei anderen Wartesystemen nicht unbedingt.

Literaturverzeichnis

[1] *Croes, G. A.:* A Method for Solving Travelling Salesman Problems. Operations Research **6** (1958) 5, S. 791–812

[2] *Hellmich, K.:* Die Reiseroute kürzester Weglänge (Dauer). Z. MTW (Mathematik-Technik-Wirtschaft) 7 (1960) 4, S. 166ff.

[3] *Kadlec, D., Vodacek, L.:* Mathematische Methoden zur Lösung von Transportproblemen. — Berlin: VEB transpress-Verlag 1964

[4] *König, D.:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1936

[5] *Krause, H., Weise, G.:* Die Methode der lösenden Summanden — Untersuchungen über den Einfluß von Parameteränderungen des Transportmodells auf die optimale Lösung. Wiss. Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar **15** (1968) 2, S. 171–174

[6] *Little, J. D.,* u. a.: An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. Operations Research **11** (1963) 6, S. 972–989

[7] *Parzen, E.:* Stochastic Processes. Holden-Day Series in Probability and Statistics. — San Francisco (Calif.): Holden-Day Inc. 1962. — S. 324ff.

[8] *Seiffart, E.:* Über Lösungsmethoden einiger spezieller Reihenfolgeprobleme. Wiss. Zeitschrift der Technischen Hochschule Magdeburg **9** (1965) 1

Weiterführende Literatur

[9] *Autorenkollektiv:* Handbuch der Netzplantechnik. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1974

[10] *Autorenkollektiv:* Lagerhaltungsmodelle. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1974

[11] *Autorenkollektiv:* Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung. 2. Aufl. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1972

[12] *Autorenkollektiv:* Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden, Modelle. 3 Bände. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972, 1972, 1973

[13] *Autorenkollektiv:* Operationsforschung in der sozialistischen Wirtschaft. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1969

[14] *Berbig, R., Franke, F.:* Netzplantechnik. 5. Aufl. — Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1976

[15] *Berbig, R., Schindler, J.:* Potentialmethode. — Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1970

[16] *Bialy, H., Olbrich, M.:* Optimierung. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975

[17] *Borowkow, A. A.:* Wahrscheinlichkeitstheorie. — Berlin: Akademie-Verlag 1976

[18] *Fisz, M.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 9. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978

[19] *Förster, E., Egermayer, F.:* Korrelations- und Regressionsanalyse. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1966

[20] *Germeier, J. G.:* Einführung in die Theorie der Operationsforschung. — Berlin: Akademie-Verlag 1974

[21] *Götzke, H.:* Netzplantechnik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1971

[22] *Goldberg, S.:* Die Wahrscheinlichkeit. 3. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1973

[23] *Golenko, D. I.:* Statistische Methoden der Netzplantechnik. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972

[24] *Gnedenko, B. W.:* Einführung in die Bedienungstheorie. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1974

[25] *Gnedenko, B. W., Beljajew, J. K., Solowjew, A. D.:* Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie. 2 Bände. — Berlin: Akademie-Verlag 1968

[26] *Hadley, G.:* Nichtlineare und dynamische Programmierung. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1969

[27] *Herfurth, G.:* Umgang mit Zufallsgrößen, Teil II: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969

[28] *Klemm, H., Mikut, M.:* Lagerhaltungsmodelle. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1972

[29] *Künzi, H. P., Krelle, W.:* Ökonometrie und Unternehmensforschung. Band I: Nichtlineare Programmierung. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1975

[30] *Krampe, H., Kubat, J., Runge, W.:* Bedienungsmodelle. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1973

[31] *Krekó, B.:* Lehrbuch der linearen Optimierung. 6. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissen schaften 1973

[32] *Krekó, B.:* Operationsforschung. Optimierung — Nichtlineare Modelle. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974

[33] *Lohse, H., Ludwig, R.:* Statistik für Forschung und Beruf. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974

[34] *Müller, P. H.:* Lexikon Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1975

[35] *Naddor, E.:* Lagerhaltungssysteme. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1971

[36] *Pawlowski, Z.:* Einführung in die mathematische Statistik. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1970
[37] *Rasch, D.:* Einführung in die mathematische Statistik. 2 Teile. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976
[38] *Richter, K.-J.:* Methoden der Optimierung. Band 1: Lineare Optimierung. 5. Aufl., Band 2: Nichtlineare Optimierung. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975, 1970
[39] *Rosenberg, W. J., Prochorow, A. I.:* Einführung in die Bedienungstheorie. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1964
[40] *Ryshikov, J. I.:* Lagerhaltung. — Berlin: Akademie-Verlag 1973
[41] *Saaty, T. L.:* Elemente der Bedienungstheorie und ihre Anwendung. — Moskau: Isd-wo Sowj. radio 1971
[42] *Seiffart, E., Manteuffel, K.:* Lineare Optimierung. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1974
[43] *Smirnow, N. W., Dunin-Barkowski, I. W.:* Mathematische Statistik in der Technik. 3. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973
[44] *Stahlknecht, P.:* Operations Research. 2. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1970
[45] *Stempell, D.:* Programmierte Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 4. Aufl. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1972
[46] *Störmer, H.:* Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit. — Berlin: Akademie-Verlag 1970
[47] *Storm, R.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[48] *Suchowizki, S. I., Radtschik, I. A.:* Mathematische Methoden der Netzplantechnik. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969
[49] *Vauquois, B.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Braunschweig: Vieweg 1973
[50] *Vogel, W.:* Lineares Optimieren. 2. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1970
[51] *Wagner, H.:* Die Grundlagen der Operationsforschung. 3. Bände. — Moskau: Isd-wo Mir 1972
[52] *Wentzel, J. S.:* Operationsforschung. — Moskau: Isd-wo Sowj. radio 1972
[53] *Zemke, G.:* Lineare Optimierung. — Braunschweig: Vieweg 1971
[54] *Elster, K.-H.:* Einführung in die nichtlineare Optimierung. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977
[55] *Girlich, H.-J.:* Diskrete stochastische Entscheidungsprozesse. — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1973
[56] *Bandemer, H., Bellmann, A.:* Statistische Versuchsplanung. — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976
[57] *Beyer, O., Hackel, H., Pieper, V., Tiedge, J.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976
[58] *Beyer, O., Girlich, H.-J., Zschiesche, H.-U.:* Stochastische Prozesse und Modelle. — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977
[59] *Biess, G., Erfurth, H., Zeidler, G.:* Optimale Prozesse und Systeme. — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1974
[60] *Großmann, Ch., Kleinmichel, H.:* Verfahren der nichtlinearen Optimierung. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977
[61] *Rényi, A.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung. 5. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1977

RD Rechentechnik und Datenverarbeitung

Von Doz. Dr. sc. techn. Klaus Kaplick, Dresden (Abschn. 1., 2.5., 2.6., 4.), *Dipl.-Ing. Helmut Krolop, Dresden* (Abschn. 2.1. bis 2.4.), *und Dr.-Ing. Klaus Wachler, Dresden* (Abschn. 3.)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Allgemeines über Rechenautomaten und Informationsprozesse

Ein *Rechenautomat* ist eine Maschine, deren wesentlichen Bauteile elektronische Bauelemente sind und die die Fähigkeit besitzt, automatisch eine Operationsfolge im Rahmen des vorgegebenen Programms zu steuern.
Rechenautomaten sind Maschinen zur *Informationsverarbeitung*. Sie unterscheiden sich von anderen im allgemeinen durch ihre Anpassungsfähigkeit und Flexibilität. Während z. B. in Rundfunk- und Fernsehgeräten die Informationsverarbeitung eindeutig durch die Gerätetechnik festgelegt ist, können die Eingangsinformationen eines Rechenautomaten zu den verschiedensten Ausgangsinformationen verknüpft werden. Für jede gewünschte Informationsverarbeitung ist ein entsprechendes Programm erforderlich.
Man unterscheidet zwischen folgenden funktionellen Informationsprozessen:

- Informationsgewinnung,
- Informationseingabe,
- Informationsübertragung,
- Informationsverarbeitung,
- Informationsspeicherung,
- Informationsausgabe und
- Informationsverwertung.

In einigen Fällen kann es angebracht sein, die Informationsgewinnung und -eingabe oder die Informationsausgabe und -verwertung zusammenzufassen.
Die Bearbeitung eines Problems mit Hilfe der *Rechentechnik* verläuft in den Stufen:

- Problemstellung,
- mathematische Formulierung,
- Algorithmus (Lösungsweg),
- Programmablaufplan (Flußbild),
- Programm,
- Programmerprobung,
- Durchführung der Rechnung,
- Auswertung der Ergebnisse.

Diese Kette beginnt und endet beim *Bearbeiter* des Problems. Zur Verkürzung der Bearbeitungszeit, zur Vermeidung von Übergabefehlern und unnötigen Rückfragen (z. B. zwischen Problembearbeiter und Programmierer) und damit zur Rationalisierung und Kostensenkung ist es nützlich und deswegen anzustreben, daß jeder Ingenieur, der entsprechende Probleme bearbeitet, in der Lage ist, die Lösung maßgeblich zu beeinflussen.

1.2. Gegenüberstellung Analogrechner — Digitalrechner

1.2.1. Signalformen

Signale sind die Träger von Informationen. Sie sind im allgemeinen zeitlich veränderlich. Man unterscheidet *stetig verlaufende* (analoge) und *unstetig verlaufende* (diskrete, digitale) Signale. Ein spezieller Fall der Digitalsignale ist das *Binärsignal*, das durch zwei konkrete Zustände gekennzeichnet ist.



1.2.2. Charakterisierung von Analog- und Digitalrechnern

In Abhängigkeit davon, mit welcher Art von Signalen die Informationsverarbeitung innerhalb des Rechners erfolgt, werden die Rechner in analoge und digitale unterteilt.
Elektrische *Analogrechner* stellen meistens die Rechenwerte durch die Größe von Gleichspannungen dar. Dabei werden vorwiegend elektronische Bauelemente und teilweise gesteuerte Potentiometer benutzt. Es liegt im Wesen des Analogrechners begründet, daß infolge der Möglichkeit, physikalische Systeme zu simulieren, eine enge Verknüpfung zur Regelungstechnik besteht.
Der *Digitalrechner* hingegen ist für Berechnungen unterschiedlichster Art geeignet. Er wird daher häufig als *digitaler Universalrechenautomat* bezeichnet. Die Darstellung der Zahlenwerte erfolgt fast ausschließlich im Binär- oder Dualsystem. Dies liegt darin begründet, daß dann die elektronischen Bauelemente nur zwei extreme Zustände einzunehmen brauchen. Dadurch wird eine hohe Zuverlässigkeit und geringe Anfälligkeit gegenüber Störsignalen erreicht. Während beim Analogrechner ein physikalisches System durch ein analoges elektrisches System ersetzt wird und die Lösung durch den Verlauf der elektrischen Größen gegeben ist, werden beim Digitalrechner alle Operationen im Grunde auf einfache logische Ja-Nein-Entscheidungen zurückgeführt.
Tabelle 1 zeigt einen Vergleich beider Rechnerarten.

Tabelle 1. Vergleich Analogrechner — Digitalrechner

Rechnerart	Analogrechner	Digitalrechner
Informationsträger	kontinuierlich	diskontinuierlich
Genauigkeit	begrenzt	beliebig genau
Genauigkeitsanforderungen an Signale	sehr hoch	gering
Informationsspeicherung	hoher Aufwand, ungenau	fehlerfrei, mehrere Möglichkeiten
Informationsverarbeitung	Rechenoperationen am elektronischen Modell	logische Entscheidungen
Wertebereich	begrenzt durch Maschinenspannung	hoch verfügbar
Programmierung	anschaulich durch relativ einfache Beziehung zwischen Original und Modell	abstrakt über mathematische Modelle und problemorientierte Programmsprachen, große Flexibilität
Anwendungsbereich	gewöhnliche lineare und nichtlineare Differentialgleichungen, Nachbildung physikalischer Systeme, die sich durch Diff.-gleichungen beschreiben lassen	Funktions- und Formelberechnungen, algebraische Gleichungssysteme, grundsätzlich alle Probleme, deren Lösungen genauer als 0,1% sein sollen

Es gibt Fälle, in denen der kombinierte Einsatz von Analog- und Digitalrechner zweckmäßig ist, um die Vorteile beider Rechner zu vereinen und ihre Nachteile auszuschalten. Vor allem ist es für die Behandlung mancher Probleme erforderlich, die Geschwindigkeit eines Analogrechners mit der Genauigkeit eines Digitalrechners zu kombinieren. So ist z. B. ein Digitalrechner meist nicht in der Lage, die Nachbildung chemischer Prozesse schnell genug zu realisieren, um eine Echtzeitsimulation zu erlauben. Andererseits würde die reine analoge Behandlung aufgrund ihrer relativ geringen Genauigkeit die Bewältigung dieser Aufgabe nicht zulassen. Eine Verbindung von Digital- und Analogrechner wird als *Hybridrechner* bezeichnet.

1.3. Einheitliches System der elektronischen Rechentechnik (ESER)

In Gemeinschaftsarbeit der UdSSR mit anderen sozialistischen Staaten — der VR Bulgarien, der Ungarischen VR, der VR Polen, der ČSSR und der DDR — entstand als Rechnerfamilie das „Einheitliche System der elektronischen Rechentechnik" (ESER). Dieses System, dessen erste Modelle erstmals auf der Ausstellung „ESER 73" in Moskau gezeigt wurden, besteht aus einer Reihe *Zentraleinheiten*, die in ihrer Leistung aufeinander abgestimmt sind, und einem umfangreichen Angebot von *peripheren Geräte- und Systemunterlagen*. Das ESER wird durch folgende wesentliche Merkmale gekennzeichnet:

- einheitliche Grundkonzeption aller Zentraleinheiten,
- unterschiedliche, abgestufte Leistungsparameter der Zentraleinheiten und der Peripherie,
- keine Trennung zwischen wissenschaftlich-technischen und kommerziellen Rechnern,
- Programmkompatibilität durch einheitliche Befehlsliste,
- Datenkompatibilität,
- Anschlußmöglichkeiten der gleichen peripheren Geräte an alle Zentraleinheiten durch das Standard interface ESER,
- einheitliche Betriebssysteme.

Die Entwicklung dieses Rechnersystems ist ein Beispiel für die Leistungsfähigkeit und den Nutzen der sozialistischen Integration. Die Entwicklungskosten reduzieren sich für die Teilnehmer auf rund 25 ··· 30%, es wurde erhebliche Entwicklungszeit eingespart, und für alle beteiligten Staaten steht eine große Anzahl von Rechnersystemen zur Auswahl und Kombination zur Verfügung. Dieses einheitliche System der elektronischen Rechentechnik wird im Zuge der Entwicklung von Wissenschaft und Technik stets in Gemeinschaftsarbeit weiterentwickelt werden.

1.4. Mikroelektronik und Mikrorechner

Die Entwicklung moderner Herstellungstechnologien führte zu einem hohen Integrationsgrad elektronischer Bauelemente der Rechentechnik. Die erreichbaren Bauelementedichten gestatten es, hochintegrierte Schaltkreise zu entwickeln, die komplexe Funktionen in sich vereinen. Die Mikrorechner verbinden dabei modernste Aspekte der Bauelementetechnologie mit aktuellen Gesichtspunkten der Rechnerkonzipierung in einer universellen hochintegrierten Struktur.
Mikrorechner sind Rechenautomaten auch im Sinne der bereits gegebenen Definition. Sie haben die gleiche Grundstruktur wie die konventionellen Rechenautomaten.
Die Tatsache, daß die Mikrorechner aufgrund der modernen Herstellungsverfahren und der großen Stückzahlen relativ billig angeboten werden können, eröffnet ihnen ein sehr breites Einsatzgebiet und ihre volle Integration in Maschinen und Geräten, wie z. B. in numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen, Wasch- und anderen Haushaltsautomaten, Kraftfahrzeugen und Laborgeräten.

1.5. Bemerkungen zum vorliegenden Abschnitt

Im Abschnitt Rechentechnik und Datenverarbeitung werden die Geräte- und die Programmtechnik der Rechenautomaten behandelt und einige Anwendungsbeispiele für ingenieurtechnische Probleme gezeigt. Die Erläuterungen sind eng mit den Abschnitten Mathematik, Operationsforschung und anderen verbunden. Dem Leser wird deshalb empfohlen, zum besseren Verständnis und zur Erklärung unbekannter Begriffe dort nachzuschlagen. Im übrigen wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.

2. Digitalrechentechnik

2.1. Digitale Arbeitsweise

2.1.1. Zahlendarstellung

Um Informationen in einem elektronischen Digitalrechner verarbeiten zu können, ist es notwendig, Zahlenwerte durch eine bestimmte Kombination von elektrischen Potentialen darzustellen. Dabei muß ein für die technische Realisierung günstiges Zahlensystem ausgewählt werden. Das Bildungsgesetz für die üblichen *polyadischen Zahlensysteme* lautet:

$$x = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k \cdot B^k; \qquad a = 0, 1, 2, \ldots, (B-1) \tag{1}$$

Für das *Dezimalsystem* gilt: $B = 10$; $a = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Beispiel. $x = 145{,}28 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$

2.1.1.1. Dualzahlen (Binärzahlen)

Setzt man in Gl. (1) $B = 2$ ($a = 0$ oder 1), dann erhält man die Zahlendarstellung im *Zweiersystem.* Es wird auch *Dualsystem,* Binärsystem oder dyadisches System genannt.

Beispiel. $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11)_{10}$

Der Index deutet an, daß es sich um eine Zahl im Dualsystem handelt. Um Verwechslungen der 1 im Dualsystem mit der 1 im Dezimalsystem vorzubeugen, wird häufig anstelle der 1 ein L geschrieben: $(1011)_2 \triangleq$ LOLL.

Eine Stelle im Binärsystem wird *Bit* (binary digit) genannt. Die Zuordnung zwischen Dezimalzahlen und Binärzahlen für 0 bis 17 ist in Tabelle 2 enthalten.

Tabelle 2. Zuordnung Dezimalzahl — Binärzahl

Dezimal	Binär	Dezimal	Binär	Dezimal	Binär
0	0	6	LLO	12	LLOO
1	L	7	LLL	13	LLOL
2	LO	8	LOOO	14	LLLO
3	LL	9	LOOL	15	LLLL
4	LOO	10	LOLO	16	LOOOO
5	LOL	11	LOLL	17	LOOOL

Umwandlung von Dezimal- in Binärzahlen:

Bei der gebräuchlichsten Methode zur Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Binärzahl dividiert man die Dezimalzahl und nachfolgend jeden Quotienten durch zwei. Der jeweils auftretende Rest (0 oder 1) entspricht einer Ziffer der Binärzahl. Es wird so lange dividiert, bis der Quotient 0 erreicht wird. Der letzte entstehende Rest bildet die höchstwertige Ziffer der Binärzahl.

Beispiel. $57_{10} = x_2$,
57 : 2 = 28 Rest 1;
28 : 2 = 14 „ 0;
14 : 2 = 7 „ 0;
7 : 2 = 3 „ 1;
3 : 2 = 1 „ 1;
1 : 2 = 0 „ 1

Mithin gilt: $57_{10} = 111001_2$ oder LLLOOL

Rechenregeln für Binärzahlen:

Addition:		Subtraktion:		Multiplikation:		
	O + O = O		O − O = O		O · O = O	
	O + L = L		L − O = L		O · L = O	(2)
	L + O = L		L − L = O		L · O = O	
	L + L = LO		LO − L = L		L · L = L	

Beispiel.

Addition	Subtraktion	Multiplikation
LOOL	LOOL	LOOL · LOL
+ LOL	− LOL	LOOL
= LLLO	= LOO	OOOO
		LOOL
		= LOLLOL

Den Binärzahlen kommt bei der Zahlendarstellung in Digitalrechnern eine besondere Bedeutung zu, und zwar deshalb, weil viele elektronische Bauelemente *zwei stabile Zustände* haben:

Schalttransistor: leitend — nichtleitend
Kippstufe: gesetzt — zurückgesetzt
Ferritkern: magnetisiert — entmagnetisiert

Man ordnet dem einen Zustand L, dem entgegengesetzten O zu.

2.1.1.2. Oktalzahlen

Eine Sonderstellung nimmt in diesem Zusammenhang das System der *Oktalzahlen* ein: $B = 8$, $a = 0, 1, 2, \ldots, 7$ nach Gl. (1).

Beispiel. $(14)_8 = 1 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = (12)_{10}$

Der Grund dafür ist die einfache Konvertierbarkeit mit dem Dualsystem. Teilt man eine Dualzahl rechtsbündig in Dreiergruppen ein, dann entspricht jede Gruppe für sich einer Ziffer im Oktalsystem, da sich mit 3 Stellen im Dualsystem genau die Zahlen $0 \cdots 7$ darstellen lassen.

Beispiele. LOLO = OOL OLO = $(12)_8$; LOOLOL = LOO LOL = $(45)_8$

2.1.1.3. Codierung

Für die Informationsverarbeitung im Rechner ist es erforderlich, Zahlen umzuwandeln oder zu codieren bzw. decodieren. Werden beispielsweise den Ziffern des Dezimalsystems $0 \cdots 9$ die entsprechenden Binärzahlen zugeordnet, so sind dazu 4 Bits notwendig. Bei der Realisierung sollen die Signale $x_0 \cdots x_9$ die Signale $y_0 \cdots y_3$ im Sinne der Tabelle 3 erzeugen. Die mathematische Beschreibung lautet:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_1 \lor x_3 \lor x_5 \lor x_7 \lor x_9 \\ y_1 &= x_2 \lor x_3 \lor x_6 \lor x_7 \\ y_2 &= x_4 \lor x_5 \lor x_6 \lor x_7 \\ y_3 &= x_8 \lor x_9 \end{aligned} \tag{3}$$

Unter Verwendung der Symbole[1]) nach Tafel 1 ergibt sich die in Bild 1 gezeigte Schaltung. Der umgekehrte Vorgang (*Decodierung*) läßt sich wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} y_0 &= \bar{x}_3 \land \bar{x}_2 \land \bar{x}_1 \land \bar{x}_0; & y_5 &= \bar{x}_3 \land x_2 \land \bar{x}_1 \land x_0 \\ y_1 &= \bar{x}_3 \land \bar{x}_2 \land \bar{x}_1 \land x_0; & y_6 &= \bar{x}_3 \land x_2 \land x_1 \land \bar{x}_0 \\ y_2 &= \bar{x}_3 \land \bar{x}_2 \land x_1 \land \bar{x}_0; & y_7 &= \bar{x}_3 \land x_2 \land x_1 \land x_0 \\ y_3 &= \bar{x}_3 \land \bar{x}_2 \land x_1 \land x_0; & y_8 &= x_3 \land \bar{x}_2 \land \bar{x}_1 \land \bar{x}_0 \\ y_4 &= \bar{x}_3 \land x_2 \land \bar{x}_1 \land \bar{x}_0; & y_9 &= x_3 \land \bar{x}_2 \land \bar{x}_1 \land x_0 \end{aligned} \tag{4}$$

Bild 2 zeigt die dazugehörige Schaltung.

Tabelle 3. Zuordnung bei der Codierung Binär—Dezimal

x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	y_3	y_2	y_1	y_0
									Wertigkeit	8	4	2	1
0	0				. . .			0	1	O	O	O	O
0	0							1	0	O	O	O	L
							1			O	O	L	O
						1				O	O	L	L
					1					O	L	O	O
				1						O	L	O	L
			1							O	L	L	O
		1								O	L	L	L
0	1							0	0	L	O	O	O
1	0				. . .			0	0	L	O	O	L

Tafel 1. Symbolik der logischen Schaltkreise

Bezeichnung	Symbol	Funktion
UND (AND)	x_1, x_2 — & — y	$y = x_1 \wedge x_2$
ODER (OR)	x_1, x_2 — 1 — y	$y = x_1 \vee x_2$
NEGATION	x — 1 —o y	$y = \bar{x}$
NICHT-UND (NAND)	x_1, x_2 — & —o y	$y = \overline{x_1 \wedge x_2}$
NICHT-ODER (NOR)	x_1, x_2 — 1 —o y	$y = \overline{x_1 \vee x_2}$
Verstärker	x — ▷ — y	$y = x$
Verstärker mit Negation	x — ▷ —o y	$y = \bar{x}$

Die gebräuchlichsten Codes sind die ***tetradischen***, da sie eine minimale Stellenanzahl benötigen. Jede Dekade wird durch eine Tetrade (vierstellige Binärzahl) dargestellt. Es gibt insgesamt $2^4 = 16$ Tetraden. Zehn werden davon genutzt, die restlichen sechs sind sogenannte ***Pseudotetraden***.

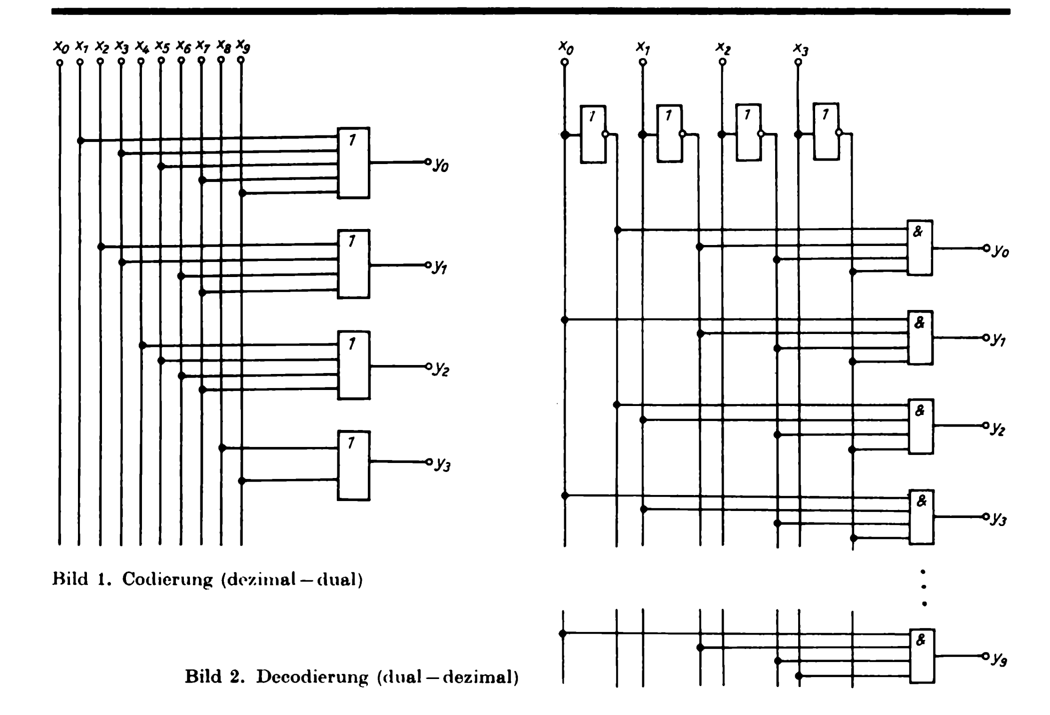


Bild 1. Codierung (dezimal – dual)

Bild 2. Decodierung (dual – dezimal)

Die wichtigsten tetradischen Codes sind (Tabelle 4):

— *BCD-Code* (*Binär codierter Dezimalcode*)

Bei diesem Code werden die ersten zehn der 16 möglichen Kombinationen verwendet, d. h., die Darstellung der Dekaden erfolgt entsprechend dem Binärsystem mit dem Stellenwert 8 – 4 – 2 – 1.

— *Aikencode*

Dieser Code verwendet die ersten und letzten fünf der 16 möglichen Kombinationen. Die sechs dazwischenliegenden Pseudotetraden müssen mittels Zählers übersprungen werden. Der Stellenwert ergibt sich zu 2 – 4 – 2 – 1.

— *3-Exzeß-Code*

Hier werden nur die mittleren zehn Kombinationen verwendet. Die ersten und letzten drei Tetraden sind Pseudotetraden. Eine 3-Exzeß-Zahl besitzt einen Wert, der um 3 kleiner ist als die dieser Kombination entsprechende Binärzahl.

Tabelle 4. Zusammenstellung einiger Codes

Code	BCD				Aiken				3-Exzeß			
Wertigkeit	8	4	2	1	2	4	2	1	–	–	–	–
0	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	L	L
1	O	O	O	L	O	O	O	L	O	L	O	O
2	O	O	L	O	O	O	L	O	O	L	O	L
3	O	O	L	L	O	O	L	L	O	L	L	O
4	O	L	O	O	O	L	O	O	O	L	L	L
5	O	L	O	L	L	O	L	L	L	O	O	O
6	O	L	L	O	L	L	O	O	L	O	O	L
7	O	L	L	L	L	L	O	L	L	O	L	O
8	L	O	O	O	L	L	L	O	L	O	L	L
9	L	O	O	L	L	L	L	L	L	L	O	O

2.1.2. Maschinenwort

2.1.2.1. Wortlänge

Die Anzahl der Ziffern, mit denen Zahlenrechnungen durchgeführt werden, faßt man in der Informationseinheit *Wort* zusammen. Je genauer die Berechnungen sein sollen, um so mehr Ziffern werden benötigt, d. h., um so größer muß die Wortlänge sein. Die *Wortlänge* beträgt je nach Ausführung und Anwendungszweck des Rechners zwischen 12 und 64 Bit. Negative Zahlen können nicht wie üblich dargestellt werden.

Im reinen Dualsystem geschieht die Darstellung einer negativen Zahl am häufigsten mittels des Zweier-Komplements. Es wird gebildet, indem die einzelnen Stellen für sich invertiert werden und zu der so erhaltenen Zahl eine Eins addiert wird. Das erste Bit des Worts wird als Vorzeichen gewertet:

O $\triangleq$ positive Zahl L $\triangleq$ negative Zahl

Auf diese Weise können bei einer Wortlänge von N Bit Zahlen (x) zwischen -2^{N-1} und $+2^{N-1}-1$ dargestellt werden.

Beispiel. $N = 6$ ergibt $(-32) \leqq x \leqq (+31)$ oder LOOOOO $\leqq x \leqq$ OLLLLL

Durch die Komplementdarstellung negativer Zahlen kann eine Subtraktion auf eine Addition zurückgeführt werden, d. h., mit einem Addierwerk können damit gleichzeitig Addition und Subtraktion verwirklicht werden.

Beispiel. $N = 6$; Rechne 18 − 4 und 4 − 18:

	OLOOLO $\triangleq$ +18		OOOLOO $\triangleq$ +4
Invertiert:	LOLLOL		LLLOLL
+	L	+	L
	LOLLLO $\triangleq$ −18		LLLLOO $\triangleq$ −4

+18	+ OLOOLO	+ 4	+ OOOLOO
− 4	+ LLLLOO	−18	+ LOLLLO
= +14	= OOLLLO	= −14	= LLOOLO

2.1.2.2. Wortarten

Fest- und Gleitkommawort

Wenn zwei beliebige Zahlen addiert werden sollen, muß dafür gesorgt werden, daß das Komma bei beiden an der gleichen Stelle steht. Das *Maschinenkomma* hat einen festen Platz, normalerweise vor dem ersten Bit eines Worts. Das bedeutet, daß alle Zahlen kleiner als eins sind. Durch die erforderliche stellengerechte Eingabe von Daten ist die Festkommarechnung recht umständlich und hat außerdem den Nachteil, daß die Rechengenauigkeit nicht voll ausgenutzt werden kann.

Bei der *Gleitkommarechnung* werden die Zahlen in zwei Teile zerlegt, in den Ziffernfaktor (Mantisse) und den Exponenten:

$$x = a_1 \cdot B^b$$

Beispiel. (B = 10)

$+12\,340 = +0{,}1234 \cdot 10^{+5}$
$-\;123{,}4 = -0{,}1234 \cdot 10^{+3}$
$+\;0{,}012\,34 = +0{,}1234 \cdot 10^{-1}$

Die Darstellung im Rechner würde entsprechend erfolgen:

+1234 + 5
−1234 + 3
+1234 − 1

Für den Exponenten führt man die Charakteristik ein, indem der Exponent um eine bestimmte Zahl erhöht wird, z. B. um 50. Dadurch entfällt die Darstellung des Vorzeichens für den Exponenten (Bild 3). Es ergeben sich die Zahlen:

+123455
−123453
+123449

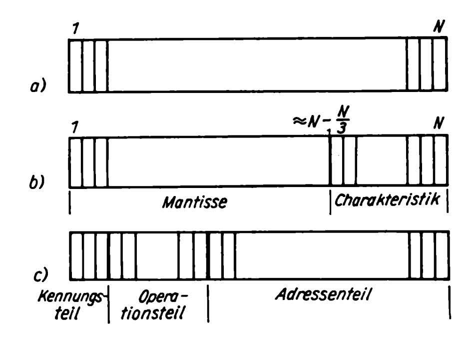


Bild 3. Wortarten. a) Festkommawort; b) Gleitkommawort; c) Befehlswort

Das Verhältnis von Ziffernfaktor und Charakteristik liegt, bezogen auf die Wortlänge, bei 3···4.
Es gibt noch die Möglichkeit, durch Vervielfachung der Wortlänge mittels Programms eine erhöhte Rechengenauigkeit bei unwesentlicher Verminderung der Operationsgeschwindigkeit zu erzielen.

Befehlswort

Das Befehlswort enthält Informationen über die Art der auszuführenden Operationen und die Adressen, unter denen die Zahlen, mit denen die Operation durchgeführt werden soll, im Speicher stehen. Entsprechend dem Maschinentyp (Ein-, Zwei-, Drei-, Vier- oder Fünfadreß-maschine) muß das Befehlswort 1···5 Adressen enthalten. Die *Adressen* bedeuten die Numerierung der Speicherplätze im Arbeitsspeicher.

Bei einer *Dreiadreßmaschine,* bei der eine Addition durchgeführt werden soll, bedeuten die drei Adressen folgendes: Addiere den Inhalt der ersten Adresse zu dem der zweiten Adresse und speichere das Ergebnis in die dritte Adresse. Bei der *Zweiadreßmaschine* fehlt die Adresse für das Ergebnis; es kann in eine der Ausgangszellen geschrieben werden. Bei der *Einadreßmaschine* sind für die obengenannte Addition 3 *Befehle* notwendig.

— Laden eines Zwischenspeichers (Akkumulators) mit der ersten Zahl,
— Addition mit der zweiten Zahl,
— Speichern nach der gewünschten Adresse.

Moderne Maschinen sind größtenteils Einadreßmaschinen, da sie in konstruktiver Hinsicht wesentlich einfacher sind und bei gleicher Wortlänge ein größerer Bereich adressierbar ist.

Befehle können unterteilt werden in:

1. Transportbefehle
   — Ein-/Ausgabebefehle
   — Speicherzugriffsbefehle
   — Verschiebebefehle
2. Arithmetische Befehle
3. Organisationsbefehle
   — Sprungbefehle
   — Befehle zur Adressenänderung.



2.2. Rechnerstruktur

Zwischen der Struktur eines Digitalrechners und einem Menschen, der eine konventionelle Tischrechenmaschine benutzt, Zwischenergebnisse und schließlich das Endergebnis aufschreibt, besteht eine gewisse Analogie (Bild 4).

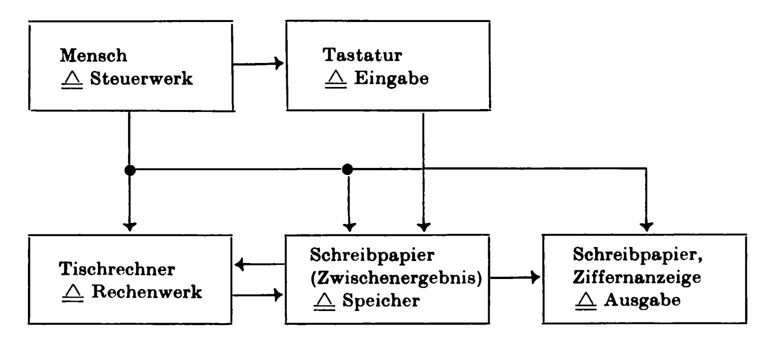


Bild 4. Analogie Mensch mit Tischrechenmaschine — Digitalrechner

Das *Standardsystem* eines Rechners besteht aus folgenden wesentlichen Teilen (Bild 5):

1. Rechenwerk, } Zentrale Verarbeitungseinheit (ZVE) } Zentraleinheit (ZE)
2. Steuerwerk,
3. Speicher,
4. Eingabewerk, } Peripherie
5. Ausgabewerk.

Die *Peripherie* kann erweitert werden und sehr vielgestaltig sein. Sie wird dann unterteilt in:

— Datenverarbeitungsperipherie und
— Prozeßdatenperipherie.

Zur *Datenverarbeitungsperipherie* gehören alle Ein- und Ausgabegeräte sowie externe Speicher, die die üblichen Datenträger verwenden (Lochband, Lochkarte, Schreibpapier, Magnetband, Magnetkarte, Magnetplatte).

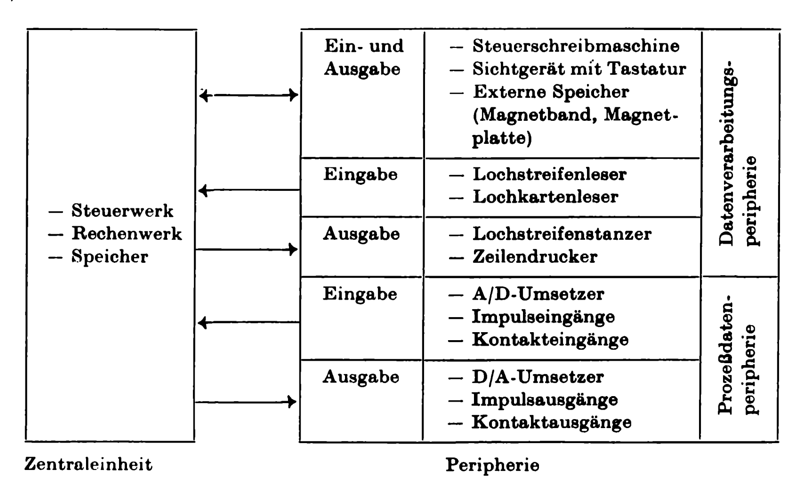


Bild 5. Struktur eines Rechnersystems

Geräte der *Prozeßdatenperipherie* wandeln physikalische Meßgrößen in entsprechende digitale Zeichen um und umgekehrt (Digital-Analog-Umsetzer, Analog-Digital-Umsetzer, Impulszähler, Schrittmotoren). Je nach Gerätekonfiguration und damit nach Verwendungszweck spricht man von einer *Datenverarbeitungsanlage* oder von einem *Prozeßrechner*. Der Prozeßrechner besitzt ebenfalls ein Mindestmaß an Datenverarbeitungsperipherie, um Programme eingeben oder Protokolle ausgeben zu können.

2.2.1. Zentraleinheit

2.2.1.1. Rechenwerk

Das Rechenwerk ist in der Regel so ausgelegt, daß es selbst nur die Addition ausführen kann. Die Subtraktion ergibt sich durch die Komplementdarstellung, und für die Multiplikation, Division und andere Operationen wird ein maschineninternes verdrahtetes Grundprogramm abgearbeitet. Dem Verfahren nach unterscheidet man Parallel- und Serien-Rechenwerk.

Parallel-Rechenwerk

Das Rechenwerk besteht im wesentlichen aus Registern und logischen Verknüpfungsschaltungen. Rechenregister sind: Akkumulator A, Multiplikanten-Quotienten-Register M und Übertragregister C (Bild 6).

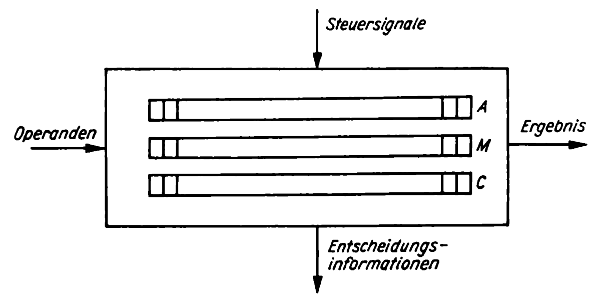


Bild 6. Schema eines parallelen Rechenwerks

Register sind einzellige Speicher mit hoher Schaltgeschwindigkeit und geringer Zugriffszeit. Sie bestehen für gewöhnlich aus einer Anzahl Flip-Flops (bistabile Kippstufen), die entweder der Wortlänge entspricht oder für spezielle Zwischenspeicherungen beliebig sein kann.

Eingangssignale für das Rechenwerk sind:

- Operanden (Zahlenwerte) und
- Steuersignale (vom Steuerwerk).

Die Operanden werden in Abhängigkeit von den Steuersignalen während der Taktzeiten (s. Steuerwerk) übernommen und weiterverarbeitet. Der ursprüngliche Zustand der parallelen Rechenregister wird dabei so geändert, daß daraus das Resultat der Operation abgeleitet werden kann.

Die *Ausgangssignale* sind:

- Ergebnisse (die abgespeichert oder ausgegeben werden) oder
- Entscheidungsinformationen (für das Steuerwerk).

Entscheidungsinformationen sind etwa das Vorzeichen des Akkumulatorinhalts oder der Inhalt des Übertragregisters. Gegebenenfalls beeinflussen sie das Grundprogramm im Verlauf der Operation (etwa bei einer Multiplikation oder Division). Andererseits können sie direkt auf das Programm einwirken, wie es z. B. beim bedingten Sprungbefehl der Fall ist, bei dem in Abhängigkeit von dieser Information zu einer anderen Stelle gesprungen wird, als es der normale Programmverlauf vorsieht. Im Bild 6 ist angedeutet, welche Möglichkeiten der logischen Verknüpfungen beim parallelen Rechenwerk bestehen. Die Inhalte der einzelnen Binärstellen i ($i = 1, 2, \ldots N$) der Register seien $\langle A_i \rangle = a_i$, $\langle M_i \rangle = m_i$, $\langle C_i \rangle = c_i$ die des

Operanden o_i. Das Steuersignal für die Operation k sei S_k. Die folgenden Operationen können damit beschrieben werden:

Summe: $S_1\ (a_i \wedge \bar{o}_i \wedge \bar{c}_i \vee \bar{a}_i \wedge o_i \wedge \bar{c}_i \vee \bar{a}_i \wedge \bar{o}_i \wedge c_i \vee a_i \wedge o_i \wedge c_i) =: a_i$
Übertrag: $S_2\ (a_i \wedge o_i \vee a_i \wedge c_i \vee o_i \wedge c_i) =: c_i$
Rechtsverschiebung in A: $S_3\, a_i =: a_{i-1}$
Rechtsverschiebung in M: $S_4\, m_i =: m_{i-1}$
Linksverschiebung in A: $S_5\, a_i =: a_{i+1}$
Linksverschiebung in M: $S_6\, m_i =: m_{i+1}$
Linksverschiebung in C: $S_7\, c_i =: c_{i+1}$
Negation in A: $S_8\, a_i =: a_i$
Inhalt A nach M: $S_9\, a_i =: m_i$
Inhalt M nach A: $S_{10}\, m_i =: a_i$

Die Schaltung zur Verwirklichung einer Addition heißt *Addierwerk* oder *Addierer*. Es gibt Halbaddierer und Volladdierer. Der Halbaddierer besitzt zwei Eingänge (Addend und Augend) und zwei Ausgänge (Summe und Übertrag), während der Volladdierer 3 Eingänge (Addend, Augend und Übertrag) zu Summe und Übertrag verarbeiten muß (Bild 7). Zwei Halbaddierer lassen sich zu einem Volladdierer zusammenschalten.

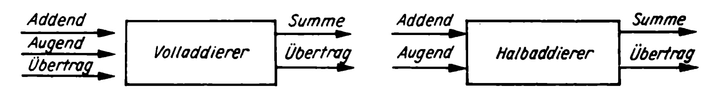


Bild 7. Prinzip des Addierers

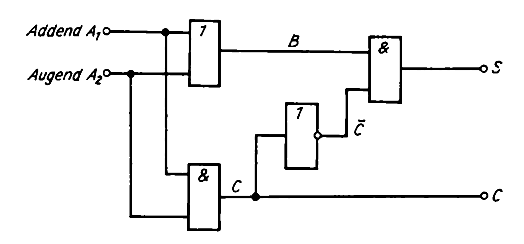


Bild 8. Schaltung eines Halbaddierers

Entsprechend den Regeln der binären Addition ergibt sich die schaltungstechnische Möglichkeit für den Aufbau eines Halbaddierers unter Verwendung von UND- und ODER-Gattern und Negatoren (Bild 8).

Unter der Voraussetzung einer positiven Logik ist ein Signal wahr (W oder L), wenn der Spannungspegel hoch (+ V) ist, und falsch (F oder O), wenn der Spannungspegel tief (0 V) ist. Die Gleichungen für die Signale gemäß Bild 8 sind:

$B = A_1 \vee A_2$, $\quad C = A_1 \wedge A_2$ und

$S = B \wedge \bar{C} = (A_1 \vee A_2) \wedge (\overline{A_1 \wedge A_2}) = \bar{A}_1 \wedge A_2 \vee A_1 \wedge \bar{A}_2$

Das bedeutet: C (W), wenn A_1 (W) und A_2 (W)
S (W), wenn A_1 (F) und A_2 (W) oder
A_1 (W) und A_2 (F)

Die Verknüpfung zweier Halbaddierer zu einem Volladdierer geschieht wie folgt (Bild 9):

$B = A_1 \vee A_2 \vee C_0$

$C_1 = A_1 \wedge A_2 \vee A_1 \wedge C_0 \vee A_2 \wedge C_0$

$E = A_1 \wedge A_2 \wedge C_0$

$D = B \wedge \bar{C}_1$

$S = D \vee E$

Durch Substitution erhält man:

$S = A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{C}_0 \vee A_2 \wedge \bar{A}_1 \wedge \bar{C}_0 \vee C_0 \wedge \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \vee A_1 \wedge A_2 \wedge A_0$

Da die Verarbeitung parallel erfolgt, muß bei einer Wortlänge von N Bits die Schaltung nach Bild 9 N-fach ausgeführt werden.

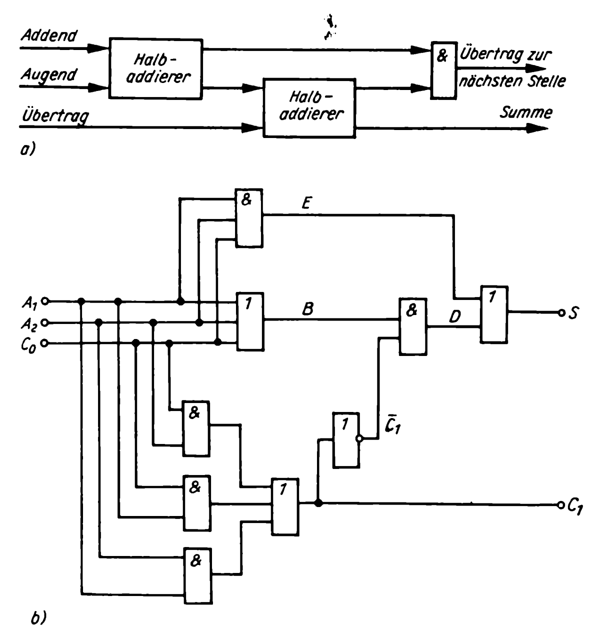


Bild 9. Schaltung eines Volladdierers. a) Prinzip; b) Schaltbild

Serien-Rechenwerk

Die Rechenregister sind im wesentlichen Schieberegister, die zu jeder Zeit t ein Bit aufnehmen und ein anderes abgeben.

Eingangssignale sind:

- Bits der Operanden und
- Steuersignale (vom Steuerwerk).

Es liegen meist die gleichen Steuersignale für N Taktzeiten (Wortlänge N Bits) an.

Ausgangssignale sind:

- Bits der Ergebnisse,
- Entscheidungsinformationen.

Eine mögliche Schaltung für den Serien-Volladdierer ergibt sich wieder aus der Vereinigung zweier Halbaddierer (Bild 10). Es ist nur ein Addierer erforderlich, da alle Bits nacheinander die Schaltung durchlaufen. Durch die Verzögerung t steht der Übertrag am zweiten Halbaddierer an, wenn die zwei nachfolgenden Eingangsimpulse summiert aus dem ersten Halbaddierer ebenfalls am Eingang des zweiten liegen.

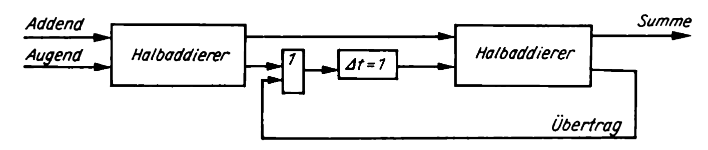


Bild 10. Prinzip des Serien-Volladdierers

2.2.1.2. Steuerwerk

Das *Steuerwerk* steuert alle Vorgänge, die für die Durchführung der Rechenoperationen bzw. zur Informationsübertragung notwendig sind. Es erzeugt die Steuersignale für den Datenaustausch zwischen Speicher und Rechenwerk. Die Information, die es selbst benötigt, erhält es aus dem Speicher.

Um den Vorteil der hohen Rechengeschwindigkeit des elektronischen Rechners überhaupt erst richtig ausnutzen zu können, ist neben den Daten auch das Programm für deren Verarbeitung gespeichert. Es besteht aus einer Folge von *Befehlen*, die decodiert und mittels eines Taktgebers, dem eine Zeitkette zur Erzeugung gestaffelter Grundzeitintervalle folgt, in Impulse verwandelt werden, die, genau aufeinander abgestimmt, nacheinander zu den Funktionseinheiten geleitet werden. Die Befehle haben einen *Operations-* und einen *Adressenteil.*

Das Steuerwerk besteht im wesentlichen aus dem *Befehlswerk* zur Speicherung der Befehle, der *Einrichtung zur Vorrangunterbrechung* und dem eigentlichen *Steuerteil* zur Erzeugung der Steuersignale. Das Befehlswerk enthält das *Befehlsregister* (B) und das *Befehlszählwerk* (BZ), ausgeführt als Flip-Flop-Register.

Das Befehlsregister speichert den auszuführenden Befehl. Der Operationsteil wird vom *Operationsdecoder* übernommen, entschlüsselt und zusammen mit den Zeitimpulsen dem Steuerteil zugeführt. Der Adressenteil wird zum *Adressendecoder* des Speichers übertragen, um etwa einen Operanden aus dem Speicher zu entnehmen.
Im Befehlszähler BZ wird die Adresse Z des Befehls gespeichert, der gerade ausgeführt wird. Meistens stehen die im Verlauf eines Programms abzuarbeitenden Befehle hintereinander im Speicher, also auf den Plätzen $z, z + 1, z + 2, \ldots$ Aus dem Grund wird der Inhalt z des Befehlszählers während der Ausführung des Befehls um 1 erhöht, so daß zu Beginn des nächsten Befehls dessen Adresse im Befehlszähler steht. Lediglich bei Sprungbefehlen wird der Inhalt des Befehlszählers nach Maßgabe des gewünschten Speicherplatzes geändert. Damit gibt der Befehlszähler immer die Adresse an, von welchem Speicherplatz der nächste Befehl zu entnehmen ist.

2.2.1.3. Speicher

Die Befehlsfolge und Daten (Operanden) eines Programms müssen vor dessen Abarbeitung im Rechner gespeichert werden. Das Speichern kann auf verschiedene Arten erfolgen:
- elektrisch (Flip-Flop),
- magnetisch (Ferritkernspeicher, Magnetplatte).

Die Speicher können nach ihrer Arbeitsweise unterteilt werden in:
- Arbeitsspeicher, Hauptspeicher,
- Zusatzspeicher,
- Festwertspeicher,
- Grundprogrammspeicher.

Ferritkernspeicher

Als Arbeitsspeicher dient gegenwärtig fast ausschließlich der Ferritkernspeicher. Er erfüllt die Forderungen, die an einen derartigen Speicher gestellt werden, am besten: wahlfreier Zugriff, geringe Zugriffszeit, Zuverlässigkeit, geringes Volumen. Die Speicherelemente sind gesinterte *Ferritringe* mit einem Außendurchmesser von 0,3 ··· 2 mm. Der Ferritkern als magnetisches Bauelement zeichnet sich durch nichtlineare Eigenschaften aus, die durch die fast rechteckige Hysteresekurve beschrieben werden (Bild 11)*).
Der Ferritkern kann die beiden Zustände $+B_r$ und $-B_r$ einnehmen. Es wird definiert: $+B_r \triangleq$ L und $-B_r \triangleq$ O. Bringt man den Ferritkern in ein Feld mit der Stärke H_{max} (etwa dadurch, daß man einen Draht hindurchfädelt, durch den ein entsprechend großer Strom $+I$ geschickt wird), dann bleibt der Ferritkern nach Wegnahme des Felds in der Lage $+B_r$. Es ist in L gespeichert. Kehrt man die Stromrichtung $(-I)$ und damit die Feldstärke um $(-H_{max})$, so nimmt der Kern die Lage $-B_r$ ein. Es ist eine O gespeichert. Beim Umkippen des Kerns von einer in die andere Lage entsteht also eine *Induktionsveränderung* von $+B_r$ nach $-B_r$, die, fädelt man einen weiteren Draht durch den Kern, in diesem einen

*) s. auch Abschn. ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK, Magnetisches Feld

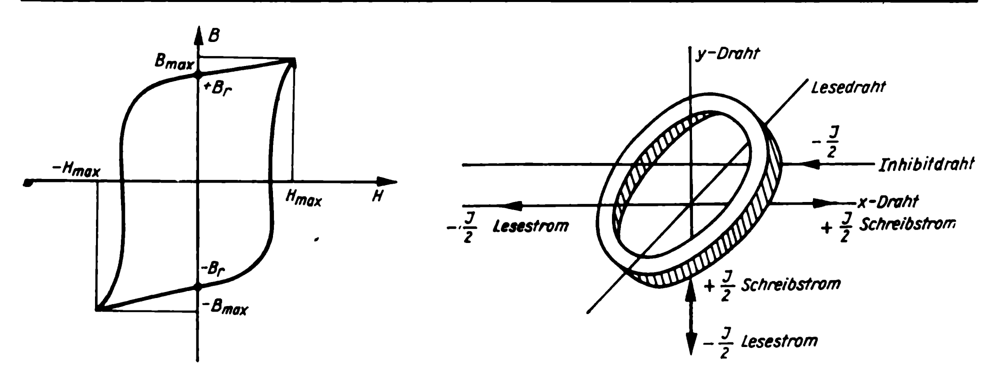


Bild 11. Hysteresekurve eines Ferritkerns

Bild 12. Anordnung der Drähte im Ferritkern

Spannungsimpuls hervorruft. Dagegen geschieht nichts, wenn sich der Kern bereits in dem Zustand $-B_r$ befand (die Änderung zwischen $-B_r$ und $-B_{max}$ sei vernachlässigt). Der erste Vorgang ($+I$) entspricht dem *Einspeichern*, der zweite ($-I$) dem *Lesevorgang*. Man sieht, daß dabei die Information (wenn L gespeichert war) zerstört wird. Wenn die gespeicherte Information erhalten bleiben soll, ist es deshalb notwendig, daß man unmittelbar an das Lesen einen neuen Speichervorgang anschließen muß. Lesen und Wiedereinspeichern bilden den *Speicherzyklus*.

Bei der Matrixanordnung der Ferritkerne befinden sich diese jeweils an den Kreuzungspunkten der *„Zeilendrähte"* (x-Richtung) und *„Spaltendrähte"* (y-Richtung). Die Auswahl eines Speicherelements erfolgt durch gleichzeitiges Einspeisen des Stromes in je einen x_i- und y_i-Draht (Koinzidenzprinzip). Dadurch entsteht nur bei genau einem Kern die zum Umkippen erforderliche Feldstärke H_{max}. Bei allen anderen Kernen, sowohl in der Zeile x_i als auch in der Spalte y_i, entsteht nur $H_{max}/2$. Dies reicht nicht aus, den Zustand des Kerns zu verändern. Soll in einen ausgewählten Kern eine 0 eingeschrieben werden, so wird dies durch einen dem Schreibstrom entgegenwirkenden *Blockier- oder Inhibitstrom* erreicht. Eine vierte Leitung ist die Leseleitung, die diagonal durch alle Kerne der Speicherebene geführt wird (Bilder 12 und 13).

Beim Lesen treten kleine Störimpulse auf. Sie entstehen dadurch, daß sich geringe Induktionsänderungen von den Kernen dem eigentlichen Leseimpuls überlagern.

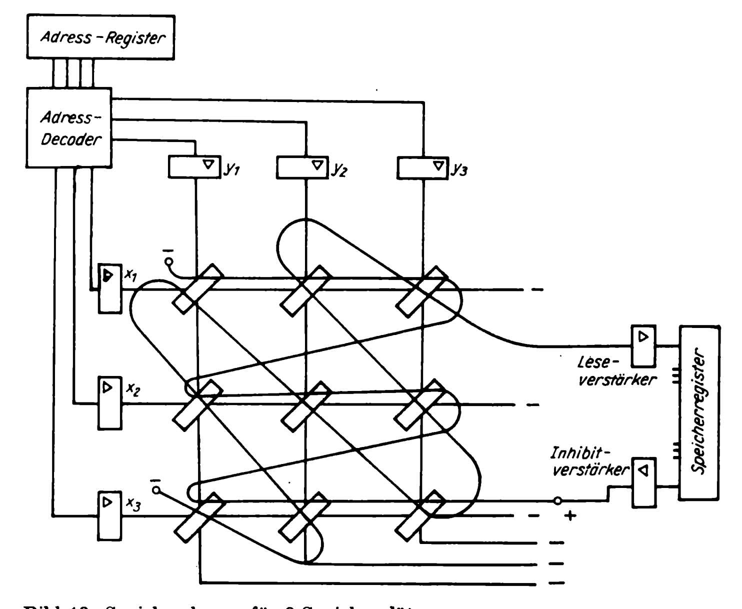


Bild 13. Speicherebenen für 9 Speicherplätze

Der *Leseimpuls* ($\approx$ 50 mV) hat etwa die Form nach Bild 14. Trotz spezieller Führung der Leseleitung oder der zeitlich verschobenen x- und y-Impulse gelingt es kaum, einen Rechteckimpuls auf der Leseleitung zu erhalten. Man triggert daher den Leseimpuls mit einem *Ausblendimpuls* und erhält einen für die Weiterverarbeitung geeigneten *Ausgangsleseimpuls*. Die in Bild 13 dargestellte Speicherebene bildet ein Bit eines 9zelligen Speichers. Bei einer Wortlänge von N Bits sind N solcher Ebenen erforderlich. Während die x- und y-Leitungen alle Ebenen durchziehen (innere Zellenauswahl), sind für jede Ebene ein Lesedraht mit einem Leseverstärker und ein Inhibitdraht mit einem Inhibitverstärker erforderlich. In der Regel werden Speicherblöcke mit 4096 Zellen aufgebaut, d. h., die Ebenen bestehen aus 64 · 64 Ferritkernen. Um alle 4096 Zellen auswählen zu können, ist ein Adressenteil im Befehlswort von 12 Bit notwendig (6 Bit für x-Richtung, 6 Bit für y-Richtung).

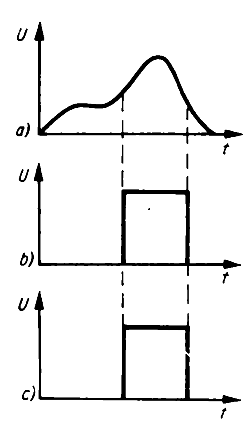


Bild 14. Impulsformen beim Lesen.
a) Leseimpuls; b) Ausblendimpuls; c) Ausgangsleseimpuls

Zu den magnetischen Speichern mit wahlfreiem Zugriff gehören auch der Dünnschichtspeicher und der Magnetdrahtspeicher.

Dünnschichtspeicher

Er hat ebenfalls eine Matrix-Struktur wie der Ferritkernspeicher. An die Stelle der Kerne treten hier dünne magnetische Schichten, die als kleine Flecken auf ein Trägermaterial aufgedampft werden. Diese Schichten erhalten während des Aufbringens eine magnetische Vorzugsrichtung, in der dann zwei stabile Zustände auftreten können. Die Lese- und Schreibleitungen für die Informationen (O oder L), die in den dünnen magnetischen Schichten gespeichert werden, sind auch auf dem Trägermaterial isoliert aufgebracht.

Magnetdrahtspeicher

Er ist ähnlich aufgebaut, arbeitet jedoch nicht nach dem Koinzidenzprinzip. Auch hier ist das Speichermedium eine auf einen Draht aufgebrachte Magnetschicht. Dieser Draht dient gleichzeitig als Schreib- und Leseleitung. Das Lesen erfolgt dadurch, daß durch eine um den Magnetdraht herumgeführte Leitung ein Strom geschickt wird, der im Magnetdraht einen Impuls erzeugt. Die Polarität ist abhängig von der Magnetisierungsrichtung und gibt daher die Information (O oder L) an.

Speicher mit wahlfreiem Zugriff und kleiner Zugriffszeit sind auch auf elektronischer Grundlage realisierbar:

Flip-Flop-Speicher

Für jedes Bit ist eine Kippstufe (Flip-Flop) mit zwei stabilen Zuständen erforderlich. Aus ökonomischen Gründen haben diese Speicher mit großer Kapazität keine breite Anwendung gefunden. Mit der Entwicklung und Einführung der LSI-Technik werden sie ebenfalls weiterentwickelt. Die Zugriffszeit liegt bei etwa 50 ns.

Tunneldiodenspeicher

Die Tunneldiode bildet aufgrund ihrer Strom-Spannungs-Kennlinie zusammen mit einem ohmschen Widerstand ein Element, das ebenfalls zwei stabile Zustände einnehmen kann, wenn eine äußere Gleichspannung angelegt wird. Zum Übergang von einem Zustand zum anderen ist die Überwindung eines Schwellwerts notwendig. Die Elemente sind wieder in den Kreuzungspunkten einer Matrix angeordnet, über die die Adressierung erfolgt (s. Ferritkernspeicher). Die Zugriffszeit beträgt etwa 100 ns.

2.2.2. Befehlsabarbeitung

Das Programm, welches von einer Aufgabenstellung vorliegt, sei über ein Eingabegerät in den Arbeitsspeicher gebracht worden. Mit diesem Programm bestimmt der Benutzer (Programmierer) im wesentlichen selbst die Art der Informationsverarbeitung. Der Verlauf der vom Steuerwerk gesteuerten Vorgänge bei der Abarbeitung eines Befehls wird durch die *Befehlsschleife* (Bild 15) dargestellt. Die Befehlsschleife ist ein verdrahtetes *Grundprogramm.* Das Durchlaufen der Schleife wird wiederum durch einzelne Elementarschritte, sog. *Mikrobefehle,*

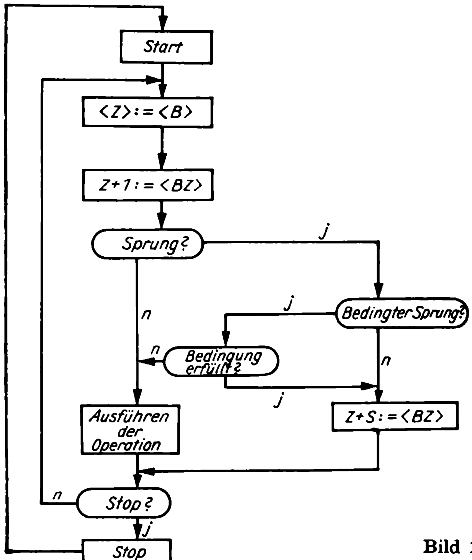


Bild 15. Flußdiagramm einer Befehlsschleife

gesteuert. Es obliegt dem Konstrukteur des Rechners, ob er längere Grundprogramme oder kürzere Grundprogramme wählt. Bei langen Grundprogrammen wird das Programm kürzer und damit der Speicherplatzbedarf geringer. Kurze Grundprogramme haben ein langes Programm und damit einen größeren Speicherplatzbedarf zur Folge. Andererseits ist im ersten Fall die Operationsgeschwindigkeit größer, während man im zweiten Fall flexibler beim Programmieren ist.

Der erste Befehl des vorliegenden Programms steht im Speicherplatz mit der Adresse Z, die nachfolgenden Befehle auf $Z + 1$, $Z + 2$, ... Nach dem Start wird der Inhalt des Speicherplatzes Z in das Befehlsregister gebracht und entschlüsselt. Danach wird der Befehlszähler BZ um 1 erhöht und enthält damit die Adresse des nächsten Befehls. Es folgt die Frage, ob ein Sprung vorliegt; wenn ja, ob es ein bedingter Sprung ist, wenn nein, dann wird die Sprungadresse in den Befehlszähler eingeschrieben und nach der Feststellung, daß nicht gestoppt werden soll, zum Beginn zurückgesprungen. Stellt der Befehl keinen Sprung dar, dann erfolgt die Ausführung der durch den Befehlscode festgelegten Operation.

Anhand der Struktur einer *Zentraleinheit* (Bild 16) soll der Informationsfluß erklärt werden. Es handelt sich um eine Einadreßmaschine.

Die Abkürzungen bedeuten:

A — Hauptakkumulator
AD — Adressendecoder,
AW — Addierwerk,
B — Befehlsregister,
BZ — Befehlszählregister,
C — Überlaufregister,
I — Indexregister,
M — Multiplikanten-Quotienten-Register,
S — Speicherzugriffsregister,
V — Verteilerregister,
ADD1 — Addiere 1 zum Eingang 1 des AW.

Steuerwerk
Takt-geber
Zeit-kette
Opera-tions-decoder
Steuer-teil
Steuer-signale
BZnAD
BZnAW
BnAD
B
BZ
UnBz
PnV
Periphere Geräte P
VnB
VnBZ
V
VnA VnM VnI
VnS
SnV
VnP
Speicher
Rechenwerk
AD
S
y
x
Speicher-matrix
A
M
I
AnAW
MnAW
InAW
C
1 AW 2
ADD1
AWnV
SnAW
a)

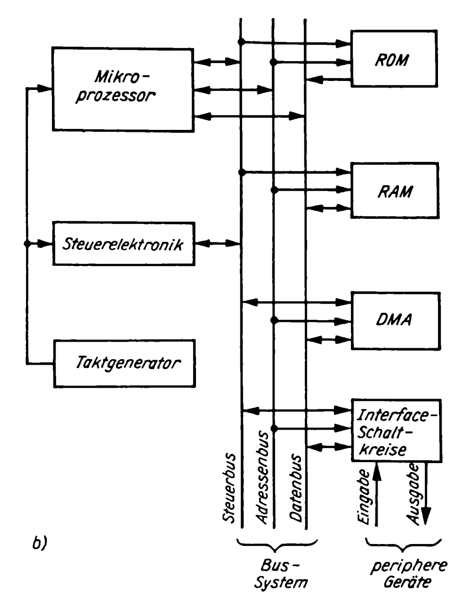


Bild 16. Struktur einer Zentraleinheit.
a) konventioneller Rechner; b) Mikrorechner

Die Triggersignale (*Steuersignale*), die im Steuerwerk erzeugt werden, sind z. B.:

AnAW — Inhalt des Hauptakkumulators nach Addierwerk,
VnS — Inhalt des Verteilers nach Speicher,
AWnV — Inhalt des Addierwerks nach Verteiler usw.

Die Generierung eines Signals wird durch (L) nach dem Signalnamen gekennzeichnet, z. B. VnS(L). Es soll eine Addition durchgeführt werden. Addend und Augend stehen in den Zellen 100 und 101, die dazu notwendigen Befehle in den Zellen 10 und 11, nämlich „Lade A mit 100" und „Addiere 101". $\langle BZ \rangle = 10$.

1. Befehl: Lade A mit 100;
BZnAD(L): Befehl wird aus Zelle 10 nach S gebracht;
SnV(L), VnB(L): Befehl steht in B, der Operationsteil wird entschlüsselt, der Adressenteil kommt mit BnAD(L) zum Adressendecoder. Die Erhöhung des Befehlszählerinhalts geschieht durch folgende Befehle:

BZnAW(L), ADD1(L), AWnV(L), VnBZ(L) $\rightarrow \langle BZ \rangle = 11$. In S steht nunmehr der Inhalt von 100 (Addend), der mit SnV(L), VnA(L) nach A gebracht wird.

2. Befehl: Addiere 101;
BZnAD(L): Befehl wird aus Zelle 11 nach S gebracht; SnV(L), VnB(L): s. Befehl 1.
Erhöhung des Befehlszählerinhalts s. Befehl 1. In S steht jetzt der Inhalt von 101 (Augend), der mit SnAW(L) nach Eingang 2 von AW gebracht wird, während mit AnAW(L) der Inhalt von A am Eingang 1 von AW anliegt. Die Summe der beiden Eingänge liegt am Ausgang. Sie wird mit AWnV(L), VnA(L) in den Hauptakkumulator übertragen und steht dort für weitere Berechnungen bereit.

Die Reihenfolge im Programmablauf kann einmal durch einen *Sprungbefehl* oder aber durch ein *Unterbrechungssignal* (Interrupt) von einem peripheren Gerät unterbrochen werden. Bei einem Sprungbefehl wird etwa in Abhängigkeit eines Ergebnisses (positiv oder negativ) zu einem anderen Punkt im Programm gesprungen. Mit Unterbrechungssignalen arbeitet man, wenn die Zentraleinheit zwischen einzelnen Übertragungen von oder zu peripheren Geräten Rechenoperationen ausführen soll. Dies ist im allgemeinen erforderlich, da die Arbeitsgeschwindigkeit der (mechanischen) peripheren Geräte klein ist gegenüber der Operationsgeschwindigkeit der Zentraleinheit. Somit hat man die Möglichkeit, zwischen den durch Unterbrechungssignale angeforderten Datenübertragungen ein laufendes Programm weiter abzuarbeiten. Ist das Gerät für die Übertragung bereit, gibt es ein Unterbrechungssignal ab. Wenn UnBZ = L, d. h. die Unterbrechung erlaubt ist, wird der Befehlszähler auf eine ganz bestimmte Adresse gesetzt, bei der das Übertragungsprogramm startet.

Beispiel. Es soll $x = [(a \cdot b) - c]/d$ berechnet werden. Das Programm stehe in den Zellen 10, 11, 12, ..., die Werte *a*, *b*, *c*, *d* in den Zellen 100, 101, 102, 103. Das Ergebnis soll am Ende in Zelle 110 stehen. Im Falle eines negativen Ergebnisses soll nach Zelle 50 gesprungen werden (Tabelle 5):

Tabelle 5. Befehlsfolge für eine Einadreßmaschine

Zelle	Befehl Operation	Adresse	Bemerkungen	Registerinhalte		
				A	M	BZ
10	Lade A	100	$\langle A \rangle := a$	a	0	11
11	Multipliziere	101	$\langle A \rangle := A \times \langle 101 \rangle$	$a \cdot b$ niederwert. Teil	$a \cdot b$ höherwert. Teil sei 0	12
12	Subtrahiere	102	$\langle A \rangle := \langle A \rangle - \langle 102 \rangle$	$ab - c$	0	13
13	Springe, wenn negativ	50	$\langle BZ \rangle := 50$, wenn $\langle A \rangle < 0$	$ab - c$	0	14 oder 50
14	Dividiere	103	$\langle A \rangle := \langle A \rangle : \langle 103 \rangle$	$(ab - c)/d$	Rest	15
15	Speichere	110	$\langle 110 \rangle := \langle A \rangle$; $\langle A \rangle := 0$; $\langle M \rangle := 0$	0	0	16

2.2.3. Mikrorechner

Literatur: [29, 38, 55, 56, 57]

Als Folge der Miniaturisierung und Mikrominiaturisierung der elektronischen Bauelemente hat sich auch ein neuer Rechnertyp, der *Mikrorechner*, herausgebildet. Gelegentlich wird von der 4. Rechnergeneration gesprochen.
Kernstück des Mikrorechners ist der *Mikroprozessor*, eine aus einem oder mehreren LSI-Schaltkreisen (s. 2.4.1.) bestehende Einheit, die in der Lage ist, durch entsprechende Steuersignale arithmetische, logische, Transport- oder Verschiebeoperationen auszuführen. Derzeitige Mikroprozessoren vereinigen auf einem Chip von etwa 30 mm² bis zu 10000 Transistoren. Der Mikroprozessor (μP, MPu — engl. micro processing unit) entspricht der Zentralen Verarbeitungseinheit des konventionellen Rechners. Wieviel und welche Operationen mit dem Mikroprozessor realisiert werden können, hängt vom Befehlsumfang (etwa 20···100) des jeweiligen Typs ab.

Zu einer funktionsfähigen Konfiguration des Mikrorechners (μC, Mikrocomputer) gehören noch Speicher, Taktgenerator und Interfaceschaltkreise zur Ansteuerung peripherer Geräte. Die Speicher werden unterschieden in *Nur-Lese-Speicher* (ROM — engl. read only memory) bzw. *programmierbare Nur-Lese-Speicher* (PROM) als integrierte Mikroprogrammspeicher und Speicher mit wahlfreiem Zugriff als *Schreib-Lese-Speicher* für Daten und Befehle (RAM — engl. random access memory). Wahlweise kann der Mikrorechner mit einer Einrichtung des direkten Speicherzugriffs (DMA — engl. direct memory access) ausgerüstet werden. Bei dieser Betriebsart wird der Datentransfer zwischen Peripherie und Speicher unter Umgehung des Mikroprozessors durchgeführt. Dadurch wird bei bestimmten Routinearbeiten die Verarbeitungszeit durch den Mikroprozessor gespart.
Die Verbindung zwischen den einzelnen Einheiten wird durch ein *Bus-System* realisiert:

- Datenbus,
- Adressenbus und
- Steuerbus.

Die Busleitungen werden gleichzeitig für Ein- und Ausgaben, d. h. bidirektional, verwendet. Dadurch können Kontakte an den Mikroprozessorschaltkreisen eingespart werden.
Bild 16b zeigt ein vereinfachtes Strukturschema eines Mikrorechners.

Die *Funktionsblöcke* des Mikroprozessors, die bei den verschiedenen Herstellern modifiziert sein können, sind:

- arithmetisch logische Einheit (ALU — engl. arithmetic logic unit) zur Ausführung der arithmetischen und logischen Operationen,
- 2 Akkumulatoren (Wortlänge im allgemeinen 8 bit) zum Zwischenspeichern der Operanden bzw. Ergebnisse der ALU,
- Indexregister für die Speicheradresse bei Indexadressierung,
- Programmzähler zum Speichern der Befehlsadresse (durch Erhöhung um 1 erzeugt er die jeweils folgende Programmadresse),
- Statusregister (das Zustandssignale, abgeleitet aus den Ergebnissen der ALU, liefert; diese Signale sind z. B. Entscheidungen für eine bedingte Verzweigung im Programmablauf),
- Unterbrechungslogik zur Steuerung des Datentransfers mit der Peripherie auf Anforderung von außen oder vom Programm selbst (Die Unterbrechungsanforderung löst ein Unterprogramm aus. Der Programmzähler wird gestoppt, und die Registerinhalte werden abgespeichert. Nach Beendigung des Unterprogramms wird an der Unterbrechungsstelle das laufende Programm fortgesetzt).

Der als Arbeitsspeicher verwendete Schreib-Lese-Speicher (RAM) ist ein Halbleiterspeicher. Das Grundelement ist der *Flip-Flop.* Es besteht aus mindestens zwei Transistoren und zwei Arbeitswiderständen und besitzt zwei stabile Arbeitspunkte, denen die logischen Werte 0 und 1 zugeordnet werden.
Halbleiterspeicher werden zerstörungsfrei gelesen. Dadurch entfällt das Wiedereinschreiben, wie es beim Kernspeicher erforderlich ist. Ein Nachteil dieser Speicher ist das *flüchtige Speicherprinzip.* Bei Ausfall der Versorgungsspannung geht die gespeicherte Information verloren. Aus diesem Grunde verwendet man für wichtige System- oder Nutzerprogramme *nichtflüchtige Festwertspeicher* (ROM). Der Aufbau der maskenprogrammierten Festwertspeicher entspricht dem der Diodenmatrix. Die Verbindung zwischen Spalten- und Zeilenleitungen erfolgt durch bipolare Transistoren. Das gewünschte Bitmuster wird vom Hersteller

mittels einer Maske erzeugt, die den Metallisierungsprozeß bei der Realisierung der Verbindungen entsprechend steuert. Die *programmierbaren Festwertspeicher* (PROM) bieten den Vorteil, daß sie erst beim Anwender programmiert werden können. Außerdem ist es möglich, allein durch Austausch des PROM-Bausteins den Mikrorechner an einen beliebigen Einsatzfall anzupassen. Gleichzeitig wird durch die programmierte Logik ein wesentlicher Teil an Hardware eingespart (bis zu 30 Gatterfunktionen je Befehl).
Das bekannteste Beispiel für einen Mikrorechner sind die elektronischen *Taschenrechner* (Größe etwa 12 cm × 7,5 cm × 1 cm). Diese Rechner mit einem Ein-Chip-Mikroprozessor haben eine festverschaltete Logik. Die Variationsbreite ist sehr groß. Sie reicht von den 4 Grundrechenarten ohne Speicher bis hin zu etwa 100 Funktionen mit einem wahlfreien Schreib-Lese-Speicher, in den Programme für häufig wiederkehrende Rechenvorgänge über die Tastatur eingespeichert werden können. Die eingegebenen Daten und die Ergebnisse werden etwa 10stellig auf einem Anzeigefeld, das auf der Basis von *Leuchtdioden* (LED — light emitting diode) oder *Flüssigkristallen* (LCD — liquid crystal display) arbeitet, dargestellt.

2.3. Periphere Geräte

Die peripheren Geräte dienen der Kommunikation zwischen Mensch (Programmierer) und Zentraleinheit bzw. zwischen einem zu überwachenden oder zu steuernden Prozeß und Zentraleinheit. Der Systemkonfiguration entsprechend können die peripheren Geräte in die *Datenverarbeitungs-* und *Prozeßperipherie* eingeteilt werden. Eine andere Möglichkeit der Unterscheidung besteht in ihrer Beziehung zum *Datenfluß*.
Geräte der 1. Peripherie: Sie sind „on-line“, d. h. elektrisch über entsprechende Steuerschaltungen (Interfaces), mit der Zentraleinheit verbunden.
Geräte der 2. Peripherie: Sie werden „off-line“ betrieben, d. h., sie stehen nur über Datenträger (Lochstreifen, Lochkarten usw.) mit der Zentraleinheit in Verbindung. Über sie erfolgt die Datenerfassung oder -aufbereitung.
Geräte der 3. Peripherie: alle notwendigen Hilfsmittel (Datenträger, Einrichtungen zur Aufbewahrung von Datenträgern, Klimaanlagen usw.)

2.3.1. Datenträger

Sowohl die Programme selbst als auch die für die Rechnung erforderlichen Daten müssen in den Arbeitsspeicher eingeschrieben werden. Zu diesem Zweck müssen sie zunächst auf geeignete Datenträger gebracht werden.

Lochstreifen

Am häufigsten wird der Lochstreifen verwendet, der aus besonders homogenem, antistatischem Papier hergestellt wird. In den Lochstreifen können Zeichen, bestehend aus einer Kombination von Löchern (Bits), gestanzt werden. Die maximale Anzahl je Zeichen kann 5, 7 oder 8 sein. Man spricht dann von einem 5-, 7- oder 8-Kanal-Lochstreifen (Bild 17).

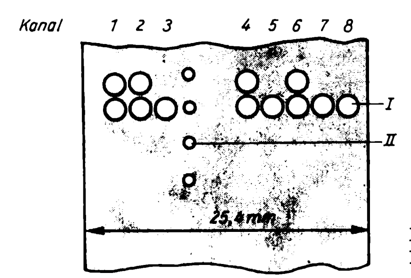


Bild 17. 8-Kanal-Lochstreifen.
I Code-Löcher; II Transportlöcher (Taktspur)

Lochkarte

Die Lochkarte besteht aus besonderem Karton. Sie ist senkrecht in 12 Zeilen und waagerecht in 40···160 (je nach System) Spalten eingeteilt. Ein Loch in einer Zeile gibt die entsprechende Ziffer an, die Spalte bestimmt die Stelle. Mehrere Spalten können zu Kartenfeldern zusammengefaßt werden.

Magnetband

Das Magnetband besteht aus einem Plastband ($^1/_2 \cdots 1''$ = 12,7 ⋯ 25,4 mm breit), auf dem eine magnetisierbare Eisenoxidschicht aufgebracht ist. Ein Zeichen wird durch eine Kombination von magnetisierten Stellen gebildet; zu vergleichen mit den Kanälen eines Lochstreifens. Mehrere Zeichen sind zu Blöcken zusammengefaßt, die durch Blocklücken voneinander getrennt sind. Die Zeichenfolgedichte beträgt etwa 200 ⋯ 1600 bpi oder 8 ⋯ 63 bit/mm.

Magnetkarte

Die Karte hat eine Größe von etwa 100 mm × 400 mm und wird in einem Magazin mittels Kerben aufgehängt. Die Aufzeichnung der Daten erfolgt prinzipiell so wie beim Magnetband.

2.3.2. Eingabegeräte

Lochstreifenleser

Die Lochstreifenleser können unterschieden werden in langsame (mechanische) und schnelle (elektronische) Leser.
Die *langsamen Leser* (max. 50 Zeichen/s) arbeiten mit Fühlhebel. Für jeden Kanal ist ein Hebel vorgesehen, der gegen den durchlaufenden Lochstreifen drückt. Findet der Hebel ein Loch, so betätigt er einen Kontakt, der einen Impuls auslösen kann. Ein ähnliches Prinzip wird beim *Bürstenleser* angewendet, bei dem die spannungsführenden Bürsten auf dem Lochstreifen schleifen, in die Löcher einfallen und direkten Kontakt geben. Bei den *schnellen Lesern* (200 ⋯ 2000 Zeichen/s) erfolgt die Abtastung entweder fotoelektrisch oder kapazitiv. Im ersten Fall sind je nach Kanalzahl bis zu 9 Fotodioden unter dem durchlaufenden Lochstreifen angeordnet. Von oben ist ein Lichtstrahl auf diese Dioden gerichtet, die dann belichtet werden und einen Impuls abgeben, wenn ein Loch im Streifen vorhanden ist (Bild 18). Beim kapazitiven Leser sind die Fotodioden durch kleine Kondensatoren mit einer gemeinsamen Elektrode ersetzt. Der Lochstreifen läuft zwischen den Elektroden hindurch und bildet das Dielektrikum, das sich ändert (und damit die Kapazität), wenn anstelle des Papiers Luft (entspricht einem Loch) tritt. Diese Kapazitätsänderung wird mittels einer Brückenschaltung ausgenutzt, um einen Impuls zu erzeugen.

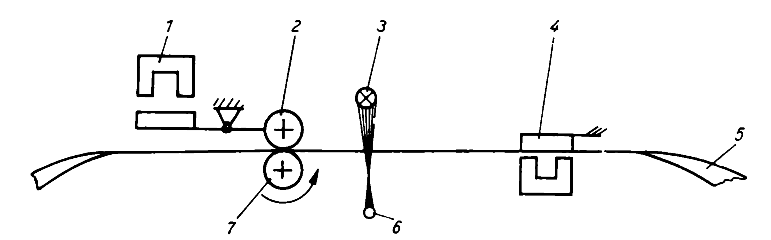


Bild 18. Prinzip des Lochstreifenlesers. *1* Transportmagnet; *2* Andruckrolle; *3* Lampe; *4* Bremsmagnet; *5* Lochstreifen; *6* Fotodioden; *7* umlaufende Rolle

Lochkartenleser

Auch hier gibt es Geräte mit mechanischen und fotoelektrischen Abtastverfahren. Die Abtastung erfolgt spaltenweise oder zeilenweise, für jede Spalte oder Zeile ist eine Bürste bzw. eine Fotodiode vorgesehen. Die Art der Impulserzeugung ist die gleiche wie bei den Lochstreifenlesern. Die Karten werden mechanisch oder pneumatisch transportiert. Die maximale Lesegeschwindigkeit beträgt 2000 Karten/min.

2.3.3. Ausgabegeräte

Lochstreifenstanzer

Sollen Programme oder Resultate weiterverarbeitet werden, so werden sie zweckmäßig auf Lochstreifen ausgegeben. Die Stanzstempel des Lochstreifenstanzers werden von entsprechenden Magneten ausgewählt und durch eine Stanzkurbel (Exzenterantrieb) bewegt. Die *Synchronisation* schneller Locher erfolgt elektronisch über geeignete Geber (induktiv, lichtelektrisch) von der ständig umlaufenden Antriebswelle aus. Die schnellsten Stanzer erreichen eine Geschwindigkeit von 300 Zeichen/s.

Zeilendrucker

Zur Ausgabe von Ergebnissen im Klartext dient der *Schnell- oder Zeilendrucker*. Es wird gleichzeitig eine ganze Zeile (80 ··· 160 Zeichen) gedruckt. Auf einer Trommel befinden sich Typensätze, die alle Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen umfassen (Bild 19). Es sind so viele Sätze vorhanden, wie Zeichen pro Zeile gedruckt werden sollen. In geringem Abstand zur Trommel sind ebenso viele Druckhämmer angeordnet. Zwischen der Trommel und den Druckhämmern befinden sich das Farbtuch und das zu bedruckende Papier. Die Trommel rotiert mit konstanter Geschwindigkeit. Jede Type läuft während einer Umdrehung einmal am Hammer vorbei. Der Druck erfolgt dadurch, daß die Hämmer genau zu dem Zeitpunkt gegen das Papier schlagen, wenn das gewünschte Zeichen vorbeikommt (fliegender Druck). Die Steuerung geschieht mittels einer Code-Scheibe, die auf der Trommelachse befestigt ist. Durch sie wird festgestellt, welches Zeichen sich vor den Hämmern befindet. Vor dem Druckvorgang wird die zu druckende Zeile in einen Pufferspeicher gebracht. Stimmt ein Zeichen im Puffer mit dem von der Code-Scheibe abgegebenen überein, dann schlägt der entsprechende Hammer gegen die Trommel. Die maximale Druckleistung liegt bei 1300 Zeilen/min.

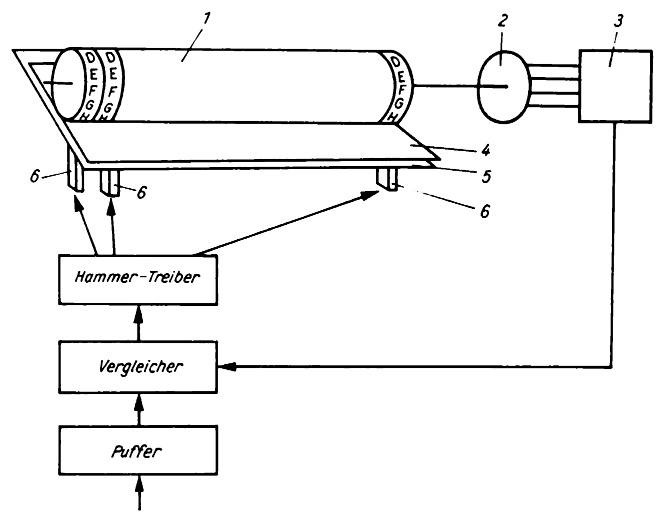


Bild 19. Schema des Schnelldruckers. *1* Drucktrommel; *2* Code-Scheibe; *3* Impulsformer; *4* Farbtuch; *5* Papier; *6* Hammer

Plotter

Plotter dienen der Ausgabe von Informationen in grafischer Form. Es können Kurven, Diagramme u. ä. gezeichnet werden. Im Plotter wird ein Schreibstift über einem Blatt bzw. Endlosformular schrittweise in zwei Richtungen (x, y) bewegt. Die Schrittweite beträgt 0,2 mm, die Geschwindigkeit maximal 1000 Schritte je Sekunde. Die erforderlichen *Schreibbefehle* erhält der Plotter von der Zentraleinheit.

2.3.4. Kombinierte Ein-/Ausgabegeräte

Steuerschreibmaschine

Die Steuerschreibmaschine dient sowohl der Eingabe von Informationen bzw. Kommandos als auch der Ausgabe von Resultaten oder Mitteilungen im Klartext. Sie ist entweder als herkömmliche *Typenhebelmaschine* oder als *Kugelkopfmaschine* (Anordnung der Typen auf einem kugelähnlichen Teil in 4 Zeilen) ausgeführt. Die Übertragung eines codierten Zeichens zur Zentraleinheit kann parallel oder seriell erfolgen.

Sichtgeräte (Displays)

Dies sind Geräte, bei denen auf dem Bildschirm einer Katodenstrahlröhre Ziffern, Buchstaben und Sonderzeichen (*alphanumerischer Typ*) oder, aus kleinen Elementen zusammengesetzt, Kurvenverläufe und ähnliche Darstellungen (*grafischer Typ*) sichtbar gemacht werden. Die ersteren dienen der Ausgabe von Resultaten oder Text, die zweiten zur Ausgabe von Funktionen, Konstruktionszeichnungen o. ä.

In Verbindung mit einer Tastatur dienen die Geräte auch der Eingabe. Die einzugebenden Daten werden zuerst geschrieben, zur Kontrolle auf dem Bildschirm dargestellt, und nach Überprüfung oder Korrektur wird die Eingabe über eine Taste ausgelöst.
Eine andere Möglichkeit, auf das Programm Einfluß zu nehmen, bietet der sog. *Lichtstift*. Er hat die Form eines Füllhalters und besitzt am vorderen Ende eine kleine Öffnung, hinter der eine Fotodiode sitzt. Der Stift wird auf den Bildschirm aufgesetzt und markiert durch den vorbeilaufenden Strahl die entsprechende Stelle. Damit können Korrekturen ausgeführt oder vom Rechner ausgegebene Zeichnungen verändert werden.
Mit Hilfe eines *Fotozusatzes* (Hard-Copy-Gerät) können Ablichtungen der Informationen vom Bildschirm gemacht werden.

2.3.5. Externe Speicher

Bei größeren Datenverarbeitungsanlagen genügt der Arbeitsspeicher nicht mehr, um alle Informationen aufzunehmen (z. B. wenn mehrere große Programme oder eine Vielzahl von Daten gespeichert werden müssen). In diesen Fällen sind *Zusatzspeicher* erforderlich. An sie wird die Forderung nach großer Kapazität gestellt.

Neben großen Magnetkernspeichern werden ausschließlich *magnetische Speicher* verwendet, bei denen die Aufzeichnung wie folgt geschieht: Durch ein Magnetfeld, hervorgerufen durch einen Stromfluß, wird eine Stelle einer geeigneten Schicht gegenüber dem *Magnetkopf* magnetisiert, während die Schicht bewegt wird. Die Speicherdichte beträgt bis zu 60 Binärziffern/mm innerhalb einer Spur. Beim Lesen wird im Magnetkopf durch die Bewegung des Speichermediums an den Stellen eine Spannung induziert, an denen sich der magnetische Zustand ändert (Bild 20).

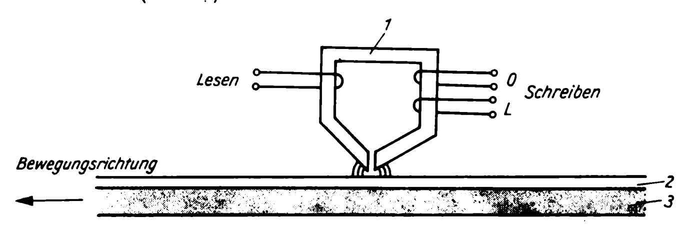


Bild 20. Prinzip der magnetischen Aufzeichnung. *1* Magnetkopf; *2* magnetisierbare Schicht; *3* Schichtträger

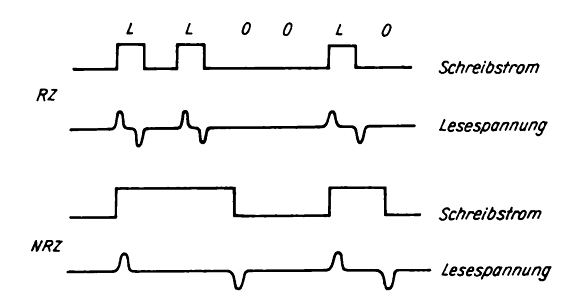


Bild 21. Impulsfolge von Aufzeichnungsverfahren

Beispiele für *Aufzeichnungsverfahren* sind (Bild 21):
— Impulsschrift, RZ-Verfahren (return to zero)
— Richtungsschrift, NRZ-Verfahren (non return to zero)

Nach der *Form des Trägers* der Speicherschicht unterscheidet man:
— Magnettrommelspeicher,
— Magnetbandspeicher,
— Magnetplattenspeicher,

— Festkopfplattenspeicher,
— Wechselplattenspeicher (mit beweglichen Köpfen),
— Magnetkartenspeicher.

Während im allgemeinen für jede Aufzeichnungsspur ein Magnetkopf erforderlich ist, genügt z. B. beim Wechselplattenspeicher ein Kopf pro Platte, der allerdings vor dem Lesen oder Schreiben an die entsprechende Spur bewegt werden muß. Mit diesen Speichern können sehr große Kapazitäten erreicht werden, die Zugriffszeit dagegen ist relativ groß. Beim *Trommel- und Plattenspeicher* beträgt sie im Mittel die Hälfte der Zeit für eine Umdrehung (10 ··· 20 ms). Beim *Bandspeicher* wird die Zugriffszeit wesentlich größer sein, und es kommt auf eine geschickte Organisation beim Abspeichern an, um die Informationen, die für eine Verarbeitung notwendig sind, in einem Durchlauf zu erhalten. Der Vorteil liegt ebenso wie beim *Wechselplattenspeicher* darin, daß durch Austausch der Bänder bzw. Plattenstapel die Speicherkapazität nahezu unbegrenzt ist. Zur Sicherung der Informationen wird für jedes Zeichen und am Blockende ein *Prüfbit* mit auf das Band gespeichert, wenn die Anzahl der Informationsbits ungerade ist. Beim Lesen wird geprüft, ob die Anzahl der einzelnen Bits in jedem Kanal geradzahlig ist (Paritätsprüfung).

2.3.6. Geräte der Prozeßperipherie [10]

Die direkte Kopplung eines Prozesses mit dem Rechner (on line) erfolgt über die *Prozeßperipherie*. Ist der Rechner nur eingangsseitig mit dem Prozeß verbunden, spricht man von *offener Kopplung* (open loop); besteht gleichzeitig eine ausgangsseitige Verbindung, so liegt eine *geschlossene Kopplung* (closed loop) vor. Ziel einer Prozeßautomatisierung ist die geschlossene Kopplung. Voraussetzung dafür ist, daß das mathematische Modell (die mathematische Beschreibung) des Prozesses vorliegt. Bei komplizierten Prozessen genügt es aufgrund der Vermaschung der Teilprozesse nicht, die mathematische Formulierung der einfachen Teilprozesse zu kennen. Damit das mathematische Modell des Gesamtprozesses dessen tatsächliches Verhalten so genau wie möglich beschreibt — und nur so ist eine sinnvolle Automatisierung gewährleistet — sind zunächst umfangreiche Versuche mit direkter, offener Kopplung erforderlich, mit deren Hilfe dieses Modell vervollkommnet wird.

2.3.6.1. Eingabe

Die zu messenden physikalischen Größen müssen zuerst in elektrische Signale umgewandelt werden. Dies geschieht im wesentlichen mit den aus der Betriebsmeß-, Steuer- und Regelungstechnik (BMSR) bekannten Signalwandlern, z. B. Thermoelementen für Temperaturen, pneumatisch-elektrische Transmittern für Drücke. Die umgeformten Signale können in *analoger* oder *digitaler* Form vorliegen.
Bei digitalen Signalen ist keine Umwandlung für die Eingabe zum Rechner erforderlich, wenn man von einer evtl. Potentialverschiebung absieht, da sie bereits in der für die Verarbeitung geeigneten Form vorliegen.

Analog-Digital-Umsetzer

Analog-Signale müssen vor ihrer Weiterverarbeitung in digitale umgewandelt werden. Dies geschieht mit dem Analog-Digital-Umsetzer. Man unterscheidet dabei die *Augenblickswertmessung* und die *integrierende Messung*. Geräte für die Augenblickswertmessung sind Stufenumsetzer und Sägezahnumsetzer.

— *Stufenumsetzer:* Die umzuwandelnde Spannung wird mit einer sich stufenweise ändernden Normalspannung verglichen, bis beide Werte übereinstimmen. Die Normalspannung ist nach Potenzen von 2 gestuft. Bei einer Auflösung von 8 bit beginnt das Vergleichen mit einer Spannung, die dem relativen Wert von 128 entspricht. Ist der Meßwert kleiner, so wird diese Normalspannung wieder ausgeschaltet und die nächstkleinere eingeschaltet. Ist der Meßwert größer, so bleibt die erste Spannung eingeschaltet, die nächste wird dazu addiert usw. Die eingeschalteten Stufen stellen das Meßergebnis dar (Bild 22).

— *Sägezahnumsetzer:* Hier wird die zu messende Spannung mit einer Sägezahnspannung verglichen. Vom Beginn dieser Vergleichsspannung bis zur Übereinstimmung mit der Meßspannung werden die Impulse eines Taktgebers gezählt. Sie sind ein Maß für die Meßspannung (Bild 23).

Bei A/D-Umsetzern mit integrierender Messung wird das Zeitintegral der zu messenden Spannung mit Hilfe eines Spannungs-Frequenz-Umformers gebildet oder mittels eines Spannungs-Zeit-Umformers bei Verwendung eines MILLER-*Integrators.* A/D-Umsetzer mit integrierender Messung haben den Vorteil hoher Störunterdrückung.

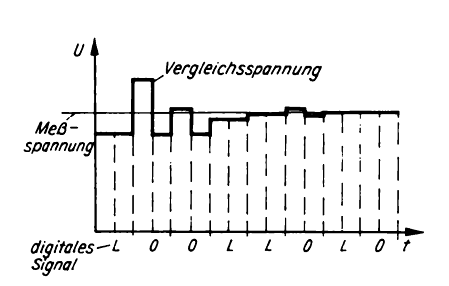


Bild 22. Abgleichvorgang beim Stufenumsetzer

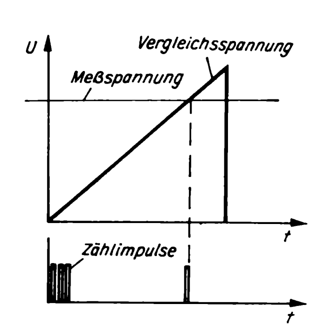


Bild 23. Abgleichvorgang beim Sägezahnumsetzer

Meßstellenumschalter

Der Meßstellenumschalter dient dazu, verschiedene Meßstellen anzuwählen. Zur Steuerung für den Meßstellenumschalter erhält man von der Zentraleinheit die *Meßstellenadresse.* Sie wird decodiert, so daß die entsprechende Meßstelle zum A/D-Umsetzer durchgeschaltet wird. Außer den Meßstellen können *Eichspannungen* oder *Hilfsspannungen* (z. B. für Temperaturkorrekturen) abgefragt werden.

Um bei der Darstellung des Meßwerts in digitaler Form den Zahlenbereich auch bei sehr unterschiedlichen Meßspannungen möglichst gut auszunützen, wird dem A/D-Umsetzer ein *Vorverstärker* mit veränderlichem Verstärkungsgrad (vom Programm her wählbar) vorgeschaltet. Weiterhin ist wichtig, daß die Meßwerte gefiltert werden und die Abtastung potentialfrei erfolgt. Es ist eine zweipolige Leitung vom Meßwertgeber zum Meßstellenumschalter erforderlich. Bei der Verlegung dieser Leitung ist besondere Sorgfalt geboten (z. B. Verdrillung, keine Erdschleifen), um Einstreuungen auf ein Mindestmaß zu reduzieren. Die Durchschaltung selbst erfolgt mittels *Relais,* indem die an einem Kondensator liegende Meßspannung kurzzeitig an den Verstärker gelegt wird. Durch die Umschaltzeit der Relais ist die Abfragegeschwindigkeit begrenzt (100 ··· 200 Meßstellen/s). Durch den Einsatz von Transistoren kann die Abfragegeschwindigkeit wesentlich erhöht werden (maximal 50000 Meßstellen/s).

2.3.6.2. Ausgabe

Steuerwerte, die vom Prozeßrechner für den closed-loop-Betrieb oder zur Simulation ausgegeben werden, sollen je nach Weiterverarbeitung in digitaler oder analoger Form vorliegen.

Digitale Ausgabe

- *Statische Ausgabe:* Sie erfolgt über bistabile oder monostabile Kippstufen, die auf Transistorschalter wirken, oder Halterelais, die für das Umschalten jeweils nur einen Impuls benötigen. Diese sind entweder zu einem *Digitalwort* zusammengefaßt oder als *1-bit-Ausgänge* ausgeführt. Zuerst wird von der Zentraleinheit die Adresse ausgegeben und decodiert, danach folgen die eigentlichen Ausgabeinformationen, d. h., ob die angewählten Transistorschalter oder Relais die eine oder andere Lage einnehmen sollen. Bei den Relais kann die Einspeisung für das Ausgabesignal von dem zu betätigenden Element selbst erfolgen. Damit wird gleichzeitig eine Potentialtrennung erreicht.
- *Dynamische Ausgabe:* Sie liegt vor, wenn eine *Impulsfolge* ausgegeben wird. Ein spezieller Fall ist die Ansteuerung für den *Schrittmotor.* Dieser besteht aus einem mehrpoligen Rotor und zwei Statorwicklungen. Die beiden Statorwicklungen werden schrittweise erregt und erzeugen das Dreh- bzw. Haltemoment. Durch Umschalten der Stromrichtungen wird ein schrittweises Drehen der Motorwelle erreicht. Dieser Schrittmotor wird z. B. in elektrisch-pneumatischen Wandlern eingesetzt. Über ein Getriebe wird ein *Düse-Prallplatte-System* beeinflußt. Damit kann z. B. eine Änderung des Normaldrucks von 0,02 ··· 0,1 MPa zur Ansteuerung pneumatischer Regler realisiert werden. Durch die Kon-

struktion (Polanzahl, Getriebeübersetzung) kann festgelegt werden, wieviel Schritte (z. B. $2^{10} = 1024$) für den gesamten Bereich notwendig sind. Von dieser Seite aus kann die Beeinflussung des Wandlers sehr genau erfolgen. Bei der Anwahl der Digitalausgänge ist neben der Ausgabe der Adresse die Festlegung der Impulsfrequenz und der Impulsanzahl erforderlich.

Analoge Ausgabe

Für Geräte, die analoge Werte verarbeiten (Schreiber, Verstärker), müssen die digitalen Ausgabewerte zuvor mit Digital-Analog-Umsetzern umgewandelt werden. Die Auflösung ist im allgemeinen 8 oder 10 bit (Genauigkeit 0,5% bzw. 0,1%). Am häufigsten erfolgt die Umwandlung durch Schalten einer Widerstandskette mit Relaiskontakten oder Halbleiterschaltern.

Bei dem D/A-Umsetzer nach Bild 24 werden die Widerstandsstufen durch Kontakte eingeschaltet, wobei jeder Kontakt einem Bit im umzuwandelnden Digitalwort entspricht. Durch den (symmetrischen) Aufbau des Kettenleiters sind die einzelnen Stufen mit abnehmender 2er-Potenz gewichtet. Die Wirkung auf die Ausgangsspannung beim Schalten von S_n ist doppelt so groß wie die von S_{n-1} und 2^n-mal so groß wie von S_0. Bezugsspannung ist die Spannung U_0 (z. B. 10 V).

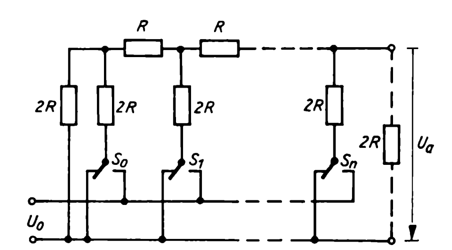


Bild 24. Digital-Analog-Umsetzer

2.4. Technische Realisierung

2.4.1. Allgemeines

Vor etwa 20 Jahren begann die Entwicklung der elektronischen Universalrechner. Im Verlaufe dieser Zeit haben sich ebenso schnell Bauelemente und Schaltungstechnik entwickelt. Aus dieser Sicht teilt man heute die Rechner in drei Generationen ein, wobei die *Relaisrechner* als erste programmgesteuerte Rechenautomaten nicht mit berücksichtigt werden:

— *Rechner der ersten Generation:* Bestückung fast ausschließlich mit *Elektronenröhren*; Verdrahtung der einzelnen Bauelemente in üblicher Weise mit Lötverbindungen.

— *Rechner der zweiten Generation:* Die Röhren sind durch *Halbleiterbauelemente* (Transistoren, Dioden) ersetzt worden. Die Verdrahtungstechnologie wurde verbessert (*gedruckte Schaltungen*). Der Aufbau erfolgte auf steckbaren und damit leicht auswechselbaren Leiterkarten. Der Vorteil liegt in dem geringen Volumen, geringerer Leistungsaufnahme (keine Heizleistung), höherer Rechengeschwindigkeit, geringerer Störanfälligkeit.

— *Rechner der dritten Generation:* Sie zeichnen sich durch die Einführung der *Mikroelektronik* (Mikrobausteine) aus. Die erste Stufe ist die *Mikromodultechnik*. Für sie ist charakteristisch, daß mehrere herkömmliche diskrete Bauelemente in einem Gehäuse vereinigt werden. Ein weiterer entscheidender Schritt war die Entwicklung *integrierter Schaltungen* oder *Festkörperschaltkreise* [20]. Bei ihnen werden mehrere Bauelemente und ihre Zusammenschaltung innerhalb eines einzigen Halbleiterkristalls (Silizium) realisiert. Dioden und Transistoren z. B. sind durch np- bzw. pn-Übergänge dargestellt, Widerstände durch hochohmige Teilstrecken. In den integrierten Schaltkreisen selbst gibt es keine Lötstellen, die Anschlüsse nach außen erfolgen über goldplattierte Drähte. Anstelle von Halbleiterkristallen können auch keramische Träger verwendet werden, auf die die einzelnen Bauelemente aufgedampft werden (*Dünnfilmtechnik*).

— *Rechner der vierten Generation:* Unter Anwendung einer weiteren technologischen Neuerung, der LSI-Technik (large scale integration) oder Gruppenintegration, entstand der *Mikrorechner* als neuer Typ. Bei der LSI-Technik ist es möglich, auf einem sog. Siliziumchip eine

große Zahl gleicher oder verschiedenartiger Schaltkreise unterzubringen, die untereinander verbunden werden und eine Systemfunktion realisieren. So ist man z. B. heute in der Lage, Chips von etwa 2 mm × 3 mm Größe mit mehr als 1000 aktiven Elementen herzustellen [7].

Bei der Entwicklung der LSI-Technik haben sich durch das Bestreben, einen hohen Integrationsgrad, niedrige Schaltzeiten und kleinste Verlustleistungen zu erreichen, verschiedene Schaltkreisfamilien herausgebildet. Die für Mikrorechner wichtigsten *Schaltkreistechniken* sind gegenwärtig:

Bipolare Struktur:

- TTL (Transistor-Transistor-Logik; universell, insbesondere für Zusatzbausteine),
- Schottky-TTL (niedrige Schaltzeiten),
- ECD (Emittergekoppelte Logik; niedrigste Schaltzeiten, hoher Aufwand),
- I^2L (Integrierte Injektionslogik; hoher Integrationsgrad).

Unipolare Struktur:

- MOS, p-MOS, n-MOS (Metall-Oxid-Halbleiter-Technologie; niedrige Verlustleistung, hoher Integrationsgrad),
- CMOS (Komplementär-MOS; niedrige Schaltzeiten, gutes statisches und dynamisches Verhalten, hoher Aufwand).

2.4.2. Schaltungstechnik

Für die Betrachtung der Wirkungsweise logischer Schaltungen soll davon ausgegangen werden, daß die Schaltkreise aus diskreten Bauelementen bestehen. Für eine integrierte Schaltung läßt sich grundsätzlich ein äquivalentes *Ersatzschaltbild* angeben. Die Schaltkreise können z. B. als Diodenschaltkreise, als Dioden-Transistor-Schaltkreise oder als Widerstands-Transistor-Schaltkreise ausgeführt werden. Man spricht dann von D-Logik, DT-Logik oder RT-Logik. Die Funktionsweise und Eigenschaften der Halbleiterbauelemente werden an dieser Stelle nicht näher beschrieben*).
Unter dem Begriff *Schaltkreis* soll eine Schaltung verstanden werden, die der Verknüpfung binärer Signale nach den BOOLEschen Gesetzen dient. Die *Konjunktion* $y = x_1 \wedge x_2$ wird durch den UND-Schaltkreis (engl. AND), die *Disjunktion* $y = x_1 \vee x_2$ durch den ODER-Schaltkreis (engl. OR) realisiert. Diese beiden Schaltkreisarten können mit Dioden aufgebaut werden (Bilder 25 und 26).

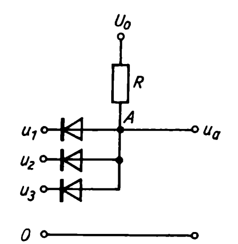


Bild 25. UND-Schaltkreis

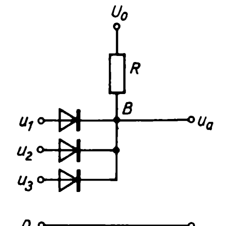


Bild 26. ODER-Schaltkreis

Die Spannungen, die den logischen Variablen entsprechen, sind z. B. 0 V für O und $+2 \cdots +12$ V für L (positive Logik) oder 0 V für O und $-2 \cdots -12$ V für L (negative Logik). Im folgenden sollen nur Schaltkreise für positive Logik betrachtet werden. In Bild 25 ist ein UND-Schaltkreis für drei Eingangsgrößen gezeigt. Die Eingangsgrößen x_1, x_2, x_3 werden durch Spannungen u_1, u_2 und u_3 dargestellt, die Ausgangsgröße y durch u_a. Die Speisespannung U_0 sei $+10$ V. Der Widerstand der Dioden in Durchlaßrichtung sei Null, in Sperrichtung unendlich. Am Punkt A liegt dann $+10$ V, wenn u_1, u_2 und u_3 ebenfalls 10 V sind. Wird auch nur ein Eingang auf 0 V gelegt, so liegt auch an A eine Spannung 0 V, da dann über der betreffenden Diode keine Spannung abfällt. Die gleiche Betrachtung kann man für die Schaltung nach Bild 26 anstellen und erkennt, daß es sich um einen ODER-Schaltkreis handelt. Es genügt, wenn eine der drei Eingangsspannungen hoch ist, daß am Punkt B die gleiche hohe Spannung liegt.

*) s. Abschn. ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK

Die *Negation* $y = \bar{x}$ kann nicht mit Dioden verwirklicht werden. Dazu müssen Transistoren verwendet werden. Diese Funktion wird mit der UND- und ODER-Funktion verknüpft, und man erhält die Schaltfunktionen NICHT-UND (NAND) und NICHT-ODER (NOR).

Bild 27 zeigt einen NAND-Schaltkreis. Ist die Spannung im Punkt C hoch (L), so leitet der Transistor, und u_a ist 0 V (O). Liegt C auf 0 V (O), dann sperrt der Transistor, d. h., $u_a = U_B$ (L). Die Zahl der Eingänge ist begrenzt (etwa 6).

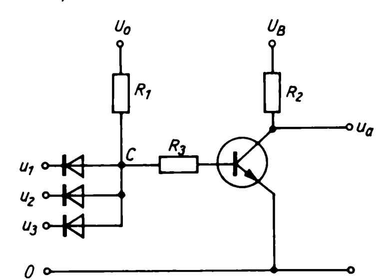


Bild 27. NAND-Schaltkreis

Mit NAND-Schaltkreisen kann im Prinzip jede Schaltfunktion aufgebaut werden. In einigen Fällen können NOR-Schaltkreise vorteilhafter sein. Beim Entwurf von Rechnerschaltungen wird man beide Schaltkreisarten kombinieren. Auch die Flip-Flops (bistabile Kippstufen), aus denen z. B. die Register bestehen, werden durch Zusammenschalten zweier NAND-Glieder realisiert.
Für die Ansteuerung peripherer Geräte sind im allgemeinen größere Leistungen erforderlich. Für diesen Zweck werden die Ausgangssignale der Logik-Schaltkreise mit Hilfe von Transistorverstärkern (Treiber) verstärkt.

2.4.3. Konstruktive Gestaltung

Die Bauelemente bzw. Schaltkreise werden auf *Leiterkarten* aufgebracht. Die Schaltelemente befinden sich auf einer Seite der Karte, während die Verbindungen untereinander in gedruckter Schaltung auf der anderen Seite ausgeführt sind (Tauchlötverfahren). Eine hohe Packungsdichte von Bauelementen erreicht man bei *Mehrlagenleiterkarten.* Sie bestehen aus mehreren voneinander isolierten Verdrahtungsebenen, über die die erforderlichen Verbindungen zwischen den Bauelementen hergestellt werden. An einer Seite der Karte befinden sich vergoldete Kontakte, mit denen sie in eine Federleiste gesteckt wird. Mehrere Federleisten werden zu einem *Chassis* oder *Modul* vereinigt, das nach Möglichkeit eine für sich selbständige funktionelle Einheit darstellt. Die Rückverdrahtung erfolgt auf möglichst kurzem Wege durch Drähte, wobei in zunehmendem Maße die Wickeltechnik anstelle des Lötens angewendet wird. Mehrere Chassis werden in Schwenkrahmen untergebracht und sind miteinander über Kabel mit Steckern verbunden. Bei der konstruktiven Ausführung ist auf Servicefreundlichkeit zu achten, d. h., im Falle einer Reparatur müssen alle Stellen des Rechners gut zugänglich sein. Das Gehäuse des Rechners selbst kann entweder hoch sein (bei kleiner Grundfläche, raumsparend, z. B. für Prozeßrechner) oder etwa Tischhöhe haben (bedienungsfreundlich, z. B. für kommerzielle Rechner).
Um die im Rechner entstehende Wärme abzuführen, sind *Ventilatoren* vorgesehen.

2.5. Programmierung

Rechenautomaten können nur die ihnen in einem Programm vorgegebenen Operationen ausführen. Digitale Rechenautomaten sind — von Einzweckrechnern für besondere Einsatzzwecke (wie z. B. in der Raumfahrt oder dem Militärwesen) abgesehen — frei programmierbar. Deswegen ist es nach der mathematischen Formulierung des Problems und der algorithmischen Beschreibung des Lösungsweges erforderlich, diesen Algorithmus in einer Sprache (*Programmiersprache*) darzustellen, die von Übersetzerprogrammen in eine Befehlsfolge für den Rechenautomaten (*Maschinenprogramm*) übersetzt werden kann. Diese Arbeitsstufe heißt *Programmierung.* Im Rechner werden intern sämtliche Operationen auf logische Ja-Nein-Entscheidungen zurückgeführt. Diese Detailliertheit ist jedoch nicht Aufgabe der Programmie-



rung, sondern des Übersetzungsprogramms. Programmiersprachen erlauben eine gröbere Darstellung.
Bei der Darstellung von Algorithmen kann man Operationen auf sehr unterschiedlichem Niveau als zulässig definieren, so z. B. „Berechnung der Biegelinie" als eine Operation im Rahmen einer größeren Rechnung. Vor der Aufstellung eines Programms ist dafür jedoch ein geeignetes und vollständiges Berechnungsverfahren einzusetzen. Einen Algorithmus kann man durch einen *Programmablaufplan* darstellen.

2.5.1. Programmablaufpläne

Der *Programmablaufplan* ist eine beschriftete grafische Darstellung eines Programmverlaufs, die einen Algorithmus vollständig beschreibt. Dieser Plan dient zur Veranschaulichung des Algorithmus und zur Vorbereitung der Programmierung, er beschreibt den Prozeß der Informationsverarbeitung grafisch. Programmablaufpläne werden auch *Flußbilder* genannt.
Für die Programmablaufpläne haben sich zwei Methoden herausgebildet, die gleichberechtigt nebeneinanderstehen:

- Bei der *Kästchenmethode* wird jede Operation durch ein Kästchen dargestellt. Die Symbole für die verschiedenen Arten der Operationen sind unterschiedlich. Die Kästchen werden entsprechend dem Programmablaufplan durch Linien verbunden.
- Die *Programmlinienmethode* betont die Programmlinie, die durch Angabe der Operationen ergänzt wird.

Die Kästchenmethode erfordert mehr Zeichenaufwand, sie ist aber auf den ersten Blick etwas übersichtlicher und für Grobdarstellungen besser geeignet. Für detaillierte Ausarbeitungen ist der Zeichenaufwand der Programmlinienmethode erheblich kleiner. Die Tafeln 2 und 3 sowie Tabelle 6 zeigen Symbole aus dem Standard [2]).

Tafel 2. Gemeinsame Symbole der Kästchen- und der Programmlinienmethode

Bedeutung	Zeichen
Grenzstelle (Programmanfang, Zwischenhalt, Programmende)	START HALT STOP
Beginn und Ende eines Unterprogramms	B E
Zeichenkonnektor (Unterbrechung und Fortsetzung auf der gleichen Seite, der Übergang kann von mehreren Stellen ausgehen, darf aber nur zu einer Stelle hin erfolgen)	A 4 A 10 4 10
Seitenkonnektor [Die obere Zahl ist die Seiten-Nr., die untere Zahl (oder Buchstaben-Zahlen-Kombination) die Nummer des Sinnbilds, wenn diese numeriert sind]	F5 12 E3 10 F5 E3
Variabler Konnektor (mehrfache Verzweigung entsprechend einer vorher festgelegten Bedingung)	$i = 1...3$ A_i A_1 A_2 A_3

Tafel 2. (Fortsetzung)

Bedeutung	Zeichen
Unterprogramm	
Programm-Modifikation (Änderung eines Befehls oder einer Befehlsgruppe durch das Programm selbst)	
Parallellinie (Zuordnung von Bemerkungen und Parameterangaben zur Programmlinie)	START STOP

Tafel 3. Unterschiedliche Symbole von Kästchen- und Programmlinienmethode

Bedeutung	Symbol Kästchenmethode	Symbol Programmlinienmethode
Operation, allgemein		
Ein- und Ausgabe		Eingabe
Vergleichsoperation und Verzweigung	1 ja nein	1 P P{x>0} $\bar{P}$ 1 j x>0? n

Tabelle 6. Symbole in Programmablaufplänen (Sinnbilder für Operationen)

Bedeutung	Zeichen	Bedeutung	Zeichen
Addition	+	kleiner als	<
Subtraktion	−	kleiner, gleich	≦
Multiplikation	×	gleich	=
Division	/ [I]	ungleich	≠
Potenzieren	↑	Ergibtzeichen	⇐, ⇒, :=, =:
Wurzel	√	Inhaltszeichen	⟨ ⟩
Fakultät	!	modifizierter Inhalt	⟨⟨ ⟩⟩
Summe	Σ [II]	absoluter Betrag	| |
Produkt	Π	Operationszeichen	( )
Integral	∫	Indexklammern	[ ]
größer als	>		

[I]) oder in üblicher Form; [II]) nur für grobe Programmablaufpläne oder als Name von Unterprogrammen

Die Sinnbilder für die Operationen entsprechen im wesentlichen den bekannten mathematischen Symbolen. Neu ist vor allem das Ergibtzeichen, das für den Aufbau von *Ergibtanweisungen* benutzt wird:

Variable := arithmetischer Ausdruck

Der Wert, mit dem die Variable links belegt wird, ergibt sich aus der Berechnung des arithmetischen Ausdrucks rechts.

Beispiel. Y := A * X + B oder Z := 3

In der Programmierung wird der *Inhalt* einer Speicherzelle durch die *Adresse* dieses Speicherplatzes symbolisiert, so daß man die beiden Ergibtanweisungen lesen kann als:

- der Inhalt der Zelle Y ergibt sich aus dem Produkt der Inhalte von A und X und Addition des Inhalts von B
- der Inhalt von Z ergibt sich zu 3

bzw. in der *Kurzform:*

- Y wird A mal X plus B
- Z wird 3

Das Ergibtzeichen ist nicht als Gleichheitszeichen aufzufassen, denn man kann das Ergebnis in eine der Operandenadressen bringen und z. B. durch S := S + A symbolisieren.
Man addiert also zum Inhalt der Zelle S den Inhalt von A und speichert das Resultat wieder in S. Als mathematische Gleichung wäre diese Beziehung nur für $A = 0$ oder $S = \infty$ erfüllt.

Beispiel. Programmablaufplan „Berechnung einer Summe" (Bild 28):

$$S = \sum_{I=1}^{N} A[I]$$

Hier wurde der Index schon in Anlehnung an die noch folgende ALGOL-Programmierung in eckigen Klammern geschrieben. Programmablaufpläne lassen auch das Tiefsetzen der Indizes zu. Im Beispiel der *Kästchenmethode* ist das Programm für eine unveränderliche Anzahl $N = 10$ dargestellt. Die in *Programmlinienmethode* dargestellte Version ist flexibler, es ist N als erste Zahl einzugeben. Damit ist das Programm vielseitiger. Diese Allgemeingültigkeit ist bei der Programmierung anzustreben. Wenn man, wie in diesen Beispielen, unmittelbar nach dem Einlesen eines A-Werts aufaddiert, so ist nur ein Speicherplatz für alle $A[I]$-Werte erforderlich. Das kann bei großem Zahlenmaterial erheblich Speicherplatz einsparen. Würde

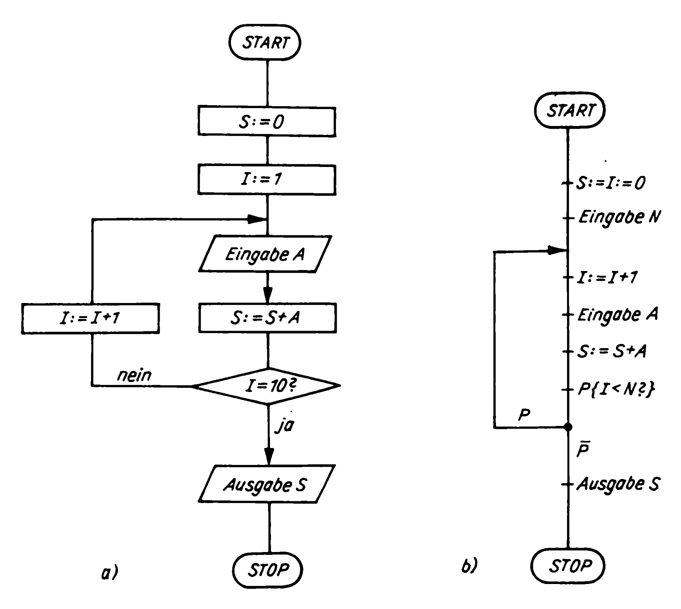


Bild 28. Programmablaufplan SUMME. a) Kästchenmethode; b) Programmlinienmethode

man erst alle Werte einlesen und dann addieren, so müßten N Speicherzellen benutzt werden, die, wenn man die einzelnen $A[I]$ nicht in weiteren Rechnungen noch benötigt, nicht erforderlich sind.
Beide Programmablaufpläne enthalten einen Zyklus, der zehnmal bzw. N-mal durchlaufen wird. Das wird durch die *Laufvariable* I und den *Test* $I = 10$? bzw. $I < N$? erreicht. Hier sei auf die absichtlich unterschiedliche Anordnung der Anweisung $I := I + 1$ und auf die beiden unterschiedlichen Testfragen aufmerksam gemacht. Mit beiden Versionen wird das gleiche erreicht. Zyklen dieser Art heißen *Laufanweisungen*. Sie treten in Programmen häufig auf und sollten auch möglichst viel benutzt werden, weil dadurch einmal programmierte Programmteile mehrfach durchlaufen werden. Das macht die Programmierung eigentlich erst effektiv. Laufanweisungen können meist in mehreren Varianten geschrieben werden. Dadurch besteht die Gefahr, Fehler zu machen, und die Notwendigkeit, programmierte Laufanweisungen besonders auf die Einhaltung der gewünschten Bedingungen zu kontrollieren. Man darf einen Test auf Gleichheit nur dann benutzen, wenn die Laufvariable eine *ganzzahlige Indexvariable* ist, die im Rechenautomaten keinen Rundungsfehlern unterworfen ist. Will man z. B. eine technische Berechnung für alle Werte von $X = 1.00$ mit der Abstufung von $\Delta X = 0.25$ bis $X = 5.00$ ausführen, so könnte durch Rundungsfehler der Wert 5.000001 erreicht werden. Ein Test $X = 5.00$? würde nicht erfüllt und die Laufanweisung nicht wie gewünscht beendet. Hier sollte man z. B. auf $X > 5.1$? testen und bei positiver Antwort die Laufanweisung beenden. Die Zugabe von 0.1 kann bei richtiger Anordnung des Tests bewirken, daß auf jeden Fall auch bei kleinen Rundungsfehlern der Wert in der Nähe von 5.00 noch berechnet wird.

Bild 29 zeigt einen Programmablaufplan für zwei ineinander geschachtelte Laufanweisungen; das könnte beliebig fortgesetzt werden. In diesem Beispiel werden für $J = 1 \ldots N$ und $I = 1 \ldots K$ die Werte der Produktsumme:

$$Y[J] = B[0, J] + \sum_{I=1}^{K} B[I, J] * X[I]$$

berechnet. Man erkennt, daß bei großen Werten von K und N mit einem kurzen Programm eine umfangreiche Rechnung durchgeführt werden kann. Die häufige und geschickte Ausnutzung von Laufanweisungen und indizierten Variablen verkürzt die Programme.

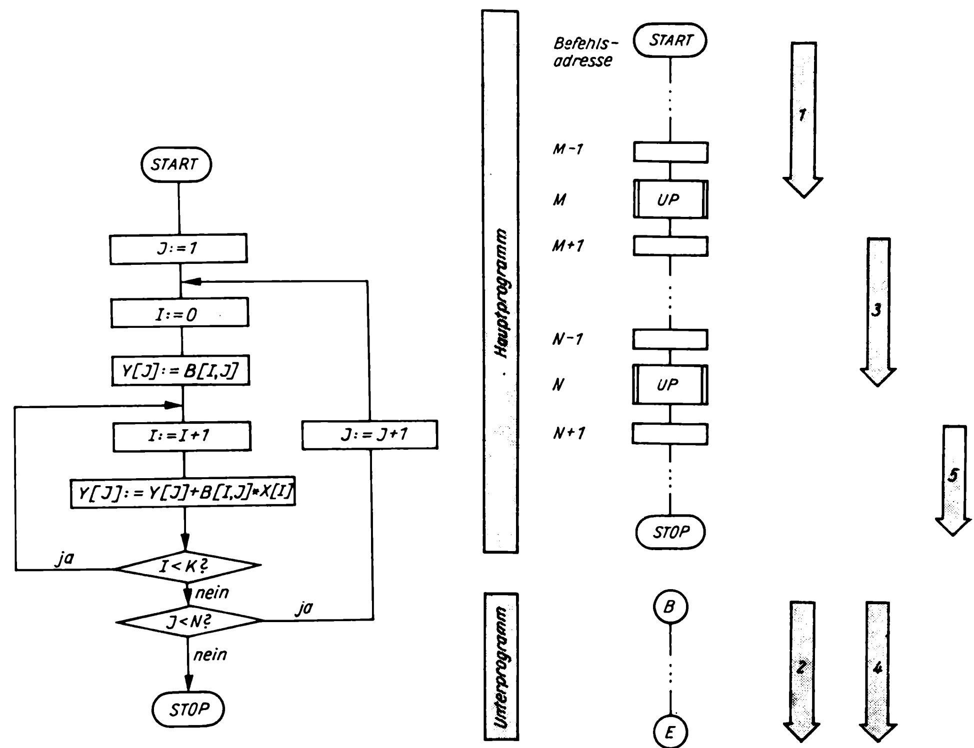


Bild 29. Programmablaufplan PRODUKTSUMME

Bild 30. Unterprogrammtechnik



Will man Programme zwar mehrfach, aber nicht zyklisch ausnutzen, so kann man das mit der Unterprogrammtechnik erreichen. *Unterprogramme* sind in sich abgeschlossene Programmteile, die für eine oder mehrere Eingangsgrößen die Werte für eine oder mehrere Ausgangsgrößen berechnen. Die aktuellen Werte für die Eingangsgrößen müssen durch das Hauptprogramm zur Verfügung gestellt werden, das Resultat ist nach Abschluß des Unterprogramms für das Hauptprogramm verfügbar. Das Symbol für Unterprogramme ist in Tafel 2 enthalten. Aus Bild 30 ist die Reihenfolge der Abarbeitung von Haupt- und Unterprogrammen ersichtlich, die entsprechend den Pfeilen 1, 2, 3, 4 und 5 erfolgt. Nach Abschluß des Unterprogramms wird das Hauptprogramm jeweils an der richtigen Stelle nach der Unterbrechung fortgesetzt. Die entsprechende Befehlsadresse wird vorher durch ein *Organisationsprogramm* gesichert. Es können auch mehrere Unterprogramme ineinandergeschachtelt werden.
Die Ausarbeitung einwandfreier Programmablaufpläne ist eine nützliche und effektive Vorbereitung der Programmierung.

2.5.2. Niveaus der Programmiersprachen

Programmiersprachen sind eindeutige Sprachen, die geeignet sind, mit ihnen Programme zu formulieren. Sie enthalten *Symbole* und *Festlegungen*. Die Festlegungen schreiben die Art und die Reihenfolge der Symbole vor.
Jedes Programm benötigt im Speicher eines Rechenautomaten Speicherplätze für *Befehle* und Speicherplätze für *Daten*. Dabei wird jede Information (Befehle und Daten) innerhalb des Rechners rein dual dargestellt. Das Befehlswort enthält Befehl und Adresse des Operanden bei einer Einadreßmaschine und mehrere Adressen bei Mehradreßmaschinen. Auch Befehle und Adressen werden rechnerintern dual dargestellt. Diese notwendige Darstellungsform ist für die Kommunikation mit dem Menschen wenig geeignet. Deswegen wurden und werden Hilfsmittel zur Erleichterung der Programmierung, die *Programmiersprachen*, geschaffen, die man gegenwärtig in drei Niveaus einteilen kann: Maschinensprachen, maschinenorientierte Sprachen und problem- bzw. verfahrensorientierte Sprachen. In den *Maschinensprachen* ist jeder Befehl durch eine Zahl verschlüsselt, jede Adresse ist direkt anzugeben. Somit ist in mühsamer Arbeit ein Speicherbelegungsplan auszuarbeiten. Die duale Darstellung des Rechners wird hier nur durch einfache Ein- und Ausgabeprogramme (Zahlenkonvertierungsprogramme) in ein für den Menschen übersichtlicheres Zahlensystem übertragen. Da man mit drei Bit acht Ziffern darstellen kann und diese Bits dabei voll ausnutzt, werden hier meist Oktalzahlen als Grundlage des Codes benutzt.

Beispiel. Will man $Y := (A + B - C) * D$ berechnen und nimmt man folgenden *Befehlsschlüssel* und *Speicherbelegungsplan* der Operanden an:

Befehl	*Code*	*Operand*	*Adresse*
Lade das Rechenregister mit dem Operanden	136	A	5065
Addiere den Operanden zum Rechenregister	402	B	5066
Subtrahiere den Operanden vom Rechenregister	404	C	5067
Multipliziere das Rechenregister mit dem Operanden	600	D	5070
Speichere vom Rechenregister in die angegebene Zelle (wobei immer der Inhalt von Register und Zelle gemeint ist)	137	Y	5071

so heißt das *Programmstück* zur Berechnung von Y:

1365065
4025066
4045067
6005070
1375071

Diese Programmierung ist aufwendig und kompliziert, besonders bei umfangreichen Algorithmen. Sie ist schwer zu erlernen. Das maschinengebundene Programm ist unübersichtlich, schwer auf Fehler zu kontrollieren, es enthält also viele Fehlermöglichkeiten.

Auf dem nächsthöheren Niveau der Programmiersprachen, den *maschinenorientierten Programmsprachen* mit symbolischer Adressierung, werden für die Befehle *Symbole* (Abkürzungen, Mnemonics) und *symbolische Adressen* benutzt.

Ersetzt man die im Beispiel Y := (A + B − C) * D gegebenen Befehle in ihrer Reihenfolge durch die Symbole LD, ADD, SUB, MUL und SP und benutzt man die Operandennamen als symbolische Adressen, so lautet das entsprechende Programmstück:

Befehl	Adresse
LD	A
ADD	B
SUB	C
MUL	D
SP	Y

Dabei entspricht jedem Maschinenbefehl auch ein Befehl in diesem Programm. Es wäre ein *Übersetzungsprogramm* nötig, das die Befehlssymbole übersetzt, einen Speicherbelegungsplan ausarbeitet und jeweils die absolute Adresse einsetzt. Übersetzerprogramme auf diesem Niveau werden *Assembler* genannt, sie erleichtern die Programmierung im Vergleich zur Maschinensprache wesentlich. Der befehlsweise Aufbau des Programms bleibt erhalten, d. h., die Abarbeitung kann weitgehend der Maschine angepaßt und vom Programmierer beeinflußt werden. Das bedeutet kurze Rechenzeiten. Der Speicher wird relativ gut ausgenutzt, das Übersetzungsprogramm ist relativ einfach. Diese Programmiersprache ist auf einen bestimmten Rechenautomaten orientiert.
Problem- bzw. verfahrensorientierte Programmiersprachen, die bekanntesten sind ALGOL, FORTRAN, PL/1 [13, 14, 21, 22, 24, 32, 33, 39, 41, 43, 45, 46, 47, 58], sind von den speziellen Rechenautomaten fast unabhängig. Es bestehen meist bei den einzelnen Rechenautomaten nur kleine Unterschiede im verfügbaren Zeichenvorrat für die Darstellung des Programms und in den Ein- und Ausgabemöglichkeiten. Diese Sprachen bieten großen Programmierungskomfort, sind vielseitig anzuwenden und leicht zu erlernen. Die Programme sind in bezug auf Speicherplatzausnutzung und Rechenzeit aber nicht optimal. Die Übersetzerprogramme von einer problem- bzw. verfahrensorientierten Programmiersprache in die maschineninterne Darstellung werden *Compiler* genannt. Sie sind komplizierter und erfordern für sich selbst mehr Speicherplatz als Assembler. Sie sind deswegen für Rechenautomaten mit kleinem Speicher nicht anwendbar.

Die auf den anderen Niveaus als Beispiel gezeigte Formel kann in einer auf mathematische Probleme orientierten Programmiersprache (z. B. ALGOL) direkt als:

Y := (A + B − C) * D

also in Form einer nicht in einzelne Befehle aufgelösten Anweisung geschrieben werden.

Einerseits sind mit steigendem Komfort der Programmiersprachen Zeiteinsparungen bei der Programmierung möglich, aber dafür größere Speicherbereiche für das Übersetzungsprogramm erforderlich. Andererseits ist nicht jede Aufgabe so kompliziert, daß der Einsatz höherer Programmiersprachen lohnt. Aus diesen und anderen Gründen gibt es eine gewisse Zuordnung von Einsatzgerät des Rechners und notwendigen bzw. verfügbaren Programmierhilfen. Rechner in Rechenzentren verfügen über Compiler, Prozeßrechner verfügen über Echtzeitbetriebssysteme und Assembler, Mikrorechner werden gegenwärtig vor allem maschinenorientiert oder mit Hilfe von Assemblern bzw. Compilern über *Wirtsrechner* programmiert.

2.5.3. Programmiersprache ALGOL

2.5.3.1. Allgemeines

Hier wird eine Einführung in die allgemeine Form der Programmiersprache ALGOL, vollständig ALGOL 60 genannt, gegeben. Diese Sprache ist in [39] definiert, in [14, 33] sind ausführliche Darstellungen gegeben (ALGOL — Algorithmic Language).

In der allgemeinen Form ist ALGOL vollständig unabhängig von speziellen Rechenmaschinen. Am Ende des Abschnitts wird ein Beispiel in der ALGOL-Version eines konkreten Rechenautomaten erläutert.

An eine *problemorientierte Sprache* sind eine Anzahl von Forderungen zu stellen, u. a.:

— Es muß ein angebbares und genügend großes Anwendungsgebiet der Sprache existieren.
— Die Sprache muß eindeutig sein und eine vollständige Beschreibung von Programmen des Anwendungsgebiets erlauben.
— Die Sprache soll so weit wie möglich die im Anwendungsgebiet übliche Symbolik beibehalten.
— Es müssen Hilfsmittel für die Fehlersuche vorhanden sein.
— Der Text der Sprache soll einfach herzustellen und zu lesen sein.

Die Sprache ALGOL wird aus einer Reihe von Grundsymbolen aufgebaut. Einige dieser *Grundsymbole* sind keine *Einzelsymbole* (Zeichen), sondern Buchstabenfolgen (*Wortsymbole*). Diese Wortsymbole werden bei gedruckten Texten durch Fettdruck (z. B. **goto**) und bei Schreibmaschinen- oder Handschrift durch Unterstreichung (z. B. goto) herausgehoben.

2.5.3.2. Grundsymbole

ALGOL ist auf 116 Grundsymbolen aufgebaut. Das sind 52 Buchstaben, 10 Ziffern, 2 logische Werte, 52 Begrenzer.

Buchstaben

Als Buchstaben werden in ALGOL die 26 kleinen und 26 großen Buchstaben des lateinischen Alphabets, also a, ..., z und A, ..., Z, bezeichnet.

Buchstaben anderer Alphabete sind durch eine Folge lateinischer Buchstaben darzustellen, so z. B. alpha, BETA, rho. Auf einzelnen speziellen Rechenmaschinen sind Einschränkungen der Art üblich, daß entweder nur große oder kleine Buchstaben benutzt werden dürfen.

Ziffern

Als Ziffern werden die 10 Ziffern des Dezimalsystems, also 0, 1, ..., 9, bezeichnet. Beim Schreiben von Programmen ist streng zwischen der Ziffer 0 und dem Buchstaben O sowie zwischen der Ziffer 1 und den Buchstaben l und I zu unterscheiden, da diese äußerlich z. T. ähnlichen Zeichen bei der Eingabe in den Rechner durch unterschiedlichen Code repräsentiert werden.

Logische Werte

Logische Werte sind die Wortsymbole **true** und **false**, die den beiden Wahrheitswerten der zweiwertigen Logik (wahr und falsch) entsprechen.

Begrenzer

Operatoren

Arithmetische Operatoren sind +, —, *, /, ÷, ↑, die in dieser Reihenfolge Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, ganzzahlige Division (das Ergebnis ist ganzzahlig, der Rest wird vernachlässigt) und Potenzierung bedeuten. Basis, Potenzierungszeichen und Exponent stehen in einer Höhe.

Vergleichsoperatoren sind die bekannten Zeichen $<$, $\leqq$, $=$, $\geqq$, $>$, $\neq$. Das Gleichheitszeichen wird im Sinne der Identität verwendet.

Logische Operatoren sind $\equiv$, $\supset$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, die in dieser Reihenfolge Äquivalenz, Implikation, Disjunktion, Konjunktion und Negation bedeuten.

Folgeoperationen werden zur Bildung von Programmverzweigungen und Programmschleifen benutzt. Sie haben folgende Bedeutung:

goto	springe nach,	**else**	sonst,
if	wenn,	**for**	für,
then	dann,	**do**	führe aus.

Trennzeichen

Trennzeichen sind Grundsymbole, die andere Grundsymbole oder aus ihnen zusammengesetzte Sprachelemente voneinander trennen:

,	Komma	Listentrennzeichen,
.	Dezimalpunkt	trennt den ganzen und gebrochenen Teil einer Zahl,
$_{10}$	Basiszehn	trennt die Zehnerexponenten einer Zahl von der Mantisse,
:	Doppelpunkt	Markierungszeichen,
;	Semikolon	Anweisungstrennzeichen,
:=	Ergibtzeichen	trennt den linken und rechten Teil einer Ergibtanweisung,
␣	freier Platz	Zwischenraum in einer Folge von Zeichen,

step	Schrittweite,	**while**	solange,
until	bis,	**comment**	Kommentar, Bemerkung.

Der Gebrauch der Trennzeichen wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

Klammern

Klammern müssen stets paarweise benutzt werden. In ALGOL werden vier Arten von Klammern unterschieden:

( )	algebraische Klammern,	' '	Kettenanführungszeichen,
[ ]	Indexklammern,	**begin end**	Anweisungsklammern.

Vereinbarungszeichen

Vereinbarungszeichen ordnen den im Programm benutzten Größen gewisse Eigenschaften zu. Es stehen die folgenden Zeichen zur Verfügung:

Boolean	für logische Größen,	**switch**	für Verteiler,
integer	für ganzzahlige Größen,	**procedure**	für Prozeduren,
real	für reelle Größen,	**own**	für eigen.
array	für Felder,		

Spezifikationszeichen

Spezifikationszeichen sind

string	für Zeichenkette,	**value**	für Wert.
label	für Marke,		

Sämtliche Begrenzer werden durch die Anwendungen in den nächsten Abschnitten erläutert.

2.5.3.3. Wortbildungen

In ALGOL werden Variable und andere in Programmen vorkommende Größen (Marken, Verteiler, Prozeduren) durch Namen oder Bezeichnungen dargestellt. Eine *Bezeichnung* ist eine beliebige Folge von Buchstaben und Ziffern, die mit einem Buchstaben beginnt, z. B. a, A2, aquer, Astern. Die Anzahl der Zeichen eines *Namens* ist durch ALGOL selbst nicht begrenzt, wohl aber in der Praxis bei der Benutzung von Rechenmaschinen.
ALGOL-*Zahlen* sind Zahlen des Dezimalsystems, sie müssen nach bestimmten Regeln gebildet werden. Es wird zwischen ganzen und reellen Zahlen unterschieden. Wenn eine Größe in einem Programm nur ganzzahlige Werte annehmen soll (z. B. bei der Indizierung), so ist sie vom Typ



integer, andernfalls vom Typ **real**. Reelle Zahlen können auch halblogarithmisch dargestellt werden.

Beispiele. **integer:** −1 27 +0815 4711

real: 1.25 5.0000 $-0.123_{10}-01$

Eine Zeichenkette ist eine beliebige Folge von Grundsymbolen, die zwischen Kettenanführungszeichen eingeschlossen sind. Sie dient zur Ausgabe von Text, also z. B. zur Beschriftung von Tabellenköpfen oder Ausgabe von Informationen.

Beispiele. 'Rechnung konvergiert nicht'
'Max␣Mueller,␣␣␣1120␣␣Berlin'

2.5.3.4. Geradeausprogramm

Jedes ALGOL-Programm hat folgende *Grundstruktur:*

begin Vereinbarungsteil; Anweisungsteil **end**

Alle im Anweisungsteil vorkommenden Größen müssen im Vereinbarungsteil aufgeführt werden, dabei wird der Typ der jeweiligen Größe durch das jeweilige Vereinbarungszeichen festgelegt. Innerhalb eines Programms können Blöcke gebildet werden, die wieder die gleiche Grundstruktur haben.
Ein *Geradeausprogramm* enthält weder Schleifen noch Verzweigungen, es hat die einfachste Struktur. Von den in ALGOL möglichen *Anweisungen:*

— Ergibtanweisung,
— leere Anweisung,
— Sprunganweisung,
— bedingte Anweisung,
— Laufanweisung,
— Verbundanweisung,
— Block,
— Prozeduranweisung

sind im Geradeausprogramm nur die Ergibtanweisung oder die leere Anweisung vorhanden.

Beispiel. Die Berechnung der Größe y nach der Gleichung Y := (A + B − C) * D würde in Form eines ALGOL-Programms lauten:

```
begin real y, a, b, c, d;
      a := 2;
      b := 3;
      c := 2.5;
      d := 0.11;
      y := (a + b − c) d;
end;
```

Jede einfache Variable wird durch eine Bezeichnung dargestellt und repräsentiert einen Wert. Einer Variablen kann ein Wert durch eine Ergibtanweisung oder mittels Eingabe zugewiesen werden. Einfache Variable dürfen in einem Programm nur benutzt werden, wenn dort für sie eine gültige Typenvereinbarung vorhanden ist. Eine *Typenvereinbarung* beginnt mit einem der drei Symbole **integer, real, Boolean**, nach denen eine Folge von Variablen, jeweils durch ein Komma getrennt, stehen kann. Sie wird durch ein Semikolon beendet.

Arithmetische Ausdrücke sind aus Operanden, Operatoren und algebraischen Klammern aufgebaut. Arithmetische Operatoren dürfen nicht unmittelbar aufeinander folgen. Im Bedarfsfall müssen Klammern gesetzt werden.

Beispiel.

Gewöhnliche Schreibweise:	ALGOL:
$\frac{a}{-b}$	a/(−b)
$\frac{a^2+b^2}{2ab}$	(a ↑ 2 + b ↑ 2)/(2 * a * b)
$2n^k$	2 * n ↑ k

Arithmetische Operationen werden im allgemeinen von links nach rechts, jedoch unter Beachtung folgender *Vorrangreihenfolge* abgearbeitet:

1. Klammern ( )
2. Potenzierung ↑
3. Multiplikation, Division *, /, ÷
4. Addition, Subtraktion +, −

Ohne die beiden Klammernpaare würde das mittlere der für die Schreibweise gegebenen Beispiele berechnet als

$$a^2 + \frac{b^2}{2} ab \quad \text{oder} \quad a^2 + \frac{b^2}{2ab}$$

je nach speziellem Rechenautomaten. Erst die Klammern legen die gewünschte Reihenfolge fest. Wird ein Klammernpaar zuviel gesetzt, so ist das ohne Einfluß, z. B.

$2n^k \rightarrow$ 2 * n ↑ k bzw. (2 * n) ↑ k

so daß man im Zweifelsfall sicherheitshalber eine Klammer setzen sollte. Jedoch darf man hier nicht 2 * (n ↑ k) schreiben.

Ein logischer Ausdruck ist eine Formel zur Berechnung eines logischen Werts, der nur die beiden Werte **true** und **false** annehmen kann.

Beispiel. Aus der Schaltalgebra sei die formelmäßige Beziehung

$$\overline{A \wedge B \vee B \wedge C \vee C \wedge A} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B} \vee \bar{B} \wedge \bar{C} \vee \bar{C} \wedge \bar{A}$$

gegeben, und es soll geprüft werden, ob diese Beziehung für alle möglichen Wertekombinationen der BOOLEschen Variablen A, B, C richtig ist; wenn ja, so soll die Zahl 1 ausgedruckt werden, sonst eine 0. Das ALGOL-Programm lautet:

```
begin integer a, b, c;
      Boolean A, B, C, R;
      for a := 1, 0 do
      for b := 1, 0 do
      for c := 1, 0 do
      begin A := if a = 1 then true else false;
            B := if b = 1 then true else false;
            C := if c = 1 then true else false;
            R := ¬ (A ∧ B ∨ B ∧ C ∨ C ∧ A)
               = ¬ A ∧ ¬ B ∨ ¬ B ∧ ¬ C ∨ ¬ C ∧ ¬ A;
            if R then begin drucke (0); goto E end
      end;
      drucke (1);
      E:
end
```

Zuerst werden alle benutzten Größen vereinbart. Danach beginnt das Programm mit drei Zyklen für a, b, c, denen nacheinander jede Kombination der Werte 1 und 0 zugewiesen wird (Reihenfolge 1, 1, 1; 0, 1, 1; 0, 0, 1; ...; 0, 0, 0;). Jede Anweisung wird mit einem Semikolon beendet. Hinter den drei **do** darf kein Semikolon stehen, da sich diese Wertzuweisungen auf die gesamte auf das letzte **do** folgende und zwischen **begin** und **end** stehende Verbundanweisung beziehen. Der Ausdruck „**for** a := 1, 0 **do**;" wäre eine leere Anweisung, die vom Folgenden losgelöst wäre. Soll das letzte **do** für mehr als eine Anweisung gelten, so müssen diese Anweisungen durch **begin**- und **end**-Klammern zu einer Verbundanweisung zusammengefaßt werden. Vor **end** braucht kein Semikolon zu stehen, dem letzten **end** braucht kein Semikolon zu folgen. An diesen Stellen gesetzte Semikolons werden ignoriert, im Zweifelsfall kann man sie also setzen. Hier wurde das Wort „drucke" als Symbol für die Ausgabe benutzt. ALGOL 60 sieht keine Ein- und Ausgabeprozeduren vor, diese sind maschinengebunden. Die Marke E steht vor einer Leeranweisung (E:), die wegen des folgenden **end** nicht durch ein Semikolon beendet werden muß.

In ALGOL gibt es eine Reihe von Standardfunktionen, um mathematische Funktionen bequem schreiben zu können. Sie haben die Form $F(x)$, wobei F eine von neun Prozeduranweisungen und x das Argument ist (Tabelle 7).



Tabelle 7. ALGOL-Standardfunktionen

ALGOL	Mathematische Bezeichnung	Bedeutung
abs(x)	x	absoluter Betrag
arctan(x)	$\arctan x$	Hauptwert des Arcustangens $-(\pi/2) < \arctan(x) < \pi/2$
cos(x)	$\cos x$	Cosinus x (Argument im Bogenmaß)
entier(x)	$[x]$	größte Zahl, die kleiner oder gleich x ist
ln(x)	$\ln x$	natürlicher Logarithmus ($x > 0$)
sign(x)	$\operatorname{sign} x$	Vorzeichen für x: $+1$ für $x > 0$ 0 für $x = 0$ -1 für $x < 0$
sin(x)	$\sin x$	Sinus x (Argument im Bogenmaß)
sqrt(x)	$\sqrt{x}$	positive Quadratwurzel von x ($x \geqq 0$)
exp(x)	e^x, $\exp x$	Exponentialfunktion von x

2.5.3.5. Programmverzweigungen

Einfachverzweigung

Eine Einfachverzweigung ist ein Programmelement mit einem Eingang und zwei Ausgängen, sie wird durch eine bedingte Anweisung erreicht. Die Ziele der Verzweigung können durch Marken markiert und über Sprunganweisungen erreicht werden. Eine *Marke* ist eine beliebige Bezeichnung, die nicht schon für andere Zwecke benutzt wurde. Eine Anweisung wird markiert, indem man vor die Anweisung eine Marke und einen Doppelpunkt setzt. Eine Anweisung kann mehrfach markiert werden.

Beispiele. Einfache Markierung M1: a := b + c;
mehrfache Markierung M1: M2: A: ENDE: ;

Ein *unbedingter Sprungbefehl* wird in ALGOL durch die Sprunganweisung

goto M; (M Marke)

ausgedrückt. Anstelle der Marke darf ein Zielausdruck, d. h. eine Regel zur Ermittlung einer Marke, stehen.
Ein *bedingter Sprungbefehl* wird durch die Wenn-Anweisung

if B **then goto** M;

oder durch die Alternativanweisung

if B **then goto** M1 **else goto** M2;

erreicht. B ist ein logischer Ausdruck, z. B.

if a < 0 **then goto** M1 **else goto** M2;

Es gibt zwei Formen bedingter Anweisungen:

— unvollständige Form: **if** B **then** A1;
— vollständige Form: **if** B **then** A1 **else** A2;

(A1 und A2 beliebige Anweisungen)

Bei der Konstruktion bedingter Anweisungen sind folgende Regeln zu beachten:

1. Hinter **then** darf kein **if** stehen (notfalls **begin** dazwischen und **end** nach der entsprechenden Anweisung setzen).
2. Vor **else** dürfen keine Laufanweisung und kein Semikolon stehen.
3. Sollen sich **then** oder **else** auf mehrere Anweisungen beziehen, so müssen diese durch **begin** und **end** zu einer Verbundanweisung zusammengefaßt werden.

Mehrfachverzweigung

Eine Mehrfachverzweigung ist ein Programmelement mit einem Eingang und mehr als zwei Ausgängen; bei jedem Durchgang darf nur einer der Ausgangszweige benutzt werden. Eine Mehrfachverzweigung entspricht einem variablen Konnektor der Flußbildtechnik und wird in ALGOL durch einen Verteiler realisiert. Eine Verteilervereinbarung beginnt stets mit einem Wortsymbol **switch**, danach folgen Verteilerbezeichnung, Ergibtzeichen und eine Liste von Zielausdrücken.

Beispiel.
```
begin integer i;
      real ...;
      switch s := M1, M2, M3, A, B, C;
      ⋮
      i := ...;
      ⋮
      goto s [i];
      ⋮
end
```

In diesem Beispiel wird durch den Verteiler immer die i-te Marke der angegebenen Reihenfolge M1, ..., C mit dem jeweils aktuellen und durch die Rechnung veränderlichen Wert von i angesprungen. Dabei muß $1 \leqq i \leqq 6$ sein. Alle Marken müssen als Einsprungstellen vorhanden sein.

2.5.3.6. Programmschleifen

Eine Programmschleife (auch Programmzyklus, Schleife oder Zyklus genannt) ist ein Programmstück, das wiederholt ausgeführt werden kann. Die Wiederholung bezieht sich nur auf die Operationen, nicht auf die Werte der Variablen. Dafür werden häufig indizierte Variable und Variablenfelder benutzt.
Eine *indizierte Variable* hat die Form a[I, J, ..., M], dabei ist a die Feldbezeichnung und I, J, ..., M die Indexliste. Mit einer indizierten Variablen wird also kein einzelner Wert, sondern ein ganzes Feld von Werten bezeichnet. Die Anzahl der Indexpositionen entspricht der Dimension des Felds. Jede Indexposition wird als eine Variable vom Typ **integer** angesehen. Den Indexpositionen können während der Rechnung Werte zugeordnet, es können aber auch direkt Zahlen in den Indexklammern eingesetzt werden. So wird z. B. durch I := 3; J := 2; x := a[I, J]; das gleiche erreicht wie durch x := a[3, 2];
Die Felder sind unter **array** mit Angabe der Feldgrenzen zu vereinbaren.

Beispiele.
```
array x, y, z[1 : 10, 1 : 5], w[-10 : 10], a[1 : N, 1 : M];
integer array VEKTOR[1 : 100], FELD[1 : 4, 1 : 4, 1 : 4];
Boolean array A[1 : N];
```

Die Vereinbarung **array** ohne Zusatz zählt als **real array**, wobei auch **real** geschrieben werden darf. Werden dynamische Felder vereinbart, z. B. a[1 : N, 1 : M], so sind die Größen N und M vorher zu vereinbaren und mit Werten zu belegen (Eingabe oder Wertzuweisung).

Die Anweisung, die die Abarbeitung einer Programmschleife beschreibt, heißt *Laufanweisung*. Die Variable, die den Ablauf steuert, heißt *Laufvariable*. Für die Laufliste gibt es drei Möglichkeiten:

- arithmetischer Ausdruck,
- **step-until**-Element,
- **while**-Element.

Beispiele. Arithmetischer Ausdruck:
```
for x := 1 do y := x ↑ 2;
for x := x + a do y := x ↑ 2;
for x := 1, 3, 5, 7 do y := x ↑ 2;
```

step-until-*Element*:
```
for i := 1 step 1 until n do ...;
for i := 1 step 1 until 10 do for j := 1 step 1 until 20 do ...;
```
(zwei geschachtelte Laufanweisungen)

while-*Element:* **for** i := i + 1 **while** i < 20 **do** ...;
for n := delta **while** abs(delta) ≧ eps **do** ...;

Kombiniertes Beispiel. **for** x := 0.1, 0.2 **step** 0.1 **until** 1.0, 1.5 **step** 0.5 **until** 4.1, 5.0 **do** ...;

2.5.3.7. Unterprogramm

Ein Unterprogramm ist ein einmal gespeichertes Programmstück, das mit verschiedenen aktuellen Parametern mehrfach und an verschiedenen Stellen eines übergeordneten Programms benutzt werden kann. Unterprogramme werden in ALGOL durch *Prozeduren* realisiert (Bild 30).

Die Prozedurvereinbarung entspricht dem Unterprogramm. Sie enthält die *Prozedurbezeichnung*, den formalen *Parameterteil* und den *Prozedurhauptteil*. Die beiden ersten werden auch *Prozedurkopf* genannt. Der Prozedurkopf wird durch ein Semikolon vom Hauptteil getrennt. Formale Parameter werden nicht vereinbart, sie dienen nur der späteren Zuordnung der aktuellen Parameter. Der Prozedurhauptteil beschreibt den Algorithmus. Durch eine Prozeduranweisung, d. h. durch Angabe der Prozedurbezeichung und der aktuellen Parameter, kann die Prozedur an beliebigen Stellen des Hauptprogramms benutzt werden.

Beispiel.
```
begin real u, v, w;
      procedure Wurzel (x, y, r);
               r := sqrt(x ↑ 2 + y ↑ 2);
      ⋮
      u := 4; v := 5;
      Wurzel (u, v, w);
      ⋮
end
```

Nach der Benutzung der Prozedur hätte w den Wert

$$w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

angenommen. Das umfangreiche, komplizierte und für die Programmierung wichtige Gebiet der Prozeduren konnte hier nur kurz behandelt werden. Es sei auf [14, 33] verwiesen.

2.5.3.8. Teilprogramm, Block und Programm

Ein *Teilprogramm* ist ein Abschnitt eines Programms, der aus organisatorischen oder problembedingten Gründen zu einer Einheit zusammengefaßt worden ist. Das entspricht in ALGOL einer *Verbundanweisung*, also einer Reihe von Anweisungen, die zwischen begin- und end-Klammern stehen.
Stehen hinter dem **begin** Vereinbarungen, so ist es keine Verbundanweisung, sondern ein *Block*. Vereinbarungen dürfen nur am Blockanfang stehen. Die vereinbarten Größen sind *lokale Größen* in bezug auf diesen Block; sie sind *globale Größen* in bezug auf untergeordnete, in diesem Block enthaltene Blöcke und können auch in diesen benutzt werden.
Ein Programm hat die Gestalt eines Blocks, jedoch gibt es dafür keinen übergeordneten Block. Alle Größen sind lokal in bezug auf das Programm. Das Programm muß vollständig sein.

2.5.3.9. Überprüfung und Abarbeitung von Programmen

Ein Rechenautomat kann nur syntaktisch richtige Programme verarbeiten. Als erstes ist jedes Programm nach seiner Fertigstellung durch den Bearbeiter gründlich zu kontrollieren. Bei ALGOL-Programmen sollte man besonders folgende Punkte beachten:

1. Multiplikationszeichen in Formeln nicht vergessen.
2. Prüfen aller Rechenschritte auf Division durch 0 und Bereiche der Argumente der Standardfunktionen.
3. Prüfen der Zahlenschreibweise.

4. Es düfen nicht zwei arithmetische Operatoren unmittelbar aufeinander folgen.
5. Soll die Größe eines Ausdrucks getestet werden, so ist „abs" zu verwenden.
6. Zyklen auf richtiges Ende und richtige Stellung im Programm überprüfen.
7. Richtige Schreibweise der Wortsymbole überprüfen.
8. Zeichensetzung beachten: nach einer Anweisung und nach „**end**" steht entweder „;", „**end**" oder „**else**".
9. Zu jedem **if** gehört ein **then**.
10. Paarweisen Gebrauch der Klammern (einschl. **begin** und **end**) überprüfen.
11. Vereinbarungen überprüfen.
12. Sprungbefehle und Marken überprüfen.

Nach dieser Prüfung ist das Programm auf maschinenlesbare Datenträger (Lochband oder Lochkarten) abzulochen. Das abgelochte Programm ist auf *Schreibfehler* zu überprüfen. Dann wird das Programm mit Hilfe des Compilers auf syntaktische Fehler getestet und übersetzt. Für vorhandene syntaktische Fehler kommen *Fehlerausschriften.*
Ist ein Programm syntaktisch einwandfrei und übersetzt, so kann die Rechnung beginnen. Dabei ist ein Datenstreifen mit den Eingangsdaten in genau der im Programm vorgesehenen Eingabereihenfolge erforderlich. Erst bei der Rechnung zeigen sich logische und algorithmische Programmfehler. Deshalb ist es günstig, für die Erprobung ein *Testbeispiel* mit bekannten Ergebnissen zur Verfügung zu halten.

2.6. Ausblick

Bis zur Mitte der siebziger Jahre wurden die Rechentechnik und Datenverarbeitung ausschließlich von den „klassischen" oder „konventionellen" Rechenautomaten beherrscht, dann kamen durch beachtliche Fortschritte in der Herstellung integrierter Schaltkreise die *Mikroprozessoren* und *Mikrorechner* hinzu. Beide Kategorien werden in der Zukunft nebeneinander existieren, aber sich wesentlich stärker als bisher gegenseitig beeinflussen. Durch diese Entwicklung wird es neben den Rechenautomaten für allgemeine Anwendungsgebiete (z. B. Rechner für Rechenzentren, universelle Prozeßrechner) einen stärkeren Trend zur Spezialisierung, zum Einsatz von Rechenautomaten für spezifische Einsatzfälle, geben.
Zentrale Rechenautomaten (z. B. in Rechenzentren) werden immer eine gewisse Bedeutung behalten. Die Fortschritte der Mikroelektronik werden sich hier vor allem wie folgt auswirken:

— Einsatz mikroelektronischer Bauelemente (Verringerung des Gerätevolumens, Kostensenkung, Erhöhung der Zuverlässigkeit durch Redundanz und Möglichkeit von Diagnose- und Prognoseprogramm),
— Erhöhung der Rechengeschwindigkeit durch mehrere parallel arbeitende Zentraleinheiten,
— Entwicklung neuer Speicherprinzipien und -medien,
— Einsatz festprogrammierter Speicherbausteine (Programm-Module), die ausgewechselt werden können.

Der Einsatz dieser Rechenautomaten wird weiterhin verbessert werden durch:

— Verbesserung der Betriebssysteme,
— Entwicklung und Anwendung höherer Programmiersprachen,
— verstärkten Einsatz von dezentralen Ein- und Ausgabeplätzen und Aufbau von Rechnernetzen.

Bei den *Mikrorechnern* sind folgende Tendenzen zu erwarten:

— Neben der gegenwärtig überwiegenden Wortlänge von 8 bit werden stärker als bisher 16 bit benutzt werden. Dadurch werden Programmierung und Adressierung erleichtert werden.
— Durch den Übergang von der Fotolithografie zur *Elektronenstrahllithografie* und anschließend zur *Röntgenstrahllithografie* werden die Bauelemente noch höhere Integrationsgrade erreichen.
— Die Speicher werden wesentlich größere Kapazität bekommen und je nach Einsatzzweck auch frei programmierbar sein.



- In der Programmierung wird der Einsatz von Assemblern und Compilern direkt im Mikrorechner oder über Wirtsrechner möglich.
- Es werden den Mikrorechnern angepaßte periphere Geräte (Eingabetastatur wie beim Taschenrechner, kleine Lochstreifenleser, kleine Drucker, Bildschirme) entwickelt werden.

Da der Einsatz der modernen Herstellungsverfahren nur bei großen Stückzahlen ökonomisch vertretbar ist, werden die Mikrorechner so gebaut werden müssen, daß sie sich ein extrem breites Einsatzgebiet erschließen.

3. Analog- und Hybridrechentechnik

Literatur: [1, 3, 6, 8, 16, 19, 24, 53, 54]

3.1. Analoge Arbeitsweise

Am *Analogrechner* erhält man das physikalische Modell über die mathematische Formulierung des Problems oder direkt auf dem Weg der *blockorientierten Programmierung* (Bild 31). Durch Messung an der realisierten Rechenschaltung kann die Lösung als kontinuierlicher Funktionsverlauf (Diagramm) auf entsprechenden Ausgabegeräten erhalten werden.

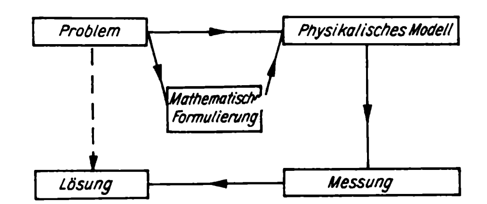


Bild 31.
Prinzip der analogen Arbeitsweise

Die Rechengeschwindigkeit ist im Vergleich zu Digitalrechnern sehr hoch, aber die Genauigkeit durch die Qualität der Rechnerbestandteile und der Meßmittel stark begrenzt (selten genauer als 0,01% des Bereichsendwerts). Da Analogrechner die Integration als Grundoperation besitzen, sind sie vorwiegend bestimmt zur Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Daher eignen sie sich vor allem zur Modellierung dynamischer Prozesse, die im *Echtzeitbetrieb* nachgebildet werden können, wobei die Rechengeschwindigkeit hauptsächlich durch die Bandbreite der Rechenelemente begrenzt wird, nicht aber durch die Kompliziertheit des Modells, die vor allem der Grad seiner Nichtlinearität bestimmt.

3.2. Gerätetechnik des Analogrechners

Der Grundbaustein des Analogrechners ist der *Rechenverstärker* (Symbol siehe Tafel 4) mit einer sehr großen Verstärkung V_0 (z. B. $V_0 = -10^8$) und weiteren bestimmten Eigenschaften, wie vernachlässigbar kleine Nullpunktdrift, sehr hoher Eingangswiderstand, kleiner Abschlußwiderstand, Verarbeitung von Spannungen der Frequenz Null bis zu einer oberen Grenzfrequenz (einige MHz). Der Rechenverstärker arbeitet nach dem *Chopperprinzip.* Er wird durch die Verbindung mit Netzwerken aus passiven Schaltelementen (i. allg. *RC*-Glieder) zum *Operationsverstärker.* Allgemein kann das wie in Bild 32 dargestellt werden. Dabei sind $\underline{R}_1$ der komplexe Eingangs- und $\underline{R}_0$ der komplexe Rückkopplungswiderstand. S ist der Summenpunkt. Allgemein gilt:

$$\underline{U}_a = -\frac{\underline{R}_0(p)}{\underline{R}_1(p)}\underline{U}_e \quad \text{mit} \quad \underline{F}(p) = \frac{\underline{R}_0(p)}{\underline{R}_1(p)} \tag{5}$$

$\underline{F}(p)$ Übertragungsfunktion, p Differentiationsoperator

Ist im speziellen Fall $\underline{R}_0$ ein ohmscher Widerstand R_0 und sind am Eingang n ohmsche Widerstände $R_1, \ldots, R_n$ am Summenpunkt verbunden, dann erhält man einen *Summierer* mit n Eingängen (Bild 33). Für die Eingangsbewertungen $c_1 \ldots c_n$ gilt:

$$c_1 = \frac{R_0}{R_1}, \quad c_2 = \frac{R_0}{R_2}, \ldots, c_n = \frac{R_0}{R_n} \tag{6}$$

Wird R_0 gegen einen Kondensator ausgetauscht, dann entsteht ein *Integrierer* mit n Eingängen, ein Summenintegrierer. Gilt $R_0 = R_1$ und $n = 1$, dann liegt ein *Inverter* vor, der lediglich das Vorzeichen einer analogen Größe wechselt.

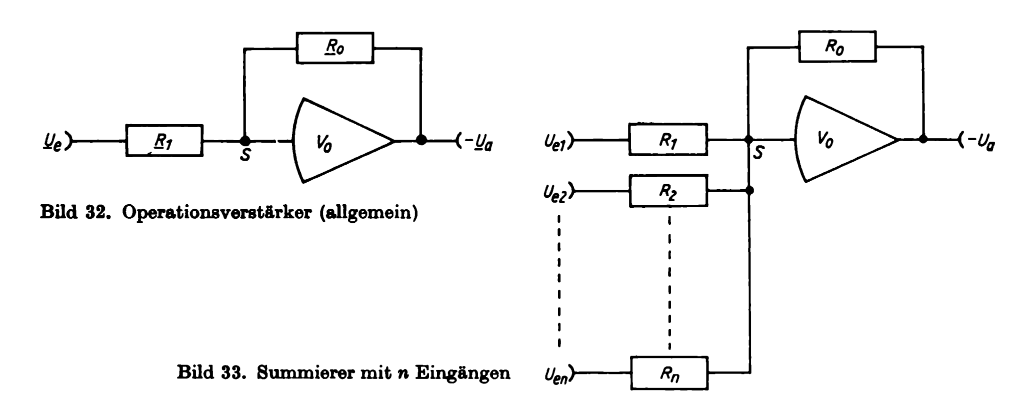


Bild 32. Operationsverstärker (allgemein)

Bild 33. Summierer mit n Eingängen

Weitere Rechenelemente sind der Multiplizierer, der Funktionserzeuger, der Komparator (Vergleicher) und das Potentiometer. Spezielle Einheiten sind u. a. das Totzeitglied, der Koordinatenwandler (Resolver) und der Begrenzer. Zur Verwirklichung der Multiplikation gibt es mehrere Methoden. Am häufigsten wird der *Parabelmultiplizierer* verwendet, bei dem ein entsprechendes Dioden-Widerstands-Netzwerk als spannungsabhängiger Eingangswiderstand mit einem Rechenverstärker zusammenarbeitet (Bild 34). Man spricht hier von der

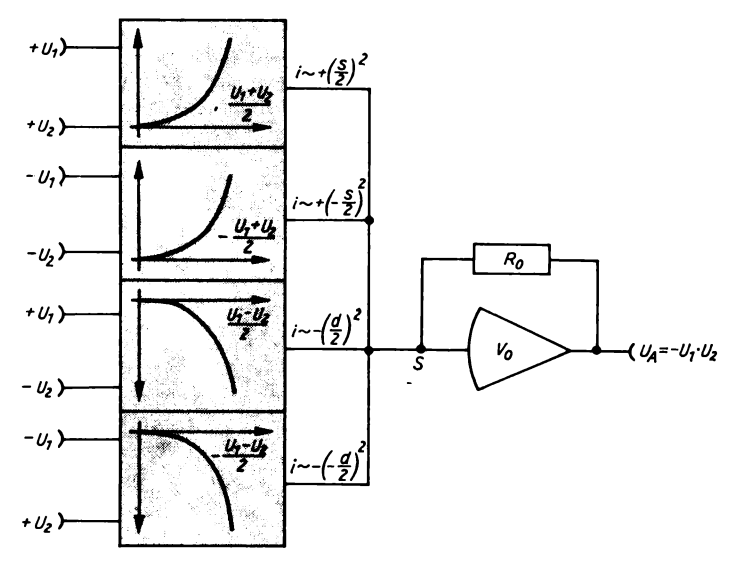


Bild 34. Prinzip des Parabelmultiplizierers



Viertelquadratmethode bzw. vom *Zweiparabelverfahren*, weil folgende Beziehung realisiert wird:

$$U_A = \frac{1}{4}[(U_1 + U_2)^2 - (U_1 - U_2)^2] = U_1 \cdot U_2 \tag{7}$$

Sie läßt sich wie folgt umformen:

$$U_A = \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = U_1 \cdot U_2 \tag{8}$$

Von den zu multiplizierenden Spannungen U_1 und U_2 werden die halbe Summe $(s/2)$ und die halbe Differenz $(d/2)$ gebildet. $(s/2)$ und $(d/2)$ steuern dann die Kennlinie einer quadratischen Parabel aus. Um die Multiplikation für beide Vorzeichen von s und d zu ermöglichen, sind insgesamt vier halbe Parabelkennlinien notwendig. Wird die Größe des Rückkopplungswiderstandes R_0 dem Eingangswiderstand angepaßt, erhält man das gewünschte Produkt in der richtigen Größe. Aufgrund der Approximation der quadratischen Kennlinien durch Polygonzüge ist der prinzipielle Fehler bei dieser Multiplikation relativ groß (ca. 0,3 bis 2,0%).

Ein anderes Prinzip kann mit Hilfe des *Servomultiplizierers* verwirklicht werden. Diese Multiplikation ist genauer (Fehler: 0,1···0,2%), setzt aber voraus, daß bei wenigstens einem Faktor die Änderungsgeschwindigkeit klein ist. Dies fordert die große Trägheit des Servomechanismus.

Die Division wird mit Hilfe einer kleinen Rechenschaltung realisiert, in der ein Multiplizierer verwendet wird (Bild 35). Man spricht hier von *impliziter Funktionstechnik.*

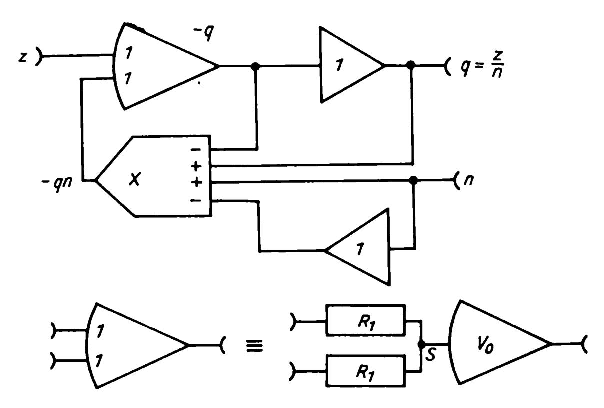


Bild 35. Divisionsschaltung

Wenn der Quotient durch die Beziehung $q = z/n$ (explizit) dargestellt wird, dann gilt in der impliziten Schreibweise: $z - qn = 0$. In Bild 35 wird gezeigt, wie diese Gleichung mit Hilfe des Multiplizierers in der Rückkopplung eines Rechenverstärkers verwirklicht wird. Durch dessen hohe Verstärkung stellt sich bei einer Veränderung des Zählers $z(t)$ oder des Nenners $n(t)$ der Quotient $-q(t)$ sofort auf eine solche Größe ein, daß $z(t) - q(t) \cdot n(t) = \varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$ erfüllt ist. Bei manchen Analogrechnern ist diese Schaltung fest verdrahtet als *Dividierer* vorhanden.

Um aus einer Funktion $X(t)$ den Verlauf $F[X(t)]$ zu gewinnen, benötigt man einen *Funktionserzeuger.* Er verwirklicht innerhalb bestimmter Grenzen beliebige Kennlinien, die mit Zeitfunktionen ausgesteuert werden können (Bild 36). Am häufigsten wird auch hier ein Dioden-Widerstands-Netzwerk verwendet, das die einzustellende Kennlinie als Polygonzug endlich vieler Geradenstücke approximiert. Mit dem *Komparator* ist es möglich, zwei analoge Größen (Steuergrößen $s_1(t)$ und $s_2(t)$) miteinander zu vergleichen und in Abhängigkeit davon Entscheidungen zu fällen. Es wird dabei ein Umschalter betätigt, an dessen Ausgang dann entweder $x_1(t)$ oder $x_2(t)$ entnehmbar ist. Die Schaltbedingung ist der Tafel 4 zu entnehmen. Das *Potentiometer* dient i. allg. als Spannungsteiler (geerdetes Potentiometer, Bild 37) zur Multiplikation

einer analogen Größe mit einem Wert α ($0 < \alpha < 1$). Damit wird am Analogrechner ermöglicht, im Zusammenhang mit den Eingangsbewertungen der nachfolgenden Rechenelemente die Koeffizienten der Gleichung für den jeweiligen Berechnungsfall entsprechend einzustellen. Das erdfreie Potentiometer kann zur Einstellung eines zwischen Null und einem oberen Grenzwert (z. B. 10 kΩ) wahlfreien Widerstandswerts verwendet werden.

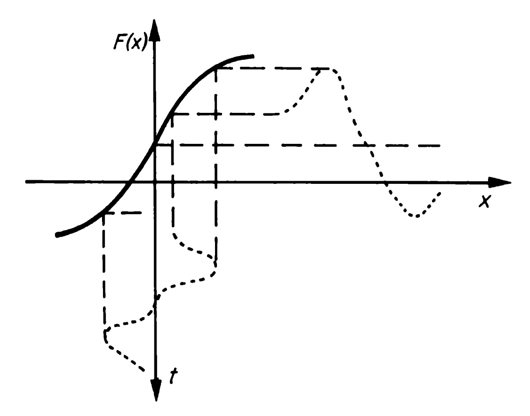


Bild 36. Wirkungsprinzip des Funktionserzeugers

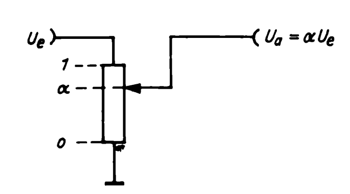


Bild 37. Koeffizientenpotentiometer

Bei sämtlichen Rechenelementen sind deren Ein- und Ausgänge über Buchsen zugänglich, die sich auf einem meist auswechselbaren *Programmierfeld* befinden und zur besseren Unterscheidung voneinander farblich gekennzeichnet sind. Je nach Struktur der zu realisierenden Rechenschaltung sind über *Programmierschnüre* die entsprechenden Verbindungen zwischen den Rechenelementen herzustellen.

Hinsichtlich Größe und Genauigkeit kann eine Einteilung der Analogrechner in drei Gruppen vorgenommen werden.

Der in der DDR am häufigsten anzutreffende transistorisierte Rechner MEDA-80T der Firma Aritma (ČSSR), dessen Konfiguration variabel ist, kann zu den Analogrechnern mittlerer Größe gezählt werden (60 Rechenverstärker, 24 Integrationsnetzwerke, 8 Parabelmultiplizierer, 6 Funktionserzeuger, 6 Komparatoren).

Die Peripherie am Analogrechner besteht zum größten Teil aus Geräten zur Anzeige oder Speicherung der erhaltenen Lösung in Form von Diagrammen. Am häufigsten wird die *analoge Anzeige* verwendet (Koordinatenschreiber, Großsichtgerät, Lichtschreiber).

Der *Koordinatenschreiber* ist ein Gerät, das Verläufe der Form $y[x(t)]$ auf geeignetes Registrierpapier aufzeichnen kann, also Kurven, bei denen auch die x-Koordinate nicht nur monoton wächst, sondern selbst innerhalb der gegebenen Grenzen beliebige Werte annimmt. Mit diesem Gerät können z. B. Spiralen oder geschlossene Kurven festgehalten werden. Da es sich um Servomechanismen handelt, ist hierbei nachteilig, daß die Verläufe langsam sein müssen. Dafür wird aber die Lösung des Analogrechners unwesentlich verfälscht wiedergegeben.

Das *Großsichtgerät* (analoges Bildschirmgerät) kann ebenfalls Verläufe der Form $y[x(t)]$ wiedergeben und hat gegenüber dem Koordinatenschreiber den Vorteil, daß hinsichtlich der Geschwindigkeit keine Einschränkung besteht. Allerdings existiert keine unmittelbare Speichermöglichkeit, sondern lediglich ein Nachleuchteffekt. Fotografische Aufnahmen können diesen Nachteil umgehen. Die Genauigkeit der Wiedergabe ist nicht groß. Weniger komfortabel ist ein normaler Elektronenstrahloszillograf.

Mit dem *Lichtschreiber* können Ergebnisse schnell aufgenommen und gespeichert werden, allerdings nur Kurven der Form $y(t)$. Das Registrierpapier ist entweder Fotopapier auf der Grundlage der Naßentwicklung oder direktschwärzendes (UV-empfindliches) Papier. Letzteres hat den Vorteil, daß die gespeicherte Registratur bereits einige Sekunden nach der Aufnahme durch Einwirken von Tageslicht sichtbar wird.

Die *digitale Anzeige* kann z. B. mit Hilfe eines Digitalvoltmeters oder eines Zahlenwertdruckers erfolgen.



3.3. Programmierung des Analogrechners

Beim Analogrechner als Festkommamaschine mit relativ kleinem Zahlenbereich ist eine *Normierung* der abhängigen Variablen der zu lösenden Gleichung nötig (*Amplitudennormierung*). Da außerdem der Ablauf der simulierten Vorgänge während des Lösungsprozesses nicht mit beliebiger Geschwindigkeit stattfinden kann, ist oftmals auch eine Normierung der unabhängigen Variablen nötig (*Zeitnormierung*).

Problemgleichung $\xrightarrow{\text{Normierung}}$ Maschinengleichung
(mathematische Formulierung) (Zuschnitt für Analogrechner)

3.3.1. Amplitudennormierung

Es gibt verschiedene Methoden für die Normierung der abhängigen Größen. Eine sehr praktische und übersichtliche Variante ist die *optimale Normierung.* Bei ihr sollen folgende drei Forderungen erfüllt sein:

1. keine Übersteuerung eines Operationsverstärkers,
2. volle Ausnutzung des Rechenbereichs bei allen Operationsverstärkern (volle Aussteuerung),
3. volle Ausnutzung des Variationsbereichs aller Potentiometer.

Unter *Rechenbereich* versteht man die Variationsbreite der Ausgangsspannung eines Operationsverstärkers. Sie beträgt bei einem Transistorrechner ± 10 V und wird im normierten Fall als Maschineneinheit ME bezeichnet (mit ME $= \pm 1$). Um die genannten Forderungen zu erfüllen, sind zwei Regeln anzuwenden.

Regel 1:

Jede veränderliche Größe einer Problemgleichung (abhängige Variable, nichtkonstante Koeffizienten) muß mit ihrem Bezugswert erweitert werden.

Beispiel.

$$y \rightarrow (\hat{y}/\hat{y})\, y \rightarrow \hat{y}[y/\hat{y}] \rightarrow \hat{y}Y \quad \text{mit} \quad [y/\hat{y}] = Y$$
$$\dot{y} \longrightarrow \hat{\dot{y}}\dot{Y} \quad \text{mit} \quad [\dot{y}/\hat{\dot{y}}] = \dot{Y}$$
$$f(y) \longrightarrow \hat{f}(y)\, F(y) \quad \text{mit} \quad [f(y)/\hat{f}(y)] = F(y)$$
$$k_v \longrightarrow \hat{k}_v K_v \quad \text{mit} \quad [k_v/\hat{k}_v] = K_v$$

Ist der Bezugswert (z. B. $\hat{y}$) genau gleich dem maximalen Wert innerhalb des Verlaufs $[y(t)]$ während des Lösungsprozesses, dann ist die entsprechende abhängige Variable optimal normiert ($|Y_{max}| = 1$) und der zugehörige Operationsverstärker voll ausgesteuert. Regel 1 beschreibt die Umformung der *Problemgleichung* in die *Maschinengleichung.* Ihre Anwendung allein hat aber noch nicht zur Folge, daß alle Ausgangsgrößen der Operationsverstärker optimal normiert erscheinen, sondern setzt dies lediglich voraus. Deshalb muß eine weitere Regel beachtet werden, die aber erst beim Aufstellen des Blockschaltbilds zu berücksichtigen ist.

Regel 2 (Bild 38):

Bei Anwendung irgendeiner mathematischen Operation auf eine normierte Größe X innerhalb einer Rechenschaltung muß vorher diese normierte Größe X mit ihrem Bezugswert $\hat{x}$ multipliziert werden. Zugleich ist sie durch den Bezugswert $\hat{y}$ der entstehenden normierten Größe Y zu dividieren.

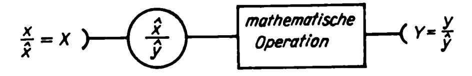


Bild 38. Umnormierung

3.3.2. Zeitnormierung

Nicht immer können die Vorgänge am Analogrechner mit der gleichen Geschwindigkeit wie in der Praxis ablaufen. So muß ein Schwingungsvorgang oft langsamer dargestellt werden, damit alle Rechenelemente und insbesondere einbezogene Servomechanismen (z. B. Koordinatenschreiber für die Aufzeichnung der Lösung) gut folgen können und keine wesentlichen (dynamischen) Fehler machen. Andererseits ist z. B. ein Diffusionsvorgang, welcher in der Natur mehrere Stunden dauert, wesentlich zu beschleunigen, damit die Drifterscheinungen am Analogrechner die Lösung nicht verfälschen und außerdem der Lösungsprozeß innerhalb einer vertretbar langen Rechenzeit abgelaufen ist.
Zwischen der *Problemzeit* t und der *Maschinenzeit* τ besteht folgende Transformationsbeziehung:

$$\tau = (1/\lambda)\, t \tag{9}$$

Man unterscheidet drei Bereiche:

$\lambda < 1$: Zeitdehnung
$\lambda = 1$: Echtzeit (keine Zeitnormierung)
$\lambda > 1$: Zeitraffung

Eine Zeittransformation wird im Blockschaltbild derart durchgeführt, daß $\lambda \neq 1$ mit all den Koeffizienten multipliziert wird, die vor Integriereingängen zu realisieren sind.

3.3.3. Blockschaltbild

Das Blockschaltbild ist die Unterlage für die Programmierung eines Analogrechners. Die Symbole für die einzelnen Rechenelemente sind der Tafel 4 zu entnehmen. Zu beachten ist, daß jeder Operationsverstärker das Vorzeichen wechselt.

Die Demonstration der Entwicklung eines Blockschaltbildes aus der Maschinengleichung soll an Hand eines Beispiels geschehen. Dieser Weg und auch die Normierung sollen an der Schwingungs-Differentialgleichung gezeigt werden:

$$m\ddot{y} + k_\nu \dot{y} + cy = b \qquad \text{mit} \qquad \dot{y}(0) = 0, \qquad y(0) = a, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

Anwendung der Regel 1

$$m\hat{\ddot{y}}(\ddot{y}/\hat{\ddot{y}}) + \hat{k}_\nu(k_\nu/\hat{k}_\nu)\, \hat{\dot{y}}(\dot{y}/\hat{\dot{y}}) + c\hat{y}(y/\hat{y}) = b,\ \hat{y}[y(0)/\hat{y}] = a$$

$$m\hat{\ddot{y}}\ddot{Y} + \hat{k}_\nu K_\nu \hat{\dot{y}}\dot{Y} + c\hat{y}Y = b,\ \hat{y}Y(0) = a$$

Für die Aufstellung des Blockschaltbilds ist es notwendig, nach der höchsten Ableitung aufzulösen und die gesamte Gleichung durch $m\hat{\ddot{y}}$ zu dividieren. Wir erhalten folgende *Maschinengleichung:*

$$\ddot{Y} = -(\hat{k}_\nu \hat{\dot{y}}/m\hat{\ddot{y}})\, K_\nu \dot{Y} - (c\hat{y}/m\hat{\ddot{y}})\, Y + b/m\hat{\ddot{y}}, \qquad Y(0) = a/\hat{y}$$

Die Gleichung sagt aus, daß die höchste Ableitung $\ddot{Y}$ aus der Summe der (drei) vorzeichenbehafteten Terme gebildet wird. Deshalb ist der Summierer S das Ausgangssymbol bei der Erstellung des Blockschaltbilds im Bild 39.
Wenn am Summiererausgang $-\ddot{Y}$ zur Verfügung steht (zunächst noch Annahme!), dann werden durch fortlaufende Integration die niederen Ableitungen gewonnen, wobei das Vorzeichen ständig wechselt. Hierbei ist nun *Regel 2* zu berücksichtigen, wodurch die Potentiometer P 5 und P 6 mit den eingetragenen Werten notwendig werden. Damit ist garantiert, daß am Ausgang von INT 1 bzw. INT 2 optimal normierte Größen entstehen. Werden nun die Rückführungen von INT 1 über P 1, INV und P 2 nach S (innere Schleife) bzw. von INT 2 über P 3 nach S (äußere Schleife) und der Strang mit P 4 eingetragen, dann ist dieses Blockschaltbild das Abbild der diskutierten Maschinengleichung. Die Annahme, die oben gemacht wurde, ist nun erfüllt, denn vor dem Summierer wird implizit $+\ddot{Y}$ gebildet, wodurch der Summiererausgang das geforderte $-\ddot{Y}$ liefert. Falls $\ddot{Y}$ (bzw. $-\ddot{Y}$) nicht explizit gefordert ist, kann der Summierer eingespart werden. In diesem Falle übernimmt INT 1 die Summation, und P 5 entfällt. Die Schaltung muß dann erneut auf die Vorzeichenverhältnisse hin überprüft werden. INV wird danach nicht mehr in der inneren Schleife benötigt, aber dafür in der äußeren. Außerdem ergeben sich andere Koeffizientenwerte für P 2, P 3 und P 4.



Tafel 4. Symbolik der analogen Programmierung

Rechenelement	Symbol	Funktion
Offener Verstärker (Rechenverstärker)		Verstärkung $V_0 \to -\infty$
Summierer		$Y = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ c_i Eingangsbewertungen
Integrierer		$Y = -x_0 - \int \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right) dt$ $x_0 = Y(0)$ Anfangswert
(Parabel-) Multiplizierer		$Y = -(x_1 \cdot x_2)$
Funktionserzeuger		$Y = Y(x)$
Komparator		$Y = x_1$ für $(s_1 + s_2) > 0$ $Y = x_2$ für $(s_1 + s_2) < 0$
Inverter		$Y = -x$
Potentiometer (geerdet, fest)		$Y = \alpha x$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$

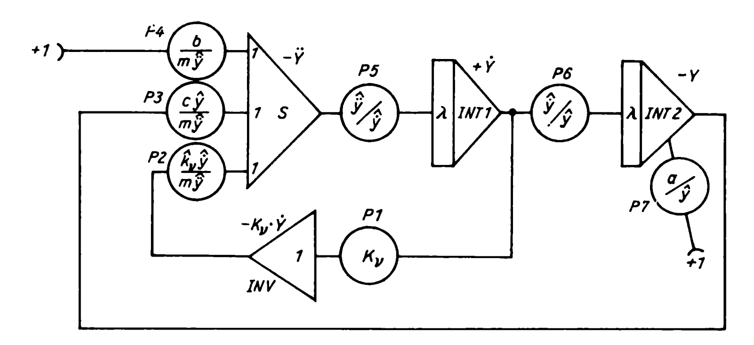


Bild 39. Blockschaltbild zur Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung

Das grundlegende *Rückkopplungsprinzip*, bei dem der Ausgang eines Elementes, das am Ende einer Kette von Elementen liegt, mit dem Anfang der Kette verbunden wird, wurde 1876 von W. THOMSON erstmals angegeben.

Weil die optimale Normierung die aufgeführten Forderungen erfüllt, ist sie in der Praxis sehr vorteilhaft. Sie hat allerdings einen Nachteil, der hier kurz erläutert werden soll. Es wird nämlich vorausgesetzt, daß von *allen* Variablen die richtigen Bezugswerte vorliegen, was bei einer unbekannten Lösung nicht möglich ist. Nun kann aber der in der Praxis tätige Ingenieur grobe Schätzungen dafür angeben, die er dann auf jeden Fall größer als den wahrscheinlichen Maximalwert wählen sollte. Das hat den bedeutenden Vorteil, daß es beim ersten Test der Rechenschaltung nicht zu einer Übersteuerung von Verstärkern kommen kann. Durch Messung während des Lösungsprozesses wird dann festgestellt, welche Verstärker noch nicht voll ausgesteuert sind. An diesen Stellen wird dann der Bezugswert gleich dem gemessenen Maximalwert gesetzt, wodurch die optimale Aussteuerung erzielt wird. Hierbei hat die optimale Normierung den weiteren Vorteil, daß sich die Änderung eines Bezugswerts nur auf die Koeffizienten unmittelbar vor dem betreffenden Operationsverstärker und auf diejenigen danach auswirkt, nicht aber wie bei anderen Methoden auf weitere Teile der Rechenschaltung.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß *Simulationssprachen*, mit deren Hilfe Analogrechenschaltungen unmittelbar auf Digitalrechnern nachgebildet werden, u. a. den Vorteil haben, daß sie die genauen Maximalwerte für alle Variablen liefern, wodurch die anschließende optimale Normierung für die Realisierung des Berechnungsfalls am Analogrechner leicht gemacht wird.

In ein vollständiges Blockschaltbild gehören die Bezeichnungen und Nummern für die einzelnen Rechenelemente. Dadurch wird festgelegt, wo die Rechenschaltung auf dem Programmierfeld plaziert werden soll, welche Buchsen also beim Stecken des Programms miteinander zu verbinden sind.

3.4. Hybridrechentechnik

Analog- und Digitalrechner haben je nach ihrem Verwendungszweck Vor- und Nachteile. Deshalb kam es zu ihrer Kombination, dem *Hybridrechner*, der vor allem die Geschwindigkeit eines Analogrechners mit der Genauigkeit eines Digitalrechners verbindet.
Das Spektrum der Hybridrechentechnik ist sehr weit. Zwischen der rein analogen und der rein digitalen Arbeitsweise gibt es viele Varianten hybrider Rechentechniken und Rechensysteme, bei denen entweder die analoge oder die digitale Technik bzw. Arbeitsweise überwiegt. In der Mitte dieses Spektrums befindet sich der echte Hybridrechner, bei dem ein reiner Analog- und ein reiner Digitalrechner so über ein geeignetes Koppelwerk miteinander verknüpft sind, daß beide eine gleich große Bedeutung haben (Bild 40).

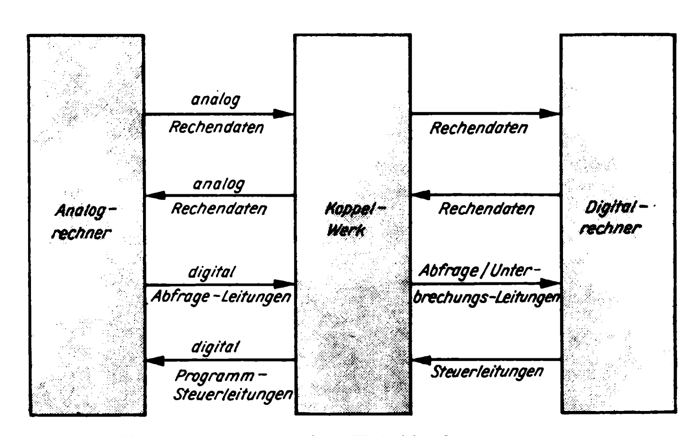


Bild 40. Allgemeine Struktur eines Hybridrechners

Die Rechner können separat arbeiten und Aufgaben lösen, ihre Verbindung jedoch stellt ein leistungsfähigeres Rechensystem dar. So wird zum Beispiel bei vielen hybriden Rechenkonzepten dem Digitalrechner vor allem die *Steuer-* und *Entscheidungsfunktion* übertragen, während der Analogrechner die Lösung des *Differentialgleichungssystems* übernimmt.

Hybridrechner werden angewendet zur:

- Lösung von partiellen Differentialgleichungen und Integralgleichungen,
- Parameteroptimierung,
- Berechnung mit variabler Normierung,
- Berechnung von Systemen mit variablem mathematischem Modell,
- Lösung von Problemen optimaler Steuerung,
- Flugsimulation,
- Simulation biologischer Systeme,
- Berechnung von Zufallsprozessen.

Da reine Digitalrechner und reine Analogrechner bereits behandelt wurden, wird hier zur Beschreibung der *Hardware* (Gerätetechnik) des Hybridrechners lediglich auf das *Koppelwerk* näher eingegangen (Bild 41).

Entsprechend den Erfordernissen des Austauschs von analogen und digitalen Signalen zwischen Analog- und Digitalrechner in beiden Richtungen sind auch besondere technische Baugruppen notwendig. *Multiplexer* und *Analog-Digital-Umsetzer* (ADU) sind die wesentlichsten Teile zur Auswertung analoger Signale durch Digitalrechner. Mit Hilfe des Multiplexers wird das gewünschte analoge Ausgangssignal des Analogrechners angewählt. Über ein *Abtast-* und *Halteglied* wird der gemessene Wert dem ADU übergeben, der nach der Umsetzung den zugehörigen Digitalwert für den Digitalrechner über das *Eingaberegister* (Datenpuffer) bereitstellt.
Zur Übertragung analoger Werte in die umgekehrte Richtung gelangt das Datenwort über das *Ausgaberegister* an einen *Demultiplexer* und danach zum angewählten *Digital-Analog-Umsetzer* (DAU). Nach der Umsetzung steht der analoge Wert dem Analogrechner am programmierten Eingang zur Verfügung. Das Koppelwerk enthält noch andere Register, die Digitalwerte zur Synchronisation des Datenflusses und zur Anzeige vorübergehend speichern. Über das Ausgaberegister werden auch *Programmsteuerworte* direkt an den Analogrechner für dessen Steuerung und die Adressen für Multiplexer und Demultiplexer gegeben.

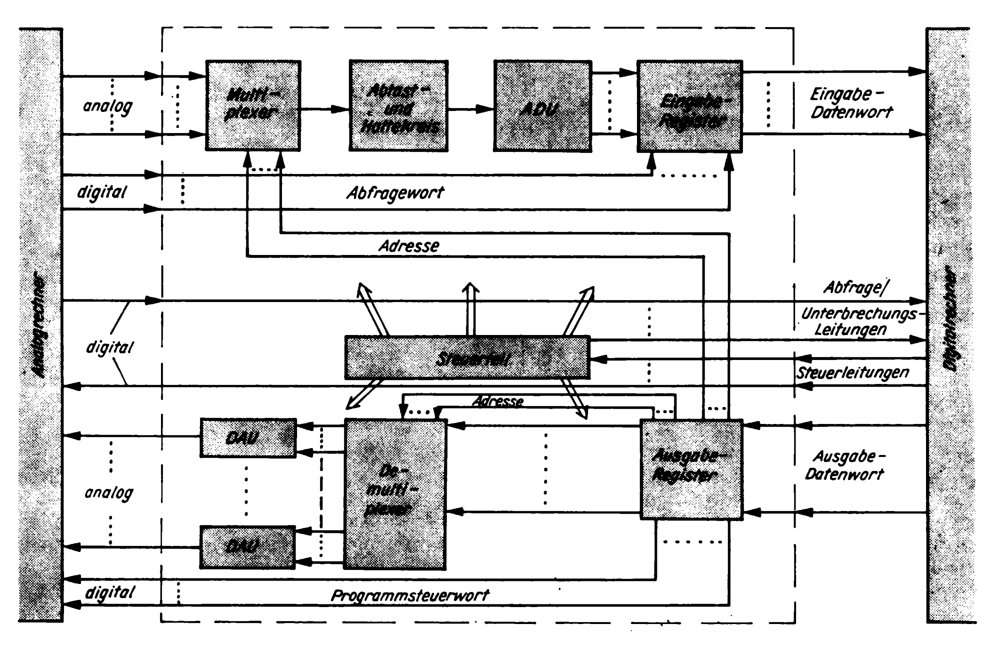


Bild 41. Allgemeine Konzeption eines Koppelwerks beim Hybridrechner

Über das Eingaberegister gelangen *Abfrageworte* an den Digitalrechner zwecks Auswertung der Zustände von Schaltelementen des Analogrechners. Schließlich ist zur Synchronisation des Datenaustauschs zwischen beiden Rechnern und zur Steuerung der Abläufe im Koppelwerk ein *Steuerteil* erforderlich. Die einzelnen Baugruppen des Koppelwerks werden durch Maschinenbefehle aktiviert. Andererseits kann das Koppelwerk bestimmte Bereitschaftszustände an den Digitalrechner melden, die entweder abgefragt werden, häufiger aber seine gerade laufende Arbeit sofort unterbrechen (Vorrang-Unterbrechungsleitungen).

Zu einem anwenderfreundlichen Hybridrechenbetrieb gehört eine leistungsfähige *Software* (Programmtechnik), die es dem Nutzer ermöglicht, mit vertretbarem Aufwand sein Problem auf der hybriden Anlage zu lösen. Die Software stellt beim Hybridrechner im Vergleich zum Digitalrechner ein ganz besonders wichtiges Bindeglied zwischen Mensch und Maschine dar und entscheidet somit wesentlich über die Leistungsfähigkeit eines derartig komplexen Rechensystems. Einige bedeutende Gründe sollen im folgenden kurz genannt werden. Durch die Besonderheiten der Hybridrechnung sind auch besondere Forderungen an die Hybridsoftware zu stellen. So ist die Rechnung durch die Einbeziehung eines analogen Rechensystems an bestimmte Zeitabläufe gebunden, die in *Echtzeit* ablaufen (Real-Time-Betrieb). Außerdem müssen Programmier- und Prüfhilfen für den Analogrechner vorhanden sein. Die unterschiedlichen Arbeitsweisen beider Rechner (Analogrechner parallel, Digitalrechner seriell) sind miteinander in Einklang zu bringen, um den beiderseitigen Informationsaustausch zu bewältigen. Schließlich sind spezielle *Diagnoseprogramme* zur Erleichterung der Hardwareprüfung durch Lokalisierung technischer Fehler erforderlich. In Bild 42 ist mit der Gliederung eines hybridorientierten Softwarepakets die typische Softwarestruktur für einen Hybridrechner gezeigt. Danach kann wie folgt unterschieden werden: Programmiersprachen, Steuerungssysteme, Programmbibliotheken, Dienstprogramme und Diagnoseprogramme.

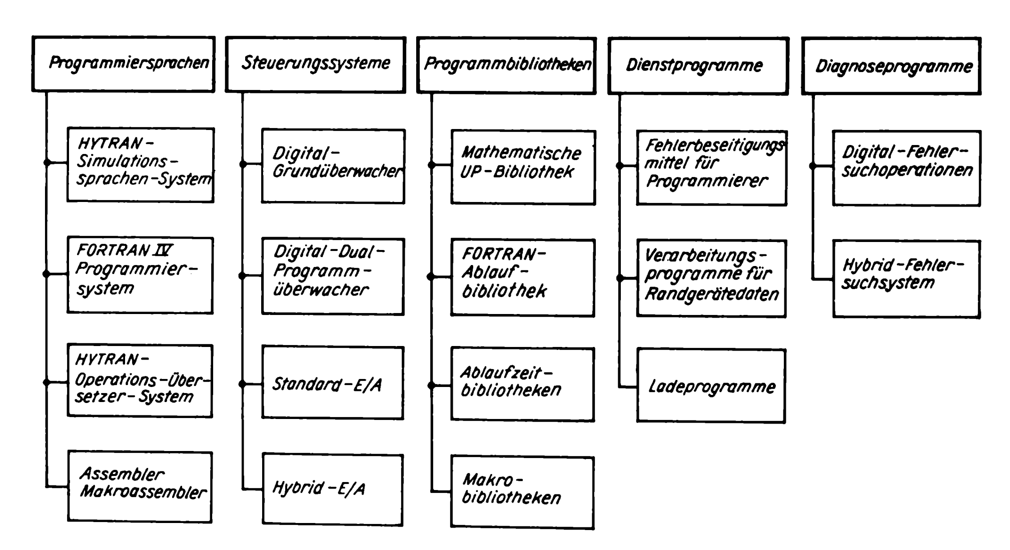


Bild 42. Gliederung eines hybridorientierten Softwarepakets

HYTRAN ist ein Beispiel für eine *Simulationssprache*. Es handelt sich hierbei um eine blockorientierte Programmiersprache, mit deren Hilfe Analogrechenschaltungen digital simuliert werden können. Damit können Digitalrechner wie Analogrechner programmiert werden, wobei vorteilhaft ist, daß jegliche Normierung entfallen kann. Ausgehend vom Blockschaltbild wird die *Programmliste* in der Sprache von HYTRAN geschrieben, wodurch ein enormer Programmieraufwand für den Anwender entfällt. Eine solche Simulationssprache ist von großem Vorteil für die Prüfung einer Hybridaufgabe. Mit dem HYTRAN-*Betriebsübersetzer* (HBÜ) werden Funktionen im Zusammenhang mit der Vorbereitung, Eingabe, Steuerung, Überwachung, Prüfung, Ausführung und Dokumentation des Analogprogramms bewältigt. Dabei werden auf bequeme Weise Potentiometerwerte der analogen Rechenschaltung ermittelt und eingestellt.

Beispiel. Um die Arbeit mit dem HBÜ und gleichzeitig das Zusammenspiel des Digitalprogramms mit dem Analogrechner zu zeigen, wird im folgenden ein kleiner Teil eines Programms betrachtet und die Differentialgleichung $-\dot{y} = \sqrt{3\pi}\, y^2 - (\alpha/\beta)^2 z$ mit $z = 0.5$, $\beta = 5$, $\alpha \leqq 4.5$ und $y(0) = 0.3820$ bearbeitet (nach [3]). Das zugehörige Blockschaltbild zeigt Bild 43.

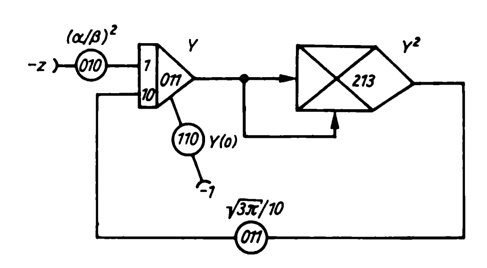


Bild 43. Blockschaltbild

HBÜ-Liste:

```
1.0000) △EXAMPLE OF HOI USAGE△
1.0100)    VDATA, VCARD, INPUT;
1.0200)    ALPHA←
1.0300)    BETA = 5,
1.0400)    Z = .5,
1.1000)    C010 = (ALPHA/BETA)**2,
1.2000)    C011 = SQR(3*3.1416)/10,
1.3000)    C110 = .3820,
2.1000)    A011 = +C110,
2.2000)    A213 = A011*A011,
2.3000)    D011 = (C010*Z) – (C011*A213*10),
3.1000)    VPS, MODE;
3.2000)    SETALL;
3.3000)    VIC, MODE;
3.4000)    $COMP, READ;
3.5000)    .0002, VERIFY
4.1000)    $COEF:
```

Erläuterung:

- Die erste Anweisung ist ein Kommentar.
- Anweisung 1.0100 ruft die Eingabedaten auf, die vom Kartenleser geholt werden sollen.
- Schritt 1.0200 ruft davon den Wert für Alpha.
- Mit den Anweisungen 1.0300 bis 2.3000 werden sämtliche Analogwerte des Blockschaltbildes berechnet bzw. zugewiesen (C = Koeffizient, SQR = Quadratwurzel-Unterprogramm, A = Ausgang, D = Differentialquotient: D011 = $\dot{y}$).
- Anweisung 3.1000 schaltet den Analogrechner in die Betriebsart „Potentiometereinstellung".
- Durch Anweisung 3.2000 werden alle Potentiometer eingestellt.
- Schritt 3.3000 schaltet den Analogrechner in den Anfangszustand.
- Schritt 3.4000 liest alle in der Analogrechenschaltung entstehenden Werte (A011, A213, D011).
- Schritt 3.5000 vergleicht diese neu erhaltenen Werte mit den in den Schritten 2.1000 bis 2.3000 errechneten und prüft diese auf eine Toleranz von $2 \cdot 10^{-5}$. Werden Widersprüche entdeckt, dann erfolgt die Ausgabe der Werte.
- Schritt 4.1000 druckt alle Koeffizienten.

3.5. Ausblick

Literatur: [3, 6]

Analog- und Digitalrechner sind unabhängig voneinander entstanden, wurden viele Jahre hindurch selbständig weiterentwickelt und werden auch künftig eine weitere Entwicklung erfahren. In der Vereinigung von Analog- und Digitalrechner zum Hybridrechner liegen gegenwärtig und in der nahen Zukunft noch neue Möglichkeiten für ihren Einsatz. Ohne Zweifel wird der reine Analogrechner auf einigen Anwendungsgebieten seine Bedeutung beibehalten. Bei

der Lösung von Problemen, wofür der Analogrechner besonders gut geeignet ist (s. 3.1.) und wo seine Genauigkeit ausreicht, ist sein Einsatz ökonomischer. Das hybride Rechensystem bietet für viele Aufgaben zeit- und kostenmäßig günstigere Lösungswege als reine digitale Rechentechniken, vor allem bei der *Echtzeitsimulation dynamischer Vorgänge*. Es ist auch zu erwarten, daß durch weitere Erkenntnisse und Erfahrungen auf diesem noch jungen Gebiet sich künftig noch andere Aufgabenstellungen für den Hybridrechner ergeben werden. Die Hybridrechentechnik ist vor allem auf dem Softwaregebiet noch stark entwicklungsfähig.

Digitalrechner müssen hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit noch eine enorme Entwicklung nehmen, sollte durch sie der Hybridrechner völlig verdrängt werden. Dennoch stellt der Hybridrechner lediglich eine Ergänzung für den Digitalrechner dar, nicht aber eine Konkurrenz. In [3] heißt es dazu: „In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, daß Hybridtechniken häufig zur Überwindung gewisser Einschränkungen in den heutigen Analog- und Digitalrechnern verwendet werden. Sobald diese Einschränkungen reduziert oder eliminiert sein werden, wird man für gewisse Anwendungen keine Hybridsysteme mehr brauchen. So wird beispielsweise der Anwendungsbereich von Hybridausrüstungen durch die zunehmende Geschwindigkeit, die sinkenden Kosten der Allzweck-Digitalrechner und durch das Aufkommen zeitlich parallel arbeitender, mitlaufender Digitalsysteme geschmälert."

Tabelle 8. Zuordnung von Rechnerkategorien und Aufgabenklassen

		Rechnerkategorien					
		„konventionelle" Rechner		Mikrorechner			
		Großrechner	Kleinrechner, Prozeßrechner	Mikrorechner-Entwicklungssysteme	Ein-Leiterkarten- bzw. Ein-Chip-Rechner	anwenderspezifische Schaltkreise	Steuerung aus Standardlogik
Aufgabenklassen	wissenschaftlich-technische und ökonomische Berechnungen	×	×				
	Steuerung großer Produktionsprozesse		×	(×)			
	Laborautomatisierung, Steuerung kleiner Produktionsprozesse		×	×	(×)		
	Einbau als Instrumentenrechner		×[I)]	×	×	(×)	
	Festprogrammierte Steuerung				×	×	×
	Einfache Ablaufsteuerung				(×)	×	×
In der DDR gegenwärtig z. B. realisiert durch		ES 1040	PR 4000, KRS 4201	MRS K 1510, MRS K 1520		Taschenrechner-schaltkreis	ursalog, translog

× gegenwärtig und zukünftig, (×) zukünftig, I) für Großgeräte einzeln realisiert



4. Anwendung von Rechenautomaten in der Technik

In der Technik gibt es eine sehr große Anzahl von Aufgaben bzw. Aufgabenklassen für Rechenautomaten der unterschiedlichsten Konfiguration. Dieses Spektrum reicht für konventionelle Berechnungen von Taschen- bzw. Tischrechnern bis zu Großrechnern oder Rechnersystemen in den Rechenzentren und für Steuerungsaufgaben von der festprogrammierten Logikschaltung einfacher Haushaltsgeräte bis zur Überwachung und Steuerung einer großen Produktionsanlage oder eines Raumschiffs. Die Tabelle 8 zeigt die gegenwärtige Zuordnung von Aufgabenklassen zu bestimmten Rechnerkategorien bzw. -elementen.

Gegenwärtig ist verstärkt der Einsatz der Mikroprozessoren und Mikrorechner zu verzeichnen, die sich in kurzer Zeit ein breites Einsatzgebiet in der Technik erschlossen haben. Beispiele dafür sind:

- *Automatisierungstechnik* (dezentrale Datenerfassung und -verarbeitung, Aufzugsteuerungen, Überwachung und Steuerung von Energieverteilungsnetzen, Folge- und Ablaufsteuerungen, komplizierte Regelalgorithmen),
- *Verkehrswesen* (Steuerung von Verkehrsampelsystemen, Überwachung und Steuerung von Verkehrsmitteln, Regelung des Bremssystems und der Kraftstoffzufuhr im Kraftfahrzeug),
- *Haushaltsgeräte* (Steuerung von Wasch- und Geschirrspülautomaten, Mikrowellenherden, Nähmaschinen, Heimtrainern)

Die folgenden Abschnitte stützen sich vor allem auf Erfahrungen beim Einsatz konventioneller Rechner. Bei der Einsatzvorbereitung von Mikrorechnern sind je nach Problem die gleichen oder ähnliche Bearbeitungsschritte zu realisieren. Dabei ist — zumindest bis komfortable Mikrorechnersysteme angeboten werden — vom Anwender ein größerer Anteil geräte- und programmtechnischer Arbeiten zu erbringen.

4.1. Problemanalyse und Modellierung

4.1.1. Allgemeines

In der Einführung wurden die Arbeitsstufen für die Lösung eines Problems mit Hilfe eines Rechenautomaten genannt. Sie führen von der Problemstellung bis zur Auswertung der Ergebnisse. Die *Problemaufbereitung* (Problemstellung, mathematische Formulierung und Algorithmus) ist eine wesentliche Etappe bei der Benutzung eines Rechenautomaten. Hier liegen meist mehr Schwierigkeiten als bei der eigentlichen Programmierung. Die *Problemstellung* benennt die Aufgabe und gibt die konkreten Bedingungen an, z. B. Berechnung einer Welle (Drehmoment = ..., Drehzahl = ... und eine bestimmte Anordnung der Lager), Berechnung eines Fachwerkträgers (Spannweite = ..., Höhe = ... und eine bestimmte Belastung) oder Berechnung eines Druckkessels (Durchmesser = ..., Länge = ..., Druck = ...). Die *mathematische Formulierung* des Problems für die Anwendung eines Rechenautomaten ist besonders schwierig, wenn bei den bisherigen Lösungsverfahren grafische Verfahren benutzt wurden, Richtwerte oder Zuschläge auf Grund von Erfahrungen eingingen und die Zusammenhänge noch nicht mathematisch beschrieben sind.
Für den Begriff *Algorithmus* gibt es bisher noch keine strenge Definition. In [2] heißt es: „Ein Algorithmus liegt genau dann vor, wenn gegebene Größen, auch Eingabegrößen, Eingabeinformationen oder Aufgaben genannt, auf Grund eines Systems von Regeln, Umformungsregeln, in andere Größen, auch Ausgabegrößen, Ausgabeinformationen oder Lösungen genannt, umgeformt oder umgearbeitet werden können."
Dazu gelten die Bedingungen:

- Das System der Größen, die ineinander umgearbeitet werden, muß angegeben werden.
- Die Umarbeitung der Größen, das Abarbeiten des Algorithmus geht in Arbeitstakten vor sich. Ein Takt entspricht der Anwendung einer Regel.
- Die Beschreibung muß vollständig und endlich sein.
- Es muß ein System zulässiger Operationen geben.
- Es muß eine Sprache geben, in der die Regeln formuliert werden.

Diese Ausführungen zum Begriff Algorithmus deuten die Schwierigkeiten an, die bei der algorithmischen Beschreibung vieler technischer Probleme zu erwarten sind. Für die Lösung eines Problems mit Hilfe eines Rechenautomaten ist ein Algorithmus in einer Sprache erforderlich, die dieser Rechenautomat mit Hilfe entsprechender Übersetzungsprogramme in eine Folge von maschineninternen Befehlen umwandeln kann. Diese Sprache heißt *Programmiersprache*, der in dieser Sprache beschriebene Algorithmus ist das *Programm*. Ein Programm ist eine vollständige und eindeutige Anweisung für die Lösung einer Aufgabe oder einer Klasse von Aufgaben auf einem Rechenautomaten.

Die Anwendung der Rechentechnik und die damit verbundene mathematische Modellierung gewinnen in den Naturwissenschaften und der Technik aus folgenden Gründen eine immer größere Bedeutung:

— Fortschritte im Erkenntnisprozeß erlauben eine immer bessere mathematische Beschreibung vieler Erscheinungen.
— Die Rechentechnik ermöglicht die rationelle Durchführung der umfangreichen Rechnungen sowohl bei der Ausarbeitung als auch bei der Nutzung der oft relativ komplizierten Modelle.
— Durch beide Faktoren kann einem wesentlichen Bedürfnis der gesellschaftlichen Praxis, dem Bedürfnis nach der immer besseren Gestaltung und Steuerung der Produktion, nachgekommen werden.

Die realen Objekte der Technik sind vom Menschen geschaffene Produkte (z. B. Brücke, Maschine). Ziel der ingenieurtechnischen Arbeit ist die Schaffung dieser Objekte für vorgegebene Aufgaben (*Anlagensynthese*) oder die Regelung vorgegebener Objekte nach einem bestimmten Steuerungsziel (*Prozeßsteuerung*). Für beide Fälle schafft sich der Mensch abstrakte Objekte (gedankliche Systeme, Modelle), die die Eigenschaften der realen Objekte für den vorgegebenen Zweck hinreichend gut nachbilden (simulieren).
Die Begriffe „*Modell*" und „*mathematisches Modell*" wurden im Abschnitt OPERATIONSFORSCHUNG definiert und interpretiert. Hier sollen nur einige für die Ausarbeitung und Anwendung von Modellen wesentliche Aussagen wiederholt werden: Jedes *Modell* ist auf ein Objekt oder eine Klasse von Objekten bezogen und zweckbestimmt, es hat einen begrenzten *Gültigkeitsbereich*, benötigt eine hinreichende *Genauigkeit* und eine für die Anwendung geeignete *Form*.

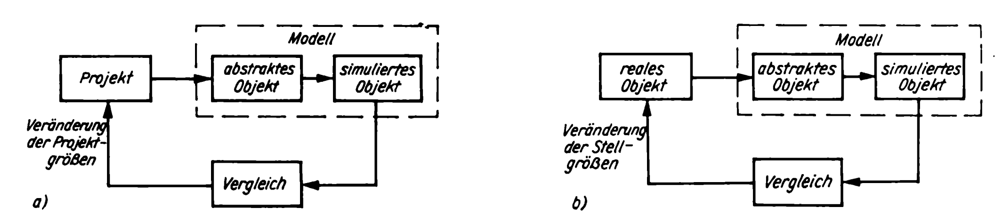


Bild 44. Informationsverarbeitung bei der Projektierung (a) und bei der Regelung (b) von Systemen

Bild 44 stellt die Informationsverarbeitung bei der Auslegung und bei der Steuerung von Systemen gegenüber. Ein *Projekt* wird mit Hilfe eines mathematischen Modells berechnet und simuliert. Dann werden die berechneten Ausgangsgrößen mit den geforderten verglichen und die Projektgrößen so lange verändert, bis der Vergleich hinreichend genau erfüllt ist. Bei der *Regelung* eines realen Objekts (z. B. Prozeßsteuerung eines Betriebes) werden die Steuerungsparameter (Stellgrößen) verändert, bis das Steuerungsziel erreicht ist. In beiden Fällen werden mathematische Modelle benötigt, wenn diese Aufgaben mit Hilfe eines digitalen Rechenautomaten gelöst werden sollen.

Jedes reale Objekt hat — philosophisch betrachtet — unendlich viele Eigenschaften und unendlich viele Ein- und Ausgangsgrößen. Es ist die Aufgabe der *Problemanalyse und Modellierung*, durch Abstraktion auf die wesentlichen Eigenschaften und Variablen geeignete Modelle (abstrakte Modelle) zu schaffen. Diese Modelle können *materieller* oder *ideeller Art* sein. Der mit dem Analogrechner realisierte Koppelplan ist ein materielles Modell der zu untersuchenden Erscheinung. Der Digitalrechner benötigt ein mathematisches Modell, d. h. einen Satz von mathematischen Beziehungen, um eine Erscheinung untersuchen zu können. Mathematische Modelle gehören in die Klasse der ideellen Modelle.

Die Eigenschaften technischer Objekte, die deswegen für ihre Beschreibung nötigen Arten der Abstraktion und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für das Modell sind in Tabelle 9 zusammengefaßt.

Tabelle 9. Eigenschaften technischer Objekte und Konsequenzen für ihre Modellierung

Eigenschaften verfahrenstechnischer Objekte	Art der Abstraktion	Konsequenzen für das Modell
Objekt bzw. Klasse von Objekten	generalisierend	konkretes Modell oder Typenmodell
Umwelt, offenes System	isolierend	endlich viele determinierte Ein- und Ausgangsgrößen
Heterogenes System	vereinfachend	Auswahl wesentlicher Elemente, Bildung eines abstrakten Objekts
Komplizierte Prozesse	idealisierend	ideales Objekt, Einheit von Analyse und Synthese
Stochastisch	stabilisierend	statistischer Charakter der Parameter
Zeitinvariant	stabilisierend	evtl. Zeiteinfluß im Modell oder Nachführungsalgorithmus
Nichtlinear, dynamisch	vereinfachend	komplizierte Gleichungssysteme, wenn Vereinfachung nicht zulässig

Die Existenz in Raum und Zeit ist die einzige Erscheinungsform der Materie. Deswegen existieren alle technischen Objekte und die in ihnen ablaufenden Vorgänge und Prozesse nur in Raum und Zeit. Das heißt, die Zustandsgrößen eines Systems ändern sich in Zeit und Raum, und man spricht von *dynamischen Erscheinungen* mit (räumlich) verteilten Zustandsgrößen. Diese Tatsache führt bei der mathematischen Beschreibung dieser Erscheinungen stets zu partiellen Differentialgleichungssystemen, die außerdem noch stochastischen Charakter haben (Bild 45). Von der letzten Eigenschaft muß man meist wegen der damit verbundenen mathematischen Probleme absehen, oft ist man jedoch auch noch gezwungen, in Richtung konzentrierter Zustandsgrößen oder statischer Betrachtungsweisen zu vereinfachen.

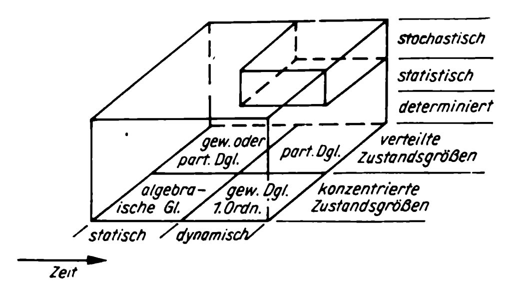


Bild 45. Art der Modellgleichungssysteme in Abhängigkeit von Raum und Zeit

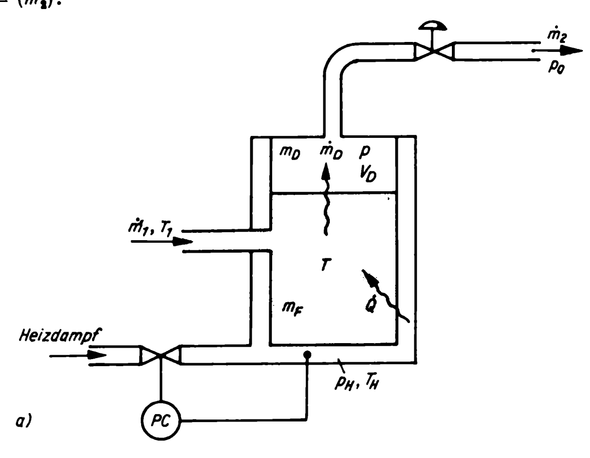
Für die Ableitung mathematischer Modelle müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Beobachtbarkeit und möglichst aktive Beeinflußbarkeit des Objekts bzw. der zu untersuchenden Erscheinung (experimentelle Arbeiten),
- Vorhandensein geeigneter Verfahren der Meß- und Analysentechnik sowie zur Erfassung und Speicherung der Informationen,
- Existenz eines ausreichenden Variationsbereichs der Variablen,
- Vorhandensein hinreichender theoretischer Kenntnisse über die Objekte bzw. Prozesse,
- Existenz geeigneter mathematischer Verfahren und rechentechnischer Hilfsmittel zur Lösung der Modellgleichungssysteme und zur Auswertung experimenteller Daten.

Die Ableitung der Funktionen zwischen den Variablen eines Systems setzt Kenntnisse auf den jeweiligen Gebieten der theoretischen Grundlagen voraus (z. B. Statik und Festkörperbeanspruchung bei einer Brückenberechnung, Strömungslehre und Thermodynamik bei Berechnung eines beheizten Rohrsystems). Sie kann speziell und vertieft nur in den jeweiligen Fachgebieten behandelt werden.

Beispiel. Ableitung eines mathematischen Modells eines dampfbeheizten Kessels (Bild 46).
Ein Flüssigkeitsstrom $\dot{m}_1$ gelangt mit der Temperatur T_1 in einen Kessel, dessen Mantel dampfbeheizt ist. Für den Dampfdruck p_H ist ein Regler vorgesehen. Der austretende Strom $\dot{m}_2$ kann durch ein Ventil mit dem Ventilbeiwert h_V beeinflußt werden. Außerhalb des Kessels herrscht der Druck p_0. Gesucht ist der Strom $\dot{m}_2$. Es wird angenommen: ideale Mischung im Kessel, d. h. Temperatur im Kessel = Austrittstemperatur; Wandtemperatur = Dampftemperatur. Grundlage des Modells sind die Bilanzen. Von der Kesselwand geht der Wärmestrom $\dot{Q}$ auf die Flüssigkeit über. Die Temperatur T ergibt sich aus der Wärmebilanz. Die Variablen des Systems für den Fall der Steuerung sind:

Eingangsgrößen $\underline{X} = (m_1, T_1, p_H, h_V, p_0, \varrho)$,
(Die Eingangsgrößen teilen sich je nach Gegebenheiten in Stellgrößen und Störgrößen auf.)
Zustandsgrößen $\underline{Z} = (T, p, m_D, \dot{m}_D, m_F, \dot{Q}, V_D)$,
Ausgangsgrößen $\underline{Y} = (\dot{m}_2)$.



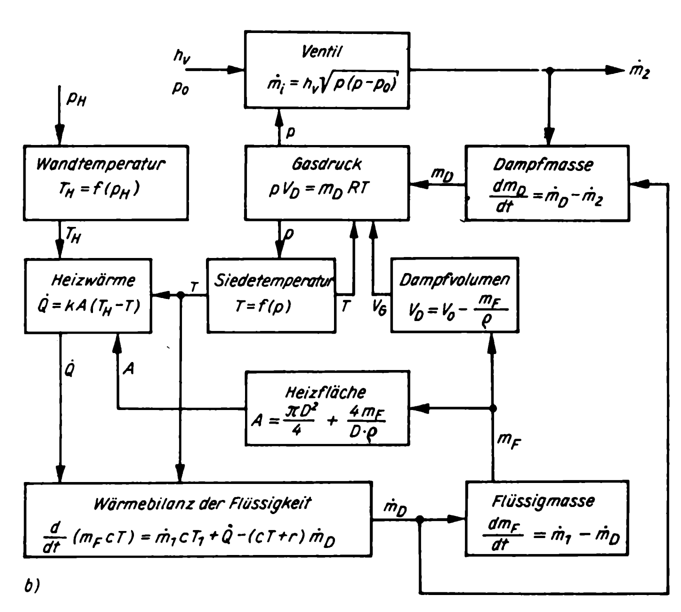


Bild 46. Mathematisches Modell eines dampfbeheizten Kessels. a) Versuchsaufbau; b) Modell



Das Gleichungssystem enthält außerdem folgende Beiwerte oder Koeffizienten, die häufig unter der allgemeinen Bezeichnung *Parameter* zusammengefaßt werden:

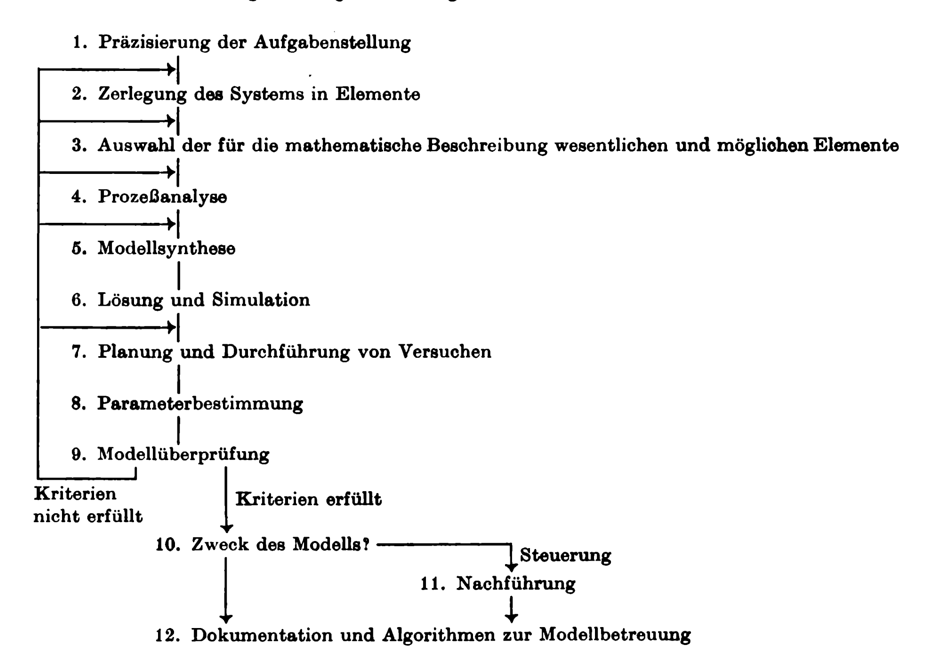
r spezifische Verdampfungswärme, c spezifische Wärmekapazität, k Wärmedurchgangskoeffizient.

Da entsprechende Parameter in jedem mathematischen Modell realer technischer Objekte zu finden sind, enthält die vollständige Ausarbeitung eines mathematischen Modells stets experimentelle und statistische Anteile zur Anpassung und Überprüfung des Modells.

4.1.2. Problembearbeitungsprozeß „Mathematische Modellierung“

Die Ableitung mathematischer Modelle ist einerseits eine unbedingte Notwendigkeit für die Anwendung von Rechenautomaten in der Technik, andererseits aber eine meist sehr aufwendige Aufgabe. Die Effektivität bei der Lösung dieser Aufgabe kann durch eine geeignete Methode erhöht werden. Bei der Darstellung einer Methode der mathematischen Modellierung stehen Allgemeingültigkeit und Anwendbarkeit in Widerspruch zueinander. So wie ein Modell nur für ein Objekt oder eine Klasse von Objekten gilt, so kann eine Methode der Modellierung meist nur hinreichend detailliert dargestellt werden, wenn man sich ebenfalls auf eine Klasse von Objekten einschränkt.

Um einen Überblick über den Ablauf der mathematischen Modellierung zu geben, wird hier eine sehr weit verallgemeinerte Form dargestellt und in großen Schritten interpretiert. In der Literatur sind z. T. detailliertere Beschreibungen, ausgerichtet auf bestimmte Fachrichtungen oder bestimmte Zweige der Technik, zu finden [5, 11, 27, 48].
Die folgende Darstellung zeigt den prinzipiellen *Ablauf für die Ausarbeitung eines mathematischen Modells*, der von der Präzisierung der Aufgabenstellung bis zur abschließenden Dokumentation führt:



In diesem Schema erkennt man folgende *allgemeine Aussagen* wieder:

- Der Erkenntnisprozeß enthält stets die dialektische Einheit von Analyse (Schritt 4) und Synthese (Schritt 5).
- Jede Modellbearbeitung enthält ebenso wie der Erkenntnisprozeß theoretische (Schritte 4 und 5) sowie experimentelle Anteile (Schritt 7).

— Jedes Modell ist für einen konkreten Einsatzzweck bestimmt (Schritt 1) und auf ein Objekt bezogen, mit dem es in der Modellüberprüfung (Schritt 9) verglichen werden muß.
— Jedes Modell muß mit einem bestimmten Aufwand anwendbar sein. Es sind entsprechende Algorithmen für die Lösung des Gleichungssystems erforderlich (Schritt 6).

4.1.2.1. Präzisierung der Aufgabenstellung

Die Präzisierung der Aufgabenstellung enthält i. allg. folgende Schritte:

— Definition des Objekts und der Umgebung sowie der zwischen ihnen bestehenden Relationen bzw. Variablen (generalisierende, isolierende Abstraktion),
— Definition der Aufgabe des Objekts, der Einsatzzwecke des Modells und der Zielgröße einschließlich der Nebenbedingungen,
— Zusammenstellung der Forderungen an das Modell (Genauigkeit, Gültigkeitsbereich, zulässige Rechenzeit, ...) und der Umstände für den Bearbeitungsprozeß (Zeit, Kapazität, Kenntnisstand, experimentelle und rechentechnische Hilfsmittel).

4.1.2.2. Auswahl der wesentlichen Elemente

Das zu untersuchende Objekt ist in *Elemente* (z. B. in Aggregate bzw. Baugruppen im Fall einer konstruktiven Aufgabe, in Apparate im Fall eines technologischen Prozesses) zu zerlegen. Weil ein mathematisches Modell hinreichend genau und für die Anwendung geeignet sein muß, müssen die und nur die für die mathematische Beschreibung des Objekts wesentlichen Elemente ausgewählt werden. Bei dieser *Auswahl* spielen die meß- und analysentechnischen Möglichkeiten zur Erfassung der Variablen zwischen den Elementen eine wesentliche Rolle. Da jedes Modell technischer Objekte mit Hilfe von experimentell und statistisch zu bestimmenden Parametern dem Objekt angepaßt werden muß, müssen die Variablen der Elemente im Experiment meßbar sein.

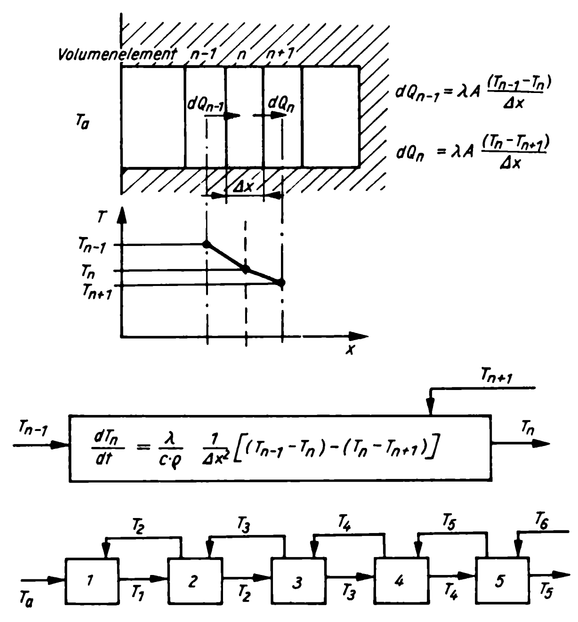


Bild 47. Modell der Wärmeleitung in einem isolierten Stab



Die Auswahl der für die mathematische Beschreibung wesentlichen und möglichen Elemente muß im Zuge der zyklischen Modellüberprüfung und -verbesserung meist mehrfach korrigiert werden. Ergebnis dieses Schritts ist eine abstrakte Struktur des zu modellierenden Objekts in Form von bildhaften Zeichen (Ikonen, ikonisches Modell), also noch nicht in Form mathematischer Symbole.

4.1.2.3. Prozeßanalyse und Modellsynthese

Die *Prozeßanalyse* untersucht die in den Elementen der abstrakten Struktur ablaufenden Erscheinungen mit dem Ziel, durch weitere Zerlegung der Elemente die Erscheinungen auf bekannte Abläufe zurückzuführen und diese dann mathematisch beschreiben zu können.

Beispiel. Wärmeleitung in einem Stab, der seitlich und an einem Ende isoliert ist (Bild 47). Auf das freie Ende wirkt eine höhere Temperatur ein. Abstrahiert man idealisierend auf die eindimensionale Wärmeleitung nur in Richtung der Stabachse, so wirkt der Gradient der Zustandsgröße Temperatur nur in Achsenrichtung. Teilt man den Stab, wie im Bild gezeigt, in Volumeneinheiten auf, so ergibt sich die dargestellte Wärmebilanz für das Element n.

Schon aus diesem einfachen Beispiel geht hervor, daß *Bilanzgleichungen* (für Gesamtmasse, Komponentenmasse, Energie und Impuls) und die dazugehörigen *Erhaltungsgrößen* (im Beispiel die Wärmemenge) eine wesentliche Rolle bei der mathematischen Modellierung spielen.
Den Schritt der *Prozeßanalyse* kann man methodisch wie folgt untergliedern:

Eing.: Prozeßkenntnis

1. Zerlegung des Elements in Bilanzgebiete
2. Feststellung der wesentlichen Erhaltungsgrößen
3. Feststellung der Prozeßvariablen
4. Untersuchung der Ortsabhängigkeit der Prozeßvariablen
5. Sind die Zustandsgrößen verteilt? ⟶ nein
   ↓ ja
6. Untersuchung der Transportprozesse
   ↓ ←
7. Untersuchung der Umwandlungsprozesse
8. Formulierung der Kopplungsbeziehungen zwischen den Bilanzgebieten
9. Entscheidung über die Beschaffung unbekannter Parameter und Beziehungen

Die *Modellsynthese* ist die Entwicklung einer abstrakten Beschreibung einer Erscheinung auf der Grundlage der Ergebnisse der Prozeßanalyse und gewisser Syntheseprinzipien, den Erhaltungssätzen. Das *Erhaltungsprinzip* lautet in seiner allgemeinen Form:

zeitliche Änderung der gespeicherten Menge der Erhaltungsgröße im Bilanzraum	=	resultierender konvektiver Strom + resultierender molekularer Strom + Quellstrom

Ein *Ablaufplan* für die *Modellsynthese* ist in folgendem Schema gezeigt:

Eing.: Ergebnisse der Prozeßanalyse

1. Formulierung des Bilanzgleichungssystems
2. Formulierung aller erforderlichen Anfangs- und Randbedingungen
3. Genügt das komplette Modellgleichungssystem den gestellten Anforderungen an die mathematische Struktur?
   - ↓ ja
     4. Ist eine weitere Anpassung notwendig?
        - ↓ ja: 5. Parameterbestimmung
        - ↓ nein: 6. Lösung und Simulation
   - ↓ nein
     7. Zusammenstellung der notwendigen Vereinfachungen
        ↓
     8. Ableitung der Konsequenzen
        ↓
     9. Überprüfung durch erneute Prozeßanalyse

Wendet man das Erhaltungsprinzip auf das Beispiel der Wärmeleitung im isolierten Stab an, so erhält man zur Beschreibung des Vorgangs einen Satz simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen, die für die gewählten Volumenelemente in Form eines Signalflußbilds zusammengeschaltet werden können. Die Genauigkeit, mit der man dann die aus der Thermodynamik bekannte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\varrho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

zur exakten Beschreibung dieses Vorganges annähern kann, hängt dann von der Intervallgröße Δx ab.

Nach der Modellsynthese folgt der Schritt „*Lösung und Simulation*", der, weil er die unmittelbare Anwendung der Rechentechnik erfordert, später etwas ausführlicher dargestellt wird.

4.1.2.4. Planung und Durchführung von Experimenten

Wir unterscheiden eindeutig zwischen *aktivem Experiment* und *passiver Beobachtung*. Das Experiment besteht in der aktiven Einwirkung des Experimentators mit materiellen Mitteln auf das zu untersuchende Objekt. Dadurch ist es möglich, die zu untersuchende Erscheinung von unwesentlichen Einflüssen zu isolieren, die Versuchsparameter planmäßig zu verändern, zu variieren und zu kombinieren und die Versuche vielfach zu reproduzieren. Das Experiment ist eine zielgerichtete Einheit von praktischer Tätigkeit und theoretischer Denkbarkeit.
Der Schritt „Planung und Durchführung von Versuchen" hat die Aufgabe, das für die Bestimmung der im Modell enthaltenen Koeffizienten und Beiwerte notwendige Datenmaterial zu beschaffen.
Für die *Versuchsplanung* [23, 30, 44] gelten folgende Gesichtspunkte:

— Es sind die und nur die wesentlichen Einflußgrößen zu variieren. Die erforderliche *Anzahl der Versuche* steigt mit der Anzahl der Einflußgrößen.
— Die *Variationsbereiche* der Einflußgrößen müssen hinreichend groß sein, da einerseits jedes Extrapolieren statistischer Ergebnisse unsicher ist und andererseits die Unterschiede zwischen den einzelnen Punkten der Ein- und Ausgangsgrößen die Meß- und Analysenfehler überschreiten müssen.
— Die *Anzahl der Niveaus*, die für jede Einflußgröße vorgesehen werden, muß mindestens den Anforderungen des Modells entsprechen.

So sind z. B. für die Belegung eines quadratischen Modells mindestens drei Niveaus erforderlich, da durch zwei Punkte nur eine Gerade, nicht aber eine quadratische Funktion bestimmt werden kann. Jedoch reicht diese Mindestforderung in der Praxis meist nicht aus.

— Die *Anzahl der Versuchspunkte* muß größer sein als die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten, um die nötige statistische Sicherheit zu bekommen.

Vollständige *Faktorenpläne* enthalten alle Kombinationen der Faktoren (Einflußgrößen) und Niveaus (Bild 48). Sie bringen viele Informationen, wenn die Anzahl der Niveaus hinreichend groß ist. Ein wesentlicher Vorteil ist, daß mit ihnen der Einfluß jedes Faktors bei verschiedenen Niveaus oder anderer Faktoren gemessen wird. Dadurch können die Koeffizienten für Produkte

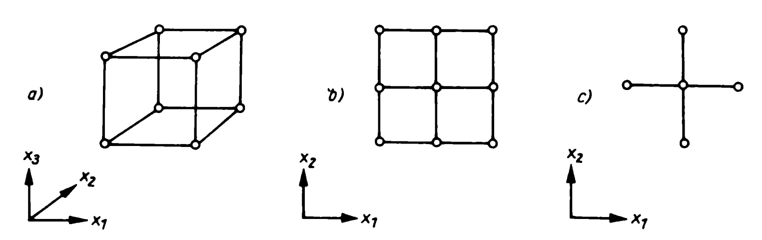


Bild 48. Versuchspläne erster Ordnung. a) Vollständiger Faktorenplan für 3 Faktoren auf 2 Niveaus; b) vollständiger Faktorenplan für 2 Faktoren auf 3 Niveaus; c) zentraler Versuchsplan für 2 Faktoren (ohne Wechselwirkung)



oder Quotienten mehrerer Einflußgrößen im Modell bestimmt werden. Ein entscheidender Nachteil ist, daß die *Anzahl der Versuchspunkte* sehr groß werden kann:

$$\text{Anzahl der Versuche} = (\text{Anzahl der Niveaus})^{(\text{Anzahl der Faktoren})}$$

Ein Faktorenplan erster Ordnung enthält zwei Niveaus, allgemein ist die Zahl der Niveaus bei diesen Plänen um eins größer als die Ordnung. Bei Plänen erster Ordnung bezeichnet man das obere Niveau mit (+) und das untere mit (−). Demzufolge kann man den Plan von Bild 48 auch durch die Tabelle 10 darstellen, aus der das Bildungsgesetz dieser Pläne zu erkennen ist. Vollständige Faktorenpläne erster Ordnung wären sehr gut zur Auswahl der wesentlichen Einflußgrößen geeignet, jedoch sind sie dafür zu aufwendig. Deswegen wurden für diesen Zweck eine Reihe spezieller Methoden entwickelt [23, 44]:

— Rangkorrelation,
— Varianzanalyse,
— Faktoranalyse,
— Zufalls-Balance-Methode,
— Versuchspläne nach PLACKETT und BURMAN.

Tabelle 10. Tabelle zur Versuchsplanung (Versuchsplan erster Ordnung)

Versuchs-nummer	x_1	x_2	x_3
1	+	+	+
2	+	+	−
3	+	−	+
4	+	−	−
5	−	+	+
6	−	+	−
7	−	−	+
8	−	−	−

Mathematische Modelle technischer Objekte sind meist *nichtlinear*, deshalb reichen für ihre Anpassung Versuche auf nur zwei Niveaus nicht aus. Mehr als zwei Niveaus können jedoch wegen des Aufwands bei vollständigen Faktorenplänen kaum realisiert werden. Deswegen werden *zusammengesetzte Pläne höherer Ordnung* aufgebaut.

Durch Versuchspläne, die nicht mindestens einen vollständigen Faktorenplan erster Ordnung enthalten, z. B. durch den Plan (Bild 48c), können die Koeffizienten für Produkte mehrerer Einflußgrößen nicht bestimmt werden. Diese Anordnungen sind deswegen nur für Spezialfälle (keine Wechselwirkung der Einflußgrößen) anwendbar.

Die zentralen zusammengesetzten Pläne zweiter Ordnung (Bild 49a) enthalten einen vollständigen Faktorenplan erster Ordnung und zusätzlich das Zentrum und die Achsenendpunkte. Diese Versuchspläne sind für die Belegung der Modelle technischer Objekte gut geeignet. Sie bieten fünf Niveaus für jede Variable und benötigen vor allem bei größerer Anzahl der Variablen wesentlich weniger Versuche als vollständige Faktorenpläne mit fünf Niveaus. Die Anzahl der Zentrumsversuche und der Abstand der

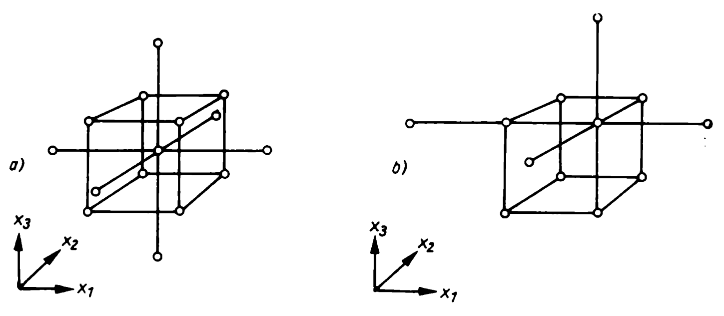


Bild 49. Versuchspläne zweiter Ordnung. a) Zentraler zusammengesetzter Plan; b) nichtzentraler zusammengesetzter Plan

Achsenendpunkte vom Zentrum (Tabelle 11) ergeben sich aus statistischen Überlegungen (gleiche Varianz aller Versuchspunkte, Orthogonalität des Versuchsplanes). Der Zentrumsversuch wird mehrfach durchgeführt, um den Versuchsfehler besser bestimmen zu können.
Nichtzentrale zusammengesetzte Versuchspläne, Bild 49b, lassen sich besser unregelmäßig begrenzten Versuchsräumen anpassen.

Tabelle 11. Drehbare, zentrale zusammengesetzte Versuchspläne

Anzahl der Variablen	2	3	4	5	6	7
Eckpunkte	4	8	16	32	64	128
Achspunkte	4	6	8	10	12	14
Zentrumspunkte	5	6	7	10	15	21
Gesamte Anzahl der Versuche	13	20	31	52	91	163
Achspunktabstand*)	1,414	1,682	2,000	2,378	2,828	3,333

*) *Achspunktabstände:* Abstand der Achspunkte vom Mittelpunkt, bezogen auf die halbe Kantenlänge des Würfels in der gleichen Richtung

Die methodischen Gesichtspunkte für die experimentellen Arbeiten sind durch folgende Zusammenfassung gegeben:

Festlegung des Ziels

1. Aufgabenstellung der Experimente,
2. Konsequenzen, falls Experimente nicht realisierbar oder nicht die erwarteten Effekte zeigen,
3. Einteilung der Variablen,
4. Festlegung des Raums der Experimente,
5. Zeit und Kosten,
6. Welche Vorversuche oder Informationen sind nötig?

Planung der Versuche

1. Art und Grad des Modells,
2. Wie weit kann das Modell als korrekt angesehen werden?
3. Wichtung der Variablen,
4. Festlegung der Bereiche und Niveaus der Variablen,
5. Wahl des Typs des Versuchsplans,
6. Festlegung der Reihenfolge der Versuche

Durchführung der Versuche

1. Überprüfung des Objekts und seiner Meß- und Stelltechnik vor und während der Experimente sowie nach ihrem Ende,
2. Kriterien zur Beurteilung des Systemzustands,
3. eindeutige Festlegung des Erfassungsalgorithmus,
4. Kriterien, Algorithmen und Versuchsplan dem Versuchspersonal erläutern und trainieren,
5. eindeutige Erfassung und Speicherung der Daten,
6. Einhaltung des Versuchsplans (zumindest bis ein gesichertes Ergebnis vorliegt, Blockbildung beachten),
7. teilweise mehrfache Abnahme gleicher Proben und ihre unterschiedliche Kennzeichnung zur Ermittlung der Laborfehler.

4.1.2.5. Parameterbestimmung

Mathematische Modelle technischer Objekte enthalten Koeffizienten oder Beiwerte. Diese Zahlenwerte der durch die Prozeßanalyse und Modellsynthese theoretisch abgeleiteten Funktionen sind aus den Messungen der Versuche zu berechnen. Um eine hinreichende statistische Sicherheit zu bekommen, sind mehr Meßwertsätze erforderlich, als Koeffizienten zu bestimmen sind. Das heißt aber auch, daß die berechneten Koeffizienten eine Annäherung des Modells an das Objekt im Rahmen dieses Datenmaterials (in der Statistik *Stichprobe* genannt) darstellen. Man ist bestrebt, eine möglichst gute Annäherung zu erreichen. Dafür stellt die Statistik

mehrere Kriterien zur Verfügung. Meist wird die kleinste Fehlerquadratsumme benutzt. Einige Koeffizienten (z. B. Materialfestigkeiten, Wärmeübergangskoeffizienten, Dampfdruckkurven) können vorhandenen Tabellen entnommen werden. Das heißt jedoch nicht, daß die Modelle dann keinen experimentellen Anteil mehr haben, sondern nur, daß die Experimente schon durchgeführt und ausgewertet wurden.

Die *Regressionsanalyse* ist ein statistisches Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten*) für eine vorgegebene, theoretisch abgeleitete Funktion, das in vielen Fällen angewendet werden kann. Die Regressionsanalyse ist nicht anwendbar, wenn folgende Komplikationen einzeln oder kombiniert auftreten:

- Auf Grund der theoretischen Zusammenhänge müssen gleiche Koeffizienten in mehreren Gleichungen des Modells vorhanden sein.
- Die Funktion ist nichtlinear in bezug auf die Koeffizienten, wie z. B. $y = b_0 x^{b_1} e^{b_2 x} + b_3 x$.
- Die Abhängigkeit ist nicht als Funktion, sondern nur numerisch gegeben, z. B. wenn nicht die Ausgangsgröße selbst, sondern nur ihre Ableitung nach einem Parameter (Zeit, Länge usw.) als Funktion gegeben ist.

In dem damit definierten allgemeinen Fall der Koeffizientenbestimmung ist eine Zielfunktion für die „beste" Annäherung des Modells an die gemessenen Daten zu definieren und anschließend ein Optimierungsverfahren für die Bestimmung der Koeffizienten zu benutzen.

4.1.2.6. Überprüfung von Modellen

Jedes abgeleitete und mit Koeffizienten belegte Modell ist auf seine Übereinstimmung mit dem Objekt zu überprüfen. Daraus ergibt sich ein *Zyklus* von Modellüberprüfung, Überarbeitung der Modellfunktionen, erneute Koeffizientenbestimmung und nochmalige Modellüberprüfung, der so oft zu durchlaufen ist, bis eine befriedigende Übereinstimmung von Objekt und Modell erreicht ist.

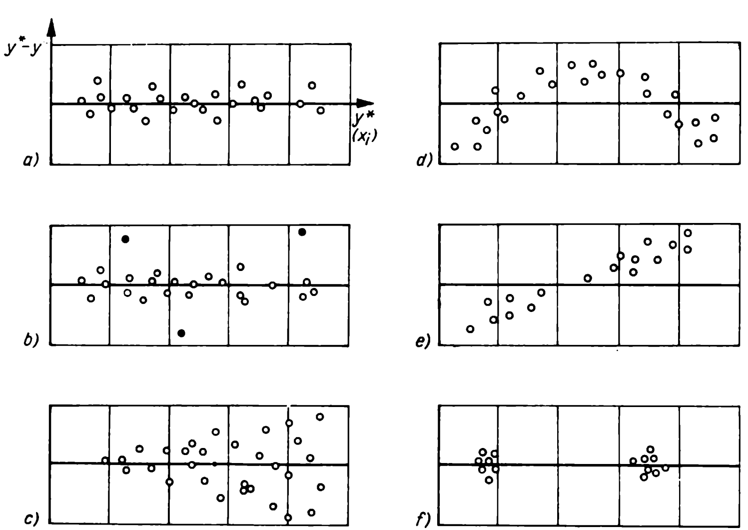


Bild 50. Punkthaufen zur Analyse der Abweichungen

Die Analyse der Abweichung zwischen Meß- und Rechenwert der abhängigen Variablen des Modells für alle zur Koeffizientenbestimmung benutzten Wertesätze ist das produktivste Verfahren zur Überprüfung und Verbesserung von Modellen. Dazu werden diese Abweichungen sowohl über den Meßwerten der abhängigen Größe als auch über den Meßwerten der unabhängigen Größen (in einer entsprechenden Anzahl getrennter Diagramme) aufgetragen. Bild 50 zeigt typische Beispiele der Punkthaufen. Sind die Punkte

*) s. Abschn. OPERATIONSFORSCHUNG

gegenüber der Abszisse etwa normalverteilt, und ist die Streuung im Vergleich zur Meßungenauigkeit hinreichend klein, so ist der Ansatz gut (Beispiel a)). Weichen wie bei b) einige Punkte stark vom Rest ab, so deutet das auf große Fehler im Datenmaterial. Ergibt sich der Punkthaufen c) über der abhängigen Größe, so steht diese in Wechselwirkung mit einer anderen, die als Parameter im Punkthaufen zu erkennen sein muß. Das Beispiel d) weist darauf hin, daß nichtlineare Einflüsse nicht entsprechend berücksichtigt wurden. In e) und f) haben nicht erfaßte Größen großen Einfluß.

4.1.2.7. Nachführung und Dokumentation

Technische Objekte sind grundsätzlich *zeitvariant*, z. B. durch Verschleiß, Ablagerungen, Veränderung der Katalysatoraktivität, wenn diese Zeitvarianz auch unterschiedlich groß ist. Soll ein mathematisches Modell zur Steuerung einer technischen Anlage im Sinne der optimalen Prozeßführung genutzt werden, so wird es wegen der Zeitvarianz des Objekts und wegen grundsätzlicher Unzulänglichkeiten des Modells im Laufe der Zeit zu Abweichungen zwischen Objekt und Modell kommen. Diese Abweichungen sind durch einen geeigneten *Nachführungsalgorithmus* für die Modellparameter zu beseitigen [30], bevor das Modell für die Optimierung benutzt wird, da sonst die gleiche Abweichung zwischen der Lage des realen und des rechnerischen Optimums auftritt.
Da mathematische Modelle meist über längere Zeit und nicht nur von denen, die sie erarbeitet haben, genutzt werden, sind in einer abschließenden *Dokumentation* alle Voraussetzungen, Vereinfachungen usw. sowie auch Algorithmen für ihre Überarbeitung anzugeben, damit neue Erkenntnisse richtig und rationell eingearbeitet werden können.

4.2. Lösungsprozeß und Simulation

Jede mathematische Beschreibung materieller Objekte oder Prozesse führt ohne wesentliche Vereinfachungen auf partielle Differentialgleichungssysteme. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts und der möglichen bzw. notwendigen Vereinfachungen ist in Tabelle 12 nochmals die untere Ebene von Bild 45 dargestellt. Ein wichtiges Einsatzgebiet der Datenverarbeitung in der Technik ist die Lösung der meist komplizierten, simultanen Modellgleichungssysteme und die Nachbildung (Simulation) der untersuchten Erscheinungen mit Hilfe dieser Gleichungssysteme.

Tabelle 12. Art des Modellgleichungssystems in Abhängigkeit von der räumlichen und zeitlichen Abstraktion

		Räumliche Abstraktion	
		konzentrierte Zustandsgrößen	verteilte Zustandsgrößen
Zeitliche Abstraktion	statisch	algebraische Gleichungen	gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen
	dynamisch	gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	partielle Differentialgleichungen

Ein mathematisches Modell enthält die gesuchten abhängigen Variablen meist nur implizit, es kann also die Zustandsfolgen des beschriebenen Prozesses nicht explizit angeben. Die im Modell enthaltenen Bilanzgleichungen sind im allgemeinen Fall über Raum und Zeit zu integrieren. Ihre Gültigkeit für einen beliebigen Zeitpunkt und ein differentielles Volumenelement wird durch die Integration auf ein beliebiges Zeitintervall und auf ein durch die Randbedingungen festgelegtes Bilanzgebiet ausgedehnt. Für den Integrationsprozeß gibt es mehrere



Möglichkeiten, die Integration heißt *Lösungsprozeß*, das Ergebnis heißt *Lösung*. Dabei sind folgende Forderungen zu erfüllen:

- Die Lösung muß eindeutig sein.
- Die Lösung muß gewissen Genauigkeitsanforderungen genügen. Diese Aussage bezieht sich auf die Abweichungen einer evtl. Näherungslösung zu der exakten Lösung, d. h. nicht auf die Modellsignifikanz.

4.2.1. Klassifikation der Lösungsprozesse

Man unterscheidet analytische, numerische und Analogie-Lösungsprozesse. Diese drei Arten werden im folgenden kurz charakterisiert, durch ein für alle Fälle gleiches Beispiel belegt und im nächsten Abschnitt miteinander verglichen. Es soll hier nur das Prinzip gezeigt werden, der Einsatz der Rechentechnik lohnt nur für kompliziertere Berechnungen. Es ist außerdem für den Einsatz eines Analogrechners keinesfalls typisch, da dieser vor allem zum Lösen von Differentialgleichungen eingesetzt wird. Wegen der Überschaubarkeit aller drei Lösungen wurde bewußt ein triviales Beispiel gewählt.

Analytische Lösungsprozesse

Die Lösung ergibt sich durch Anwendung mathematischer Sätze und Regeln aus den Modellgleichungen; das Resultat liegt in Form *mathematischer Ausdrücke* vor.

Beispiel. Das simultane, algebraische Gleichungssystem

$$3x + 2y = 2$$
$$2x + 3y = 4$$

liefert durch Auflösen der ersten Gleichung nach x: $x = (2/3) - (2y/3)$ und Substitution in die zweite Gleichung $2[(2/3) - (2y/3)] + 3y = 4$ die Werte $y = 1{,}6$ und $x = -0{,}4$

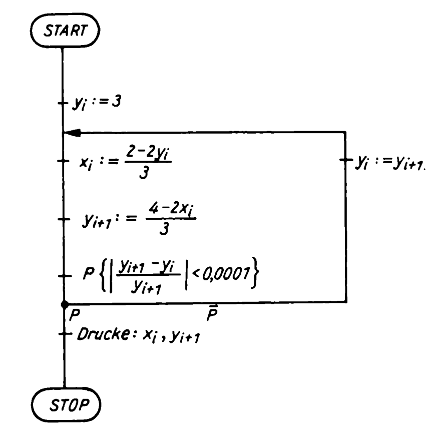


Bild 51. Programmablaufplan einer numerischen Lösung

Numerische Lösungsprozesse

Die Lösung ergibt sich durch Abarbeitung eines numerischen Algorithmus; das Resultat liegt in Form von *Wertetabellen* vor. Der Programmablaufplan für das oben berechnete Beispiel ist im Bild 51 dargestellt. Dabei müssen ein Anfangswert (z. B. für die Größe y), mit dem man die Iteration beginnt, und eine Genauigkeitsanforderung, bis zu der die Iteration fortgesetzt werden soll, eingegeben werden. Im Beispiel wurden die Werte $y_i = 3$ und $|(y_{i+1} - y_i)/y_{i+1}| < 0{,}0001$ gewählt.

Modellgleichungssysteme, die Differentialgleichungssysteme enthalten, müssen in Raum und Zeit diskretiert werden. Für gewöhnliche Differentialgleichungen ist das RUNGE-KUTTA-Verfahren*) geeignet.

ALGOL-Prozedur für das Runge-Kutta-Verfahren:

```
'procedure' wruku(n,h,anf,ta,te,dru,y,fkt);
'value'dru,ta,te,n,h;
'integer'dru,n;
'real'ta,te,h;
'array'anf,y;
'procedure'fkt;
'begin''comment' integrationsprogramm.fuer.gewoehnliche dgl.
                 nach runge-kutta;
  'integer'i; 'real'h2,t;
  'array' fu,k,k1,k2,k3,k4[1:n];
  t:=ta;h2:=h/2.0;
  print('' anfangswerte'',newline,'' anfangszeit'',ta,newline);
  'print' ''(5e20.11)'', 'for'i:=1'step'1'until'n'do' anf[i];
  'for'i:=1'step'1'until'n'do'
   y[i]:=anf[i];
 ma: fkt(t,y,fu)·
  'for'i:=1'step'1'until'n'do'
  'begin'k1[i]:=h*fu[i];k[i]:=y[i]+0.5*k1[i]'end';
  fkt(t+h2,k,fu);
  'for'i:=1'step'1'until'n'do'
  'begin'k2[i]:=h*fu[i];k[i]:=y[i]+0.5*k2[i]'end';
  fkt(t+h2,k,fu);
  'for'i:=1'step'1'until'n'do'
  'begin'k3[i]:=h*fu[i];k[i]:=y[i]+k3[i]'end';
  fkt(t+h,k,fu);
  'for'i:=1'step'1'until'n'do'
  'begin'k4[i]:=h*fu[i];
    y[i]:=(k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i])/6.0+y[i]
  'end';
  'if't'notgreater'te'then''begin't:=t+h;'goto'ma'end';
'end';
```

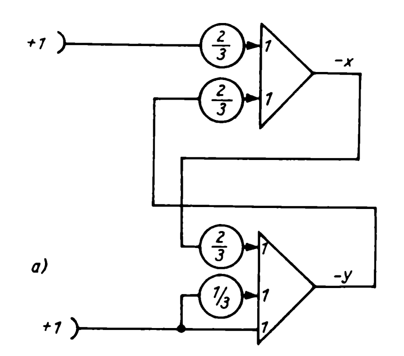
Unterprogramm für das Modell des kontinuierlichen Siedens nach Bild 46:

```
'procedure' wrk(t,y,f);
'value't;'real't;'array'y,f;
'begin''comment' kontinuierliches sieden.
        kennzeichnung der konstanten und variablen:
        ts=a+b*p  ,  p=md*r*a/(vd-b*md*r)
        k[1] - a , k[2] - b , k[3] - m punkt 1 , k[4] - t1 , k[5] - cp ,
        k[6] - k , k[7] - p0 , k[8] - v0 , k[9] - h0 , k[10] - rho ,
        k[11] - d , k[12] - r , k[13] - th , k[14] - rv .
        y[1] - mf , y[2] - md ;
  'real' ts,p,mpd,vd,q,a,mi;
  'comment' zunaechst werden einige zwischengroessen berechnet.
            der lineare zusammenhang zwischen ts und p gilt im
            bereich 100 <ts < 120 grad c;
  vd:=k[8]-y[1]/k[10]; p:=y[2]*k[12]*k[1]/(vd-k[2]*y[2]*k[12]);
  ts:=k[1]+k[2]*p;a:=3.14*k[11]*k[11]/4.0+4.0*y[1]/(k[11]*k[10]);
  q:=k[6]*a*(k[13]-ts); mpd:=(k[3]*k[5]*k[4]+q)/k[14];
  mi:=k[9]*sqrt(p-k[7]);
  'comment' es folgen die rechten seiten der differentialgl.;
  f[1]:=k[3]-mpd;
  f[2]:=mpd-mi;
'end';
```

*) s. Abschn. MATHEMATIK

Analogie-Lösungsprozeß

Die Lösung ergibt sich durch die Realisierung eines Prozesses, der durch ein isomorphes (strukturgleiches) Gleichungssystem beschrieben wird und dessen Verlauf mit geringerem Aufwand realisiert und beobachtet werden kann. Ein geeignetes und übliches Mittel dafür ist der Analogrechner. Die Lösung liegt als *Diagramm* vor.



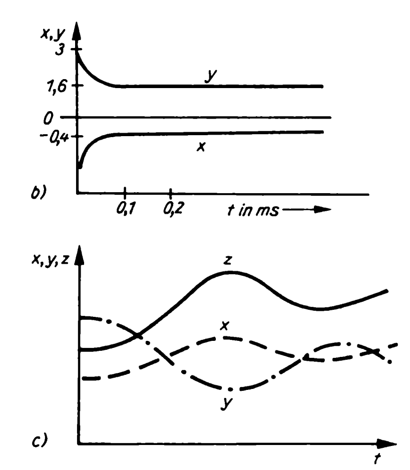


Bild 52. Analogie-Lösungsprozeß.
a) Analogrechner-Koppelplan;
b) Einschwingvorgang; c) Lösungsdiagramm

Bild 53. Analogrechner-Koppelplan für das Modell des kontinuierlichen Siedens

Beispiel. Für die Lösung auf dem Analogrechner wird das oben beschriebene Gleichungssystem in die Form $x = (2/3) - (2y/3)$, $y = (4/3) - (2x/3)$ umgewandelt. Bild 52 zeigt einen Analogrechner-Koppelplan für dieses Beispiel und den Einschwingvorgang bei der Ermittlung der Werte $y = 1{,}6$ und $x = -0{,}4$, ausgehend von dem Anfangswert $y_0 = 3$. In weniger als 0,1 ms ist die Berechnung abgeschlossen. Die Vorteile des Analogrechners kommen bei dynamischen Vorgängen mehr zum Ausdruck. Ersetzt man z. B. in der ersten der beiden Ausgangsgleichungen die Konstante (2/3) auf der rechten Seite durch die zeitlich veränderliche Variable z, und führt man im Koppelplan diese Größe auf das entsprechende Koeffizientenpotentiometer, so erscheinen am Ausgabegerät des Analogrechners praktisch sofort in Abhängigkeit von den Schwankungen der Größe z die Werte für x und y (Bild 52c).

Bild 53 zeigt den Koppelplan für das Modell des kontinuierlichen Siedens. Dieser Plan wurde blockorientiert aufgestellt, um die Struktur des Modells erkennen zu lassen. Wenn man die algebraischen Gleichungen so weit wie möglich in die Differentialgleichungen einsetzt, so würde sich der erforderliche Aufwand an Analogrechenelementen verringern.

4.2.2. Vergleich der Lösungsprozesse

Die verschiedenen Lösungsverfahren unterscheiden sich vor allem in der primären Form der Lösung, den erforderlichen rechentechnischen Hilfsmitteln und den Lösungsmöglichkeiten, die mit ihrer Hilfe gegeben sind. Numerische Lösungsverfahren benötigen meist einen Digitalrechner, Analogie-Lösungsprozesse werden auf Analog- oder auf Hybridrechnern durchgeführt (Tabelle 13). Mit Hilfe bestimmter Umformungen kann die primäre Lösungsform jeweils in die beiden anderen möglichen Lösungsformen umgewandelt werden, so daß für jedes Verfahren die drei möglichen Lösungen (mathematischer Ausdruck, Tabelle und Diagramm) erhalten werden können.

Tabelle 13. Übersicht über die Lösungsprozesse

Lösungsprozeß	Rechentechnische Hilfsmittel	Primäre Form der Lösung	Umformung	Sekundäre Formen der Lösung
Analytisch	—	mathematischer Ausdruck	—	Tabelle, Diagramm
Numerisch	Digitalrechner	Tabelle	Approximation, Interpolation	mathematischer Ausdruck, Diagramm
Analog	Analogrechner	Diagramm	Approximation, Diskretisierung	mathematischer Ausdruck, Tabelle

Tabelle 14. Übersicht über die Lösungsmöglichkeiten

Lösungsprozeß	Art des Gleichungssystems	Linear			Nichtlinear		
		eine	einige	viele	eine	einige	viele
		Lösungsmöglichkeiten			Lösungsmöglichkeiten		
Analytisch	algebraisch	t	l	pu	s	ss	u
	gewöhnl. Dgl.	l	s	pu	ss	u	u
	part. Dgl.	s	pu	u	u	u	u
Numerisch	algebraisch	t	t	l	l	l	l
	gewöhnl. Dgl.	t	l	l	l	l	s
	part. Dgl.	l	l	s	l	l	s
Analog	algebraisch	t	l	pu	l	s	pu
	gewöhnl. Dgl.	l	s	pu	s	ss	pu
	part. Dgl.	l	s	pu	ss	pu	pu

Erläuterung: t trivial, l leicht, s schwierig, ss sehr schwierig, pu praktisch unmöglich, u unmöglich



Die einzelnen Lösungsverfahren unterscheiden sich in bezug auf die Lösungsmöglichkeiten sehr stark (Tabelle 14). Mit allen drei Lösungsverfahren ist es trivial, eine algebraische Gleichung zu lösen. Wenn die Zahl der Gleichungen steigt, Nichtlinearitäten hinzukommen oder man auf gewöhnliche bzw. partielle Differentialgleichungen übergeht, dann wachsen die Schwierigkeiten bei einzelnen unterschiedlich schnell an. In den Fällen, bei denen für die numerischen Lösungsverfahren das Prädikat „schwierig" (s) angegeben ist, handelt es sich vor allem um sehr hohe Anforderungen an Speicherplatz und Rechenzeit. Die Anwendung des Analogrechners zur Lösung einer großen Zahl linearer Gleichungen stößt wegen der erforderlichen Anzahl der Analogrechnerelemente auf die Grenze des praktisch Möglichen. Der Aufbau von Nichtlinearitäten bereitet mit wachsender Anzahl ebenfalls zunehmende Schwierigkeiten. Die Aussagen von Tabelle 14 sollen die Lösungsmöglichkeiten qualitativ veranschaulichen, sie sind im Detail vom jeweiligen Problem, das zu lösen ist, den im speziellen Fall verfügbaren Erfahrungen und Hilfsmitteln sowie vom zeitlich veränderlichen Stand der Rechentechnik abhängig.

4.2.3. Simulation

Unter Simulation versteht man die Untersuchung eines Prozeßverlaufs bei vorgegebenen äußeren Bedingungen mit Hilfe eines Modells. Die Simulation beinhaltet den Lösungsprozeß. Sie erlaubt Experimente mit Hilfe des Modells an Stelle des Originals, allerdings geht dabei der *Modellfehler* mit in das Ergebnis ein. Die Simulation wird benutzt für:

- Variantenvergleiche und Optimierungen,
- Studium von Prozeßverläufen auch unter extremen Bedingungen (Voraussetzung ist die Extrapolierbarkeit des Modells),
- Untersuchung von Übergangszuständen,
- Untersuchung der Stabilität und Sensibilität.

Für die Simulation sind Modell, Lösungsprozeß und Simulationsalgorithmus erforderlich, die, wie in Bild 54 gezeigt, zusammenwirken. Der *Simulationsalgorithmus* variiert die Simulationsparameter (z. B. Temperaturen, Masseströme, Festigkeitswerte, konstruktive Abmessungen) in vorgegebenen Bereichen mit bestimmten Schrittweiten. Als Simulationsergebnis erscheinen die dafür gültigen Ausgangsgrößen des Modells.

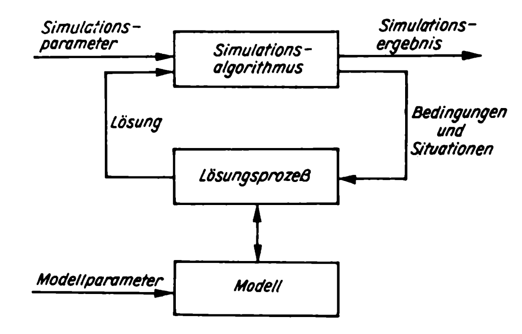


Bild 54. Prinzip der Simulation

Je nach eingesetztem Rechnertyp unterscheidet man *digitale, analoge* und *hybride Simulation,* deren Vor- und Nachteile in Tabelle 15 zusammengestellt sind.

Zur Erhöhung der Effektivität und leichteren Realisierung der Simulation für den Nutzer wurden mehrere *Simulationssprachen* für verschiedene Einsatzgebiete und Rechnertypen entwickelt, deren Vorteile für den Nutzer allerdings mit relativ langen Rechenzeiten im Vergleich zu einfacheren Programmiersprachen und viel Speicherplatzbedarf erkauft werden, so daß sich der Einsatz von Simulationssprachen nur auf großen und schnellen Rechenautomaten lohnt.

Tabelle 15. Vergleich der Simulationsarten

Art der Simulation	Vorteile	Nachteile
Digital	hohe Genauigkeit keine Normierung nötig Simulationsprogramm multivalent nutzbar Simulationssprachen und Lösungsalgorithmen z. T. vorhanden	Rechenzeit wächst stark an mit der Anzahl der Gleichungen kaum Kontakt des Problembearbeiters mit dem Rechner
Analog	Rechenzeit unabhängig von der Anzahl der Gleichungen enger Kontakt zum Rechner anschauliche Resultate	begrenzte Genauigkeit Normierung erforderlich großer Zeitaufwand für die Schaltung Schaltung aufgabengebunden
Hybrid	größere Genauigkeit größere Flexibilität hohe Rechengeschwindigkeit	Genauigkeit wird durch die analogen Elemente bestimmt komplizierte Programmierung

4.3. Wissenschaftlich-technische Berechnungen

Ein umfangreiches Einsatzgebiet der Rechenautomaten in der Technik sind die sogenannten *wissenschaftlich-technischen Berechnungen.* Hiermit sind Aufgaben gemeint, die der Mensch, wenn er keinen Rechenautomaten benutzt, mit Hilfe anderer *Rechenhilfsmittel* (z. B. Tischrechenmaschinen, Rechenschieber) lösen kann, sofern es der Umfang zuläßt.

Beispiel. Berechnung der Sinkgeschwindigkeit eines Korns in einer Flüssigkeit. Es wird absichtlich nicht die Berechnung mit Hilfe der ARCHIMEDES-Zahl gewählt, um ein für viele Aufgaben typisches Iterationsproblem zu zeigen. Dieses Problem wird hier für einen Digitalrechner aufbereitet, weil wie bei vielen wissenschaftlich-technischen Rechnungen *Zahlentabellen* als Ergebnis interessieren.
Die *Sinkgeschwindigkeit* ist eine Funktion des Widerstandsbeiwerts, der von der REYNOLDSschen Zahl abhängt, die ihrerseits wieder eine Funktion der Sinkgeschwindigkeit ist:

$$w_s = f_1(c_W), \qquad c_W = f_2(Re), \qquad Re = f_3(w_s)$$

Dafür wurden in dem Programmbeispiel folgende Zusammenhänge benutzt:

$$w_s = \sqrt{\frac{4}{3}\, g \cdot \frac{d_k}{c_W} \frac{\varrho_k - \varrho_F}{\varrho_F}}, \qquad Re = \frac{d_k \varrho_F}{\eta} w_s, \qquad W = c_W \cdot \frac{\pi d_k^2}{4} w_s^2 \frac{\varrho_F}{2}$$

w_s Sinkgeschwindigkeit, g Fallbeschleunigung, d_k Korndurchmesser, ϱ_k bzw. ϱ_F Dichte des Korns bzw. der Flüssigkeit, c_W Widerstandsbeiwert, η dynamische Viskosität ($\eta = \nu\varrho_F$; ν kinematische Viskosität), W Widerstand

Der Zusammenhang $c_W = f_2(Re)$ soll in den verschiedenen Strömungsbereichen (z. B. Bereich der Gültigkeit des STOKESschen Gesetzes) durch vier Kurvenzüge angenähert werden:

1. $Re < 0{,}2,$ $\qquad c_W = 24/Re$
2. $0{,}2 \leqq Re < 500,$ $\qquad c_W = 18{,}5/Re^{0{,}6}$
3. $500 \leqq Re < 150\,000,$ $\qquad c_W = 0{,}44$
4. $150\,000 \leqq Re,$ $\qquad c_W = 0{,}16$

Algorithmus:

Es wird ein Anfangswert w_A gewählt und zu Beginn der Rechnung als w_0 benutzt. Damit wird die *Re*-Zahl berechnet. Mit dem sich daraus ergebenden c_W-Wert wird w_s berechnet und mit w_0 verglichen. Ist die Abweichung größer als eine vorgegebene Grenze (d_W), so wird das berechnete w_s als w_0 benutzt und die Rechnung wiederholt, bis die Bedingung $|w_s - w_0| \leqq d_W$ erfüllt ist. Anschließend wird für die berechnete

Sinkgeschwindigkeit die Widerstandskraft W berechnet. Legt man diese Berechnung, die nur für den ermittelten Wert von w_s und nicht für die Iterationsschritte interessiert, in den Iterationszyklus, so wird unnötig viel Rechenzeit gebraucht. Der *Programmablaufplan* (Bild 55) veranschaulicht diesen Algorithmus. Einige Besonderheiten werden im Zusammenhang mit dem Programm besprochen.

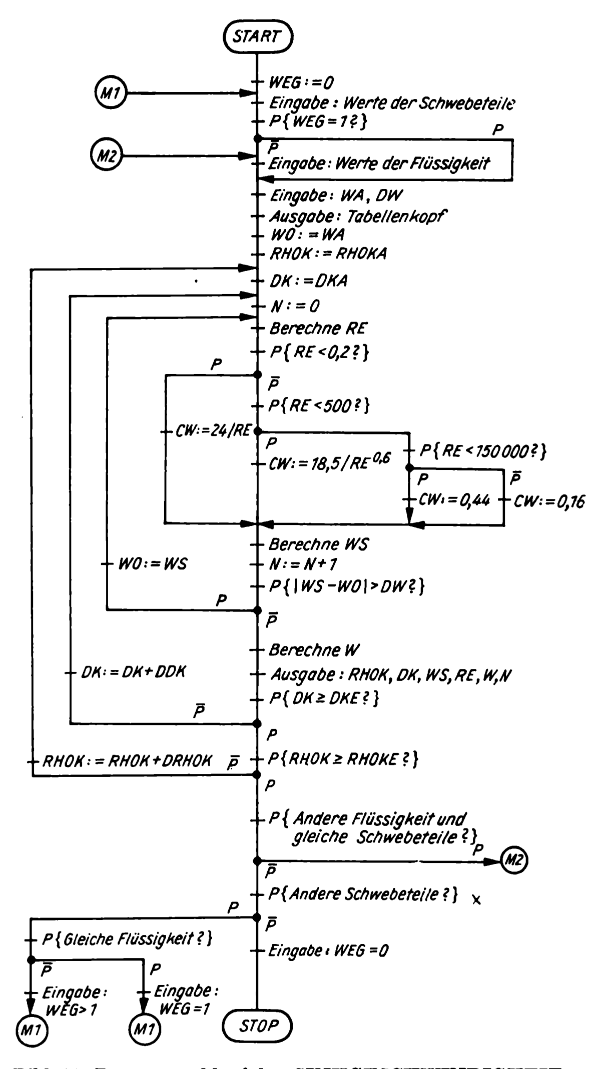


Bild 55. Programmablaufplan SINKGESCHWINDIGKEIT

Programm:

Bild 56 zeigt die Ausschrift des Programms in einer ALGOL-Version. Zunächst werden einige Besonderheiten dieser ALGOL-Version genannt. Für die Eingabe von ALGOL-Texten sind als Buchstaben nur die 26 kleinen Buchstaben zugelassen, der Zeilendrucker druckt das Programm zur Kontrolle wieder aus und verfügt nur über große Buchstaben. ALGOL-Wortsymbole werden in ' ' gesetzt, z. B. 'BEGIN'. WRITE (...) ist eine *Prozedur* (Unterprogramm) für die Ausgabe auf der Steuerschreibmaschine, INPUT (2, ...) mit der Geräte-Nr. 2 ist die entsprechende Eingabe, und PRINT (...) ist für die Ausgabe über Schnelldrucker vorgesehen. *Kettenanführungszeichen* für die Ausgabe von Text werden als '(' und ')' geschrieben.

```
01
02  'BEGIN''COMMENT'AUFTRAG KAPLICK 307-1931 BEARBEITER HAMANN;
03     'INTEGER'WEG,N;
04     'REAL'RHOK,RHOKA,DRHOK,RHOKE,DDK,DKA,DKE,DK,
05     CW,RHOF,ETA,WA,DW,WO,WS,RE,W;
06     WEG:=0;
07  M1:WRITE('('VARIATION DER WERTE DER SCHWEBETEILE')');
08     WRITE('('DICHTE IN KG/M3')');
09     INPUT(2,RHOKA,DRHOK,RHOKE);
10     WRITE('('KORNGROESSE IN MM')');
11     INPUT(2,DKA,DDK,DKE);
12     'IF'WEG=1'THEN''GOTO'M2A;
13  M2:WRITE('('STOFFWERTE DER FLUESSIGKEIT')');
14     WRITE('('DICHTE IN KG/M3')');
15     INPUT(2,RHOF);
16     WRITE('('DYN. ZAEHIGKEIT IN KG/MS')');
17     INPUT(2,ETA);
18     WRITE('('ANFANGSW. U. SCHRANKE F. W IN M/S')');
19     INPUT(2,WA,DW);
20  M2A:PRINT('('DICHTE DER FLUESS.:')',RHOF,'('ZAEHIGKEIT:')',ETA);
21     PRINT('('RHOK              DK                WS                RE
21                  W              N')');
22     PRINT('('KG/M3             MM                M/S
22                  KP')');
23     PRINT('(' ')');
24     WO:=WA;
25     'FOR'RHOK:=RHOKA'STEP'DRHOK'UNTIL'RHOKE'DO'
26     'BEGIN''FOR'DK:=DKA'STEP'DDK'UNTIL'DKE'DO'
27        'BEGIN'N:=0;
28  M3:        RE:=0.001*DK*RHOF*WO/ETA;
29             'IF'RE<0.2'THEN'
30             'BEGIN'CW:=24/RE;'GOTO'M4'END';
31             'IF'RE<500'THEN'
32             'BEGIN'CW:=18.5/(RE'POWER'0.6);'GOTO'M4'END';
33             'IF'RE<150000'THEN'CW:=0.44'ELSE'CW:=0.16;
34  M4:        WS:=SQRT(0.0130755*DK*(RHOK-RHOF)/(CW*RHOF));
35        N:=N+1;
36             'IF'ABS(WS-WO)>DW'THEN'
37             'BEGIN'WO:=WS;'GOTO'M3'END';
38             W:=RHOF*CW*DK*DK*WS*WS*4.0044#-8;
39             PRINT(RHOK,DK,WS,RE,W,N);
40        'END';
41        PRINT('(' ')')
42     'END';
43     PRINT('(' ')');PRINT('(' ')');
44     WRITE('('ANDERE FLUESSIGKEIT UND GLEICHE SCHWEBETEILE')');
45     WRITE('('DANN WEG>0')');
46     INPUT(2,WEG);
47     'IF'WEG>0'THEN''GOTO'M2;
48     WRITE('('ANDERE SCHWEBETEILE')');
49     WRITE('('SCHREIBE 0 BEI ENDE')');
50     WRITE('('SCHREIBE 1 BEI GLEICHER FLUESS.,SONST 2')');
51     INPUT(2,WEG);
52     'IF'WEG>0'THEN''GOTO'M1
53  'END';
```

Bild 56. Programm SINKGESCHWINDIGKEIT



Die eigentliche, als Algorithmus beschriebene Rechnung beginnt in diesem Programm bei der Marke M 3, also in der 28. Programmzeile. Sie endet mit der Ausgabe der gewünschten Werte in der 39. Zeile. Um diese Berechnung ist eine *doppelte Laufanweisung* (Zeilen 25 und 26) gelegt, so daß ϱ_k(RHOK) von einem Anfangswert RHOKA mit vorgegebener Schrittweite DRHOK bis zu einem Endwert RHOKE und anschließend d_k in gleicher Weise variiert werden. Dadurch entsteht eine *Tabelle der Ergebnisse*, in der zunächst für den ersten Wert von RHOK alle Stufen für DK gebildet werden, dann folgen für den zweiten Wert von RHOK alle Stufen für DK usw. Vorher wird der Tabellenkopf ausgegeben (Zeilen 20 bis 23). Um nach Abschluß einer Rechnung das Programm noch für andere Kombinationen von Flüssigkeit und Schwebeteilen benutzen zu können, ohne daß es neu aufgerufen werden muß und auch die unveränderten Werte neu eingegeben werden müssen, sind verschiedene Eingabeteile und Sprünge vorgesehen, und die Wege durch das Programm werden durch die hier symbolisch als WEG bezeichnete Testzelle gesteuert, in die je nach Wunsch ein bestimmter Inhalt einzugeben ist (Zeilen 44 bis 52).

4.4. Rechnergestützte Konstruktion

Im Prozeß der technischen Vorbereitung der Produktion liegt der konstruktive Entwicklungsprozeß zwischen der Verfahrensentwicklung und dem technologischen Entwicklungsprozeß, als Ergebnis dieser Kette liegen die Herstellungsunterlagen vor [5]. Wegen des großen Umfangs der zu verarbeitenden Informationen und wegen der Tatsache, daß es stets mehrere Lösungsvarianten gibt, läuft der konstruktive Entwicklungsprozeß in mehreren Phasen ab. Dabei werden die *Phasen* als Tätigkeitsabschnitte bezeichnet, die zu bestimmten Stadien des technischen Gebildes führen. Die *Stadien* sind Beschreibungsformen mit unterschiedlichem Abstraktionsgrad. In [5] sind die Phasen von Tabelle 16 genannt und ist die allgemeingültige Struktur dieses Prozesses analog zu Bild 57 dargestellt. Die Vergleiche der gefundenen Stadien mit entsprechenden Elementen der Aufgabenstellung oder des Ausgangs vorhergehender Phasen dienen der Auswahl von Lösungsvarianten. Wenn kein Vergleich befriedigt, müssen vorhergehende Phasen nochmals durchlaufen werden.

Tabelle 16. Phasen des konstruktiven Entwicklungsprozesses (nach HANSEN [5])

Phase	Tätigkeit	Erreichtes Stadium
	Prozeßeingang: Konstruktionsaufgabe	
1	Präzisieren der Aufgabe	präzisierte Aufgabe
2	Ermitteln der technischen Funktion	technische Funktion
3	Aufstellen von Topologien	Topologie
4	Aufstellen technischer Prinzipien	technisches Prinzip
5	Konkretisieren technischer Prinzipien	konkretisiertes Prinzip
6	Erarbeiten des technischen Entwurfs	technischer Entwurf
7	Erarbeiten der Systembeschreibung	hinreichende Systembeschreibung
	Prozeßausgang: hinreichende Systembeschreibung	

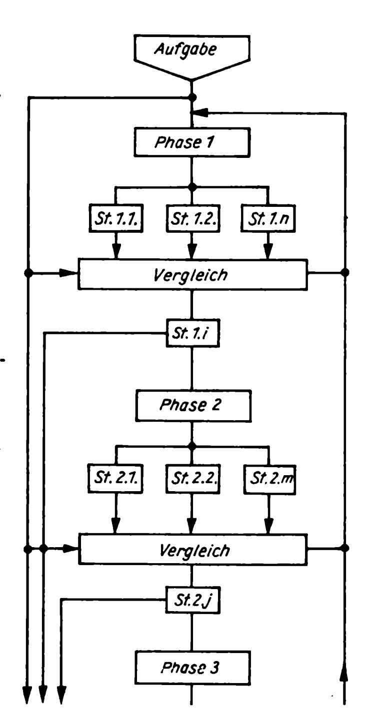


Bild 57. Struktur des konstruktiven Entwicklungsprozesses (*St* Entwicklungsstadium)

Im konstruktiven Entwicklungsprozeß wird einerseits mit mathematischen Modellen operiert, mit deren Hilfe die Eigenschaften der gewünschten Gebilde vorausbestimmt oder ihre Eignung nachgeprüft werden, andererseits endet dieser Prozeß mit der *zeichnerischen Darstellung* der ermittelten Lösung, der Ausgabe von Stücklisten, Montageanleitungen und anderen Fertigungsunterlagen. Für die genannten Gebiete kann der Rechenautomat dem Konstrukteur wesentliche Hilfe bieten.

Die Berechnung der Maschinenelemente, Konstruktionsgruppen bzw. kompletten Apparate (wie z. B. Schraubenfeder, Hebel, Getriebe, Druckbehälter) entspricht im Prinzip den wissenschaftlich-technischen Berechnungen. Für Berechnungen dieser Art mit Hilfe von Rechenautomaten gibt es zahlreiche Beispiele [4]. Diese Rechnungen sind ein wesentlicher Teil der rechnergestützten Konstruktion. Mit Hilfe der verschiedenen grafischen Ein- und Ausgabegeräte (Bildschirm mit Lichtgriffel, Zeichengeräte) kann der

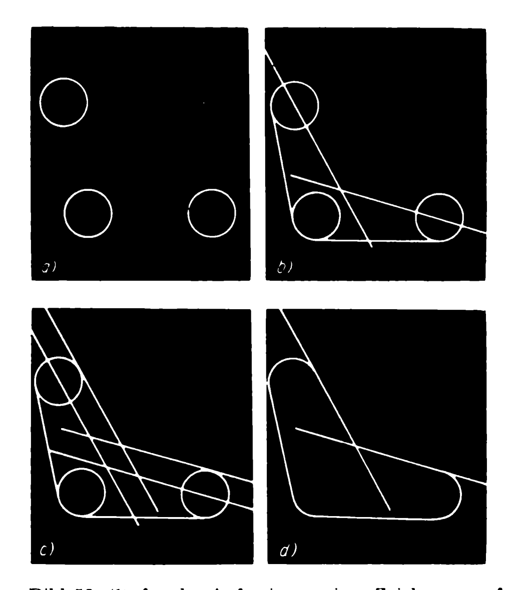


Bild 58. Stufen der Anfertigung einer Zeichnung auf dem Bildschirm. a) Die Kreise werden dargestellt, indem ihre Zentren und Radien exakt über eine Tastatur eingegeben werden. b) Mit Hilfe des Lichtgriffels werden die beiden Tangenten und zwei Geraden im definierten Winkel durch zwei Kreismittelpunkte gezeichnet. c) Nun werden die Tangenten parallel zu den Geraden eingetragen. d) Die unnötigen Linien werden gelöscht.

Rechner auch wesentliche Hilfe bei der zeichnerischen Darstellung der jeweiligen Ergebnisse leisten. Wenn ein Rechenautomat über Bildschirm, Lichtgriffel und entsprechende Programme verfügt, so ist er in der Lage, die *Kommunikation mit dem Konstrukteur* in der diesem gewohnten Sprache („mit Papier und Bleistift") zu führen. Ein Zeichensystem dieser Art unterscheidet sich allerdings sehr stark vom traditionellen Zeichnen mit Papier und Bleistift, denn zwischen den Lichtgriffel und die Bildröhre ist ein Rechenautomat mit all seinen Fähigkeiten geschaltet, der bei Bedarf helfend eingreifen kann. Mit dieser Kombination kann man gleichzeitig zeichnen und rechnen. Bild 58 zeigt die Anfertigung einer Zeichnung in vier Etappen. Eine Darstellung auf dem Bildschirm ist keine Unterlage für die Fertigung des Teils. Deshalb wurden Möglichkeiten geschaffen, die mit Hilfe des Rechners entworfenen Teile auf automatisch gesteuerten Zeichenmaschinen zu zeichnen oder sie direkt in Form eines Lochstreifens zur Führung numerisch gesteuerter Werkzeugmaschinen auszugeben.
Rechenautomaten wurden schon eingesetzt von den ersten Entwurfsarbeiten über die Etappen Konstruktion, Herstellung von Zeichnungen und Schablonen, Vorrichtungsbau, Fertigung der Einzelteile und Baugruppen bis zur Endmontage. Werden alle diese Arbeiten mit Unterstützung eines Rechenautomaten durchgeführt, so ist das Gesamtsystem sehr leistungsfähig und flexibel. Der Rechenautomat verfügt immer über aktuelle Daten und teilt diese allen erforderlichen Stellen mit. Das vereinfacht den bisher erforderlichen, nicht immer funktionstüchtigen und häufig zu langsamen Änderungsdienst, schafft maßgerechte Teile und senkt den Aufwand für Nacharbeit und Montage. Auf der anderen Seite ist jedoch



ein hoher geräte- und programmtechnischer Aufwand erforderlich. Dafür wurden in der DDR das Einheitssystem AUTEVO und in der SU das Einheitssystem AWTOPRIS geschaffen. Bild 59 [4] zeigt einen Überblick über die Elemente des Arbeitsablaufs, bei denen ein Rechenautomat bei der Konstruktion von Mehrspindelbohrköpfen eingesetzt worden ist.

Bild 59. Rechnergestütztes Konstruieren von Mehrspindelbohrköpfen (nach [4])

Einzelne Phasen oder Teilprozesse des konstruktiven Entwicklungsprozesses sind heute schon formalisierbar und somit auf den Rechner übertragbar und mit seiner Hilfe ökonomisch lösbar. Der konstruktive Entwicklungsprozeß als Ganzes bedarf aber gegenwärtig und in nächster Zukunft noch an vielen Stellen der Ideen, der Leitung, Kontrolle und Entscheidung des Menschen.

4.5. Überwachung und Steuerung von Produktionsprozessen

Bei der Überwachung und Steuerung von Produktionsprozessen ist eine Vielzahl von Informationen aufzunehmen, zu übertragen, zu speichern, zu verarbeiten und auszugeben. Der Umfang der anfallenden Aufgaben übersteigt bei vielen Produktionsprozessen die Leistungsfähigkeit des Bedienungspersonals dieser Anlagen, zu dessen Entlastung Geräte der Betriebs-

meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik eingesetzt werden. Diese Aufgaben können ganz oder teilweise Rechenautomaten übertragen werden; man spricht von *Fertigungssteuerung*, wenn Rechenautomaten Prozesse der Stückgutfertigung steuern, von *Prozeßsteuerung*, wenn andere Produktionsprozesse von Rechenautomaten gesteuert werden. Dafür sind einerseits besondere Ein- und Ausgabegeräte (Eingabe und Umwandlung von Meßstellensignalen und Ausgabe von Steuerungssignalen) und andererseits besondere Rechenautomaten (Prozeßrechner), die im Echtzeitbetrieb arbeiten können, erforderlich. Die Prozeßrechner können „konventionelle" Prozeßrechner oder Mikroprozessoren bzw. Mikrorechner sein. In diesem Abschnitt werden diejenigen Aufgaben behandelt, bei denen der Rechner zwar mit dem Objekt gekoppelt ist, aber nicht im Sinne einer vollständigen Integration in die Baugruppen des Objektes einbezogen ist, wie z. B. bei der numerischen Steuerung von Werkzeugmaschinen oder Haushaltsmaschinen durch Mikroprozessoren. Beim Prozeßrechnereinsatz tritt die Zeit als neue Größe in die Programmierung ein, da ein Prozeßrechner zu bestimmten Zeiten Arbeiten unterschiedlicher Dringlichkeit auszuführen hat. So ist z. B. die Abfrage der Meßstellen und ihre Alarmüberwachung, wenn die Zeit dafür heran ist, dringender als eine gerade laufende und längere Zeit dauernde Optimierungsrechnung. Deshalb sind der Aufbau verschiedener *Zeitzyklen* (z. B. Abfragezyklus, Mitteilungszyklus) und *Möglichkeiten zur Programmunterbrechung*, zum Einfügen dringender Programmteile und anschließender Fortsetzung des unterbrochenen Programms erforderlich. Diese Probleme machen die Echtzeitprogrammierung kompliziert und aufwendig.

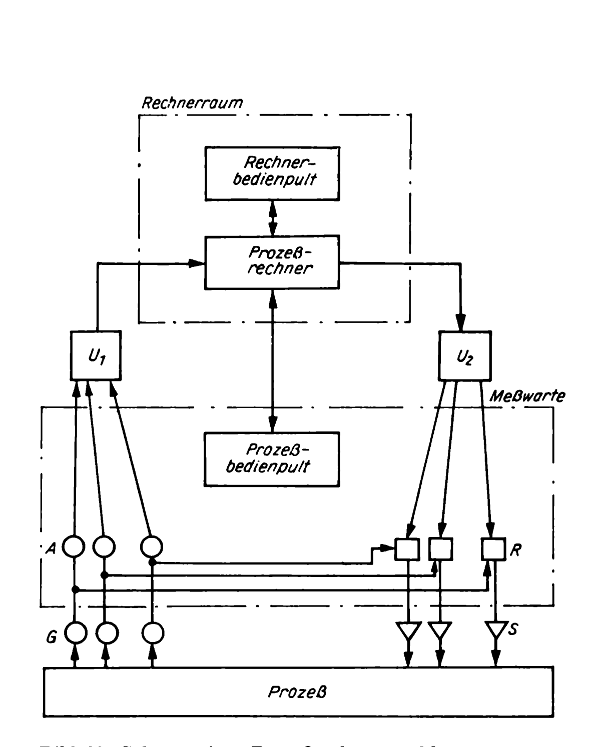


Bild 60. Schema eines Prozeßrechneranschlusses. U_1 Meßstellenumschalter; U_2 Stellgliedumschalter; G Meßwertgeber; A Anzeigegerät; R Regler; S Stellglied

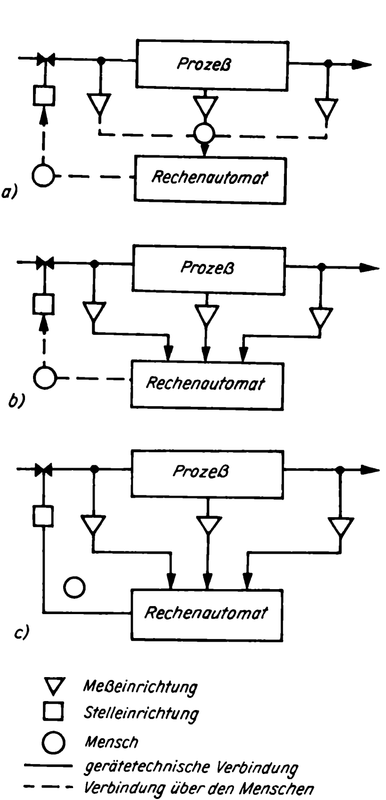


Bild 61. Arten der Kopplung von Rechner und Prozeß. a) Rechner außerhalb der Steuerungskette; b) Rechner in der Steuerungskette (offener Kreis); c) geschlossener Kreis



4.5.1. Kopplung Prozeßrechner—Produktionsprozeß

Zur Erfüllung seiner Aufgaben — der Verarbeitung von Produktionsdaten im Echtzeitbetrieb — benötigt der Prozeßrechner Kanäle zur Informationsübertragung zwischen Prozeßrechner und Prozeß. Die allgemeine Struktur für den *Prozeßrechneranschluß* ist in Bild 60 dargestellt. In Produktionsprozessen sind zahlreiche Meßstellen und Stellglieder vorhanden und parallel angeordnet, sie sind also ständig in Funktion. Durch die Umschalter U_1 und U_2 wird diese parallele Informationsverarbeitung in eine serielle Informationsverarbeitung umgewandelt. Der Rechner fragt nacheinander alle Meßstellen ab, verarbeitet die Informationen und kann nacheinander die Stellglieder beeinflussen. Da Rechenautomaten sehr schnell sind (z. B. können einige hundert Meßstellen je Sekunde abgefragt und die Informationen verarbeitet werden), hat der Beobachter bzw. Nutzer den Eindruck der parallelen Verarbeitung. Der Prozeßrechner bietet aber gegenüber den einfacheren Meß- und Regelgeräten den Vorteil, komplizierte Algorithmen verarbeiten zu können.

Grundsätzlich könnte auch ein Rechner, der nicht direkt mit dem Prozeß gekoppelt ist — also außerhalb der Steuerungskette steht —, Prozeßdaten verarbeiten (Bild 61a), aber die Meßwerte sind dann nicht zeitecht (Tabelle 17). Werden die Meßstellen über direkte gerätetechnische Verbindungen mit dem Rechner gekoppelt, so spricht man vom *offenen Kreis*, werden auch die Stelleinrichtungen direkt vom Rechner beeinflußt, so spricht man vom *geschlossenen Kreis*. Diese Anschlußvarianten sind in Bild 61 und Tabelle 16 miteinander verglichen.

Tabelle 17. Vergleich der Varianten für die Verbindung von Prozeß- und Rechenautomat

	Rechner nicht mit dem Prozeß gekoppelt (off-line)	Rechner direkt mit dem Prozeß gekoppelt (on-line)	
		offener Kreis	geschlossener Kreis
Eingabe von Meßwerten	a) Werte werden manuell vom Anzeigegerät protokolliert und nachträglich auf maschinenlesbare Datenträger gebracht oder von Hand eingetastet b) automatische Eingabe maschinenlesbarer Datenträger	Werte werden direkt von der Meßeinrichtung in den Rechner gegeben. Außerdem Anzeige und Registrierung in der Meßwarte möglich	Werte werden direkt von der Meßeinrichtung in den Rechner gegeben. Außerdem Anzeige und Registrierung in der Meßwarte möglich
Ausgabe von Protokollen und Steuerinformationen	Protokolle und Steuerinformationen sind nicht zeitecht. Zeitverlust bei a) größer als bei b)	Protokolle und Steuerinformationen werden zeitecht auf Schreibmaschine ausgegeben	Protokolle sind zeitecht. Steuerinformationen werden zeitecht direkt vom Rechner auf die Stellorgane gegeben
Einsatzmöglichkeiten	Prozeßanalyse, Modellierung, Optimierung stationär laufender Prozesse in großen Zeitabständen in Rechenzentren	Meßwertverarbeitung, Prozeßüberwachung, Bilanzierung, Optimierung, Anlagenpersonal ist vom Schreiben der Protokolle befreit und kann Steuerinformationen nach kritischer Beurteilung zur Prozeßführung nutzen	*zusätzlich zum offenen Kreis:* Stabilisierung und Sicherung des Prozeßverlaufs, Übernahme von Reglerfunktionen, Optimierung der Übergangszustände *Voraussetzung:* extrem hohe Zuverlässigkeit des Rechnersystems und der BMSR-Technik, trotzdem Notausrüstung für den Ausfall

4.5.2. Aufgaben eines Prozeßrechners

Die Aufgaben eines Informationssystems zur Überwachung, Steuerung und Leitung eines Produktionsprozesses kann man in die im Bild 62 gezeigten Gruppen von der Gewährleistung der Sicherheit des Prozesses bis zur Leitung einteilen. Die entsprechenden Ziele dieser Aufgaben erstrecken sich von der Regelung der Systemgrößen bis zur Ermittlung des Gesamtoptimums für die Führung der Anlage. In diesem Bild sind gleichzeitig drei Merkmale des benötigten Informationssystems qualitativ dargestellt. Die Sicherheit muß ständig gewährleistet sein, der Umfang der Informationsverarbeitung ist jedoch relativ gering. Die Ermittlung des Gesamtoptimums muß nicht unbedingt zu einem bestimmten Zeitpunkt und nicht ständig geschehen, d. h., erforderliche Verfügbarkeit und Frequenz der Verarbeitung können kleiner sein. Dafür

Aufgabe	Ziel	Erforderliche Verfügbarkeit	Frequenz	Umfang
			der Verarbeitung	
Leitung	Gesamtoptimum			
Planung	Abstimmung im größeren System			
Optimierung	Ermittlung günstigster Sollwerte			
Abrechnung	Kostenrechnung			
Überwachung	Vorhersage von Ausfällen			
Nachträgliche Situationsanalyse	Klärung von Störungen			
Steuerung Stabilisierung	Regelung des Systemzustands			
Sicherheit	Regelung der Systemgrößen			

Bild 62. Aufgaben eines Informationssystems zur Prozeßüberwachung und -steuerung

fällt aber ein größerer Umfang an Informationen an, die zu verarbeiten sind, und auch die Algorithmen sind komplizierter. Schon aus diesen wenigen Aussagen läßt sich ableiten, daß für Prozesse mit entsprechenden Aufgaben der Informationsverarbeitung die günstigste Struktur des Informationssystems durch eine gewisse prozeßnahe Meß- und Regelungstechnik (zur Gewährleistung der Sicherheit und der Stabilisierung) und einen übergeordneten Prozeßrechner gegeben ist.

Die bisher durch Prozeßrechner realisierten Aufgaben werden üblicherweise in zwei Gruppen geteilt:

Aufgaben der ersten Einsatzebene
- Meßwertaufbereitung,
- Grenzwertkontrolle,
- Tendenzüberwachung,
- Bilanzrechnung,
- Kenngrößenberechnung,
- einfache Algorithmen zur direkten digitalen Regelung,

Aufgaben der zweiten Einsatzebene
- kompliziertere Algorithmen zur direkten digitalen Regelung,
- Modellrechnungen,
- optimierende Prozeßsteuerung,
- Ablaufsteuerung.



Die Aufgaben der *ersten Einsatzebene* — mit Ausnahme der direkten digitalen Regelung — sind praktisch ein zusammenhängender Komplex, der bei jedem Prozeßrechnereinsatz verwirklicht wird. Von der Abfrage der Meßstellen in festen oder von Programmen gesteuerten Zyklen ausgehend, werden die dimensionsbehafteten Meßwerte aus den ankommenden Signalen berechnet, auf Richtigkeit und auf Einhaltung bestimmter Grenzwerte kontrolliert. Die sich meist anschließende *Tendenzüberwachung* ermittelt und kontrolliert die zeitliche Veränderung der Werte. *Bilanzrechnungen* erlauben es, die Güte der Meßtechnik zu kontrollieren und Hinweise auf mögliche Fehlerstellen zu geben. Kleinere Abweichungen können durch einen Bilanzausgleich rechnerisch beseitigt werden. Die *Kennwertermittlung* und *-ausgabe* kann die Führung der Anlage und die Auswertung der Betriebsprotokolle wesentlich verbessern.
Die Aufgaben der *zweiten Einsatzebene* erfordern eine umfangreiche Prozeßanalyse und ein daraus abgeleitetes mathematisches Modell des Prozesses. Sie setzen ein funktionsfähiges Meßwerterfassungs- und -verarbeitungsprogramm voraus. Deshalb werden sie auch im gleichen Prozeßrechnereinsatzfall immer erst nach den Aufgaben der ersten Einsatzebene realisiert.
Bei der direkten digitalen Regelung übernimmt der Prozeßrechner die Aufgaben der sonst vorhandenen konventionellen Regler. Wenn nur deren PID-Verhalten nachgebildet wird, spricht man vom *einfachen Regelalgorithmus*. Ein frei programmierbarer digitaler Prozeßrechner bietet jedoch darüber hinaus auch die Möglichkeit, nahezu beliebig komplizierte lineare und nichtlineare Verknüpfungen zu realisieren. Die *direkte digitale Regelung* bietet folgende Vorteile:

— ideale Entkopplung der Einstellparameter für jeden Regelkreis (vor allem günstig bei stark vermaschten und konventionell schwer zu regelnden Anlagen).
— Die Regelungsparameter können automatisch variiert werden, z. B. wenn sich die Dynamik in Abhängigkeit vom Systemzustand ändert.
— Es sind größere Einstellbereiche der Parameter möglich.
— Die direkte digitale Regelung ist sehr anpassungs- und erweiterungsfähig, sie kann leicht mit einem Rechner zur optimierenden Prozeßsteuerung gekoppelt werden.

Wegen der für die großtechnischen Anlagen erforderlichen Sicherheit muß die *Zuverlässigkeit eines Prozeßrechners* für diesen Zweck extrem hoch sein (etwa 99,95%), und trotzdem müssen noch Sicherheitsvorkehrungen für den Fall des Rechnerausfalls getroffen werden. Dazu kann entweder ein zweites Rechnersystem vorgesehen oder mit herangezogen werden, oder es müssen für die wichtigsten Regelkreise (nach verschiedenen Schätzungen etwa 20···30% aller sonst vorhandenen) Ersatzregelungen vorgesehen und die anderen Größen konstant gehalten werden. Die Sicherheitsforderungen beeinflussen die Wirtschaftlichkeit sehr stark. Bei komplizierten Objekten und komplizierten Regelalgorithmen kann die direkte digitale Regelung jedoch die günstigste Lösung sein. In vielen Fällen bietet sich die Kopplung mit dem Rechnereinsatz für andere Zwecke an.
Modellrechnungen und *Optimierungsrechnungen* unterstützen die Leitung einer Produktionsanlage ganz wesentlich. Bei den Modellrechnungen sagt das mathematische Modell für gewählte Werte der Eingangsgrößen die zu erwartenden Werte der Ausgangsgrößen voraus. Bei den Optimierungsrechnungen werden bestimmte Werte für die Ausgangsgrößen vorgegeben, und ein Optimierungsalgorithmus ermittelt mit Hilfe des Modells die besten Werte der Eingangsgrößen zur Erreichung des Ziels. Dabei sind das Zielkriterium, die Zielgröße, zu definieren (z. B. minimale Kosten, maximale Produktionsmenge) und die Nebenbedingungen anzugeben. In diesen beiden Anwendungsfällen muß ein Nachführungsalgorithmus für die Parameter des mathematischen Modells vorhanden sein [13, 30].
Für die *Ablaufsteuerung* mit Hilfe eines Prozeßrechners können sich bei den An- und Abfahrvorgängen großer kontinuierlicher Prozesse mit hohem Verknüpfungsgrad und beim Betrieb komplizierter Chargenprozesse geeignete Aufgaben ergeben. In beiden Fällen besteht der jeweilige Vorgang aus einer Reihe zeitlich aufeinanderfolgender Phasen, von denen sich jede wieder aus einer Reihe von Schritten aufbaut. Die Einleitung eines bestimmten Schritts hängt von der Zeit und der Erfüllung bestimmter, zahlreicher und schwer überschaubarer Bedingungen ab. Bei hinreichend großen und komplizierten Prozessen ist hier der Prozeßrechner den konventionellen Geräten für Ablaufsteuerungen und auch dem Bedienungspersonal überlegen.

Bei allen genannten Aufgaben hat ein Prozeßrechner zu fest vorgegebenen Zeiten und bei definierten inneren und äußeren Bedingungen verschiedene Programme unterschiedlicher Dringlichkeit zu realisieren. Zusätzlich zur Benutzung eines Rechenautomaten für wissenschaftlich-technische Berechnungen treten für die Programmierung eines Prozeßrechners die Zeit und die Prioritäten der Programme auf. Aus diesem Grunde ist die Programmierung von Prozeßrechnern sehr kompliziert. Die Rechnerhersteller bieten für Standardaufgaben der Meßwerterfassung und -verarbeitung Programme und verschiedene Programmierungshilfen an [10, 36, 40].

4.5.3. Einsatzvorbereitung und -realisierung

Der Einsatz eines Prozeßrechners ist ein in bezug auf die damit verbundenen Arbeitsgebiete und die dafür erforderlichen Fachleute sehr komplexes Vorhaben. Die richtige Auswahl der für die Prozeßsteuerung geeigneten Objekte und die intensive Einsatzvorbereitung und -realisierung bestimmen den zu erzielenden Nutzen.

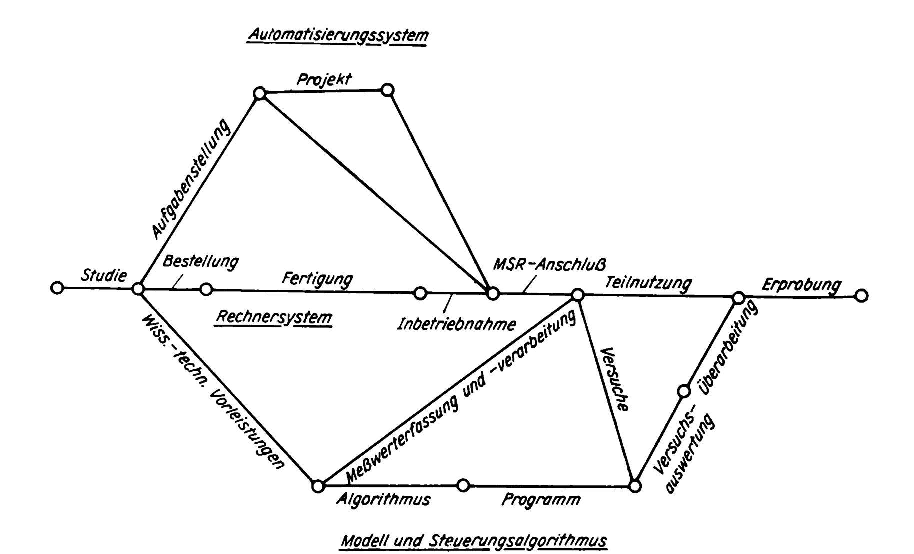


Bild 63. Netzplan Prozeßrechner-Einsatzvorbereitung

Tabelle 18. Mittlerer Aufwand bei der Einsatzvorbereitung

Etappe	Bearbeitungsdauer (Monate)	Bearbeitungsaufwand (Arbeitskraft × Jahre)	Mittlere Größe des Einsatzkollektivs
Studie	6	1,5	3
Aufgabenstellung für das Automatisierungssystem	9	1,5	2
Projektierung und Realisierung des Automatisierungssystems	16	—	—
Wissenschaftlich-technische Vorleistungen	14	4,5	4
Meßwerterfassung	13	2,5	2,5
Modell und Steuerungsalgorithmus, Versuchsauswertung und Überarbeitung	25	7	3,5

Bild 63 zeigt einen sehr stark vereinfachten Netzplan für die wichtigsten *Etappen der Einsatzvorbereitung* von der Präzisierung der Aufgabenstellung in der Studie bis zur komplexen Erprobung des angeschlossenen Rechnersystems und aller Algorithmen und Programme. Aus einer Reihe von Einsatzfällen kann für die wesentlichen Etappen der in Tabelle 18 zusammengestellte mittlere Aufwand angegeben werden. Bei der Beurteilung dieses hohen Zeitaufwands ist zu bedenken, daß es sich um Ersteinsatzfälle handelt und demzufolge kaum Erfahrungen oder methodische Unterlagen vorhanden waren, daß komplizierte Modelle

und Steuerungsalgorithmen erarbeitet werden mußten und daß die Programmierung sehr kompliziert war, weil keine problemorientierten Echtzeitprogrammiersprachen zur Verfügung standen. Sind diese Voraussetzungen günstiger, so kann die Bearbeitungszeit für das Automatisierungssystem und die Meßwerterfassung um etwa je fünf Monate und für Modell und Steuerungsalgorithmus um etwa zehn Monate gesenkt werden.

Literaturverzeichnis

[1] *Adler, H., Neidhold, G.:* Elektronische Analog- und Hybridrechner. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974
[2] *Autorenkollektiv:* Kleine Enzyklopädie Mathematik. 10. Aufl. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1977
[3] *Bekey, C. A., Karplus, W. J.:* Hybrid-Systeme. — Stuttgart: Verlag Berliner Union GmbH bzw. Stuttgart, Berlin (West), Köln, Mainz: Verlag W. Kohlhammer GmbH 1971
[4] *Claussen, U.:* Konstruieren mit Rechnern. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1971
[5] *Hansen, F.:* Konstruktionswissenschaft. Grundlagen und Methoden. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978
[6] *Feilmeier, M.:* Hybridrechner. — Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1974
[7] *Khambata, A. J.:* Einführung in die Gruppenintegration. — Berlin: VEB Verlag Technik 1971
[8] *Schwarz, W.:* Analogprogrammierung. Theorie und Praxis des Programmierens für Analogrechner. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
[9] Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, Separatdruck ‚Sozialistische Rationalisierung in der Produktionsvorbereitung'. — Dresden 1972

Weiterführende Literatur

[10] *Anke, K., Kaltenecker, H., Oetker, R.:* Prozeßrechner. Wirkungsweise und Einsatz. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1971
[11] *Autorenkollektiv:* Analyse und Steuerung von Prozessen der Stoffwirtschaft. — Berlin: Akademie-Verlag 1971 und Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1971
[12] *Autorenkollektiv:* Datenauswertung für statische Prozeßmodelle. Schriftenreihe Datenverarbeitung. — Berlin: VEB Verlag Die Wirtschaft 1974
[13] *Autorenkollektiv:* Programmierung und Nutzung von Rechenanlagen. 6 Teile. — Berlin: VEB Verlag Die Wirtschaft 1974
[14] *Bachmann, K.-H.:* ALGOL-Programmierung mit Variante für ROBOTRON 300. 5. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
[15] *Berghoff, W.*, u. a.: Automatisierung und Prozeßrechner. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976
[16] *Biener, K., Suschke, E.:* Praxis des analogen Rechnens. Reihe Automatisierungstechnik, Band 91. — Berlin: VEB Verlag Technik 1970
[17] *Böhme, L.:* Periphere Geräte der digitalen Datenverarbeitung. Reihe Automatisierungstechnik, Band 70. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1973
[18] *Elzner, G.:* Mittel und Methoden der Datensicherung in der elektronischen Datenverarbeitung. Datenverarbeitung. Reihe Automatisierungstechnik, Band 132. — Berlin: VEB Verlag Technik 1972
[19] *Giloi, W., Lauber, R.:* Analogrechnen. 2. Aufl. — Berlin (West), Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1969
[20] *Glaser, W., Kohl, G.:* Mikroelektronik. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973
[21] *Grund, F.:* FORTRAN-IV-Programmierung. 3. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972
[22] *Grund, F., Issel, W.:* PL/I-Programmierung. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975
[23] *Hartmann, K., Schäfer, W., Lezki, E.:* Statistische Versuchsplanung und -auswertung in der Stoffwirtschaft. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1974
[24] *Hartwig, R.:* Eine mathematische Sprache zur Programmierung von Analog- und Hybridrechnern. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1974
[25] *Hohberg, B., Paulin, G.:* Compilertechnik. — Berlin: VEB Verlag Technik 1976
[26] *Kämmerer, W.:* Digitale Automaten. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1974
[27] *Kafarow, W., Dorochow, I.:* Systemanalyse von Prozessen der chemischen Technologie. — Moskau: Verlag Nauka 1976

[28] *Kalex, E., Mann, D.:* Wirkungsweise, Programmierung und Anwendung von Analogrechnern. Schriftenreihe Datenverarbeitung. — Berlin: VEB Verlag Die Wirtschaft 1966
[29] *Kanton, D.:* Mikroprozessorsysteme in der Automatisierungstechnik. Reihe Automatisierungstechnik, Band 183. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978
[30] *Kaplick, K., Lorenz, G.:* Verfahrenstechnik — Experimentelle Verfahren zur Prozeßanalyse. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973
[31] *Kerner, I.:* Bericht über die algorithmische Sprache ALGOL 68. — Berlin: Akademie-Verlag 1972
[32] *Kerner, I., Grützner, R.:* Praxis der ALGOL-Programmierung. Reihe Automatisierungstechnik, Band 67. 3. Auflage. — Berlin: VEB Verlag Technik 1972
[33] *Kerner, I., Zielke, G.:* Einführung in die algorithmische Sprache ALGOL. 4. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970
[34] *Klaus, G., Buhr, M.:* Philosophisches Wörterbuch. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1974
[35] *Korn, G. A., Korn, Th. M.:* Elektronische Analogierechenmaschinen. — Berlin: VEB Verlag Technik 1962
[36] *Kussl, V.:* Technik der Prozeßdatenverarbeitung. — Berlin: VEB Verlag Technik 1974
[37] *Löbel, G.*, u. a.: Lexikon der Datenverarbeitung. — München: Verlag Moderne Industrie 1972/73
[38] *Mierau, W., Lindner, S.:* Technik der Mikrorechner. radio fernsehen elektronik **26** (1977) 17, S. 557 bis 558 (Beginn einer Fortsetzungsreihe)
[39] *Naur, P.:* Bericht über die algorithmische Sprache ALGOL 60. — Berlin: Akademie-Verlag 1962
[40] *Pankalla, H.:* Aufbau und Einsatz von Prozeßrechenanlagen. Reihe Automatisierungstechnik, Band 68. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1973
[41] *Paulin, G.:* Grundlagen der Programmiertechnik. — Berlin: VEB Verlag Technik 1975
[42] *Pietzsch, S., Hülm, C.:* Datenverarbeitung in der Industrie. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973
[43] *Ranft, J.:* FORTRAN-Programmierung und numerische Methoden für Naturwissenschaft und Technik. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972
[44] *Scheffler, E.:* Einführung in die Praxis der statistischen Versuchsplanung. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1974
[45] *Schiller, W.:* Programmiersprache PL/1. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1973
[46] *Schoch, H., Schatz, W.:* Programmierung in FORTRAN. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1971
[47] *Schoch, H.:* Programmierung in PL/I. 3. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976
[48] *Schöne, A.:* Simulation technischer Systeme, Sammelwerk in drei Bänden. — München, Wien: Carl Hanser Verlag 1976
[49] *Schwerdtner, H.:* Anwendungseigenschaften von Mikroprozessoren. radio fernsehen elektronik **26** (1977) 10, S. 324—327
[50] *Smers, H.:* Datenerfassung. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972
[51] *Steinbuch, K.*: Taschenbuch der Nachrichtenverarbeitung. 2. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1967
[52] *Stiller, G.:* ALGOL 68 — Begriffe und Ausdrucksmittel. — Leipzig BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1974
[53] *Sydow, A.:* Elektronisches Hybridrechnen. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 113. — Berlin: VEB Verlag Technik 1971
[54] *Sydow, A.:* Programmierungstechnik für elektronische Analogrechner. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1974
[55] *Autorenkollektiv:* Programmierung von Mikroprozessoren. Reihe Automatisierungstechnik, Band 182. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978
[56] *Jugel, A.:* Mikroprozessorsysteme. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[57] *Kreul, H.:* Was kann mein elektronischer Taschenrechner? 4. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[58] *Adler, H., Jenke, H.:* Einführung in die Programmierung von digitalen Rechenanlagen. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1978
[59] *Frank, M., Lorenz, P.:* Simulation diskreter Prozesse. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[60] *Kreul, H.:* Programmierbare Taschenrechner. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982
[61] *Schwarz, W., Meyer, G., Eckhardt, D.:* Mikrorechner. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980

Ph Physik

Von Stud.-Dir. Helmut Lindner †, Mittweida

Inhaltsverzeichnis

Wichtigste Formelzeichen[1])

Akustik[2])

Formelzeichen	Einheit	Größe
A	m²	Fläche
a^1	Hz	Normalstimmton, 440 Hz
c, c_S	m/s	Schallgeschwindigkeit
E	Pa, MPa	Elastizitätsmodul
E	J/m³	Schallenergiedichte
f	Hz	Frequenz
G	Pa, MPa	Schubmodul
J	W/m²	Schallintensität
L_p	dB	Schalldruckpegel
P	W	Schalleistung
p	Pa	Schalldruck
p	Pa	Gasdruck
R	dB	Schalldämm-Maß
v	m/s	Schallschnelle
W	N · m, J	kinetische Energie, Schallenergie
y	m	Amplitude
α	—	Schallabsorptionsgrad
$\varkappa$	—	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten c_p/c_v
λ	m	Wellenlänge
μ	—	POISSON-Zahl
ϱ	kg/m³	Dichte
ω	1/s	Kreisfrequenz

Optik[3])

Formelzeichen	Einheit	Größe
A	—	numerische Apertur
a	m	Objektweite
a'	m	Bildweite
c_0	m/s, km/s	Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
D	1/m (= dpt)	Brechkraft
d	m	Apertur
E	lx	Beleuchtungsstärke
F, F'	—	Brennpunkt
f	m	Brennweite
H, H'	—	Hauptpunkt oder Hauptebene
I	cd	Lichtstärke
K, K'	—	Knotenpunkt
L	cd/m²	Leuchtdichte
n	—	Brechzahl
n_0	—	absolute Brechzahl
r	m	Krümmungsradius von Linsen
s	m	Objektweite
s'	m	Bildweite
y	m	Objektgröße
y'	m	Bildgröße
z	m	Brennpunktentfernung
α	rad, °	Einfallswinkel
β	rad, °	Brechungswinkel
Γ'	—	Vergrößerung eines optischen Instruments
ε	rad, °	kleinster auflösender Winkel
λ	m, nm	Wellenlänge
Φ	lm	Lichtstrom
Ω	sr	Raumwinkel

Quanten- und Atomphysik

Formelzeichen	Einheit	Größe
A	—	Massenzahl, Zahl der Nukleonen
A_r	—	relative Atommasse
c	m/s, km/s	Lichtgeschwindigkeit
d	m	Durchmesser, Dicke
$d_{1/2}$	m	Halbwertsdicke
e	C	Elementarladung $= 1{,}602189 \cdot 10^{-19}$ C
f	Hz	Frequenz
h	J · s	PLANCKsches Wirkungsquantum $= 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ J · s
$\hbar$	J · s	Drehimpulsquantum $= 1{,}05459 \cdot 10^{-34}$ J · s
l	—	Nebenquantenzahl
M	kg/kmol	molare Masse
M_r	—	relative Molekülmasse
m	kg	Masse
m	—	Magnetquantenzahl
m_e	kg	Ruhmasse des Elektrons $= 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ kg
N	—	Anzahl der Neutronen
N_A	1/kmol	AVOGADROsche Konstante $= 6{,}0220 \cdot 10^{26}$ 1/kmol
n	mol	Stoffmenge
n	—	Hauptquantenzahl
p	N · s	Impuls
R_H	Hz	RYDBERG-Frequenz des Wasserstoffs
R_∞	1/m	RYDBERG-Konstante für unendlich große Kernmasse
r	m	Atomradius
s	—	Spinquantenzahl
U	V	Spannung
V_m	m³/kmol	molares Volumen
v	m/s	Geschwindigkeit
W, E	J, eV	Energie
W_e, E_0	J, eV	Austrittsarbeit
Z	—	Ordnungszahl, Zahl der Protonen
Δ	—	LAPLACE-Operator
ϑ	rad, °	Streuwinkel
λ_C	m	COMPTON-Wellenlänge
λ_{gr}	m	Grenzwellenlänge
μ	1/m	linearer Schwächungskoeffizient
ϱ	kg/m³	Dichte
Ψ	—	Wellenfunktion
ψ	—	Amplitudenfunktion

Kernphysik

Formelzeichen	Einheit	Größe
A	Bq	Aktivität
A	—	Massenzahl, Zahl der Nukleonen
A_r	—	relative Atommasse
D	Gy	Energiedosis
D_q	J/kg	Äquivalentdosis

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
$d_{1/2}$	m, mm	Halbwertsdicke	$\bar{v}$	m/s	mittlere Neutronengeschwindigkeit
e	C	Elementarladung $= 1{,}602189 \cdot 10^{-19}$ C	W, E	J, eV	Bindungsenergie
h	J · s	PLANCKsches Wirkungsquantum $= 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ J · s	w	J, eV	Bindungsenergie je Nukleon
I	W/m²	Intensität der Strahlung	X	C/kg	Exposition (Ionendosis)
M_r	—	relative Molekülmasse	x	m	Schichtdicke
Δm	kg	Massendefekt	Z	—	Anzahl der Protonen, Ordnungszahl
N	—	Anzahl der Neutronen	λ	1/s	Zerfallskonstante
N	—	Anzahl der Teilchen	μ	1/m	linearer Schwächungskoeffizient
n	1/m³	Neutronendichte	μ_m	m²/kg	Massenabsorptionskoeffizient
P	W	Reaktorleistung	ϱ	kg/m³	Dichte
QF	—	Qualitätsfaktor	ϱ_D	kg/m²	Flächendichte
R	m	Reichweite	σ	m²	Wirkungsquerschnitt
r	m	Kernradius	τ	s, min, h	mittlere Lebensdauer
$T_{1/2}$	s, min, h	Halbwertszeit	Φ_n	1/m² · s	Neutronenfluß
t	s, min, h	Zerfallszeit			
u	kg	atomare Masseeinheit $= 1{,}66053 \cdot 10^{-27}$ kg			

1. Einführung

Die Physik ist die Wissenschaft von den Gesetzmäßigkeiten der *unbelebten* Natur (physis, grch. — Natur), wenn dabei von Veränderungen der stofflichen Beschaffenheit abgesehen wird. Alle mit stofflichen Änderungen verbundenen Vorgänge werden von der Chemie behandelt. Die Gegenstände und Vorgänge in der *belebten* (organischen) Natur zu untersuchen ist i. allg. Aufgabe anderer Wissenschaften, wie der *Biologie, Anthropologie, Physiologie* usw.
Eine absolut scharfe Grenze zwischen der Physik und den übrigen Teilgebieten der Naturwissenschaften kann nicht gezogen werden. So ist die physikalische Chemie ein ausgedehntes und wichtiges Bindeglied zwischen Physik und Chemie, während andere Teilgebiete der Physik (Farbenlehre, Fotometrie, akustische Harmonielehre usw.) z. B. eng mit Physiologie oder Biologie (Biophysik) verbunden sind.
Aufgabe der Physik ist es also, Naturvorgänge und deren wechselseitige Zusammenhänge zu erforschen, von den erkannten Gesetzmäßigkeiten ausgehend neue Gesetze zu finden und deren Gesamtheit in ein möglichst umfassendes und einfaches Schema zu ordnen. Dabei wird allgemein die *mathematische Formulierung* angestrebt, was wiederum zur Entwicklung besonderer und neuer mathematischer Methoden führt.

1.1. Gliederung und Methoden der Physik

Stofflich kann man die Physik in die Hauptgebiete *Mechanik, Akustik, Wärmelehre, Optik* und *Elektrizitätslehre* aufgliedern. Besonders ausgebaute Zweige der Physik sind u. a. *Atom- und Kernphysik, Festkörperphysik, Quantenmechanik, Geophysik* (einschließlich Meteorologie), *Relativitätstheorie* sowie *Astrophysik.*
Infolge des ständig zunehmenden Umfangs aller Teilgebiete können keine scharfen Grenzen gezogen werden. So umfaßt z. B. die Thermodynamik Gebiete der Mechanik, Wärmelehre und physikalischen Chemie, während die Atomphysik eng mit der Optik, Elektrodynamik und Chemie verbunden ist.

Obwohl Experiment und theoretische Behandlung eine untrennbare Einheit bilden, unterscheidet man nach den Arbeitsmethoden folgende Disziplinen:

— Die *Experimentalphysik* beobachtet und deutet die Gesetzmäßigkeiten auf der Grundlage des Experiments, liefert die Grundlagen der theoretischen Physik und entscheidet darüber, inwieweit die Aussagen der Theorie richtig sind.
— Die *theoretische Physik* faßt die experimentell beobachteten Gesetzmäßigkeiten mathematisch zusammen und stellt sich insbesondere die Aufgabe, die Gesetze aufeinander zurückzuführen. Sie liefert die theoretischen Grundlagen für die Experimentalphysik und versucht, auf dem Wege theoretischer Untersuchungen zu neuen Erkenntnissen zu gelangen.

Betrachtet man die Physik in ihrer Stellung zur Praxis (Technik), so läßt sie sich unterteilen in den Zweig der Physik, der *Grundlagenforschung* betreibt, ohne daß nach der sofortigen praktischen Verwertbarkeit der Ergebnisse gefragt wird, und in die *angewandte* (*technische*) *Physik*, die besonders für Technik und Gesellschaft bedeutsame Probleme untersucht. Die Physik ist also eine wichtige Grundlage der Technik. Vielfach erhält sie von der Technik spezielle Forschungsaufgaben. Beide Richtungen arbeiten sowohl mit den Mitteln der Experimentalphysik als auch der theoretischen Physik.

1.2. Vorbemerkungen zum Abschnitt Physik

Das „Grundwissen des Ingenieurs" ist so aufgebaut, daß die TECHNISCHE MECHANIK, die TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE sowie die TECHNISCHE THERMODYNAMIK als gesonderte, in sich abgeschlossene Abschnitte erscheinen. Weiterhin werden die Grundlagen der Elektrizitätslehre und des Magnetismus im Abschnitt ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK behandelt. Daraus ergibt sich, daß diese Gebiete, obwohl sie ihrer Natur nach zum großen Teil Bestandteile der Physik sind, im Abschnitt PHYSIK nicht enthalten sind. Man beachte daher die Verweise an den entsprechenden Stellen. Hinweise auf die Anwendung physikalischer Größen, Symbole und Einheiten werden im Abschnitt GRÖSSEN UND EINHEITEN gegeben.

2. Akustik

Literatur: [4, 6, 9, 14, 15, 17, 20, 24, 25, 32, 34, 42, 44]

2.1. Wesen und Arten des Schalls

Unter *Schall* versteht man im allgemeinen alle Wellenvorgänge in elastischen Medien, denn die Schallwellen breiten sich nicht nur in der Luft, sondern auch in Flüssigkeiten und festen Körpern aus. Den von Schallwellen durchfluteten Raum nennt man *Schallfeld.* Schallwellen werden von auf natürliche Weise schwingenden Körpern oder eigens dazu konstruierten Geräten erzeugt.
Die *Akustik* (Lehre vom Schall) beschäftigt sich daher nicht nur mit dem Schallfeld selbst, sondern auch mit den einzelnen Schallerzeugern und darüber hinaus mit den spezifischen Wirkungen des Schalls auf den Menschen. Die Wirkungen des Schalls auf das menschliche Nervensystem sowie die besonderen ästhetischen Wirkungen (Harmonielehre) werden von der *physiologischen Akustik* behandelt.
Man unterscheidet:

— *Hörschall:* hörbarer Frequenzbereich von 20···20000 Hz,
— *Infraschall:* unterhalb von 20 Hz (seismische Wellen, Boden- und Gebäudeschwingungen usw.),
— *Ultraschall:* von 20000 Hz bis etwa 10^{10} Hz.

Für den Zusammenhang zwischen Frequenz f, Wellenlänge λ und Ausbreitungsgeschwindigkeit c gilt:

$$f\lambda = c \qquad (1)$$

Besonders bequem meßbar ist die Frequenz mit Hilfe von Stimmgabeln oder elektro-akustischen Frequenzmessern.

Normstimmton $a^1 = 440$ Hz (früher Wiener Kammerton $a^1 = 435$ Hz).

2.2. Schallerzeuger

Als Schallerzeuger können alle in Schwingung versetzten Körper dienen. Man unterscheidet mechanische, elektromagnetische und elektrodynamische sowie piezoelektrische und magnetostriktive Erregung.

1. *Mechanische Erregung.* Durch Anschlagen, Anblasen u. ä. werden Körper (z. B. Saiten, Stäbe, Platten, Glocken oder die Luftsäulen in Pfeifen) in Schwingung versetzt. Daraufhin senden die betreffenden Körper selbst Schallwellen aus, deren Träger das umgebende Medium (im allgemeinen Luft) ist. Der Gasstrom-Schallgenerator von HARTMANN erzeugt mittels eines mit Überschallgeschwindigkeit ausströmenden Gasstrahls Frequenzen bis 10^5 Hz. Besonders große akustische Leistungen bis zu einigen kW werden mit Sirenen (periodische Unterbrechung eines kräftigen Luftstrahls) erzielt (Entnebelung von Flugplätzen, Entstaubung von Industriegasen).
2. *Elektromagnetische und elektrodynamische Erregung.* Kopfhörer und Lautsprecher.
3. *Piezoelektrische und magnetostriktive Erregung.* Ultraschallgeneratoren.

2.3. Ausbreitung des Schalls

2.3.1. Arten der Wellen

In Flüssigkeiten und Gasen breitet sich der Schall in Form von *Longitudinalwellen* aus (Teilchen schwingen in Richtung der Ausbreitung). In festen Körpern sind außerdem *Transversalwellen* möglich (Teilchen schwingen quer zur Ausbreitungsrichtung). An den Grenzen zweier Medien treten *Oberflächenwellen* (Rayleighwellen) auf, während in Stäben und Platten *Biegungswellen* von Bedeutung sind (Transversalwellen in biegesteifen Körpern, deren Dicke wesentlich kleiner als die Wellenlänge ist). *Seilwellen* treten in gespannten Fäden, Drähten usw. auf, deren Biegesteifigkeit vernachlässigt werden kann. Sie sind ebenfalls Transversalwellen.

2.3.2. Schallgeschwindigkeit

In *Gasen* gilt allgemein für die Schallgeschwindigkeit die Beziehung*):

$$c = \sqrt{\varkappa p/\varrho} \tag{2}$$

$\varkappa$ Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, p Gasdruck, ϱ Dichte

Insbesondere für Luft bei der Temperatur t ist:

$$c = 331{,}6 + 0{,}6\,t \qquad \left|\frac{c}{\mathrm{m/s}}\;\frac{t}{{}^\circ\mathrm{C}}\right| \tag{3}$$

Bei den Gasen ist die Schallgeschwindigkeit im Hörbarkeitsbereich von der Frequenz unabhängig. In bestimmten Gasen macht sich jedoch bei Ultraschall eine Dispersion (zunehmende Geschwindigkeit bei wachsender Frequenz) bemerkbar.
Für die Schallgeschwindigkeit im Innern von *Flüssigkeiten* gilt:

$$c = \sqrt{1/\varkappa\varrho} \tag{4}$$

$\varkappa$ Kompressibilität (relative Volumenabnahme je Druckeinheit)

*) s. auch Abschn. TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

In unbegrenzten *festen Körpern* haben Longitudinalwellen die Geschwindigkeit:

$$c = \sqrt{E(1-\mu)/\varrho(1-\mu-2\mu^2)} \tag{5}$$

E Elastizitätsmodul, μ POISSON-Zahl*), ϱ Dichte

Bei dünnen Stäben kann μ vernachlässigt werden; es wird dann für einen im Verhältnis zur Wellenlänge dünnen Stab ($d \ll \lambda$):

$$c = \sqrt{E/\varrho} \tag{6}$$

Für *Transversalwellen* in unbegrenzten festen Körpern gilt (G Schubmodul):

$$c = \sqrt{E/2\varrho(1+\mu)} = \sqrt{G/\varrho} \tag{7}$$

Ferner gilt für *Biegungswellen* in Stäben:

$$c = (2\pi/\lambda)\sqrt{EI/\varrho A} \tag{8}$$

A Querschnitt, I Flächenträgheitsmoment

In diesem Fall hängt die Schallgeschwindigkeit von der Wellenlänge ab. Für die Seilwellen einer mit der Spannung σ gespannten Saite gilt schließlich:

$$c = \sqrt{\sigma/\varrho} \tag{9}$$

Die Schallgeschwindigkeiten in einigen festen und flüssigen Stoffen sind aus Tabelle 1 ersichtlich.

Tabelle 1. Schallgeschwindigkeiten

Stoff	Schallgeschwindigkeit c in m/s	Stoff	Schallgeschwindigkeit c in m/s
Stahl (in Stäben)	5050	Glas	5000
Granit (in Stäben)	3950	Quecksilber	1451
Ziegel	3650	Wasser (25 °C)	1497
Eichenholz	4310	Aluminium (in Stäben)	5240
Kork (komprimiert)	535		

2.3.3. Reflexion des Schalls

Den von einer reflektierenden Wand zurückgeworfenen Schall nennt man *Echo*. Die Laufzeit t berechnet sich aus der Entfernung l der Wand aus:

$$t = 2l/c \tag{10}$$

Bei bekannter Schallgeschwindigkeit c und gemessener Laufzeit t läßt sich die Entfernung l leicht ermitteln. Hierauf beruhen in Verbindung mit Kurzzeitmessern die *Echolotgeräte*. In geschlossenen Räumen bilden sich infolge zahlreicher Reflexionen beim Einsetzen einer Schallquelle der *Anhall* und nach deren Aussetzen der *Nachhall*. Die Nachhallzeit ist für die *Hörsamkeit*, d. h. die Eignung von Räumen für Schalldarbietungen, entscheidend.

*) s. Abschn. TECHNISCHE MECHANIK, Beanspruchungslehre

2.4. Schallfeldgrößen

Schallschnelle

Jedes in der Schallwelle schwingende Teilchen führt longitudinale Bewegungen um seine Ruhelage aus. Die maximale Geschwindigkeit der hin- und herschwingenden Teilchen nennt man *Schallschnelle* v_m:

$$v_m = \omega y_m = 2\pi f y_m \tag{11}$$

ω Kreisfrequenz, y_m Amplitude des schwingenden Teilchens

Die Schallschnelle wird absolut mit der an einem feinen Faden hängenden kreisförmigen RAYLEIGH*schen Scheibe* gemessen. Anfangs schräg zur Schallstrahlung orientiert, sucht sie sich unter dem Einfluß der unsymmetrisch wirkenden Stromlinien der Luft rechtwinklig zur Strahlung zu stellen, wobei der Drehwinkel in einem praktisch in Frage kommenden kleinen Bereich dem Quadrat der Schallschnelle proportional ist.

Schallwechseldruck

Durch die bei Ausbreitung der Welle stattfindenden Verdichtungen und Verdünnungen entstehen lokale Druckschwankungen, deren maximale Abweichung vom Druck der ruhenden Luft als *Schallwechseldruck*, oft kurz *Schalldruck* p, bezeichnet wird:

$$p = \varrho c v \tag{12}$$

Zur Messung des Schalldrucks dienen *Kondensatormikrofone* (von $10^{-4} \cdots 10^3$ Pa) oder bis zu extrem hohen Drücken *Kristallempfänger*. Das Schallfeld darf durch das Meßorgan nicht gestört werden, deshalb soll dieses möglichst klein sein.

Schallintensität

Unter *Schallintensität* (*Schallstärke*) J versteht man die je Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Schallausbreitungsrichtung liegende Flächeneinheit tretende Energie. Die kinetische Energie der in der Raumeinheit schwingenden Luftmasse (die Energiedichte) ist $w = \varrho v^2/2$. Ein Prisma von der Länge $c\Delta t$ und dem Querschnitt A erhält dann die Energie $wAc\Delta t$. Auf die Flächen- und Zeiteinheit entfällt die Schallintensität:

$$J = wc = \varrho v^2 c/2 = p^2/2\varrho c \tag{13}$$

Schalldruckpegel

Zum Vergleich von Schallintensitäten bedient man sich eines logarithmischen Maßstabs. Man bezeichnet als *absoluten Schalldruckpegel* (Schallpegel) L_p den 20fachen Zehnerlogarithmus des Verhältnisses des effektiven Schalldrucks zum Effektivwert des Bezugsschalldrucks $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa. Hierbei ist der Effektivwert p das $(\sqrt{2}/2)$-fache des Scheitel-(Maximal-)Werts p_{max}. Es ist somit der Schalldruckpegel:

$$L_p = 20 \lg (p/p_0) \tag{14}$$

Obwohl der Schalldruckpegel dimensionslos ist, versieht man entsprechende Angaben mit dem Kennwort *Dezibel* (dB). Bezieht man die Gl. (14) nicht auf den Bezugsschalldruck p_0, sondern auf einen beliebigen Schalldruck p_1, so erhält man die *Schallpegeldifferenz*, die häufig auch als *Schalldämm-Maß* bezeichnet wird.

Beispiel. Wenn sich zwei Schallintensitäten wie 80000:1 verhalten, so verhalten sich ihre Schalldrücke wie $\sqrt{8 \cdot 10^4}:1$. Sie unterscheiden sich dann um $L_p = 20 \lg \sqrt{8} \cdot 10^2$ dB $= 20 \cdot 2{,}451$ dB $= 49$ dB.

Schalleistung

Durch Integration der Schallintensität J über eine die Schallquelle umgebende geschlossene Fläche A erhält man die Schalleistung:

$$P = \oint J \, \mathrm{d}A \tag{15}$$

Schalleistungswerte: Mittelwert bei Umgangssprache $7 \cdot 10^{-6}$ W; Großlautsprecher 100 W; Ultraschallsender bis etwa 1000 W.

Beim Vergleich zweier Schalleistungen ergibt sich die gleiche Formel wie bei Gl. (14), denn P_1/P_2 kann dem Quotienten $J_1/J_2 = p_1^2/p_2^2$ gleichgesetzt werden.

Lautstärke

Während die Schallintensität J eine objektive physikalische Größe ist, stellt die Intensität der mittels des Gehörs wahrgenommenen Schallempfindung eine physiologische Größe dar. Verschiedene Frequenzen werden bei gleicher Schallintensität verschieden laut empfunden. Für eine bestimmte Frequenz ist die *Hörschwelle* die geringste, eben noch wahrnehmbare, die *Schmerzgrenze* die höchste, noch erträgliche Schallintensität. Im Bereich der größten Ohrempfindlichkeit (um 1000 Hz) liegen Hörschwelle und Schmerzgrenze am weitesten auseinander.
Zur Messung der vom Ohr empfundenen *Lautstärke* L_A werden Schallpegelmesser verwendet, die bestimmten Anforderungen genügen müssen. Entsprechend der subjektiven Empfindung wird im Bereich tiefer Frequenzen eine stärkere, bei hohen Frequenzen eine schwächere Dämpfung des Schallpegels vorgenommen. Hierfür ist die international festgelegte *Frequenzbewertungskurve A* maßgebend. Die sich dabei ergebenden Werte der Lautstärke werden mit der Angabe dB(A) versehen (siehe Tabelle 2).

Bis zu 60 dB(A) stimmen die Werte praktisch mit der früheren Phon-Skale überein. Um und über 60 dB(A) bestehen Abweichungen, die im Extremfall bis zu 17 dB betragen können.

Tabelle 2. Lautstärke verschiedener Geräusche

Geräusch	Lautstärke in dB(A)	Geräusch	Lautstärke in dB(A)
Uhrticken, Flüstersprache, schwaches Blätterrauschen	20	Fahrgeräusch in der Straßenbahn, verkehrsreiche Straße mit LKW	80
Untere Grenze üblicher Wohngeräusche	30	Kreissäge in 1 m Abstand, laute Maschinen	90
Mittellaute Wohngeräusche, leise Umgangssprache	40	Mechanische Weberei	100
Normale Unterhaltungssprache, Radio in Zimmerlautstärke	50	Kesselschmiede, Drucklufthammer in 2 m Abstand	120
Laute Unterhaltungssprache, laute Rundfunkmusik	60	Motorenprüfstand, Flugzeugtriebwerk	130
Schreibmaschine, normaler Verkehrslärm mit PKW	70	Schmerzgrenze	150

2.5. Raum- und Bauakustik

2.5.1. Schallabsorption

Den von einer Wand nicht reflektierten Anteil des Schalls bezeichnet man als *Absorption* (Schluckung), worunter man nicht nur den tatsächlich in den Poren absorbierten (d. h. in Wärme umgesetzten), sondern auch den von der Rückseite der Wand in den Außenraum abgegebenen Anteil versteht. Der *Schallabsorptionsgrad* (Schluckzahl) α ist das Verhältnis der nicht reflektierten zur auftreffenden Schallintensität und ist vor allem stark frequenzabhängig (Bild 1).

Maßgebend für den Absorptionsgrad sind außer der Dicke des Materials der spezifische Strömungswiderstand (d. h. das Verhältnis des Druckgefälles zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit der in den Poren

schwingenden Luft) und die Porosität. Für tiefere Frequenzen eignen sich besonders schwingungsfähig gelagerte dünne Platten, die, zu Biegeschwingungen angeregt, die auftreffende Energie durch innere Reibung vernichten. Auch mit Löchern versehene Resonanzwände sind hierzu zweckmäßig.

Bestehen die Wände eines Raums aus verschiedenen Materialien, rechnet man mit dem mittleren Absorptionsgrad:

$$\bar{\alpha} = \sum \alpha F / \sum A \tag{16}$$

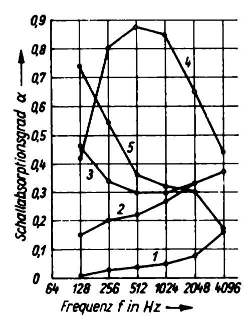


Bild 1. Frequenzabhängigkeit der Schallabsorption.
1 Putz mittlerer Rauhigkeit; *2* Holzfaserplatte, auf die Wand geklebt; *3* Holzfaserplatte in 50 mm Abstand von der Wand; *4* Schlackenwolle, Schichtdicke 40 mm; *5* Schlackenwolle, mit glatter Pappe abgedeckt

2.5.2. Schalldämmung

Die schützende Wirkung einer Wand wird durch das *Schalldämm-Maß R* in dB (Tabelle 3) ausgedrückt:

$$R = 10 \lg (J_1/J_2) = 20 \lg (p_1/p_2) \tag{17}$$

wobei J_1, J_2 die auftreffende bzw. weitergegebene Schallintensität und p_1, p_2 den Schalldruck vor bzw. hinter der Wand bedeuten.

Tabelle 3. Schalldämmung von Trennwänden

Material	Dicke in mm	Masse je m² in kg	Schalldämm-Maß R in dB
Dachpappe	—	1	13
Sperrholz, lackiert	5	2	19
Dickglas	6···7	16	29
Heraklithwand, verputzt	—	50	38,5
Vollziegelwand 1/4 Stein, verputzt	90	153	41,5
desgl. 1/2 Stein	150	228	44
desgl. 1/1 Stein	270	457	49,5

Bei dichten *Einfachwänden* (Massivwänden) nimmt das Dämm-Maß R mit der Wandmasse je m² zu. Zur Gewährleistung ausreichenden Schallschutzes in Hochbauten soll das Dämm-Maß von Außenmauern mindestens 48 dB betragen. Dies wird z. B. mit einer massiven Ziegelwand von 450 kg/m² (etwa 25 cm dick) erreicht. Wesentlich günstiger als Massivwände sind Doppel- und Mehrfachwände, deren Luftzwischenraum (am günstigsten etwa 10 cm dick) auch mit schallschluckenden Stoffen gefüllt sein kann. Die größere Dämmwirkung solch mehrschaliger Wände kommt aber erst oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz f_g zur Geltung:

$$f_g = 120/\sqrt{md} \qquad \left| \begin{array}{ccc} f_g & m & d \\ \hline \text{Hz} & \text{kg/m}^2 & \text{m} \end{array} \right| \tag{18}$$

m Masse beider Wandschalen zusammen, *d* Dicke des Luftzwischenraums

Stark beeinträchtigt wird die Dämmwirkung durch kleine Löcher und Ritzen, deren Durchlässigkeit nicht ihrer wahren Größe, sondern einem Vielfachen davon entspricht (bei 200 Hz wirkt eine Öffnung von 5 mm mit ihrem 55fachen Wert!).

Beispiel. Eine Tür von 1 m Breite und 2 m Höhe schließt mit einer ringsum verlaufenden Ritze von 1 mm. Zu berechnen ist die Dämmung, wenn die fehlerfreie Tür ein Dämm-Maß von 30 dB hat und die Ritze mit dem 50fachen Wert ihres wahren Querschnitts *s* wirkt. — *Lösung:* Hier wird angenommen, auf 1 cm² falle die Schallenergie W_0. Dann empfängt die ganze Türfläche 20000 W_0. Aus $30 = 10 \lg (20000/x)$ errechnet sich die auf die andere Seite gelangende Energie zu $x = 20\ W_0$. Die Ritze von 60 cm² wirkt mit 60 cm² · 50 = 3000 cm², wodurch 3000 W_0 ungeschwächt übergehen, insgesamt also 3020 W_0. Dann beträgt das wirksam werdende Schalldämm-Maß nur $R = 10 \lg (20000/3020) = 8{,}2$ dB.

2.5.3. Körperschall

Innerhalb eines Gebäudes wird der Schall von den starren Bauteilen (Wänden, Trägern, Rohren usw.) leicht fortgeleitet. Die einzelnen schalleitenden Körper werden dann zweckmäßigerweise durch weiche Zwischenlagen von möglichst kleinem Elastizitätsmodul und damit kleinem Schallwellenwiderstand getrennt. Am besten sind jedoch schalldämpfende Maßnahmen an den Maschinen u. dgl. selbst: Einbau geräuscharmer Plastzahnräder in die Getriebe, Anwendung von Schrägverzahnung, Abdeckung durch Schutzhauben, Gründung auf schalldämmender Schicht unter Zwischenschaltung von Federn usw.

2.6. Ultraschall

2.6.1. Erzeugung

Weit verbreitet zur Erzeugung von Ultraschall ist der *Schwingquarz*, eine in bestimmter Orientierung aus einem Quarzkristall ausgeschnittene Platte. Wird die Platte zwischen zwei Elektroden in ein elektrisches Wechselfeld gebracht, so gerät sie in kräftige Eigenschwingungen, wenn die Frequenz mit der Eigenfrequenz der Platte übereinstimmt (Bild 2). Der Schwingquarz kann z. B. unmittelbar in die zu beschallende Flüssigkeit gebracht werden. Kräftigen

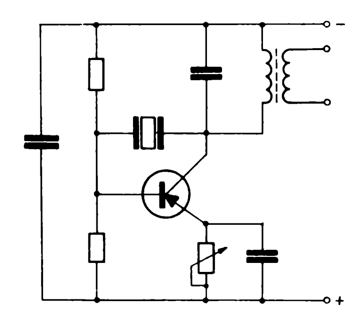


Bild 2. Schwingquarz in PIERCE-Schaltung

Ultraschall bis etwa 60 kHz erzielt man mit einem Nickelstab, der, von einer zweiten Spule mit Gleichstrom vormagnetisiert, in einer von hochfrequentem Wechselstrom durchflossenen Spule steckt. Grundlage ist die Erscheinung, daß ein durch ein Wechselfeld magnetisierter Stab seine Länge entsprechend periodisch ändert (*Magnetostriktion*). Bei Übereinstimmung mit seiner mechanischen Eigenfrequenz entstehen starke Eigenschwingungen.

Für Ultraschallerzeugung ist die ältere, mit Luft betriebene *Galtonpfeife* weniger wirksam als die moderne *Flüssigkeitspfeife*, bei der Flüssigkeit mit hohem Druck aus einer Düse gegen die Schneide einer Metalllamelle strömt. Mit den bereits erwähnten HARTMANN-*Generatoren* und *Sirenen* sind besonders hohe Leistungen zu erzielen.

2.6.2. Eigenschaften und Anwendung

Ultraschallwellen lassen sich ähnlich wie Lichtstrahlen scharf bündeln und richten. Sie eignen sich daher zur zerstörungsfreien Werkstoffuntersuchung*). Innere Inhomogenitäten und Risse bilden sich auf deren Oberfläche ab (*Sonogramme*). Die erzielbaren Schallstärken sind beträchtlich (bis 10 W/cm²), wobei außerordentlich hohe Schalldrücke entstehen. Die Folge sind Zerreißen und Hohlraumbildung (*Kavitation*) in beschallten Flüssigkeiten. Diese Erscheinung wird angewendet z. B. zur Entgasung von Schmelzen, Emulgierung, Verflüssigung von Gelen. Frei in der Luft schwebende Teilchen können zusammenklumpen (Niederschlagen von Nebel). *Weitere Anwendung:* Beseitigung von Unterkühlungs- und Siedeverzug, Beseitigung der Oxidhaut beim Löten von Aluminium, Vergütung von Werkstoffen, Kornverfeinerung in fotografischen Emulsionen, Unterwassersignaltechnik, Aufsuchen von Fischschwärmen, Echolotung. In der Metallbearbeitung beruht das Stoßläppen auf der Wirkung des Ultraschalls. Besonders zahlreich sind die Anwendungen in der Biologie und Medizin.

3. Optik

Literatur: [4, 6, 11, 13, 17, 20, 22, 24, 25, 31, 35, 42, 43]

3.1. Wesen des Lichts

Das Licht gehört zu den elektromagnetischen Wellen. Der dem menschlichen Auge sichtbare Bereich liegt zwischen den Wellenlängen 390 und 770 nm. Im weiteren Sinne versteht man unter „Licht" auch die angrenzenden Bereiche des Infrarots, des Ultravioletts und der Röntgenstrahlung, d. h. alle diejenigen Wellen, die durch Vorgänge (Quantensprünge) in der Elektronenhülle der Atome oder Moleküle entstehen. Wie in jeder elektromagnetischen Welle stehen elektrischer und magnetischer Feldvektor (***E***- und ***H***-Vektor) rechtwinklig zueinander und beide rechtwinklig zur Ausbreitungsrichtung.

Geometrische Optik. Lichtstrahlen im geometrischen Sinne existieren physikalisch nicht, sondern nur mehr oder weniger dünne Lichtbündel. Dennoch kann man viele Vorgänge der Lichtausbreitung mit Zirkel und Lineal konstruieren.
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (1973): $c_0 = (299\,792{,}456\,2 \pm 0{,}001\,1)$ km/s.

3.2. Reflexion und Brechung des Lichts

3.2.1. Reflexionsgesetz

Bei rauher Oberfläche wird das Licht unregelmäßig nach vielen Richtungen reflektiert, es tritt *diffuse Reflexion* auf. Wenn die Rauhigkeiten klein gegen die Wellenlänge sind, so erfolgt *regelmäßige Reflexion.*

Reflexionsgesetz

Einfallender und reflektierter Strahl (Bild 3) bilden mit dem Einfallslot beiderseits gleiche Winkel α. Einfallslot, einfallender und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

Die Reflexion an *Metallspiegeln* erfolgt stets *selektiv* (Auslese bestimmter Wellenlängen, worauf z. B. auch die verschiedenen Farben der Metalle zurückzuführen ist), da das Reflexionsvermögen von der Wellenlänge abhängt. Sehr gut und nicht selektiv reflektiert die HOCHHEIMsche Legierung (aufgedampfte Metallschichten).
Die *Reflexionsverluste* an der Oberfläche durchsichtiger Körper sind mitunter erheblich (z. B. beim Prismenfeldstecher etwa 50%); man setzt sie durch Aufbringen besonders dünner Schichten (LiF, CaF_2 usw.)

*) s. Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG, Ultraschallprüfung

herab und erzielt damit Lichtdurchlässigkeiten bis 99,8% (vergütete Optik). Für subjektiv verwendete Geräte verlegt man das Maximum der Reflexionsverminderung in das grüne Spektralgebiet, weshalb diese Schichten in der Aufsicht violett bis purpur aussehen.

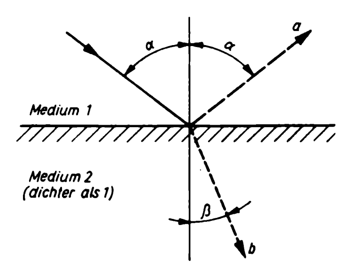


Bild 3. Reflexion des Lichts. *a* reflektierter Strahl; *b* gebrochener Strahl

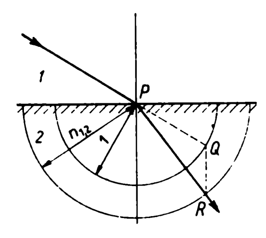


Bild 4. Konstruktion des gebrochenen Strahls

3.2.2. Brechungsgesetz

Die Lichtgeschwindigkeit c in stofflichen Medien ist im allgemeinen kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum. Das Verhältnis beider nennt man *absolute Brechzahl* des betreffenden Stoffs:

$$n_0 = c_0/c \tag{19}$$

Brechzahl der Luft für Natriumlicht (bei 20 °C, 101,325 kPa und einer absoluten Feuchtigkeit entsprechend 1,3 kPa Dampfdruck): $n_0 = 1{,}000\,2724$.

Die Brechzahl hängt von der Wellenlänge des betreffenden Lichts ab (vgl. Dispersion) und wächst im allgemeinen im sichtbaren Bereich mit abnehmender Wellenlänge. Die Zunahme ist dieser jedoch nicht proportional. In Tabellen sind die Brechzahlen meist auf Luft und Natriumlicht ($\lambda = 589{,}3$ nm) bezogen. Man bezeichnet dann die Brechzahl $n_{0\,\mathrm{Luft}}$ mit n_1 und die Brechzahl des anderen Mediums mit n_2.

Brechungsgesetz

Beim Übergang von einem Medium in ein anderes ist das Verhältnis der Sinus von Einfallswinkel α und Brechungswinkel β (Bild 3) für ein gegebenes Paar zweier Medien bei bestimmter Wellenlänge konstant.

$$n_{1,2} = \sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1 \tag{20}$$

Konstruktion des gebrochenen Strahls (Bild 4). Der in das optisch dichtere Medium 2 einfallende Strahl trifft die Grenzfläche in P. Um P schlage man mit den Radien $r_1 = 1$ und $r_2 = n_{1,2}$ zwei Kreise. Der verlängerte Strahl schneidet den Einheitskreis in Q. Durch Q ziehe man die Parallele zum Einfallslot, die den zweiten Kreis in R schneidet. $\overline{PR}$ ist der gebrochene Strahl.

3.2.3. Planparallele Platte und Prisma

Bei schrägem Durchgang durch eine *planparallele Platte* (Plattendicke d) erfährt der Strahl nach zweimaliger Brechung eine Parallelverschiebung a (Bild 5):

$$a = d\sin(\alpha - \beta)/\cos\beta \tag{21}$$

Bei Betrachtung eines hinter der Platte liegenden Gegenstands erscheint dieser nach vorn verschoben. Die scheinbare Dicke d' der Platte ist gegenüber der wahren Dicke d geringer und beträgt, wenn n die Brechzahl Luft—Glas ist:

$$d' = d/n \tag{22}$$

Beim Durchgang durch ein *Prisma* (Bild 6) erfährt der Strahl eine Gesamtablenkung:

$$\varphi = \alpha + \varepsilon - \omega \tag{23}$$

ω brechender Winkel, α Eintrittswinkel, ε Austrittswinkel

Die Gesamtablenkung φ ist am kleinsten, wenn das Prisma symmetrisch vom Strahl durchsetzt wird.

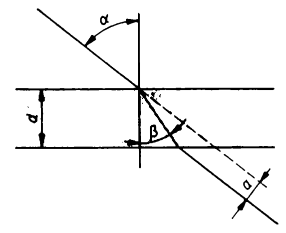


Bild 5. Brechung eines Lichtstrahls beim Durchgang durch eine planparallele Platte

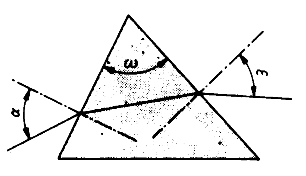


Bild 6. Brechung eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein Prisma

3.2.4. Totalreflexion

Beim Übergang vom dichteren ins dünnere Medium nimmt die Intensität des austretenden Strahls stetig ab, wenn der Einfallswinkel größer wird. Bei einem bestimmten Grenzwinkel β gelangt nichts mehr ins dünnere Medium, der Strahl wird vollständig (total) nach innen reflektiert. Für den Grenzfall gilt (Bild 7):

$$\sin \beta = 1/n \tag{24}$$

Für Wasser ist $n = 1{,}33$ und demnach sin $\beta = 0{,}752$, so daß $\beta = 48{,}8°$. Von der Totalreflexion macht man z. B. beim *Umkehr-* und *Umlenkprisma* sowie beim ABBE- und PULFRICH-*Refraktometer* Gebrauch. Mit dem Refraktometer läßt sich die Brechzahl leicht bis zur vierten Dezimale bestimmen. Die Brechzahl ist ein empfindliches Kennzeichen gewisser Materialeigenschaften (Konzentration von Lösungen, Zusammensetzung von Ölen usw.).

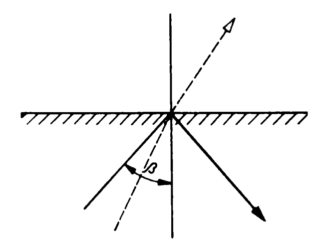


Bild 7. Totalreflexion

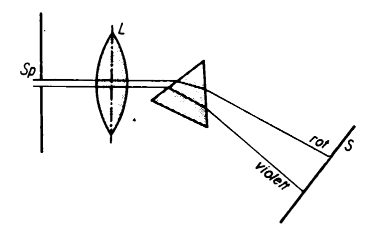


Bild 8. Dispersion

3.2.5. Dispersion

Die Brechzahl hängt von der Wellenlänge ab. Da weißes Licht (z. B. Tages- oder Lampenlicht) ein Gemisch verschiedener Wellenlängen ist, wird es beim Durchgang durch ein Prisma in seine einzelnen Komponenten zerlegt (*Dispersion*). Im allgemeinen nimmt die Dispersion von Gläsern mit der (auf eine bestimmte Wellenlänge bezogenen) Brechzahl zu. Läßt man paralleles Licht durch einen feinen Spalt Sp fallen (Bild 8), der mittels einer Linse L scharf auf einem Schirm S abgebildet wird, so wird beim Dazwischenstellen eines Prismas das Spaltbild zu einem farbigen Band, dem *Spektrum*, auseinandergezogen.



Zur Beobachtung und Messung der Spektren (*Spektralanalyse*) verwendet man Spektralapparate. Für Untersuchungen im Ultraviolett sind Flußspat- und Quarzprismen erforderlich (Quarzspektrograf).

Kontinuierliche Spektren

Sie werden von allen glühenden festen und flüssigen Körpern ausgesandt und bestehen aus einer stetig ineinander übergehenden Folge einzelner Wellenbereiche, die dem Auge von verschiedener Farbe erscheinen (Regenbogenfarben). Auch Flammen, die durch Anwesenheit glühender Kohlenstoffteilchen leuchten, geben kontinuierliche Spektren.

Komplementär- und kompensative Farben. Blendet man aus dem Spektrum einen bestimmten Bereich (also eine bestimmte Farbe) aus und sammelt den Rest des Spektrums mit einer Linse wieder, so entsteht Licht der zugehörigen Komplementärfarbe. Das Licht beider Komplementärfarben ergänzt sich wieder zu Weiß. Dagegen sind kompensative Spektralfarben durch eine bestimmte Wellenlänge definiert (Tabelle 4) und mischen sich ebenfalls zu Weiß.

Tabelle 4. Kompensative Farben

Farbton	Wellenlänge λ in nm	Kompensativer Farbton	Wellenlänge λ in nm
Gelb	580	Blau	479,7
Orange	610	Grünblau	491,7
Hochrot	700	Blaugrün	493,9
Purpur	*)	Blattgrün	550,0
Indigoblau	440	Gelbgrün	570,5

*) Purpur ist lediglich Gesichtsempfindung und entspricht keiner definierten Wellenlänge

Linienspektren

Sie werden von leuchtenden Gasen erzeugt und bestehen aus vereinzelten scharfen Linien, deren jede einer bestimmten Wellenlänge entspricht. Umgekehrt läßt sich an Hand des Linienspektrums genau feststellen, welche Gase im einzelnen vorliegen. Zur Untersuchung von Metallegierungen verwendet man deren *Funkenspektrum.* Dieses entsteht beim Funkenüberschlag einer Entladungsstrecke, wobei u. a. das Spektrum des Elektrodenmaterials emittiert wird. Günstig wirkt hierbei die kondensierte Entladung (Kondensatorenentladung) unter Wasser (große Intensität im Ultraviolett).

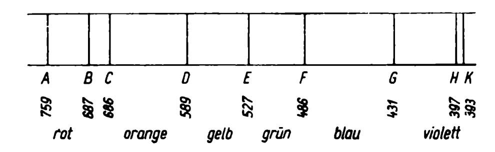


Bild 9. Wichtigste FRAUNHOFERsche Linien im Sonnenspektrum (Wellenlängen in nm)

Bandenspektren

Während Linienspektren von angeregten Atomen erzeugt werden, geben angeregte Moleküle mehr oder weniger breite *Banden,* die bei weiterer Auflösung in eng beieinanderliegende Linien zerfallen.

Absorptionsspektren

Beim Durchgang von Strahlung mit kontinuierlichem Spektrum durch ein gasförmiges oder flüssiges Medium werden bestimmte Wellenlängen oder Wellenbereiche absorbiert. Dadurch entstehen entsprechende dunkle Linien oder *Absorptionsbanden* im Spektrum. Ein solcher Vorgang erfolgt z. B. auf der Sonnenoberfläche, wodurch im Sonnenspektrum die FRAUNHOFERschen Linien erscheinen (Bild 9). Absorptionsspektren können ebenso wie die primären Spektren zur Spektralanalyse herangezogen werden.

3.3. Interferenz und Polarisation des Lichts

3.3.1. Interferenz durch Reflexion

Wenn sich zwei Wellenzüge gleicher Amplitude und Wellenlänge mit einem *Phasen-* (*Gang-*) *Unterschied* von $\lambda/2$, $3\lambda/2$, ... überdecken (Bild 10), fallen die Wellenberge des einen mit den Wellentälern des anderen zusammen, was zur *Auslöschung* beider Wellenzüge führt.
Bei einem Phasenunterschied von 0, λ, 2λ, ... tritt *Verstärkung* (Summierung) ein. Das Licht besteht aber nicht aus beliebig langen Wellenzügen, sondern aus einer Vielzahl getrennter, kurzer *Wellengruppen*. Diese Wellengruppen entstehen durch Emissionsvorgänge innerhalb der einzelnen Atome. Da die Dauer des einzelnen Emissionsakts äußerst kurz und die Lichtemission der vielen Atome eines strahlenden Körpers an keinerlei Ordnung gebunden ist, kann bei gewöhnlichem Licht auch keine Interferenz eintreten. Diese ist vielmehr nur bei

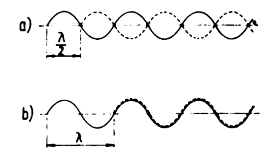


Bild 10. Interferenz. a) Auslöschung der Wellenzüge; b) Verstärkung der Wellenzüge

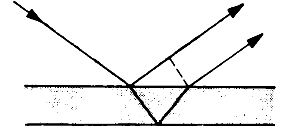


Bild 11. Entstehung der Interferenzfarben

kohärentem Licht möglich, d. h., wenn zwei Wellengruppen das Beobachtungsgebiet gleichzeitig passieren und Wellenlänge, Schwingungsphase und Schwingungsebene während der Beobachtung konstant bleiben. Diese *Kohärenzbedingungen* sind daher nur dann gegeben, wenn zwei Lichtwellenzüge aus dem gleichen elementaren Emissionsakt stammen. Sie müssen also gleichzeitig in einem bestimmten Punkt derselben Lichtquelle entstanden sein. In weißem Licht können nur solche Wellenlängen zur Interferenz kommen, für welche die genannten Bedingungen erfüllt sind. Wenn dann aus dem weißen Licht bestimmte Wellenlängen ausgelöscht, andere wieder verstärkt werden, entstehen sogenannte *Interferenzfarben*, die hauptsächlich an dünnen Lamellen oder Überzügen (Farben dünner Blättchen) auftreten. Hierbei wird die Lichtwelle einmal an der Ober- und ein zweites Mal an der Unterseite reflektiert. Der Gangunterschied kommt dadurch zustande, daß der an der Unterseite reflektierte Teilstrahl einen Umweg von z. B. λ macht und außerdem an der Unterseite einen Phasensprung von $\lambda/2$ erleidet (Bild 11). Die Interferenz findet dann nach der Wiedervereinigung der beiden Strahlen (z. B. im betrachtenden Auge) statt.

Interferenzmethoden werden in besonderen Geräten zur Präzisionsbestimmung von Längenmaßen (z. B. Absolutmessung von Parallel-Endmaßen mit dem Interferenzkomparator von KÖSTERS) und zur Oberflächenprüfung angewendet (z. B. Interferenzmikroskop).

3.3.2. Interferenz durch Beugung

Das HUYGENSsche Prinzip besagt, daß jeder von einer Welle getroffene Punkt Ausgangspunkt einer neuen *Elementarwelle* ist. Alle diese Elementarwellen interferieren miteinander. Passiert das Licht insbesondere eine Öffnung in einer undurchsichtigen Blende, so ergibt das System aller Elementarwellen, die von der Ebene dieser Öffnung ausgehen, auf einem in größerer Entfernung stehenden Bildschirm an der Schattengrenze ein System von dunklen und hellen *Interferenzstreifen* (Beugungsstreifen).

Beugung am einfachen Spalt

Im Bild 12 ist z. B. der Querschnitt eines Spalts von der Breite a dargestellt, auf den ein Bündel parallelen monochromatischen Lichts trifft. Es gibt dann einen bestimmten Beugungswinkel α, für den alle gebeugten (parallelen) Strahlen einander auslöschen; denn zu jedem einzelnen Strahl, der die obere Hälfte $\overline{AC}$ des



Spalts passiert, gibt es einen Strahl in der unteren Hälfte $\overline{CB}$, der ihm gegenüber einen Phasenunterschied von $\lambda/2$ aufweist. Unter diesem Winkel α entsteht auf dem Schirm Dunkelheit, das 1. Minimum. Ist der Winkel α um einen bestimmten Betrag größer, so läßt sich die Spaltbreite a in 3 Teile zerlegen, wobei die Strahlen der beiden oberen Drittel sich gegenseitig auslöschen. Die Strahlen des untersten Drittels jedoch bleiben unausgelöscht und ergeben auf dem Schirm das 1. Nebenmaximum. Bei einem noch größeren Winkel α tritt wieder vollständige Auslöschung ein usw.

Zusammengefaßt ergibt sich als Interferenzbedingung der Ausdruck:

$$a \sin \alpha = k\lambda/2 \qquad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots) \tag{25}$$

Für ungerade Werte von k entstehen Maxima (helle Streifen), für geradzahlige Werte Minima (dunkle Streifen).

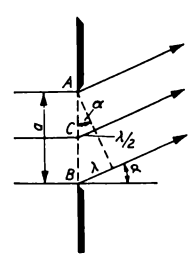


Bild 12. Entstehung des 1. Minimums am einfachen Spalt

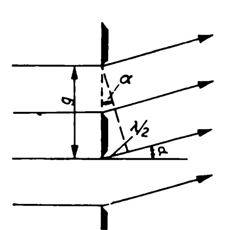


Bild 13. Entstehung des 1. Minimums am Beugungsgitter

Beugung am Gitter

Ein System von vielen äquidistanten Spalten nennt man ein *Beugungsgitter*. *Strichgitter* bestehen aus feinen Linien (bis 1800 je mm), die in Glas- oder Metalloberflächen eingeritzt werden. Die stehenbleibenden Stege wirken als Spalte. Bezeichnet man den Abstand je zweier Spalte mit g (*Gitterkonstante*) (Bild 13), so findet man, daß bei einem bestimmten Beugungswinkel α alle Strahlen zweier benachbarter Spalte sich gegenseitig auslöschen, wenn ihr Phasenunterschied $\lambda/2$ beträgt usw. Das ergibt dann als Interferenzbedingung den Ausdruck

$$g \sin \alpha = k\lambda/2 \tag{26}$$

wobei hinter dem Gitter Maxima entstehen, wenn k geradzahlig ist, und Minima, wenn k ungeradzahlig ist.

Benutzt man nicht monochromatisches, sondern weißes Licht, so entsteht für jede Wellenlänge ein besonderes Streifensystem. In der Gesamtwirkung ergibt das anstatt heller und dunkler Streifen ein *kontinuierliches Beugungsspektrum*, bei dem das violette Licht am wenigsten, das rote Licht am stärksten abgebeugt ist. In größeren Abständen von der Mitte entstehen die Spektren 2., 3., ... Ordnung. Die Intensität, d. h. die Helligkeit der Spektren, nimmt mit höherer Ordnungszahl stark ab, ihre Breite jedoch nimmt jeweils zu.

Beugung an kreisförmiger Öffnung

Auch am Rande einer kreisförmigen Öffnung vom Durchmesser d wird das Licht gebeugt, wobei ein System von konzentrischen dunklen und hellen Beugungsringen entsteht. Für die Lage des ersten dunklen Rings seitlich vom Zentrum gilt:

$$d \sin \alpha = 1{,}22\lambda \tag{27}$$

Ein leuchtender Punkt wird demnach von jedem optischen System, das ja stets von einem kreisförmigen Rand begrenzt ist, als ein Ringsystem abgebildet. Dies ist die Ursache für das begrenzte *Auflösungsvermögen* von Fernrohren, Mikroskopen usw. Das ist ein Maß für den kleinsten Abstand, den zwei Objektpunkte haben dürfen, wenn sie noch getrennt abgebildet werden sollen. Das Auflösungsvermögen ist um so besser, je kleiner der Winkel α ist, d. h. je größer der Durchmesser d (*Apertur*) des Systems ist.

Beispiel. Für ein Fernrohr von 50 mm Objektivdurchmesser und einer mittleren Lichtwellenlänge von 550 nm ergibt sich $\sin\alpha = 1{,}22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}\,\text{m}/5 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 0{,}000\,013\,42$ entsprechend einem Winkelabstand von $\alpha = 2{,}8''$.

Die Ablenkung des Lichts durch kleine Teilchen nennt man *Streuung*. Hierdurch kommt z. B. die blaue Farbe des Himmels zustande (Streuung an den Luftmolekülen).

3.3.3. Polarisation

Im Lichtstrahl schwingen der $\boldsymbol{E}$- und der $\boldsymbol{H}$-Vektor in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Im gewöhnlichen Licht haben diese Vektoren innerhalb dieser Ebene keine ausgezeichnete Richtung. Polarisiertes Licht hat dagegen nur *eine einzige Schwingungsrichtung* (Bild 14), die durch diejenige des $\boldsymbol{E}$-Vektors angegeben wird. Diese und die Ausbreitungsrichtung bestimmen die Schwingungsebene.

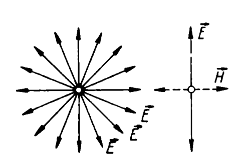


Bild 14. Schwingungsrichtungen bei gewöhnlichem und polarisiertem Licht

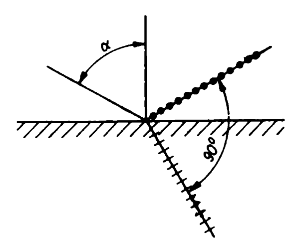


Bild 15. Polarisation durch Reflexion

Polarisation durch Reflexion und Brechung

Fällt natürliches Licht schräg auf eine Glasplatte, so ist es nach der Reflexion teilweise polarisiert. Der reflektierte Strahl ist vollständig polarisiert, wenn für den Polarisationswinkel α die Bedingung

$$\tan\alpha = n \tag{28}$$

(BREWSTER*sches Gesetz*) erfüllt ist (Bild 15). Der zugehörige gebrochene Strahl ist teilweise polarisiert. Metalloberflächen polarisieren nicht in dieser Weise.

Polarisation durch Doppelbrechung

Fällt gewöhnliches Licht in bestimmter Richtung durch einen Kalkspatkristall, so wird es in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Strahlen zerlegt. Da bei bestimmter Orientierung des Kristalls zum einfallenden Licht die Brechzahl der polarisierten Strahlen verschieden ist, sieht man beim Hindurchblicken alle Gegenstände doppelt, daher die Bezeichnung *Doppelspat*. Durch geeignete Kombination zweier Kalkspatprismen, z. B. in NICOLschen Prismen, wird der eine Strahl aus dem Strahlengang entfernt, so daß man nur einen einzigen, linear polarisierten Strahl erhält. Bei den heute viel gebrauchten Polarisationsfiltern wird der eine Strahl im Material der polarisierenden Substanz (z. B. mit Jod behandelte, gestreckte Plastfolien) absorbiert und nur der andere durchgelassen. Eine natürliche Substanz mit gleichem Verhalten ist das Mineral Turmalin.

Spannungsdoppelbrechung. Manche unter gewöhnlichen Verhältnissen optisch isotropen Körper (sich in allen Richtungen optisch gleich verhaltende Körper) werden doppelbrechend, wenn sie unter dem Einfluß innerer oder äußerer Spannungen stehen. *Anwendungen:* Prüfung von Glasgegenständen auf innere Spannungen, Untersuchung der Spannungsverteilung in Werkstücken mit Hilfe von Plastmodellen.

Verhalten polarisierten Lichts

Das menschliche Auge kann nicht zwischen polarisiertem und gewöhnlichem Licht unterscheiden. Das durch die Atmosphäre eindringende Himmelslicht ist z. B. teilweise polarisiert.



Trifft es aber auf ein NICOLsches Prisma oder ein Polarisationsfilter, dessen Durchlaßrichtung quer zu seiner Schwingungsrichtung liegt, so wird ihm der Durchgang durch das Prisma oder Filter versperrt.

Zu genaueren Untersuchungen dient der *Polarisationsapparat.* Dieser besteht aus dem Polarisator, einem NICOLschen Prisma (oder Polarisationsfilter), das nur Licht einer bestimmten Schwingungsrichtung durchläßt, und dem Analysator, einem zweiten, drehbar angebrachten Nicol. Bei gekreuzten Nicols geht kein Licht durch den Apparat, bei parallelen Nicols besteht maximale Helligkeit.
Optisch aktive Stoffe haben die Eigenschaft, die Schwingungsebene polarisierten Lichts zu drehen (Bild 16). Bringt man z. B. eine Traubenzuckerlösung zwischen Polarisator und Analysator eines Polarisationsapparates, so läßt sich aus dem Drehwinkel der Zuckergehalt genau bestimmen.

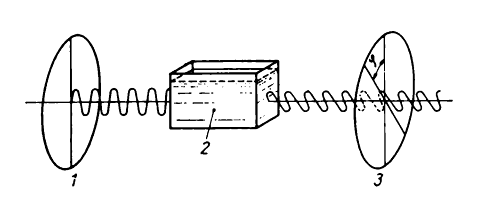


Bild 16. Drehung der Schwingungsebene polarisierten Lichts durch eine optisch aktive Flüssigkeit. *1* Polarisator; *2* Flüssigkeit; *3* Analysator

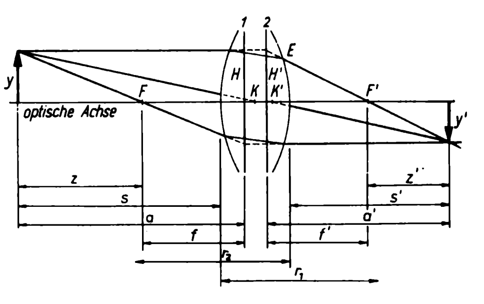


Bild 17. Strahlenverlauf durch Linsen (Bezeichnungen in der technischen Optik)

3.4. Spiegel, Linsen und optische Geräte

3.4.1. Allgemeines

Standardisierung und Bezeichnungen

Empfehlungen für Bezeichnungen und Vorzeichen in der technischen Optik sind standardisiert[3]) (Bild 17). Alle Strecken werden mit einem Vorzeichen versehen. Die positive Richtung läuft in der Zeichnung von links nach rechts und entspricht derjenigen des einfallenden Lichts. Der Radius einer Fläche ist negativ einzusetzen, wenn ihr Krümmungsmittelpunkt links vom Scheitel liegt. Die durch optische Abbildung aus einander hervorgehenden Größen heißen *zueinander konjugiert* und werden durch gleiche Buchstaben bezeichnet, im Bildraum jedoch noch durch einen beigefügten Strich ($'$). Einander nicht konjugierte Größen werden durch Überstreichung (oder auch durch Indizes) unterschieden.

Strahlenverlauf

— Ein achsenparallel einfallender Strahl schneidet (u. U. rückwärts verlängert) nach dem Austritt die Achse im Brennpunkt F'.
— Ein achsenparallel einfallender Strahl und die (u. U. rückwärts verlängerte) Richtung $\overline{EF'}$ des austretenden Strahls schneiden sich in der zum Brennpunkt F' gehörigen Hauptebene H'.
— Ein vom Objekt kommender und nach dem auf der Achse gelegenen Knotenpunkt K zielender Strahl verläuft bildseitig so, als ob er von dem Knotenpunkt K' herkäme.

Arten der Bilder

Die von optischen Systemen erzeugten Bilder können *reell* (wirklich) oder *virtuell* (scheinbar) sein. Reelle Bilder sind unmittelbar durch einen Schirm o. ä. auffangbar. Bei virtuellen Bildern ist zwar die Lage des Bilds genau feststellbar (mit Hilfe der geometrischen Optik), das Bild selbst aber nur subjektiv wahrnehmbar.

Beispiele. Das durch eine Lupe vergrößerte Bild existiert nicht reell, sondern wird nur subjektiv beobachtet. Konkavlinsen und Konvexspiegel geben nur virtuelle Bilder, Konvexlinsen und Konkavspiegel je nach der Entfernung des Gegenstands von der Linse reelle oder virtuelle Bilder.

3.4.2. Spiegel

Ebene Spiegel

Durch eine Spiegelung oder eine ungerade Anzahl von Spiegelungen entsteht ein in bezug auf die Achsenrichtung seiten- oder höhenvertauschtes, virtuelles (nicht auf einem Schirm auffangbares, sondern nur mit dem Auge wahrnehmbares) Bild von gleicher Größe. Dreht sich ein Spiegel um den Winkel α um eine in der Spiegelebene liegende Achse, so beschreibt der reflektierte Strahl den Winkel 2α (zu beachten bei Spiegelgalvanometern, Spiegelsextanten usw.).

Sphärische Spiegel

Je nach der Wölbungsrichtung unterscheidet man *Konkavspiegel* (Hohlspiegel) und *Konvexspiegel* (Wölbspiegel).

— *Konkavspiegel* (Hohlspiegel). Achsnahe, achsenparallele Strahlen werden im Brennpunkt F' des Hohlspiegels gesammelt. Brennweite f' und Krümmungsradius r stehen zueinander in der Beziehung $f' = r/2$.

Strahlenbündel größeren Durchmessers ergeben beim *sphärischen* (kugelförmigen) *Hohlspiegel* eine gekrümmte Brennfläche, die *Kaustik* (Verbindungsfläche der Schnittpunkte benachbarter Strahlen). Nur der *Parabolspiegel* sammelt alle achsenparallelen Strahlen in einem einzigen Punkt.

Abbildungsgleichung: $1/s + 1/s' = 1/f'$ (29)

Abbildungsmaßstab: $\beta' = y'/y = -s'/s$ (30)

Beispiel. Vor einem Hohlspiegel der Brennweite $f' = -15$ cm steht in $s = -8$ cm Entfernung ein $y = 6$ cm großer Gegenstand. Die Entfernung des Bilds vom Spiegel ist dann $s' = f's/(s - f') = +17{,}1$ cm. Das positive Vorzeichen von s' gibt entsprechend der Vorzeichenregel an, daß das Bild, in Lichtrichtung gesehen, hinter dem Spiegel steht und demnach virtuell ist. Seine Größe ist $y' = -ys'/s = +12{,}8$ cm. Das positive Vorzeichen von y' besagt, daß das Bild in bezug auf die Achsenrichtung seitenrichtig steht.

— *Konvexspiegel* (Wölbspiegel). Konvexspiegel liefern stets aufrechte, verkleinerte und virtuelle Bilder.

3.4.3. Linsen

3.4.3.1. Linsenformen

Linsen sind fast immer sphärisch geschliffen, *Konvexlinsen* (Sammellinsen) sind in der Mitte dicker, *Konkavlinsen* (Zerstreuungslinsen) in der Mitte dünner als am Rand (Bild 18).

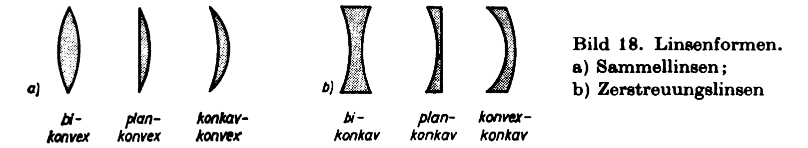


Bild 18. Linsenformen.
a) Sammellinsen;
b) Zerstreuungslinsen

3.4.3.2. Linsengesetze

Unter der *Brechkraft D*, ausgedrückt in 1/m ($\triangleq$ dpt, Dioptrie), versteht man den Kehrwert der in Meter einzusetzenden Brennweite f:

$$D = 1/f \tag{31}$$

Sie ist für Zerstreuungslinsen negativ. Die Brennweite f' einer dünnen Linse ergibt sich aus der Formel:

$$1/f' = (n - 1)\,[(1/r_1) - (1/r_2)] \tag{32}$$

Bei bikonvexer Linse ist r_2 nach Lage und Vorzeichenregel negativ zu setzen!

Abbildungsgleichung:

$$1/a' - 1/a = 1/f'$$

$$\text{oder} \quad zz' = -f'^2 \quad (\text{NEWTON}\textit{sche Formel}) \tag{33}$$

Abbildungsmaßstab:

$$\beta' = y'/y = s'/s \tag{34}$$

Bei sehr dünnen Linsen kann $s'/s = a'/a$ gesetzt werden.

Beispiel. Ein $y = 50$ cm großer Gegenstand steht 2 m links vor einer dünnen Sammellinse von $f' = 15$ cm Brennweite und entwirft auf dem gegenüberliegenden Schirm ein Bild. Die Gegenstandsweite beträgt dann $a = -2$ m (negativ, da links von der Linse). Es ergibt sich die Bildweite $a' = af'/(a + f') = +0{,}162$ m (das positive Vorzeichen gibt an, daß das Bild rechts von der Linse entsteht). Die Bildgröße ist $y' = ya'/a = -0{,}041$ m (das negative Vorzeichen gibt an, daß das Bild in bezug auf die Achse seitenverkehrt steht). Der Abbildungsmaßstab ist $\beta' = y'/y = -0{,}081$ (Verkleinerung 12,3:1).

Nur bei sehr dünnen Linsen darf an Stelle von den Hauptpunkten vom Linsenmittelpunkt aus gerechnet werden. Die Hauptebenen liegen dort, wo ein achsenparalleler Strahl den rückwärts verlängerten, von ihm erzeugten Brennstrahl schneidet.

3.4.3.3. Linsenbilder

Ob ein Bild reell oder virtuell, seitenrichtig oder seitenverkehrt, verkleinert oder vergrößert erscheint, hängt von der Brennweite f der Linse (hier ist f der Betrag der beiderseits der Linse gleich großen Brennweite) und vom Abstand a des Gegenstands von der Linse ab. Für Konvexlinsen sind diese Zusammenhänge aus Tabelle 5 zu ersehen.

Tabelle 5. Arten der Linsenbilder von Konvexlinsen

Lage des Gegenstands	Lage des Bilds	Art des Bilds	Anwendung
$a > 2f$	$2f > a' > f$	reell, seitenverkehrt, verkleinert	Fotoapparat
$a = 2f$	$a' = 2f$	reell, seitenverkehrt, gleich groß	Umkehrlinse
$2f > a > f$	$a' > 2f$	reell, seitenverkehrt, vergrößert	Projektionsapparat
$a = f$	$a' = \infty$	virtuell, Schnittpunkt der Strahlen im Unendlichen	Scheinwerfer, Lupe
$a < f$	$a' < 0$	virtuell, seitenrichtig, vergrößert	Lupe

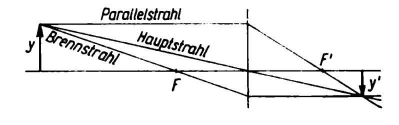


Bild 19. Bildkonstruktion bei unendlich dünner Linse

Bildkonstruktion für eine dünne Konvexlinse nach Bild 19. Um den zu einem Objektpunkt gehörigen Bildpunkt zu finden, wählt man die drei ausgezeichneten Strahlen (zur geometrischen Konstruktion genügen zwei von ihnen), von denen man weiß:

- Parallelstrahlen laufen durch den bildseitigen Brennpunkt,
- Brennstrahlen werden zu Parallelstrahlen,
- Haupt- (Mittelpunkts-) Strahlen verlaufen unabgelenkt.

Diese drei von einem beliebigen Punkt des Objekts ausgehenden Strahlen schneiden sich im gesuchten Bildpunkt.

3.4.3.4. Dicke Linsen

Nur bei sehr dünnen Linsen darf man die Brennweite, Gegenstands- und Bildweite von der Linsenmitte aus messen. Bei dickeren Linsen müssen für Berechnung und Bildkonstruktion die im Bild 17 angegebenen *Hauptebenen* zugrunde gelegt werden. Die Hauptebenen liegen dort, wo ein achsenparalleler Strahl den rückwärts verlängerten, von ihm erzeugten Brennstrahl schneidet.
Bezeichnet man den Abstand der objektseitigen Hauptebenen H vom objektseitigen Linsenscheitel mit s_H und den entsprechenden Abstand auf der Bildseite mit s_H', so gilt für eine Linse der Dicke d:

$$s_H = -[(n - 1)/n]\, df'/r_2 \tag{35}$$

$$s_H' = -[(n - 1)/n]\, df'/r_1 \tag{36}$$

Beispiel. Bei einer symmetrischen Bikonvexlinse mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ ist $r_2 = -r_1$. Die Brennweite ist nach (32) $f' = r_1$ und $s_H = -[(1{,}5 - 1)/1{,}5]\, dr_1/(-r_1) = d/3$. Desgl. ist $s_H' = -d/3$; d. h., beide Hauptebenen teilen die Linsendicke in 3 gleiche Teile.

3.4.3.5. Systeme dünner Linsen

Zwei dünne Linsen, deren einander zugekehrte Hauptebenen die Entfernung e haben, bilden ein *Linsensystem* mit der Brennweite:

$$f' = f_1'f_2'/(f_1' + f_2' - e) \tag{37}$$

Damit lassen sich zwei im Abstand e befindliche *dünne* Linsen rechnerisch durch eine einzige Linse der Brennweite f ersetzen. Um die Bildkonstruktion (s. Bild 17) ausführen zu können, muß die Lage der beiden Hauptebenen H und H' von den beiden Linsen L_1 und L_2 nach den Gleichungen

$$\overline{L_1H} = f_1'e/(f_1' + f_2' - e) \tag{38}$$

$$\overline{H'L_2} = f_2'e/(f_1' + f_2' - e) \tag{39}$$

berechnet werden. Je nach dem Vorzeichen des Nenners $(f_1' + f_2' - e)$ können die Hauptebenen des Systems zwischen den oder außerhalb der beiden Einzellinsen liegen. So liegen z. B. beide Hauptebenen eines Teleobjektivs weit vor der Frontlinse. Die Bildkonstruktion erfolgt analog zu Bild 17 mit Hilfe der Hauptebenen.

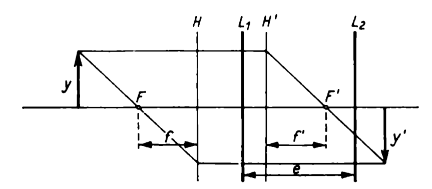


Bild 20. Bildkonstruktion bei einem Linsensystem

Beispiel. Ein Linsensystem mit der Sammellinse $f_1' = +2$ cm und der Zerstreuungslinse $f_2' = -4$ cm im Abstand $e = +3$ cm liefert nach den angegebenen Formeln $f' = +1{,}6$ cm (Systembrennweite), $\overline{L_1H} = -1{,}2$ cm (Abstand der linken Hauptebene von der linken Linse) und $\overline{H'L_2} = +2{,}4$ cm (Abstand der rechten Linse von der rechten Hauptebene). Die dazugehörige Bildkonstruktion mit maßstäblichen Größen zeigt Bild 20.

3.4.3.6. Abbildungsfehler

Sie bewirken, daß das von der Linse entworfene Bild unscharf und geometrisch verzerrt wird.

- Der *Öffnungsfehler* (sphärische Aberration) besteht darin, daß randwärts einfallende Strahlen stärker gebrochen werden als die durch die Mittelzone gehenden.
- *Astigmatismus* (Zweischalenfehler). Ein schräg einfallendes Bündel bildet einen Objektpunkt an zwei verschiedenen Stellen als zwei kurze, senkrecht zueinander stehende Striche ab. Die verschiedenen Punkte einer Ebene werden in zwei unterschiedlich gekrümmten Bildschalen abgebildet (Bildfeldwölbung).
- *Farbfehler* (chromatische Aberration). Da die Brechzahl von der Wellenlänge des Lichts abhängt, ergibt jede Farbe einen anderen Brennpunkt.
- Der *Verzeichnungsfehler* entsteht, wenn der Abbildungsmaßstab innerhalb der Bildebene nicht konstant ist. So kann z. B. eine quadratische Figur kissen- oder tonnenförmig verzerrt werden.

Alle Abbildungsfehler werden in den modernen, aus mehreren Einzellinsen zusammengesetzten optischen Systemen weitgehend korrigiert. So sind z. B. *Aplanate* mehrlinsige Systeme, die frei vom sphärischen Fehler sind. *Achromate* bestehen aus mehreren Linsen verschiedener Dispersion, wodurch der Farbfehler aufgehoben wird, indem die Bilder für zwei ausgewählte Farben zusammenfallen. Bei den noch besser korrigierten *Apochromaten* fallen die Bildorte für drei Farben zusammen. Sie sind zugleich für zwei Farben aplanatisch. Bei einem *Anastigmaten* fallen beide Bildschalen in der Bildebene praktisch zusammen. Moderne fotografische Aufnahmeobjektive tragen diese Bezeichnungen nicht mehr, da bei ihnen die Fehlerfreiheit als selbstverständlich vorausgesetzt wird.

3.4.4. Das Auge und seine Unterstützung durch optische Geräte

Die optischen Geräte und Instrumente Lupe, Fernrohr und Mikroskop mit allen ihren Abarten dienen dazu, die normale Sehleistung des Auges zu erhöhen.

Eine weitere Anwendung findet die *Linsenoptik* in der Beseitigung oder zumindest Milderung der Auswirkungen von Augenfehlern (Fehlsichtigkeit). Die optische Industrie stellt ferner zahlreiche Geräte und Instrumente her, deren Aufgabe die objektive, d. h. von der Fähigkeit des menschlichen Auges unabhängige Erfassung von Lichtwirkungen ist (Fotoapparat, Spektrograf usw.).

Als *Vergrößerung* eines optischen Instruments bezeichnet man das Verhältnis:

$$\Gamma' = \tan \sigma_1 / \tan \sigma \qquad (40)$$

σ_1 und σ Sehwinkel mit bzw. ohne Instrument

3.4.5. Lupe

Eine Sammellinse wirkt als *Lupe*, d. h., sie erzeugt ein vergrößertes, seitenrichtiges und virtuelles Bild, wenn sich der Gegenstand im vorderen Brennpunkt befindet. In diesem Fall ergibt sich, wenn f' in cm eingesetzt wird, die sogenannte *Normalvergrößerung* aus:

$$\Gamma_0' = 25/f' \qquad (41)$$

Γ_0'	f'
—	cm

Eine Linse ist also nur dann als Lupe verwendbar, wenn $f' < 25$ cm ist. Das virtuelle Bild liegt im Unendlichen, und auch das Auge ist auf Unendlich akkommodiert (d. h. völlig entspannt).
Man kann die Lupe aber auch so halten, daß das Auge sich auf die *deutliche Sehweite* von 25 cm einstellt. Dann ist die Vergrößerung:

$$\Gamma_1' = (25/f') + 1 \qquad (42)$$

Γ_1'	f'
—	cm

Für diesen Fall kann die Brennweite f' auch größer als 25 cm sein.

3.4.6. Fernrohre

Astronomisches Fernrohr

Der sehr weit (praktisch im Unendlichen) liegende Gegenstand wird in der Brennebene des Objektivs in bezug auf die Achse seitenverkehrt und verkleinert reell abgebildet.
Dieses Zwischenbild wird mit dem *Okular*, das als Lupe wirkt, vergrößert. Die Gesamtvergrößerung beträgt:

$$\Gamma' = -f_1'/f_2' \tag{43}$$

f_1' und f_2' Brennweiten des Objektivs und des Okulars

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß das Bild seitenverkehrt ist.

Okulare. Das HUYGENS*sche Okular* besteht aus der Feld- und der Augenlinse, zwischen denen das vom Objektiv entworfene Zwischenbild liegt. Es wird von der Feldlinse etwas zusammengezogen, wodurch das Bildfeld an nutzbarer Ausdehnung gewinnt. Durch die HUYGENSsche Okularanordnung ist der Farbfehler behoben. Sie ist für Meßzwecke weniger geeignet als für Mikroskope und Beobachtungsfernrohre.
Beim RAMSDENschen Okular liegt die Bildebene vor dem ebenfalls aus zwei Linsen gebildeten System, so daß ein Fadenkreuz o. ä. im Tubus verbleiben kann. Auch dieses Okular ist farbfehlerfrei und wird für Meßfernrohre verwendet.
Bei der *Fluchtungsprüfung* im Werkzeugmaschinenbau betrachtet man mit einem Fernrohr den am anderen Ende angebrachten *Kollimator*. Dieser enthält eine beleuchtete Strichplatte, die von einer Linse im Unendlichen abgebildet wird. Bei Abweichungen von der Geraden erscheint die Strichmarke gegenüber der des Fernrohrs verschoben. Parallelversetzungen sind dagegen hiermit nicht festzustellen.

Terrestrisches Fernrohr

Die Bildumkehr des astronomischen Fernrohrs kann durch eine zwischen Objektiv und Okular gelegene, nicht vergrößernde *Umkehrlinse* aufgehoben werden, wodurch das Rohr jedoch noch länger wird. Heute bevorzugt man zwei gekreuzt angeordnete *Umkehrprismen* (Prismenfeldstecher).

Holländisches (Galilei-) Fernrohr

Dieses Fernrohr besteht aus einer Sammellinse als Objektiv und einer Zerstreuungslinse als Okular. Die Vergrößerung ist:

$$\Gamma' = f_1'/f_2' \tag{44}$$

Wegen der negativen Brennweite f_2' des Okulars kommt ein positiver Wert heraus; das Bild ist seitenrichtig. Das Rohr ist vorteilhaft kurz, gestattet aber nicht die Anbringung eines Fadenkreuzes im Gesichtsfeld. Die Vergrößerung ist wegen des kleinen Gesichtswinkels meist nur gering (4- bis 6fach).

3.4.7. Zusammengesetztes Mikroskop

Während man die Lupe als „einlinsiges Mikroskop" bezeichnet, besteht das *zusammengesetzte Mikroskop* aus Objektiv und Okular. Der nahe am Brennpunkt des Objektivs befindliche Gegenstand wird im Tubus (Rohr) reell, seitenverkehrt und vergrößert abgebildet. Dieses Zwischenbild wird dann wie beim Fernrohr mit dem Okular nochmals vergrößert. Die *Gesamtvergrößerung* ist:

$$\Gamma' = -25t/f_1'f_2' \tag{45}$$

Γ'	t	f'
—	cm	cm

t optische Tubuslänge, d. h. Abstand der inneren Brennpunkte, f_1' und f_2' Brennweiten von Objektiv und Okular

Die mechanische Tubuslänge zwischen Ansatz des Objektivs und oberem Rand beträgt i. allg. 160 mm. Das zu vergrößernde Objekt wird mit einem Deckglas (0,16 mm) bedeckt, zumal die Objektive für den

Gebrauch mit Deckglas korrigiert sind (außer bei Auflichtmikroskopen). Bei starken Vergrößerungen bringt man zwischen Deckglas und Frontlinse einen Tropfen Immersionsflüssigkeit (Wasser $n = 1{,}33$, Zedernöl $n = 1{,}51$ oder Monobromnaphthalin $n = 1{,}66$).

Unter der *numerischen Apertur* eines Objektivs versteht man das Produkt aus der Brechzahl n des objektseitigen Mediums mit dem Sinus des Winkels β zwischen der optischen Achse und einer Geraden, die von einem auf der Achse liegenden Objektpunkt zum Linsenrand gezogen ist:

$$A = n \sin \beta \tag{46}$$

Bei Trockensystemen ist $A \leqq 1$ (da der erwähnte Winkel höchstens 90° sein kann), bei Immersionssystemen bis etwa 1,4. Das *Auflösungsvermögen* des Mikroskops ist der numerischen Apertur A proportional, die *Bildhelligkeit* deren Quadrat. Der kleinste auflösbare Abstand d zweier Objektpunkte beträgt bei schiefer Beleuchtung:

$$d = \lambda / 2A \tag{47}$$

Die *förderliche Vergrößerung* Γ_f' ist diejenige, bei der die kleinsten Einzelheiten noch gut erkennbar sind. Sie ist durch die numerische Apertur A, die Wellenlänge λ des verwendeten Lichts und den kleinsten auflösenden Sehwinkel ε des Auges begrenzt:

$$\Gamma_f' = \varepsilon A / 6{,}88\lambda \tag{48}$$

Γ_f'	ε	A	λ
—	′	—	mm

Damit ergibt sich für eine mittlere Wellenlänge des Tageslichts von 560 nm ein Wert von $\Gamma_f' = 1600$. Weitere Vergrößerung (etwa durch Verwendung stärkerer Okulare) hat keinen Wert, da zwar das Bild größer wird, aber keine weiteren Einzelheiten mehr erscheinen können. Etwas höhere Vergrößerungen lassen sich beim Lichtmikroskop nur durch Verwendung kürzerer Wellenlängen (Ultraviolett) in Verbindung mit Quarz- oder Flußspatoptiken erreichen.

3.5. Fotometrie

3.5.1. Arbeitsmethoden und Bedeutung der Fotometrie

Die praktische Fotometrie mißt das Licht aufgrund der im menschlichen Auge hervorgerufenen *Helligkeitsempfindung*. Die dabei verwendeten Einheiten gehen von einer international vereinbarten spektralen Hellempfindlichkeit des Auges aus, da diese bei den einzelnen Personen individuell verschieden ist (Bild 21). Der *spektrale Hellempfindlichkeitsgrad* ergibt sich aus dem

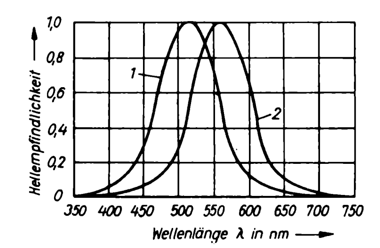


Bild 21. Relative spektrale Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges.
1 dunkeladaptiertes Auge (Stäbchensehen);
2 helladaptiertes Auge (Zäpfchensehen)

Verhältnis fotometrische Lichtwirkung zu Strahlungsleistung, wobei für die maximale Empfindlichkeit der Wert 1 gesetzt wird. Daraus geht hervor, daß die von der Fotometrie zu benutzenden Größen nicht rein physikalisch, d. h. objektiv, definiert werden können. Es kommt vielmehr auf die spezifische Wirkung des Lichts auf das Auge an, so daß die Fotometrie ein Grenzgebiet zwischen der Physik und der Physiologie ist. Sie bildet die wissenschaftliche Grundlage der *Lichttechnik**), deren Bedeutung für die Arbeitsproduktivität des Menschen, für Wirtschaft, Verkehr und Kultur sehr groß ist.

*) s. Fachwissen des Ingenieurs, Band 5, Abschn. LICHTTECHNIK

3.5.2. Fotometrische Größen

Lichtstärke

Seit 1948 gilt als Einheit der Lichtstärke die *Candela* (cd), die auf die Strahlung eines schwarzen Körpers definierter Fläche zurückgeführt wird*). Ein *schwarzer Körper* ist ein Körper mit maximalem Absorptions- und zugleich auch Emissionsvermögen, der näherungsweise durch eine kleine Öffnung in einem strahlungsundurchlässigen Hohlkörper realisiert wird.
Die Lichtstärke einer punktförmigen Lichtquelle ist nach allen Richtungen des Raums gleich. Je nach der Form des Leuchtkörpers ist sie aber bei den technischen Lichtquellen sehr verschieden. Einen Überblick liefert die als Polardiagramm gezeichnete *Lichtverteilungskurve* (*Indikatrix*). Da die Leuchtkörper meist nahezu rotationssymmetrisch sind, genügt die Wiedergabe einer durch die Achse laufenden Halbebene. Für alle Typen einer Lampenart gilt die *Normallichtverteilungskurve* (Bild 22), die für eine Leistung von 1000 lm berechnet ist.

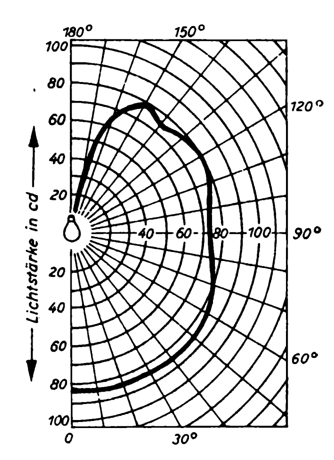


Bild 22. Normallichtverteilungskurve einer Glühlampe (1000 lm)

Beispiel. Um die Lichtstärke einer Glühlampe (40 W, 340 lm) unter einem Winkel von 40° zu berechnen, liest man unter 40° auf der Kurve 85 cd ab. Da dies für 1000 lm gilt, ergibt sich für den genannten Typ die Lichtstärke $I = 85\ \text{cd} \cdot 340\ \text{lm}/1000\ \text{lm} = 28{,}9\ \text{cd}$.

Leuchtdichte

Die Leuchtdichte L einer Fläche A in einer bestimmten Richtung ist gleich dem Quotienten aus der in dieser Richtung gemessenen Lichtstärke I und der Projektion A' der Fläche auf eine zu dieser Richtung senkrechte Ebene:

$$L = I/A' = I/A \cos\alpha \tag{49}$$

α Winkel zwischen Lichtrichtung und Flächennormalen

Der schwarze Körper hat bei 2042,5 K eine Leuchtdichte von $6 \cdot 10^5\ \text{cd/m}^2$.
Bei zu hoher Leuchtdichte wird das Auge geblendet. Daher sollen zur Beleuchtung von Arbeitsplätzen dienende Lampen, falls ihre Strahlung direkt ins Auge gelangen kann, nicht mehr als $0{,}2 \cdot 10^4\ \text{cd/m}^2$ aussenden.

Lichtstrom

Die gesamte fotometrisch gemessene Strahlungsleistung einer Lichtquelle heißt *Lichtstrom* Φ. Er ist das Integral der in den einzelnen Raumrichtungen gemessenen Lichtstärken I über den

*) s. Abschn. Grössen und Einheiten

vollen Raumwinkel 4π:

$$\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} I \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \tag{50}$$

Einheit des Lichtstroms Φ ist das *Lumen* (lm)*). Damit ist der gesamte Lichtstrom einer punktförmigen Lichtquelle von 1 cd gleich 4π lm. Hieraus ergibt sich die Lichtstärke:

$$I = \Phi/\Omega \tag{51}$$

Ω der vom Lichtstrom Φ erfüllte Raumwinkel

Maßgebend für die Wirtschaftlichkeit einer Lampe ist die *Lichtausbeute*, d. h. der je Watt erzeugte Lichtstrom (lm/W).

Beleuchtungsstärke

Eine vom Licht getroffene Fläche A erhält eine bestimmte *Beleuchtungsstärke E*:

$$E = \Phi/A \tag{52}$$

Die Einheit der Beleuchtungsstärke ist das *Lux* (lx): 1 lx = 1 lm/m² *).
Bei punktförmiger Lichtquelle nimmt die Beleuchtungsstärke E mit dem Quadrat der Entfernung ab. Außerdem ist die Beleuchtungsstärke vom Einfallswinkel abhängig (1. LAMBERT*sches Gesetz*):

$$E = (I/r^2) \cos \alpha \tag{53}$$

α Winkel zwischen Lichtrichtung und Flächennormale, r Entfernung zwischen Lichtquelle und beleuchteter Fläche

3.5.3. Messung der Lichtstärke, des Lichtstroms und der Beleuchtungsstärke

Lichtstärken werden auf einer optischen Bank gemessen, indem man zwischen eine geeichte Lichtquelle (I_1) und die Lampe mit der zu messenden Lichtstärke I_2 ein Fotometer aufstellt. Dieses hat z. B. zwei weiße Flächen, die von je einer der beiden Lampen beleuchtet werden. Das Fotometer wird so lange verschoben, bis beide Flächen gleich hell erscheinen. Dann sind ihre Beleuchtungsstärken gleich groß, und es gilt die Gleichung $E_1 = E_2$ bzw. $I_1/r_1^2 = I_2/r_2^2$, woraus sich I_2 berechnen läßt:

$$I_2 = I_1 r_2^2 / r_1^2 \tag{54}$$

r_1, r_2 Abstände des Fotometers von den beiden Lichtquellen

Von den einfachsten Fotometern sei das *Fettfleckfotometer* von BUNSEN erwähnt. Hierbei werden Vorder- und Rückseite eines transparenten Schirms beleuchtet, auf dem sich ein runder Stearinfleck befindet. Erscheint der Fleck, von beiden Seiten her gesehen, gleich hell (bzw. verschwindet er), so ist die Bedingung $E_1 = E_2$ erfüllt.
Bei der Anwendung *objektiver* Methoden ist darauf zu achten, daß der verwendete Strahlungsempfänger auch der spektralen Empfindlichkeit des Auges entspricht. Am bequemsten sind für diesen Zweck *Fotoelemente* (Hauptbestandteil der elektrischen Belichtungsmesser), die der spektralen Empfindlichkeit des Auges recht nahekommen und direkt an tragbare Zeigerinstrumente angeschlossen werden können.
Zur Messung des *Gesamtlichtstroms* hängt man die Lampe in das Innere einer mattweiß gestrichenen ULBRICHTschen Kugel und mißt die Beleuchtungsstärke einer in die Wand eingesetzten Milchglasscheibe.
Luxmeter sind kleine, tragbare Geräte zur Messung der Beleuchtungsstärke in Innenräumen.

---

*) s. Abschn. GRÖSSEN UND EINHEITEN

4. Quanten- und Atomphysik

Literatur: [3, 7, 12, 13, 16, 17, 23, 24, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 42]

4.1. Atomare und molekulare Größen

Tieferes Eindringen in die Eigenschaften der Stoffe und die physikalisch-chemischen und elektrischen Vorgänge in ihnen ist erst durch Erforschung der Feinstruktur sowie der atomaren und molekularen Bewegungsvorgänge möglich.

Nach der von AVOGADRO aufgestellten Hypothese enthalten gleiche Volumina aller (idealen) Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl von Molekülen (*AVOGADROsches Gesetz*). Die Massen dieser Volumina verhalten sich zueinander wie die entsprechenden relativen Molekülmassen.
Die Anzahl der in 1 kmol*) enthaltenen Teilchen wird durch die AVOGADRO-*Konstante* angegeben:

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{26}\ 1/\text{kmol} \tag{55}$$

Die Masse je Stoffmengeneinheit wird als *molare Masse M* bezeichnet. Sie hat die Einheit kg/mol. Daraus folgt unmittelbar die Masse eines einzelnen Teilchens:

$$m_A = M/N_A \tag{56}$$

Beispiel. Die molare Masse des Kupfers beträgt $M = 0{,}063\,456$ kg/mol. Die Masse eines Kupferatoms ist dann $m_A = (63{,}456/6{,}022 \cdot 10^{26})$ kg $= 1{,}054 \cdot 10^{-25}$ kg.

Das *molare Volumen* der Teilchen ergibt sich dann aus der Definition der Dichte ($\varrho = m/V$):

$$V_m = m_A/\varrho = M/\varrho N_A \tag{57}$$

Nimmt man vereinfachend an, daß es sich um kugelförmige Teilchen handelt, die sich in einem festen Körper gegenseitig berühren, erfüllt jedes von ihnen einen würfelförmigen Raum. Daraus ergibt sich eine ungefähre Abschätzung des *Atomdurchmessers:*

$$d \approx \sqrt[3]{M/\varrho N_A} \tag{58}$$

4.2. Quanteneigenschaften des Lichts

Die Erkenntnisse der *kinetischen Gastheorie* gestatten lediglich Rückschlüsse auf die Bewegung der Moleküle bzw. Atome als ganze Teilchen, wobei angenommen wird, daß diese von einfachster Gestalt (z. B. Kugel- oder Hantelform) sind. Aufschluß über die innere Struktur dieser Teilchen gewährt erst die Natur der von ihnen emittierten oder absorbierten Strahlungen, insbesondere der des Lichts.

Das *Licht* wurde nach dem Ausbau der Theorie des elektromagnetischen Felds durch MAXWELL eindeutig zur Gruppe der elektromagnetischen Wellen gezählt. Von einer kleinen Lichtquelle ausgehend, sollten sich die Wellen kugelförmig im Raum ausbreiten, wobei ihre Intensität mit dem Quadrat des Abstands bis zu beliebiger Feinheit abnehmen konnte. Die Entdeckung des Strahlungsgesetzes für den schwarzen Körper durch PLANCK (1900) führte jedoch zu einer völlig anderen Annahme, nämlich daß sich jede elektromagnetische Strahlung *diskontinuierlich* aus einzelnen unteilbaren *Strahlungsquanten* zusammensetzt.

Ein solches Strahlungsquant enthält die Energie:

$$W = hf \tag{59}$$

h PLANCKsches Wirkungsquantum ($h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s), f Frequenz der Strahlung

*) zur Einheit der Stoffmenge s. Abschn. GRÖSSEN UND EINHEITEN



4.2.1. Lichtelektrischer Effekt (äußerer Fotoeffekt)

Wird eine auf ein Elektrometer gesetzte blanke Metallplatte mit ultraviolettem Licht bestrahlt, so lädt sich die Platte elektrisch positiv auf. Die Erklärung dieses HALLWACHS-*Effekts* (1888) ist widerspruchsfrei nur mit Hilfe der *Quantenvorstellung* möglich. Das Eintreten des Vorgangs hängt nicht von der Intensität des Lichts ab, sondern nur von seiner Wellenlänge bzw. Frequenz und der Art des belichteten Metalls, wobei die von EINSTEIN (1905) gefundene Gleichung

$$m_e v^2/2 = hf - W_0 \qquad (60)$$

erfüllt sein muß; die Energie jedes auftreffenden *Lichtquants* (*Fotons*) muß größer sein als der zum Austritt aus dem Metallgitter erforderliche Energieaufwand W_0 (siehe Tabelle 6). Der Überschuß an Energie wird in kinetische Energie des emittierten Elektrons umgewandelt.

Tabelle 6. Äußerer Fotoeffekt. Austrittsarbeit und Grenzwellenlänge für einige Metalle

Metall	Austrittsarbeit W_0 in eV*)	Grenzwellenlänge λ_{gr} in nm	Metall	Austrittsarbeit W_0 in eV*)	Grenzwellenlänge λ_{gr} in nm
Cs	1,8	691	Au	4,05	307
Rb	2,13	583	Ag	4,70	265
K	2,25	552	Pt	5,32	234

*) 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

Die Stärke des Fotostroms richtet sich nach der Anzahl der je Zeiteinheit auftreffenden Lichtquanten, d. h. nach der *Strahlungsleistung.* Die Anzahl der im Mittel von einem absorbierten Lichtquant ausgelösten Elektronen (*Quantenausbeute*) liegt bei reinen Metallen in der Größenordnung von 10^{-3}, d. h., es sind im Mittel 10^3 Lichtquanten erforderlich, um 1 Elektron zu befreien. Bei Halbleitern dagegen liegt sie zwischen 10^{-1} und 1. Die *Austrittsarbeit* entspricht bei Metallen der thermischen Austrittsarbeit (siehe Glühemission*)).

4.2.2. Compton-Effekt

Bei der Einwirkung kurzwelliger elektromagnetischer Strahlung auf *freie* (oder lose gebundene) Elektronen wird diese unter gleichzeitiger Änderung ihrer Wellenlänge seitlich gestreut. Bei der *Streuung* vergrößert sich die Wellenlänge um:

$$\Delta\lambda = (h/m_e c)\,(1 - \cos\vartheta) \qquad (61)$$

ϑ Streuwinkel, m_e Ruhmasse des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit

Das Strahlungsquant (Foton) erleidet dabei einen Energieverlust $\Delta W = h\Delta f$ und gibt diese Energie als kinetische Energie an das gestreute Elektron ab. Da sich hierbei Energie- und Impulssatz wiederspruchsfrei anwenden lassen, gilt besonders der COMPTON-Effekt als endgültiger Beweis für die korpuskulare Natur der Lichtquanten.
Für den *Streuwinkel* $\vartheta = 90°$ beträgt die Wellenlängenänderung:

$$\Delta\lambda = h/m_e c = \lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \qquad (62)$$

λ_C ist die COMPTON-Wellenlänge (des Elektrons). In analoger Weise läßt sich auch die COMPTON-Wellenlänge anderer Elementarteilchen berechnen. Man erhält z. B. für das Proton $\lambda_C = 1{,}32 \times 10^{-15}$ m.

*) s. Abschn. ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK

4.3. Wellen und Teilchen

4.3.1. Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie

Entscheidende Fortschritte bei der Erforschung der Zusammenhänge zwischen Strahlungen und Stoffen stehen in engem Zusammenhang mit der *speziellen Relativitätstheorie* von EINSTEIN (1905).

Bewegt sich ein Körper im Bezugssystem S mit der sehr großen Geschwindigkeit v geradlinig und gleichförmig gegenüber einem ruhenden Beobachter im Bezugssystem S_0, so gehen, vom Standpunkt des ruhenden Beobachters aus gesehen, auf dem bewegten Körper folgende Veränderungen vor sich:

— *Längenkontraktion:* $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ (63)

— *Zeitdehnung:* $\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$ (64)

— *Massenzunahme:* $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$ (65)

$\beta = v/c$ ist das Verhältnis der Geschwindigkeit v im bewegten Bezugssystem zu der des Lichts im Vakuum (c). Der Wurzelausdruck weicht erst dann merklich von 1 ab, wenn $v \to c$ (siehe Tabelle 7).

Tabelle 7. Relativistische Veränderung bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit

$\beta = v/c$	$\sqrt{1 - \beta^2}$	$1/\sqrt{1 - \beta^2}$	$\beta = v/c$	$\sqrt{1 - \beta^2}$	$1/\sqrt{1 - \beta^2}$
0	1,000	1,000	0,995	0,0999	10,01
0,10	0,995	1,005	0,999	0,0447	22,36
0,50	0,866	1,155	0,9999	0,0141	70,71
0,80	0,600	1,667	0,99999	0,00447	223,6
0,866	0,500	2,000	0,999999	0,00141	707,1
0,90	0,436	2,294	0,9999999	0,000447	2236
0,99	0,141	7,09	1,000	0	∞

Während die *Längenkontraktion* der unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich ist, spielt die *Zeitdehnung* bei Zerfallsvorgängen schnell bewegter Elementarteilchen eine wichtige Rolle. Da alle Zeitintervalle Δt im bewegten System größer sind als im ruhenden, läuft die Zeit im bewegten System langsamer ab. Dies betrifft alle physikalischen, chemischen und biologischen Vorgänge gleichermaßen, daher gibt es auch kein Mittel, die Zeitdehnung auf dem bewegten Objekt selbst festzustellen.
Umfassende technische Bedeutung aber hat die *relativistische Massenzunahme* bei der Beschleunigung von Elektronen und anderen Teilchen, deren Trägheit (und damit die Masse) mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer wird, so daß wohl eine beliebige Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit möglich ist, diese jedoch nie überschritten werden kann.
Mit der Feststellung der korpuskularen Eigenschaften der Lichtquanten bleiben aber die in der Optik erscheinenden Welleneigenschaften vollständig erhalten. Die Frage nach der Natur des Lichts läßt sich nicht mit einem Entweder-Oder, sondern nur im Sinne eines Sowohl-Als-auch beantworten. Je nach Art des Experiments tritt die Wellen- oder Teilcheneigenschaft in Erscheinung.

4.3.2. Masse-Energie-Beziehung

In der relativistischen Massenzunahme kommt die wichtigste Erkenntnis EINSTEINS zum Ausdruck, daß jede Art von Energie zugleich eine bestimmte Masse darstellt und umgekehrt. Das ist die *Masse-Energie-Beziehung:*

$$W = mc^2 \quad (66)$$



Mit dem Faktor c^2 (Quadrat der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit) beträgt z. B. die Masse eines Lichtquants in Verbindung mit Gl. (59):

$$m = hf/c^2 = h/c\lambda \tag{67}$$

Da aber nach Gl. (65) die Masse eines sich mit der Lichtgeschwindigkeit c bewegenden Fotons unendlich groß sein müßte, muß dessen Ruhmasse $m_0 = 0$ sein.

Beispiel. Die in 1 g Masse enthaltene Energie beträgt $W = 10^{-3}$ kg · $(3 \cdot 10^8)^2$ m²/s² $= 9 \cdot 10^{13}$ J ($= 25 \cdot 10^6$ kWh).

4.3.3. De-Broglie-Wellenlänge

Ebenso wie jedes Strahlungsquant von der Wellenlänge λ eine bestimmte, nach Gl. (67) berechenbare Masse m aufweist, kann auch jedem anderen Teilchen (z. B. einem Elektron der Masse m_e, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt), eine bestimmte Wellenlänge λ zugeordnet werden (DE-BROGLIE-Wellenlänge):

$$\lambda = h/mv \tag{68}$$

Bei großen Geschwindigkeiten ist für m nicht die Ruhmasse m_0, sondern die aus Gl. (65) folgende *Impulsmasse* einzusetzen. Auch handelt es sich nicht um elektromagnetische Wellen, obwohl sie den optischen Gesetzen der Interferenz und Beugung folgen, sondern um *Wahrscheinlichkeitswellen.* Im Interferenzmaximum ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen vorzufinden, sehr groß, im Minimum sehr klein (Anwendung im Elektronenmikroskop).

4.3.4. Heisenbergsche Unschärfebeziehung (Unbestimmtheitsrelation)

Mit der Entdeckung der Welleneigenschaften der Teilchen mußte im Bereich der Mikrophysik auch eine Revision der Begriffe der herkömmlichen Mechanik erfolgen. Bisher erschienen der Zustand eines Teilchens und sein Verhalten eindeutig definiert, wenn seine *Anfangslage* (Ortskoordinate x) und gleichzeitig seine *Anfangsgeschwindigkeit* (Impuls $p = mv$) genau bekannt waren. Wie HEISENBERG 1925 nachweisen konnte, ist das prinzipiell nicht möglich, weil beide Größen niemals gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden können, sondern nur mit einer naturgegebenen *Unschärfe* Δx bzw. Δp, wobei die *Unschärfebeziehung* gilt:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqq h/2\pi \tag{69}$$

Je größer die Genauigkeit ist, mit der die Ortsmessung erfolgt, desto ungenauer muß die gleichzeitig erfolgende Impulsmessung ausfallen und umgekehrt.
In entsprechender Weise gilt auch für den Energieinhalt W eines Systems während der Zeitdauer t die Beziehung:

$$\Delta W \cdot \Delta t \geqq h/2\pi \tag{70}$$

Hierauf ist u. a. die natürliche Unschärfe der Spektrallinien zurückzuführen.

4.4. Das Bohrsche Atommodell

Atommodelle haben die Aufgabe, möglichst viele physikalische und chemische Eigenschaften der Stoffe aus der inneren Struktur der Atome zu erklären. Das erste Modell dieser Art, das mit verhältnismäßig einfachem mathematischem Aufwand eine Vielfalt von Problemen lösen half, ist das BOHR*sche Atommodell* (1913), das später unter Einbeziehung der *relativistischen Mechanik* von SOMMERFELD (1915) verbessert wurde. Obwohl mit der BOHR-SOMMERFELDschen Theorie im wesentlichen nur *Ein-Elektronensysteme* (Atom des Wasserstoffs und näherungsweise die Atome der Alkalimetalle) behandelt werden können, sind viele der eingeführten Begriffe von der wellenmechanischen Theorie übernommen worden.

4.4.1. Bestandteile der Atome

Alle Atome bestehen aus dem *Atomkern* mit den darin befindlichen *Nukleonen:*

- *Proton:* relative Atommasse $A_r = 1{,}00728$, absolute Masse $m_p = 1{,}67265 \cdot 10^{-27}$ kg, elektrisch positiv
- *Neutron:* relative Atommasse $A_r = 1{,}00867$, absolute Masse $m_n = 1{,}67495 \cdot 10^{-27}$ kg, elektrisch neutral

und der *Atomhülle* mit den darin befindlichen

- *Elektronen:* relative Atommasse $A_r = 0{,}000549$, absolute Masse $m_e = 9{,}10953 \cdot 10^{-31}$ kg, elektrisch negative Elementarladung $e = 1{,}602189 \cdot 10^{-19}$ C

Die Anzahl der Elektronen in der Hülle ist gleich der Anzahl der Protonen im Kern.

4.4.2. Energie freier Elektronen

Die bei atomaren und kernphysikalischen Prozessen umgesetzten Energiemengen usw. werden meist in *Elektronenvolt* (eV) angegeben:
1 eV ist die Energiezunahme, die ein Elektron erfährt, wenn es die Spannung von 1 V ungehindert durchläuft; 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J.

Das Elektronenvolt ist keine SI-Einheit, gehört aber zu jenen Einheiten, die aus Gründen der Zweckmäßigkeit und Anschaulichkeit neben den gesetzlichen Einheiten im Spezialgebiet der Atom- und Kernphysik angewendet werden dürfen.

Wird ein Elektron von der Spannung U beschleunigt, so ist seine *kinetische Energie* (im Vakuum!) $m_e v^2/2 = eU$, seine *Endgeschwindigkeit* beträgt dann also:

$$v = \sqrt{2eU/m_e} \tag{71}$$

Bei größeren Spannungen (einige 10 kV) ist die *wahre Elektronengeschwindigkeit* beträchtlich geringer und berechnet sich unter Berücksichtigung des relativistischen Massenzuwachses, Gl. (65), aus:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 1{,}959 \cdot 10^{-6} U)^2}} \qquad \begin{array}{c|c|c} v & c & U \\ \hline \mathrm{m/s} & \mathrm{m/s} & \mathrm{V} \end{array} \tag{72}$$

4.4.3. Die Bohrschen Postulate

1. Die Elektronen laufen nur auf bestimmten ausgezeichneten Bahnen *strahlungslos* um den Kern (im Gegensatz zur klassischen Elektrodynamik, nach der umlaufende elektrische Ladungen Energie abstrahlen).

2. Jeder Bahn entspricht ein bestimmter *Energiezustand.* Beim Übergang eines Elektrons von einer Bahn mit der höheren Energie W_m auf eine Bahn mit der niederen Energie W_n wird die Energiedifferenz als Strahlungsquant abgegeben (*Frequenzbedingung*):

$$W_m - W_n = hf \tag{73}$$

3. Es sind nur solche Bahnen „erlaubt", für die der Bahndrehimpuls des umlaufenden Elektrons die Werte

$$L = m_e r^2 \omega = nh/2\pi = n\hbar \tag{74}$$

annehmen kann (*Quantenbedingung*).

m_e Masse des Elektrons, r Bahnradius, ω Winkelgeschwindigkeit des umlaufenden Elektrons, n Hauptquantenzahl ($n = 1, 2, 3, \ldots$), h PLANCKsches Wirkungsquantum, $\hbar$ Drehimpulsquantum

4.4.4. Wasserstoffatom

Der Kern des Wasserstoffatoms enthält nur ein Proton ($Z = 1$), das im Abstand r von einem Elektron umkreist wird. Aus der Gleichsetzung der COULOMB-Kraft der elektrostatischen Anziehung und der Radialkraft $e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = m_e r\omega^2$ ergeben sich zusammen mit der Quantenbedingung Gl. (74) die Bahnradien:

$$r = n^2 h^2 \varepsilon_0 / \pi m_e e^2 \qquad (75)$$

Für $n = 1$ (Grundzustand) ist der Radius $r = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Durch Aufnahme von Energie (Anregung) gelangt das Elektron in einen angeregten Zustand höherer Energie.

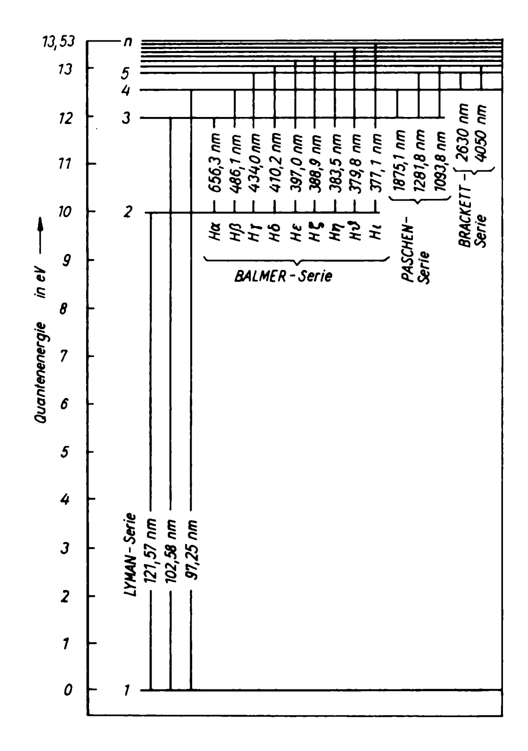


Bild 23
Termschema des Wasserstoffs

Anregungsarten: 1. *thermische Anregung* durch Flammen, in elektrischen Lichtbogen und Funken bei Temperaturen zwischen 1500 und 20000 K,
2. *Glimmentladung* im Plasma bei Zimmertemperatur (Elektronenstoß),
3. *Resonanzanregung* bei Einstrahlung von Licht gleicher Frequenz.

Nach der Anregung ($n > 1$) befindet sich das Elektron in größerer Entfernung vom Kern, fällt aber nach einer *mittleren Verweilzeit* von etwa 10^{-8} s wieder in den Grundzustand zurück. Die nach dem 2. BOHRschen Postulat beim Übergang des Elektrons von der m-ten auf die n-te Bahn frei werdende Energie wird als Strahlungsquant der Energie $W_{m,n} = hf$ nach außen abgegeben. Die Frequenz der emittierten Strahlung ergibt sich aus:

$$f = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (76)$$

Hierbei ist die RYDBERG-*Frequenz* R des Wasserstoffatoms (R_H) unter Berücksichtigung der Mitbewegung des Kerns:

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2 [1 + (m_e/m_p)]} = 3{,}2898 \cdot 10^{15}\ \text{Hz} \tag{77}$$

Zur Berechnung der einzelnen Spektrallinien sind für m und n ganze Zahlen einzusetzen ($m > n$):

$n = 1$, $m = 2, 3, 4, \ldots$ LYMAN-Serie (im ultravioletten Bereich)
$n = 2$, $m = 3, 4, 5, \ldots$ BALMER-Serie (im sichtbaren Bereich)
$n = 3$, $m = 4, 5, 6, \ldots$ PASCHEN-Serie (im ultraroten Bereich)
$n = 4$, $m = 5, 6, 7, \ldots$ BRACKETT-Serie (im ultraroten Bereich)
$n = 5$, $m = 6, 7, 8, \ldots$ PFUND-Serie (im ultraroten Bereich) usw.

Einen Überblick liefert das *Termschema des Wasserstoffs* (Bild 23). Der Übergang des Elektrons von $n = 1$ auf $n = \infty$ entspricht seiner völligen Abtrennung vom Kern, das Atom ist ionisiert. Die *Ionisierungsenergie* des Wasserstoffs berechnet sich aus:

$$W_{10} = hR_H = 21{,}80 \cdot 10^{-19}\ \text{J}\ (= 13{,}6\ \text{eV}) \tag{78}$$

4.4.5. Quantenzahlen

Die Weiterführung der BOHRschen Atomtheorie führte zu dem Ergebnis, daß die Energiezustände des Atoms nicht allein durch die Hauptquantenzahl n, sondern durch insgesamt 4 Quantenzahlen zu beschreiben sind. Diese sind

1. Hauptquantenzahl n

2. Nebenquantenzahl (radiale oder Drehimpulsquantenzahl) l

Im BOHR-SOMMERFELDschen Modell zerfällt jeder durch eine Hauptquantenzahl n gekennzeichnete Energiezustand in n Ellipsenbahnen mit gleich großer Hauptachse, aber unterschiedlicher Exzentrizität.

Numerierung $l =$	0	1	2	3	… $(n-1)$
Bezeichnung*)	s	p	d	f	

Beispiel. Die Bahn 4f ist die Kreisbahn selbst; die Bahn 4s ist die zur Hauptquantenzahl 4 gehörende Ellipse mit der größten Exzentrizität.

3. Magnetische (räumliche) *Quantenzahl m*

Sie kann bei gegebener Nebenquantenzahl $(2l + 1)$ unterschiedliche Werte annehmen und wird im BOHR-SOMMERFELDschen Modell als unterschiedliche räumliche Orientierung der Bahnebene interpretiert.

Beispiel. Das im Zustand 4f befindliche Elektron kann (wegen $l = 3$) in $(2 \cdot 3 + 1) = 7$ unterschiedliche Energieniveaus aufspalten.

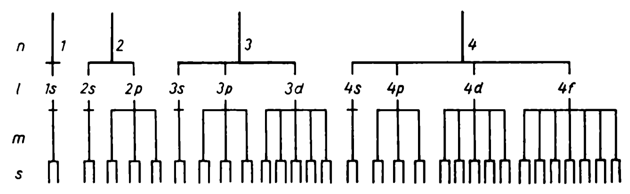


Bild 24. Aufspaltung der Energieniveaus ($n = 1, \ldots, 4$)

*) s. auch Abschn. CHEMIE, Atombau

4. Spinquantenzahl s

Jeder der durch n, l und m gekennzeichneten Zustände kann nochmals in 2 Zustände aufspalten, die mit $s = +1/2$ oder $s = -1/2$ unterschieden werden. Ihnen entspricht (in der heute nicht mehr zulässigen Deutung) eine Rotation (*Eigendrehimpuls*) des Elektrons um seine eigene Achse im Links- bzw. Rechtssinn. Die im Bild 24 schematisch dargestellte Aufspaltung der Energieniveaus ist beim Wasserstoffatom unter gewöhnlichen Verhältnissen nicht zu beobachten, spielt aber beim Aufbau der größeren Atome eine entscheidende Rolle.

4.5. Aufbau der größeren Atome

4.5.1. Pauli-Prinzip

Gleichlaufend mit der Ordnungszahl im Periodensystem der Elemente nimmt auch die Anzahl der Elektronen in den Atomhüllen zu. Dabei gilt das PAULI-Prinzip (1925):

Jeder durch die Quantenzahlen n, l, m und s gekennzeichnete Energiezustand in der Atomhülle darf jeweils nur von einem Elektron besetzt werden.

Die *Besetzung der Energieniveaus* erfolgt dabei mit fortschreitender Ordnungszahl in der Regel der Reihe nach von unten her, indem die Zustände mit niederer Energie zuerst besetzt werden. Dabei faßt man die zu jeweils einer Hauptquantenzahl gehörenden Elektronen zu einer *Schale* zusammen, wobei die zu $n = 1$ gehörigen Zustände die K-*Schale*, die zu $n = 2$ gehörigen die L-*Schale* darstellen. Es folgen darauf die M-, N-, O-, P-*Schale* (Tabelle 8). Die Elektronen gleicher Nebenquantenzahl bilden jeweils eine *Unterschale*. Für die Besetzung der Unterschalen gilt die HUNDsche Regel:

Alle Energiestufen einer Unterschale werden erst mit Elektronen einheitlicher Spinrichtung besetzt, ehe sie durch Elektronen mit entgegengesetztem Spin vervollständigt werden.

Tabelle 8. Besetzungsmöglichkeiten der ersten Hauptschalen

Hauptquantenzahl $n = 1, 2, 3, \ldots$	Nebenquantenzahl $l = 0, 1, 2, \ldots$	Magnetische Quantenzahl $m = -l, \ldots, 0, \ldots, +l$	Maximale Anzahl der Elektronen in der	
Hauptschalen	Unterschalen	Anzahl der Plätze	Unterschale	Hauptschale
K	1s	1	2	2
L	2s	1	2	
	2p	3($2p_x$, $2p_y$, $2p_z$)	6	8
M	3s	1	2	
	3p	3($3p_x$ $3p_y$, $3p_z$)	6	
	3d	5	10	18

4.5.2. Auffüllung der Elektronenschalen

Die Besetzung der Elektronenhülle (*Elektronenkonfiguration*) bei den einzelnen Elementen des Periodensystems geht aus Bild 25 hervor.

In symbolischer Schreibweise wird die Elektronenkonfiguration durch die besetzten Energiezustände zum Ausdruck gebracht. Der obere Index bedeutet die Anzahl der Elektronen, mit denen das davorstehende Niveau besetzt ist.

Beispiele. 1. *Heliumatom.* Es hat nach Bild 25 die Konfiguration $1s^2$, da das beim Wasserstoffatom nur mit einem Elektron belegte Niveau noch ein zweites Elektron entgegengesetzter Spinrichtung aufnehmen kann.

2. *Natriumatom.* Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, d. h., alle Niveaus sind voll besetzt bis auf 3s, das nur mit 1 Elektron belegt ist (siehe Bild 25).

3. *Galliumatom.* Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$. Die numerische Reihenfolge bei der Besetzung der Schalen wird nicht streng eingehalten. Aus energetischen Gründen wird z. B. die Unter-

schale 3d nicht im Anschluß an die Unterschale 3p besetzt, sondern erst nach Aufbau des zur N-Schale gehörenden Niveaus 4s (im Bild 25 folgt z. B. die Unterschale 3d der Unterschale 4s).

Als *allgemeine Regelmäßigkeiten* treten besonders hervor: Der Aufbau jeder Schale beginnt mit einem *Alkali-* und einem *Erdalkalimetall.* Jede Unterschale der p-Elektronen schließt mit einem *Edelgas* ab. Die Unterschalen der f-Elektronen sind mit den *Lanthaniden* (seltenen Erden) bzw. den *Aktiniden* (u. a. Transuranen) besetzt.

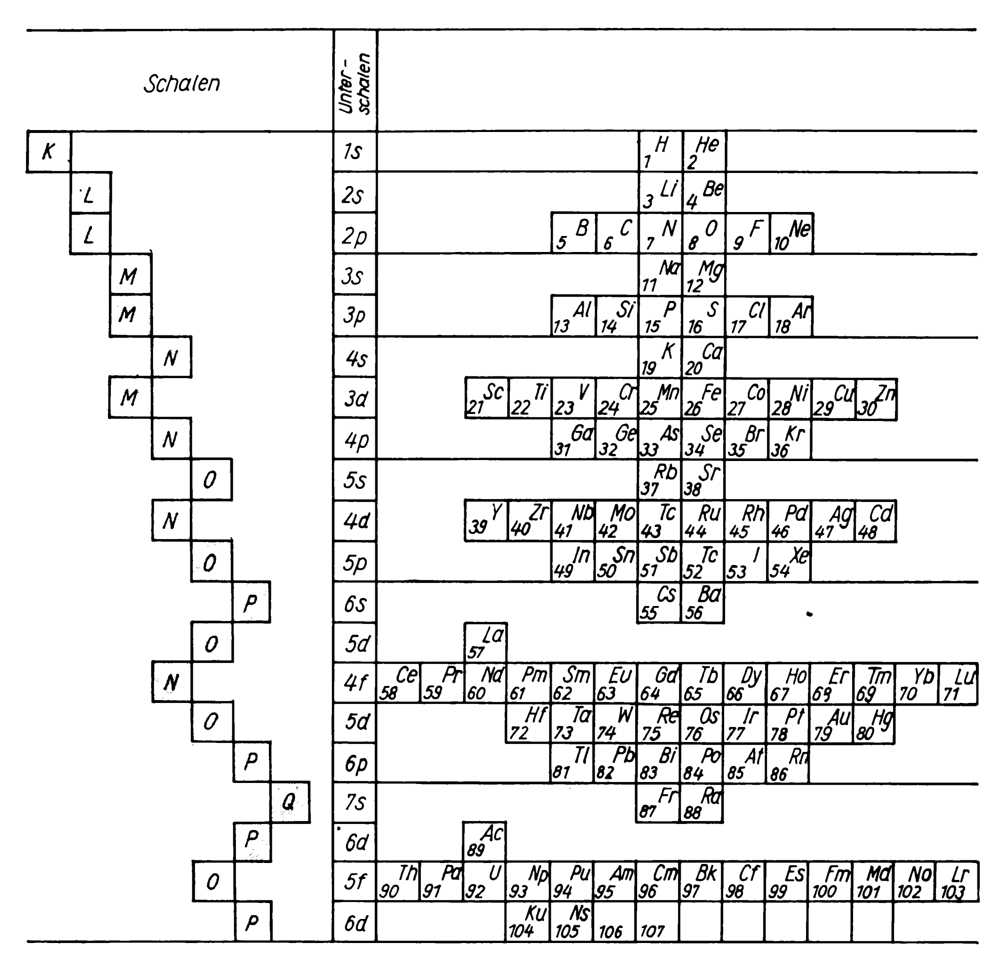


Bild 25. Elektronenverteilung der Elemente in der Reihenfolge der Ordnungszahl

4.6. Wellenmechanische Betrachtung des Atoms

4.6.1. Weiterführung der Quantentheorie

Das Bohr-Sommerfeldsche Atommodell kann als ein Versuch bezeichnet werden, die von Planck begründete Quantenhypothese mit den Begriffen der klassischen Mechanik des Massenpunkts zu verbinden. Grundsätzlich neue und weiterführende Wege wurden in der neueren *Quantenmechanik* beschritten: der *Matrizenmechanik* Heisenbergs (1925) und der *Wellenmechanik* Schrödingers (1926).

Die SCHRÖDINGERsche Wellenmechanik ordnet dem atomaren System eine *Wellenfunktion* ψ zu, für die zunächst wie in der klassischen Physik die allgemeine Gleichung einer dreidimensionalen Welle gilt:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{79}$$

Δ LAPLACE-*Operator* $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

Wird die *Phasengeschwindigkeit* $u = \lambda f$ nach der DE BROGLIEschen Gl. (68) durch $u = hf/mv$ ersetzt und der Teilchenimpuls mv durch die Gesamtenergie W sowie die potentielle Energie U des im Abstand r vom Kern befindlichen Elektrons gemäß $mv^2/2 = W - U$, so entsteht:

$$u = hf/\sqrt{2m(W - U)} \tag{80}$$

Wird Gl. (80) in die allgemeine Gl. (79) eingesetzt, so nimmt mit $U = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ nach Abspaltung des zeitabhängigen Anteils die bekannte SCHRÖDINGER-*Gleichung* für das Wasserstoffatom die Form an:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0 \tag{81}$$

Sie beschreibt bei gegebener potentieller Energie des Elektrons die stationären Energiezustände und die entsprechenden Quantenzahlen. Die Berechnung liefert mit den Hauptquantenzahlen n genau die gleichen diskreten Energiewerte, wie sie sich für das Wasserstoffatom ergeben.

4.6.2. Physikalische Bedeutung der Wellenfunktion

In formaler Hinsicht entspricht die Größe ψ in Gl. (81) der Amplitude einer Welle im Abstand $r(x, y, z)$ vom Ausgangspunkt nach Ablauf der Zeit t. Über deren physikalische Bedeutung macht jedoch die SCHRÖDINGER-Gleichung selbst keine Aussage. Sie wird allgemein so interpretiert, daß ihre *Norm* $\psi\psi^* = |\psi|^2$ (*ψ^* ist der zu ψ konjugiert komplexe Wert*) die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* des Elektrons darstellt. Im Gegensatz zur BOHRschen Theorie bewegt sich das Elektron nicht auf mathematisch definierten Bahnen um den Kern (was nach der HEISENBERGschen Unschärfebeziehung auch gar nicht möglich ist), sondern befindet sich in einem räumlichen Gebiet, dessen Form und Ausdehnung ebenfalls durch die ψ-Funktion bestimmt ist. Im Abstand r, wo die Wahrscheinlichkeit, das Elektron anzutreffen, am größten ist, hat die Norm $\psi\psi^*$ ihr Maximum. Im einfachsten Fall des H-Atoms im (1s)-Grundzustand ist dieser Abstand gleich dem BOHRschen Radius nach Gl. (75) mit $n = 1$.

4.6.3. Orbitalmodell

Bild 26 zeigt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in den Zuständen 1s, 2s und 2p im Abstand r vom Kern. Darunter sind die Querschnitte der entsprechenden *Aufenthaltsräume* oder *Orbitale* angedeutet. Diese sind nicht scharf begrenzt, geben aber das räumliche Gebiet an, in dem das Elektron *mit überwiegender Wahrscheinlichkeit* zu finden ist. Die Räume sind bei den s-Zuständen kugelsymmetrisch, bei den p-Zuständen rotationssymmetrisch und bei den d- und f-Elektronen von komplizierterer Gestalt.

Beispiele. 1. 1s-*Elektron* (*Wasserstoffatom*). Es stellt eine kugelförmige Wolke dar, deren „Dichte" (Aufenthaltswahrscheinlichkeit) mit zunehmender Kernnähe stark zunimmt.

2. *Heliumatom.* Entsprechend den 2 Elektronen von entgegengesetztem Spin sind 2 gleich große kugelförmige Orbitale vorhanden, die sich ungestört gegenseitig durchdringen.

3. 2s-*Elektron* (*Lithiumatom*). Es zerfällt in einen kernnahen kugelförmigen Teil und eine deutlich davon getrennte Kugelschale. Hiermit erklärt sich die leichte *Ionisierbarkeit* der Alkalimetalle.

4. 2p-*Elektron* (*Boratom*). Es besteht aus 2 eiförmigen, symmetrisch zu beiden Seiten des Kerns liegenden Hälften (auf schematischen Skizzen häufig birnenförmig langgestreckt dargestellt). Das Elektron hält sich mit gleich großer Wahrscheinlichkeit in jeder der beiden Hälften auf.

5. *Stickstoffatom*. Die 3 zur Unterschale 2p gehörenden Elektronen werden mit p_x, p_y und p_z unterschieden und sind wie die Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems angeordnet (Bild 27). Beim Hinzutreten von Elektronen der anderen Spinrichtung werden die gleichen Räume noch einmal besetzt (siehe He-Atom).

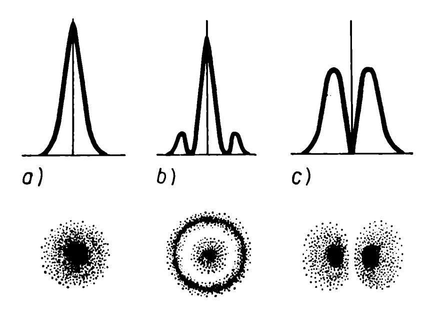


Bild 26. Ladungsdichte und Aufenthaltsräume (Orbitale) der Elektronen 1s, 2s, 2p

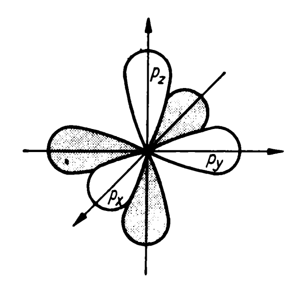


Bild 27. Anordnung der Orbitale p_x, p_y und p_z (z. B. im Stickstoffatom)

4.7. Bindungsarten

Die Bindung der Atome in den Molekülen und Kristallgittern erfolgt durch zwischen den Atomen wirkende Kräfte verschiedener Art*).

4.7.1. Ionenbindung (Ionenbeziehung, heterogene Bindung)

Die *Ionenbindung* beruht auf der elektrostatischen Anziehung entgegengesetzt geladener Ionen, die einerseits aus einem leicht ionisierbaren metallischen Element und andererseits aus einem nichtmetallischen Element, dessen Atomhülle noch eine entsprechende Anzahl von Elektronen aufnehmen kann, stammen. Die *Kationen* und *Anionen* treten zum Kristallgitter zusammen, wobei der Aufbau der Atomhülle unverändert bleibt.

Beispiel. Alle anorganischen Säuren, Basen und Salze (z. B. Na^+Cl^-) haben Ionenbindung.

4.7.2. Valenzbindung (chemische, kovalente oder homöopolare Bindung)

Sie wird durch Elektronen *mit paarweise entgegengesetzter Spinrichtung* hervorgerufen. Die Elektronen bilden eine Elektronenhülle, die zwei oder mehr Atomrümpfe umschließt. Die Wertigkeit wird daher durch die Anzahl der Elektronen mit ungepaartem Spin bestimmt.

Beispiel. Im Wasserstoffmolekül H_2 befinden sich beide Elektronen in einem Molekül-Orbital von ellipsoider Form.

Besondere Formen der Überlappung der Orbitale:

1. *Sigma-* (σ-) *Bindung*. Zwei s-, p- oder je ein s- und p-Orbital überlappen sich so, daß ihre Längsachsen eine gerade Linie bilden (Bild 28a bis c).
2. *Pi-* (π-) *Bindung*. Zwei p-Elektronen überlappen sich unter Parallelverschiebung ihrer Längsachsen (Bild 28d). Bei gleichem Atomabstand ist die Überlappung der σ-Bindung in der Regel stärker und damit die frei werdende Bindungsenergie größer als die einer π-Bindung.

---

*) Zu den Bindungsarten, insbesondere weiteren Bindungen, s. auch Abschn. CHEMIE, Chemische Bindung



3. *Hybridisierung.* Anstelle der selbständigen $2s^2$- und $2p^2$-Niveaus bilden sich 4 gleichwertige sp^3-*Hybridorbitale* (Bild 29), deren Energie zwischen der des 2s- und des p-Niveaus liegt. Dadurch erlangt z. B. das Kohlenstoffatom seine 4-Wertigkeit. Die zur Hybridisierung erforderliche *Promotionsenergie* wird von dem Energiegewinn gedeckt, der während des Bindungsvorgangs entsteht.

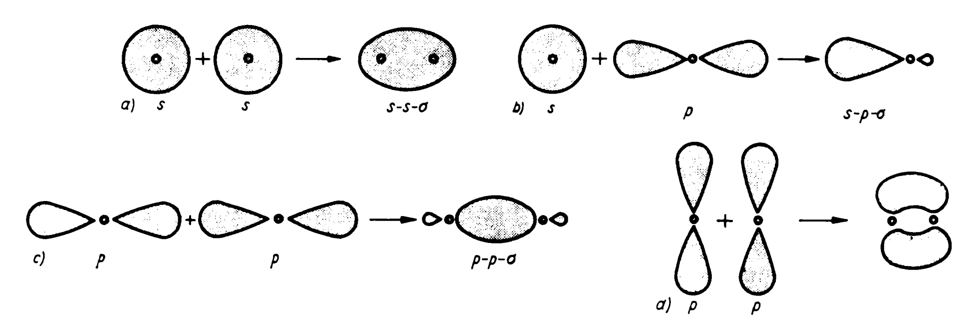


Bild 28. Verschiedene Formen der Überlappung von 1s- und 2p-Zuständen
a) s-s-(σ-)Bindung; b) s-p-(σ-)Bindung; c) p-p-(σ-)Bindung; d) p-p-(π-)Bindung

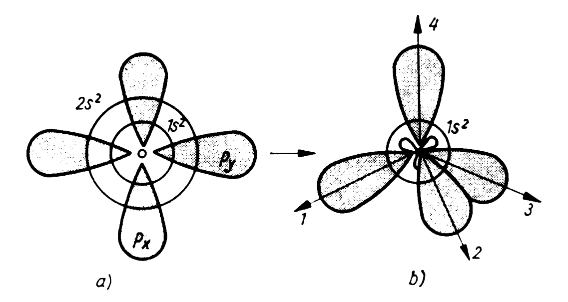


Bild 29. Hybridisierung des Kohlenstoffatoms. a) Grundzustand, die 1s- und 2s-Zustände sind doppelt besetzt; b) Valenzzustand, die 2s- und 2p-Zustände sind in 4 sp^3-Hybridzustände umgewandelt

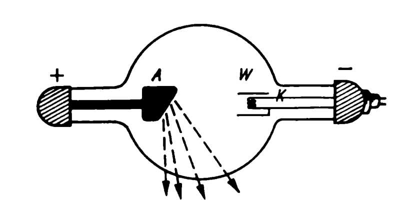


Bild 30. Röntgenröhre. *A* Anode; *K* Katode; *W* WEHNELT-Zylinder zur Fokussierung der von der Katode ausgehenden Elektronen

4.7.3. Metallische Bindung

Alle Atome sind ionisiert, die dazugehörigen Elektronen bewegen sich mehr oder weniger frei als Elektronengas in den Zwischenräumen des von den Atomrümpfen gebildeten Gitters.

4.8. Röntgenstrahlung

4.8.1. Allgemeine Eigenschaften

Trifft ein Strom schnell bewegter Elektronen nach Durchlaufen einer Spannung > 10 kV auf ein Hindernis, so entsteht dort eine kurzwellige elektromagnetische Strahlung, die nach ihrem Entdecker (1895) RÖNTGEN-*Strahlung* genannt wird. Eine *Röntgenröhre* (Bild 30) enthält in möglichst vollkommenem Vakuum eine *Glühkatode* K und ihr gegenüber als Anode A eine *Antikatode*, die so abgeschrägt ist, daß die Strahlung seitlich aus der Röhre heraustritt. Bei Röhren größerer Leistung bewirkt der von dem eng gebündelten Elektronenstrahl erzeugte *Brennfleck* eine starke Erhitzung der meist aus Wolfram bestehenden Anode. Man begegnet

dieser durch *Wasserkühlung* (Hohlanodenröhre) oder durch Konstruktion rotierender (Dreh-) Anoden. Als aktive Substanz für Leuchtschirme wird mit Silber aktiviertes Zinksulfid verwendet. Die Brechzahl für Röntgenstrahlen liegt so nahe bei 1, daß es nicht möglich ist, sie durch Linsen zu sammeln. Strahlen mit kurzer Wellenlänge werden allgemein als *harte* und solche mit längerer Wellenlänge als *weiche Strahlen* bezeichnet.
Eigenschaften von Röntgenstrahlen sind aus Tabelle 9 ersichtlich.

Tabelle 9. Eigenschaften und Anwendung der Röntgenstrahlen

Eigenschaft	Anwendung
Durchdringungsvermögen für optisch undurchsichtige Stoffe	Durchleuchtung des menschlichen Körpers, zerstörungsfreie Werkstoffprüfung
Schwärzung des fotografischen Films	Röntgenaufnahme des menschlichen Körpers und technischer Objekte
Ionisierung von Gasen	Messung der Intensität von Röntgenstrahlen mit Hilfe von Ionisationskammern, Röntgendosimeter
Fluoreszenz von Leuchtstoffen	Sichtbarmachung durchstrahlter Objekte auf dem Röntgenschirm, Verstärkerfolien bei Röntgenaufnahmen
Interferenz an den periodisch angeordneten Atomen im Kristallgitter	Röntgen-Feinstrukturuntersuchung an Kristallen und Analyse der molaren Struktur: a) Durchstrahlung feststehender Kristalle (LAUE-Diagramm) b) Drehkristallmethode zur Bestimmung des Kristallgitters c) Pulvermethode (DEBYE-SCHERRER-Diagramm)
Biologische Wirkung	gefährliche und zerstörende Wirkung im lebenden Gewebe, dauernde Schädigung der Erbanlagen, therapeutische Wirkung bei bösartigen Geschwülsten

4.8.2. Bremsstrahlung

Die Röntgenstrahlung besteht aus zwei Komponenten von verschiedener Entstehungsursache. Die eine Komponente ist die *Bremsstrahlung*, hervorgerufen durch die plötzliche Verzögerung der schnell bewegten Elektronen im Anodenmaterial. Das Spektrum der Bremsstrahlung ist kontinuierlich und bricht bei einer bestimmten *oberen Grenzfrequenz*, die einem Minimalwert der Wellenlänge λ_{gr} entspricht, scharf ab. Dieser Extremfall entspricht dem totalen Geschwindigkeitsverlust des Elektrons, dessen kinetische Energie eU sich gemäß $hf = eU$ (WIEN*sche Beziehung*) restlos in die Energie hf eines Strahlungsquants umsetzt. Es errechnet sich mit den eingesetzten Zahlenwerten die Grenzwellenlänge aus:

$$\lambda_{gr} = hc/eU = 1{,}239/U \qquad \begin{array}{|c c|} \lambda_{gr} & U \\ \hline \text{nm} & \text{kV} \end{array} \tag{82}$$

Daraus ist zu ersehen, daß die Wellenlänge der Strahlung mit zunehmender Röhrenspannung abnimmt (Bild 31), nicht aber vom Material abhängt. Je nach der Röhrenspannung unterscheidet man:

überweiche Strahlen	bei Röhrenspannung	5···20 kV,
weiche Strahlen	bei Röhrenspannung	20···60 kV,
mittelharte Strahlen	bei Röhrenspannung	60···120 kV,
harte Strahlen	bei Röhrenspannung	120···250 kV,
überharte Strahlen	bei Röhrenspannung	über 250 kV



Die *Intensität I* der Bremsstrahlung, d. h. die auf eine Fläche fallende Strahlungsleistung, die z. B. in W/m^2 ausgedrückt werden kann, ist der Ordnungszahl des Anodenmaterials proportional:

$$I \sim iZU^2 \qquad (83)$$

i Röhrenstrom, Z Ordnungszahl des Anodenmaterials, U Röhrenspannung

Aus diesem Grund wird bevorzugt Wolfram verwendet, das zugleich einen hohen Schmelzpunkt besitzt. Der Nutzeffekt (der in Strahlung umgesetzte Teil der elektrischen Leistung der Röhre) ist ziemlich gering und beträgt z. B. bei 96 kV nur etwa 0,3%.

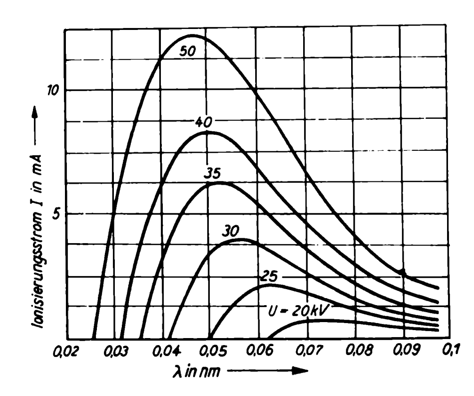


Bild 31. Spektrum der Röntgenbremsstrahlung bei verschiedenen Anodenspannungen

4.8.3. Charakteristische Strahlung

Die zweite Komponente der Röntgenstrahlung entsteht dadurch, daß die auf die Anode prallenden Elektronen aus den inneren Schalen der Atomhüllen Elektronen herausschlagen. Die hier entstehenden Lücken werden dann durch andere, aus darüberliegenden Schalen herabfallende Elektronen wieder ausgefüllt. Bei jedem dieser Bahnwechsel (*Quantensprünge*) wird ein Strahlungsquant abgegeben. Die Energie dieser Quanten ist jedoch bedeutend größer als die der Quanten des gewöhnlichen Lichts, da die Energieunterschiede der in den tiefer gelegenen Schalen gebundenen Elektronen erheblich größer sind als in den äußeren Schalen. Diese Quantensprünge können von der L-, M-, N- usw. Schale direkt auf die K-Schale führen (K-Serie des Röntgenspektrums) oder auch schrittweise von einer Schale zur jeweils nächsttieferen. Die *charakteristische Strahlung* stellt demnach ein kompliziertes Linienspektrum dar. Hierbei gilt, besonders gut für die K-Serie, das MOSELEY*sche Gesetz:* die Quadratwurzeln der Frequenzen entsprechender Serienlinien sind proportional der Ordnungszahl des Anodenmaterials.

4.8.4. Absorption der Röntgenstrahlung

Monochromatische Röntgenstrahlen (Strahlen einheitlicher Wellenlänge) werden beim Durchgang durch stoffliche Medien geschwächt*):

$$I = I_0 e^{-\mu d} \qquad (84)$$

I_0, I Intensität vor bzw. hinter dem Medium, μ linearer Schwächungskoeffizient, d Schichtdicke

Die *Gesamtschwächung* setzt sich aus mehreren Teilvorgängen zusammen: *Streuung* (Richtungsänderung mit oder ohne Veränderung der primären Wellenlänge), *Erzeugung von Fluoreszenzstrahlung, Abspaltung von Elektronen* (lichtelektrischer Effekt) und Ionisierung des durchstrahlten Mediums.

*) Anwendung in der Röntgendefektoskopie, s. Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG

Der Schwächungskoeffizient hängt in starkem Maße von der Wellenlänge der Strahlung und der Ordnungszahl des durchstrahlten Mediums ab. Die Werte in Tabelle 10 können als Anhaltspunkte dienen.

Die Schichtdicke, die eine Schwächung der Strahlungsintensität auf die Hälfte bewirkt, nennt man *Halbwertsdicke* $d_{1/2}$. Es gilt:

$$d_{1/2} = \ln 2/\mu = 0{,}693/\mu \tag{85}$$

Beispiel. Bei einer Röhrenspannung von 40 kV liegt die Wellenlänge maximaler Intensität nach Bild 31 bei etwa 0,05 nm. Die entsprechende Halbwertsdicke von Blei ist $d_{1/2}$ = 0,693 nm/59,7 = 11,6 µm.

Tabelle 10. Lineare Schwächungskoeffizienten für Röntgenstrahlen

Wellenlänge λ in nm	Linearer Schwächungskoeffizient μ in 1/m für			
	Wasser	Aluminium	Eisen	Blei
0,013	0,016	0,05	0,33	7,4
0,026	0,024	0,1	1,8	11,3
0,050	0,066	0,5	10,9	59,7
0,071	0,15	1,4	30,0	153,7

4.9. Laser

Literatur: [2, 3, 23, 26, 27, 33, 41, 43, 44]

4.9.1. Wirkungsweise eines Lasers

Die Emission des Lichts geht wegen der sehr kurzen Verweilzeit (10^{-8} s = 10 ns) des Elektrons nahezu gleichzeitig mit der Anregung vor sich. Da sich der Vorgang gleichzeitig in zahllosen ungeordnet durcheinander schwingenden Atomen abspielt, sind auch Polarisationsrichtung und Schwingungsphasen der elementaren Teilwellen völlig regellos.

Der *Laser* (Abkürzung für „light amplification by stimulated emission of radiation“, d. h. Lichtverstärkung durch angeregte Strahlungsemission) stellt eine Lichtquelle dar, die kohärente Lichtbündel von außerordentlicher Intensität und einheitlicher Polarisationsrichtung erzeugt.

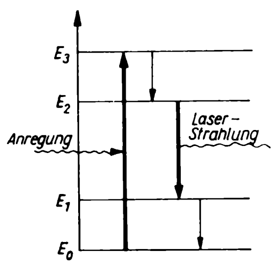


Bild 32. Termschema eines Lasers (Vier-Niveau-System)

Die im *Grundzustand* E_0 befindlichen Teilchen eines laseraktiven Materials (z. B. die Chromionen eines Rubinkristalls) werden durch Energiezufuhr von außen („*Pumpen*“) auf ein *Hilfsniveau* E_3 von sehr kurzer Lebensdauer angehoben (Bild 32). Durch Stöße 2. Art, d. h. Austausch von Anregungsenergie, gehen sie in großer Zahl in das *metastabile Niveau* E_2 über. Wegen dessen langer Lebensdauer (bis zu 10 ms) sind die Atome im Zustand E_2 gegenüber denen im Grundzustand E_0 in großer Überzahl (*Inversion der Besetzungsdichte*). Durch ein spontan frei werdendes Lichtquant wird der Vorgang der *induzierten Emission* ausgelöst, indem dieses Quant den Laser mit Lichtgeschwindigkeit durcheilt und in einer Kettenreaktion alle Niveaus E_2 zur Emission veranlaßt. Der eigentliche Laserübergang kann auf ein Zwischenniveau E_1 oder in den Grundzustand E_0 erfolgen.



4.9.2. Wichtige Lasertypen

Rubinlaser

Gehört zur Gruppe der *Festkörperlaser* und besteht aus einem etwa fingerdicken Rubinkristall (Al_2O_3) als Wirtsgitter mit eingebauten Chromionen. Die Anregung (*optisches Pumpen*) erfolgt durch eine Xenonblitzlampe im Pulsbetrieb (Bild 33). Die beiden Endflächen des Kristalls sind planparallel geschliffen, so daß die induzierte Strahlung viele Male hin- und herlaufen kann, um eine möglichst große Anzahl der angeregten Niveaus zu entleeren. Da die Länge des Kristalls gleich einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge ist, wirkt dieser zugleich als selektiv verstärkender *Resonator*.

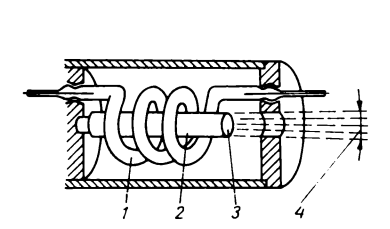


Bild 33. Schema eines Rubinlasers. *1* Xenon-Blitzlampe; *2* Rubinkristall; *3* halbversilberte Endfläche; *4* Durchmesser des Lichtbündels

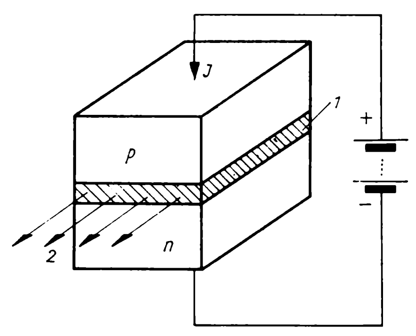


Bild 34. Schema eines Halbleiterlasers. *1* Grenzschicht; *2* Strahlung

Neon-Helium-Laser

Gehört zur Gruppe der *Gaslaser*. Die Anregung der He-Atome erfolgt durch *Elektronenstoß* in der Glimmentladung. Die Anregungsenergie wird auf die Neonatome übertragen, in denen der Laserübergang stattfindet. Die zur Reflexion notwendigen Spiegel können innerhalb oder außerhalb der mit dem Helium-Neon-Gemisch gefüllten Gasentladungsröhre angebracht sein. Um nur Licht einer Polarisationsrichtung durchzulassen, sind die Endflächen der Röhre unter dem BREWSTERschen Winkel angeschliffen und mit ebenen Glasplatten abgedichtet.

Halbleiterlaser

Zwischen der n- und p-leitenden Zone eines GaAs-Halbleiters befindet sich eine Sperrschicht (Bild 34)*). Bei Polung in Durchlaßrichtung findet *Rekombination der Ladungsträgerpaare* (Elektronen—Löcher) statt, wobei die Energie in Form von elektromagnetischer Laserstrahlung frei wird. Die beiden Stirnflächen sind eben geschliffen und mit spiegelnden Belägen versehen. Wegen der Art der Anregung werden Halbleiterlaser auch als *Injektionslaser* bezeichnet. Tabelle 11 zeigt eine Übersicht über wichtige Lasertypen.

4.9.3. Eigenschaften und Anwendung der Laserstrahlung

Die vom Laser erzeugte Strahlung hat insbesondere folgende Eigenschaften:

- *Hohe Parallelität.* Die Divergenz des aus der Endfläche austretenden Strahls beträgt beim Rubinlaser $\approx 0{,}5°$ ($= 8{,}73$ mrad), beim Ne-He-Laser $1{,}8''$ ($= 8{,}73$ μrad). Sie ist die Ursache der großen Reichweite (Anwendung bei Entfernungsmessungen, z. B. der Entfernung Erde—Mond).
- *Kohärenz.* Die austretenden Strahlen sind einheitliche, in gleicher Phase schwingende Wellen. Möglichkeit der Frequenz- und Puls-Code-Modulation.
- *Hohe Leistung.* Dauerbetrieb (einige kW) und Impulsbetrieb (TW).
- *Großer Frequenzbereich.* Von $5 \cdot 10^{10} \cdots 1 \cdot 10^{15}$ Hz, d. h. ein $2 \cdot 10^4$mal größerer Bereich als der bisher von der HF-Technik genutzte.

*) s. Abschn. ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK

Tabelle 11. Wichtige Lasertypen

Typ	Trägermedium	Aktive Atome	Vorwiegend verwendete Wellenlänge in nm	Ausgangsleistung P in W	Art der Anregung
Gaslaser	atomares Gas	Ne + He	632,8	0,01 ··· 0,1	Glimmentladung (Elektronenstoß)
		Wasserstoff	152,0; 161,5	$>10^3$	elektrische Stoßentladung
	Plasma	Ar	488	0,1 ··· 10	Gasentladung
	molekulares Gas	$CO_2 + N_2$	10600	$< 60 \cdot 10^3$ (kontinuierl.) $< 10^7$ (Impuls)	Gasentladung
Festkörperlaser	Al_2O_3 (Rubin)	Cr^{3+}	694,3	$> 10^6$	optisches Pumpen (Einstrahlung von Licht)
	$CaWO_4$	Nd^{3+}, Pr^{3+}			
	YAG (Y-Al-Granat)	Nd^{3+}, Gd^{3+}	1060	$> 10^3$	
	Glas	Nd^{3+}, Gd^{3+}	1060	$> 10^3$	
Halbleiterlaser	GaAs, GaP	pn-Grenzschicht	890	< 10	elektrischer Stromfluß (Injektion von Ladungsträgern)
Flüssigkeitslaser	Lösung in Wasser oder Alkohol	Rhodamin 6 Gl, Polymethinfarbstoffe, Europium	240 ··· 750 (kontinuierlich durchstimmbar)	$< 10^4$	optisches Pumpen
Chemische Laser	erhitztes Gas	$H_2 + F_2 \rightarrow 2\,HF$	2600 ··· 2900	500	chemische Reaktionsenergie

Anwendung der Laserstrahlen

Bearbeitung von Werkstoffen und Werkzeugen, Geodäsie und Feinmeßtechnik, Versuche zur Kernfusion, Spektroskopie, Holografie, Militärtechnik, Nachrichtentechnik (Richtfunkstrecken, Übertragung durch Satelliten), Leitung in Glasfasern und Rohren usw.

4.9.4. Holografie

Auf der Verwendung von Laserlicht beruht auch die *Holografie*, ein Verfahren zur Aufnahme und Wiedergabe räumlicher Bilder. Das durch ein breites Bündel Laserlicht beleuchtete abzubildende Objekt wirft die reflektierten Strahlen (*Signalwelle*) ohne optische Hilfsmittel auf eine Fotoplatte. Diese wird zugleich von einem aus derselben Lichtquelle stammenden, zuvor abgezweigten Bündel (*Referenzwelle*) direkt beleuchtet. Durch Interferenz entsteht auf der Platte ein kompliziertes feines Interferenzmuster, aus dem das Bild nach dem Entwickeln



noch nicht erkennbar ist. Blickt man aber unter einem bestimmten Winkel (Einfallswinkel der Referenzwelle) gegen eine Quelle kohärenten Laserlichts (Rekonstruktionswelle) durch das *Hologramm,* so sieht man den Gegenstand in der gleichen räumlichen Anordnung, in der er sich bei der Aufnahme befand.

Im einfachsten Fall eines beleuchteten Punkts (Bild 35) ist die Signalwelle S eine konzentrische Kugelwelle. Ihre Überlagerung mit der ebenen Referenzwelle R ergibt ein System konzentrischer Interferenzringe auf der Fotoplatte F. Wird diese bei der Wiedergabe mit einer gleichfalls ebenen Rekonstruktionswelle R′

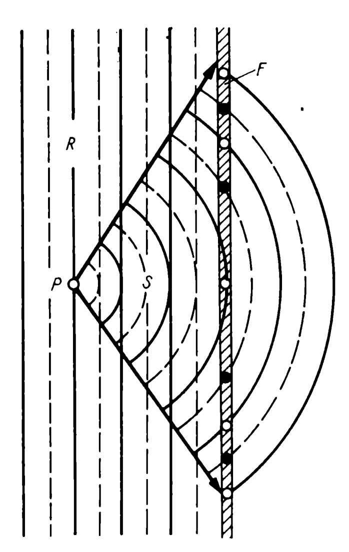


Bild 35. Entstehung des Hologramms eines einfachen Punkts *P*. *S* Signalwelle; *R* Referenzwelle; *F* Fotoplatte; ○ helle Ringzonen; ● dunkle Ringzonen

beleuchtet, so wirkt die Platte wie ein konzentrisches Beugungsgitter. Die nunmehr gekrümmten Wellenfronten scheinen vom ursprünglichen Objektpunkt herzurühren und liefern ein virtuelles Bild des ursprünglichen Punkts.

Weiterentwicklung: Farbholografie, Informationsspeicherung bei der Datenverarbeitung, Mikrowellenholografie, Ultraschallholografie zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung usw.

5. Kernphysik

Literatur: [3, 7, 8, 12, 16, 17, 23, 24, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 42, 45]

5.1. Wesen und Entwicklung der Kernphysik

Die Kernphysik beschäftigt sich mit dem Aufbau der Atomkerne, den Erscheinungen und physikalischen Gesetzen im Bereich kleinster Einheiten physikalischer Größen und höchster Teilchengeschwindigkeiten. Sie gehört zu den jüngsten Teilgebieten der Physik. Noch um die Jahrhundertwende waren nur natürlich vorkommende radioaktive Stoffe und deren Strahlungen bekannt, ihre Anwendung war im wesentlichen auf das Gebiet der Medizin beschränkt. Ab 1934 konnten radioaktive Stoffe auch auf künstlichem Wege hergestellt werden, jedoch nur in so kleinen Mengen, daß eine technische Verwertbarkeit ausgeschlossen war. Auch die (seit 1919) bekannt gewordenen Methoden zur Umwandlung von Atomkernen beschränkten sich auf Mengen, die noch unterhalb der chemischen Erfaßbarkeit lagen. Erst mit der Entdeckung der *Kernspaltung* (1938) und der *Kern-Kettenreaktionen* begann die Gewinnung meßbarer Mengen künstlicher radioaktiver Elemente. Damit eröffneten sich Möglichkeiten, die bei Kernreaktionen frei werdende Energie wirtschaftlich auszunutzen.
Die große *Bedeutung* der Kernphysik für die Technik beruht einerseits auf den äußerst vielseitigen Einsatzmöglichkeiten radioaktiver Nuklide in Industrie und Forschung und andererseits auf der Energiegewinnung.

5.2. Aufbau der Atomkerne

5.2.1. Massenzahl, relative Atommasse, atomare Masseeinheit

Die Atomkerne aller chemischen Elemente setzen sich aus *Protonen* und *Neutronen* zusammen, wobei die Anzahl der Protonen zugleich die *Ordnungszahl* (*Kernladungszahl*) Z des betreffenden Elements bestimmt. Protonen und Neutronen faßt man unter der Bezeichnung *Nukleonen* zusammen.
Die Gesamtzahl der in einem Atomkern enthaltenen Nukleonen bezeichnet man als *Massenzahl* A des Kerns. Es gilt dann für die Zusammensetzung des Kerns:

Massenzahl A des Kerns = Anzahl A der Nukleonen = Anzahl Z der Protonen + Anzahl $[(A - Z) = N]$ der Neutronen

Die *relativen Atommassen* beziehen sich auf das Kohlenstoff-Isotop ^{12}C, dessen relative Atommasse mit genau 12 festgesetzt wurde.
Ferner verwendet man die Bezeichnung *atomare Masseeinheit* (u)*), wobei:

$$1\,\mathrm{u} = \frac{\text{Masse des Kohlenstoffatoms } ^{12}\mathrm{C}}{12} = 1{,}66057 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \tag{86}$$

Mit der relativen Atommasse A_r erhält man hieraus die absolute Masse eines Atoms:

$$m_A = A_r \mathrm{u} \tag{87}$$

Dieser Ausdruck ist der Gl. (56) gleichwertig.

5.2.2. Nuklide

Eine bestimmte, durch Massenzahl A und Ordnungszahl Z eindeutig definierte Kernart bezeichnet man als *Nuklid*. Nuklide mit übereinstimmender Ordnungszahl Z kennzeichnen ein bestimmtes *chemisches Element*. Chemische Elemente, die nur ein einziges Nuklid enthalten, sind *Reinelemente*. Bei diesen ist die Massenzahl A gleich der auf eine ganze Zahl auf- bzw. abgerundeten relativen Atommasse des betreffenden Elements.

Beispiel. Beryllium hat die relative Atommasse 9,0122 und die Ordnungszahl 4. Seine Massenzahl ist $A = 9$, der Kern besteht aus $Z = 4$ Protonen und $(A - Z) = 5$ Neutronen.

Isotope

Die zum gleichen chemischen Element gehörigen Nuklide bezeichnet man als *Isotope* des betreffenden Elements. Sie stimmen also in der Ordnungszahl Z, nicht aber in ihrer Massenzahl A überein. Grobe Abweichungen der relativen Atommassen von der Ganzzahligkeit deuten darauf hin, daß diese Elemente aus mehreren Isotopen bestehen. Die meisten in der Natur vorkommenden Elemente sind Mischungen aus mehreren Isotopen, wobei die relative Häufigkeit (das Mischungsverhältnis) der Isotope vom Fundort nahezu unabhängig und bis auf wenige Ausnahmen konstant ist.

Um ein Isotop eindeutig zu kennzeichnen, schreibt man die *Massenzahl A* oben links und die *Ordnungszahl Z* unten links vor das chemische Zeichen. Häufig läßt man auch die Ordnungszahl weg und setzt die Massenzahl hochgestellt vor oder auch in gleicher Höhe hinter das Symbol.

Beispiel. Chlor hat die relative Atommasse 35,453. Es besteht aus zwei Isotopen der gleichen Ordnungszahl 17 und der Massenzahlen 35 und 37 im Mischungsverhältnis 75,4:24,6. Schreibweise: $^{35}_{17}Cl$ und $^{37}_{17}Cl$ (auch ^{35}Cl und ^{37}Cl oder Cl 35 und Cl 37). Der Kern des ersten Isotops enthält $35 - 17 = 18$ und der des zweiten $37 - 17 = 20$ Neutronen.

---

*) nur in der Atom- und Kernphysik zulässig

Isobare

Nuklide gleicher Massenzahl A, aber verschiedener Ordnungszahl werden Isobare genannt.

Beispiel. Die Kerne $^{36}_{16}S$ und $^{36}_{18}Ar$ sind isobar, desgleichen $^{40}_{18}Ar$ und $^{40}_{19}K$ usw.

Beispiele für natürliche Isotope

Die Anzahl der in der Natur vorkommenden Nuklide einschließlich der Reinelemente beträgt etwa 285, davon sind 11 radioaktiv mit langer Halbwertszeit. Als Reinelemente gelten diejenigen, von denen jeweils nur ein Isotop bekannt ist (Be, F, Na, Al, P, Sc, Mn, Co, As, Y, Nb, Rh, J, Cs, Tb, Au, Bi, Th).

Tabelle 12. Isotope des Wasserstoffs

Kernladung	Isotop des Wasserstoffs	Massenzahl	Relative Atommasse	Relative Häufigkeit in %	Stabilität
1	H (Wasserstoff)	1	1,00782	99,986	stabil
1	D (Deuterium)	2	2,01409	0,014	stabil
1	T (Tritium)	3	3,01604	10^{-10}	β^--aktiv $T_{1/2} = 12,1$ Jahre

Die Isotope des Wasserstoffs tragen besondere Namen (Tab. 12). Der Atomkern des *Deuteriums* D, des sogenannten „schweren Wasserstoffs", heißt *Deuteron* und wird durch das Symbol „d" gekennzeichnet. Der Kern des *Tritiums* T heißt *Triton*, bezeichnet mit „t".

Schweres Wasser. Entsprechend dem gewöhnlichen Wasser H_2O bildet das Isotop D das schwere Wasser D_2O, dessen chemische Eigenschaften denen des gewöhnlichen Wassers gleichen, während die physikalischen unterschiedlich sind.

Isotope des Heliums. Den Kern des Isotops ^4_2He nennt man *Alphateilchen* und den des ^3_2He *Alphinateilchen.*

Isotope des Kaliums. Das gewöhnliche Kalium besteht aus drei Isotopen mit den Massenzahlen 39 (93,3%), 40 (0,011%) und 41 (6,7%). Das Isotop K 40 ist β^--aktiv mit einer Halbwertszeit von $1,3 \cdot 10^9$ Jahren.

5.2.3. Isotopentrennung

Da sich Isotope in ihrem chemischen Verhalten nicht voneinander unterscheiden, können zur Trennung bzw. Reindarstellung nur *physikalische Verfahren* herangezogen werden, die sich auf massenabhängige Eigenschaften stützen.

Massenspektrografie

Zur genauen Bestimmung der relativen Atommassen schickt man einen Ionenstrahl des betreffenden Isotopengemischs durch ein kombiniertes elektrisches und magnetisches Feld. Die verschiedenartige Ablenkung sammelt die Ionen unterschiedlicher Massenzahl an getrennten Stellen auf dem auffangenden Schirm bzw. einem strahlungsempfindlichen Film (ASTON*scher Massenspektrograf*). Es kommt dabei darauf an, die Ionen gleicher Massenzahl trotz ihrer verschiedenen Geschwindigkeiten in einem Punkt zu sammeln (*Geschwindigkeitsfokussierung*). — Besondere Konstruktionen sind der *Flugzeit-Massenspektrograf* von GOUDSMIT (besonders für schwere Ionen geeignet) sowie der *Hochfrequenz-Massenspektrograf* von BENETT, der rein elektrisch arbeitet. Mit besonderen Apparaten und starken Ionenquellen können reine Nuklide heute grammweise gewonnen werden.

Elektrolyse

Zur Herstellung größerer Mengen schweren Wassers bevorzugt man die Elektrolyse von gewöhnlichem Wasser, wobei sich D_2O in der Restflüssigkeit anreichert. Unter Beachtung bestimmter Vorschriften erhält man aus 100 Liter Wasser mit einer Energie von 1000 kWh etwa 1 g D_2O bei 98% Reinheit. Bei schwereren Elementen führt die Elektrolyse nicht zum Erfolg.

Diffusionsmethoden

Auf der Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der relativen Atommasse beruht das *Trennrohrverfahren* von CLUSIUS. Ein bis 20 m langes vertikales Rohr bzw. Rohrsystem ist von einem axial ausgespannten Draht durchzogen, der elektrisch auf einige hundert Kelvin erhitzt wird. Der schwerere Bestandteil des Gemischs diffundiert in die kühleren Randzonen des Rohres (Thermodiffusion) und sinkt dann an der kühlen Wandung nach unten, während der leichtere Bestandteil am heißen Draht nach oben steigt und dort entnommen werden kann. Die Methode eignet sich grundsätzlich auch für flüssige Gemische.

Destillationsmethoden

1. Die geringere Flüchtigkeit des schweren Wassers beim Verdampfen von gewöhnlichem Wasser hat zur Folge, daß der Rückstand einen etwas höheren Gehalt an D_2O aufweist als der entweichende Dampf. Eine lohnenswerte Anreicherung tritt aber nur ein, wenn dieser Vorgang in ein und derselben Menge oftmals wiederholt wird. Auf diese Art kann D_2O von 99,8% Reinheit hergestellt werden. Der Energieaufwand je kg D_2O beträgt etwa 8000 kWh.
2. Ammoniak-Synthesegas mit einem Gehalt von 70% Wasserstoff wird bei 800 kPa auf 70 K abgekühlt, wobei alle Verunreinigungen ausgeschieden werden. Durch Entspannen wird der nunmehr reine Wasserstoff verflüssigt und bei 20 K abdestilliert, wobei 90%iges HD erhalten wird. Auf Zimmertemperatur erwärmt, wird es nach der Gleichung $2\,HD \rightarrow H_2 + D_2$ katalytisch umgewandelt und liefert etwa 22% Deuterium. Nach nochmaliger Verflüssigung und erneuter Rektifizierung gelangt man zu 99,7%igem Deuterium, das mit Sauerstoff zu Schwerwasser verbrannt wird.

5.2.4. Kernsystematik

Aus der Diskussion der genaueren Energieverhältnisse im Kern und empirisch festgestellter Regelmäßigkeiten ergibt sich eine Anzahl von Regeln, die man unter dem Begriff *Kernsystematik* zusammenfaßt.

5.2.4.1. Kerntypen

Insbesondere hängt die Stabilität eines Kerns weitgehend davon ab, ob er aus einer geraden (g) oder ungeraden (u) Anzahl von Protonen oder Neutronen besteht. Dabei sind vier *Typen* möglich, wobei sich der erste Buchstabe des Kerntyps auf Protonen, der zweite auf Neutronen bezieht (in Klammern Häufigkeit von 275 stabilen Kernen):

gg (162), gu (56), ug (52), uu (4 = ${}^2_1D$, ${}^6_3Li$, ${}^{10}_5B$, ${}^{14}_7N$)

Besonders häufig in der Natur, d. h. am stabilsten, sind die Kerne mit den Protonen- und Neutronenzahlen 2, 8, 14, 20, 28, 50, 82, 126 („*magische Zahlen*"). Dies läßt darauf schließen, daß sich die Nukleonen im Kern, ähnlich den Elektronen in der Atomhülle, zu entsprechenden Schalen besonderer Stabilität anordnen.

5.2.4.2. Regeln der Kernsystematik

1. Die leichteren stabilen Kerne enthalten etwa die gleiche Anzahl von Protonen und Neutronen. Das Verhältnis Neutronenanzahl zu Protonenanzahl nimmt mit steigender Massenzahl zu und erreicht bei den schwersten Kernen den Wert von 1,6:1.
2. ASTONsche *Regel:* Bis zu $Z = 83$ (mit Ausnahme von 43 und 61) existiert für jede Ordnungszahl wenigstens ein stabiler Kern mit ungerader Massenzahl. Von 84 an sind alle Kerne instabil (radioaktiv).
3. Stabile Kerne mit gerader Massenzahl sind stets vom Typ gg (Ausnahme: Typ uu).
4. MATTAUCHsche *Isobarenregel:* Von zwei Kernen gleicher Massenzahl, deren Ordnungszahlen sich nur um 1 unterscheiden, muß einer instabil sein.

Beispiel. Die Elemente ${}_{43}Tc$, ${}_{61}Pm$ sind instabil, weil jeweils ein stabiles, isobares benachbartes Element existiert.

5.2.5. Kernkräfte

Während die Bindung zwischen Atomkern und Hülle durch *elektrostatische Kräfte* bewirkt wird und theoretisch weitgehend aufgeklärt ist, sind die zwischen den Nukleonen des Kerns wirkenden Kräfte in ihren Einzelheiten noch nicht vollständig bekannt. Man nimmt an, daß hier besondere *Kernkräfte* wirksam sind, die auf einem fortgesetzten Ladungsaustausch zwischen Proton und Neutron beruhen. Die elektrische Ladung wird dabei von einem besonderen Teilchen, dem *π-Meson*, übertragen, indem sich das Neutron unter Emission eines negativen π-Mesons in ein Proton und das Proton unter Absorption desselben Teilchens in ein Neutron umwandelt. Diese *Theorie der Austauschkräfte* wird durch experimentelle Beobachtungen gestützt.

Das π-Meson tritt auch als Bestandteil der kosmischen Strahlung auf. Es kann positive oder negative Ladung tragen oder auch neutral sein.
Die Reichweite der Kernkräfte liegt bei $2 \cdot 10^{-15}$ m, ist also auf die unmittelbare Nachbarschaft der Nukleonen beschränkt.

5.2.6. Massendefekt

Die Summe der Massen der einzelnen Nukleonen eines Kerns ist stets größer als die Masse des gesamten Kerns. Diese Massendifferenz nennt man den *Massendefekt* Δm des betreffenden Kerns (Tabelle 13). Hieraus erklärt sich auch die Unmöglichkeit, die relative Atommasse durch ganze Zahlen auszudrücken.

Tabelle 13. Massendefekt und Bindungsenergie einiger Kerne

Kern	Δm in 10^{-3} u ≙	W in MeV
$^{2}_{1}$D	1,80	1,68
$^{3}_{2}$He	7,14	6,65
$^{4}_{2}$He	30,48	28,37
$^{7}_{3}$Li	40,2	37,4
$^{9}_{4}$Be	60,0	55,8
$^{16}_{8}$O	136,0	126,6
$^{84}_{36}$Kr	783	729
$^{98}_{42}$Mo	899	837
$^{139}_{57}$La	1241	1155
$^{238}_{92}$U	1908	1776

Beispiel. Der Heliumkern besteht aus:

2 Protonen zu je 1,00728 u	=	2,01456 u
2 Neutronen zu je 1,00867 u	=	2,01734 u
und 2 Elektronen zu je 0,00055 u	=	0,00110 u
		4,03300 u
gegenüber der Masse des $^{4}_{2}$He	=	4,00260 u
Massendefekt Δm	=	0,03040 u

5.2.7. Bindungsenergie

Der Massendefekt erklärt sich dadurch, daß bei der Bildung des Atoms aus seinen einzelnen Bestandteilen Masse in Form von Energie (*Bindungsenergie*) frei wird. Der Massendefekt ist demnach ein direktes Maß für die Bindungsenergie des Kerns (Tab. 13). Wollte man den Kern wieder in seine Bestandteile zerlegen, so müßte man denselben Energiebetrag dem Kern

wieder zuführen. Die dem Massendefekt entsprechende Bindungsenergie W folgt aus der EINSTEIN*schen Gleichung* $W = mc^2$:

$$W = \Delta mc^2 \qquad \text{oder} \qquad W = 931\,\Delta m \qquad \left|\frac{W}{\text{MeV}}\quad\frac{\Delta m}{\text{u}}\right| \tag{88}$$

Zur bequemen Umrechnung atomarer Massen in Energie benutzt man die Beziehung:

$$1\ \text{u} \triangleq 931\ \text{MeV} = 1{,}4916 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Beispiel. Die Bindungsenergie des Heliumkerns ergibt sich mit dem Massendefekt des letzten Beispiels aus:

$W = 0{,}03040 \cdot 931\ \text{MeV} = 28{,}37\ \text{MeV}$

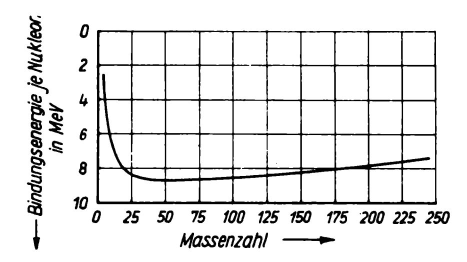


Bild 36. Abhängigkeit der Bindungsenergie je Nukleon von der Massenzahl

Die Bindungsenergie ist bei den *mittleren* und *schweren Kernen* etwa (aber nicht genau!) proportional der Kernmasse. Bezieht man sie auf ein einzelnes im Kern gebundenes Nukleon, so beträgt sie im Mittel etwa 8 MeV je Nukleon. Die Abhängigkeit der Bindungsenergie von der Ordnungszahl ist aus Bild 36 ersichtlich, woraus man erkennt, daß W bis zu einer Kernmasse (Massenzahl) von $A = 30$ stark ansteigt, bei $A = 50$ ein Maximum hat und dann langsam wieder abnimmt. Diese Tatsache ist für die Energiegewinnung durch Kernspaltung entscheidend.

5.2.8. Kernmodelle

In welcher geometrischen Anordnung die Nukleonen den Kern zusammensetzen und unter welchen statischen und dynamischen Bedingungen sie sich darin bewegen, läßt sich mangels ausreichender Kenntnisse heute noch nicht eindeutig beantworten. Vielmehr existieren mehrere Modellvorstellungen, die jeweils einige Eigenschaften wiedergeben, sich aber untereinander z. T. widersprechen. Die Schwierigkeiten liegen darin, daß die Natur der Kernkräfte noch unbekannt ist und die gegenseitige Anziehung der Nukleonen ein *Vielkörperproblem* darstellt. Selbst das *Dreikörperproblem* ist heute noch nicht exakt lösbar.

Tröpfchenmodell

Die Dichte aller Kerne ist nahezu konstant. Daher ist der Kernradius der Kubikwurzel aus der Massenzahl A proportional. Da jedes Nukleon einen konstanten Raum einnimmt und wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte praktisch nur mit seinen unmittelbaren Nachbarn in Wechselwirkung steht, läßt sich der Kern mit einem *Flüssigkeitströpfchen* vergleichen; mit jedem neu hinzutretenden Nukleon wird ein bestimmter Betrag an Bindungsenergie analog der Kondensationswärme eines Flüssigkeitströpfchens frei. Hieraus folgt auch die bei den leichten Kernen relativ geringe Bindungsenergie. Die an der Kernoberfläche liegenden Teilchen sind nicht ringsum von anderen Nukleonen umgeben, sondern nur auf einer Seite. Da das Kernvolumen mit der dritten Potenz des Radius, die Oberfläche aber nur mit der zweiten Potenz zunimmt, folgt hieraus die starke Zunahme von W. Bei den schweren Kernen tritt dann die COULOMB*sche Kraft* der elektrischen Abstoßung zwischen den Protonen stärker in Erscheinung und bewirkt eine zunehmende Lockerung des Kerngefüges. Die einzelnen Nukleonen sind nahezu ortsfest zu denken.

Schalenmodell

Im Gegensatz zum Tröpfchenmodell zeichnen sich bestimmte Anordnungen im Kern durch besonders feste Bindung aus. In Analogie zu den Verhältnissen in der Atomhülle zieht man hieraus den Schluß, daß sich

die Nukleonen im Kern zu einzelnen *Schalen besonderer Festigkeit* gruppieren. Jeder Schale entspricht dann ein bestimmtes Energieniveau. Die einzelnen Nukleonen sind nahezu frei beweglich zu denken.
Da sich die Aussagen des Tröpfchen- und Schalenmodells gegenseitig z. T. ergänzen, wird die weitere Entwicklung der Kerntheorie wohl eine gewisse Synthese beider Vorstellungsweisen ergeben.

5.3. Radioaktivität

5.3.1. Definition der Radioaktivität

Unter *Radioaktivität* versteht man die Eigenschaft einer Reihe von Nukliden, sich unter Aussendung von Strahlungen in ein anderes Nuklid spontan, d. h. ohne äußere Einwirkung, umzuwandeln. Im Gegensatz zu den zu einer spontanen Umwandlung nicht fähigen stabilen Kernen sind diese Kerne *instabil.* Sowohl die natürlichen als auch die künstlich hergestellten radioaktiven Stoffe gehorchen im Prinzip den gleichen Umwandlungsgesetzen.
Um in der Schreibweise stabile und radioaktive Nuklide zu unterscheiden, können letztere durch einen hinter das Symbol gesetzten Stern gekennzeichnet werden, z. B. $^{30}_{15}P^*$.
SI-Einheit. Die Aktivität radioaktiver Stoffe wird in *Becquerel* (Bq)*) ausgedrückt: Das Becquerel ist die Aktivität, bei der sich im Mittel in 1 s 1 Atomkern eines radioaktiven Nuklids umwandelt.

5.3.2. Zerfallsgesetz

Der Kernzerfall erfolgt rein *statistisch* und ist unabhängig vom Alter der betreffenden Substanz. Die Anzahl der je Zeiteinheit zerfallenden Kerne einer Kernart ist allein proportional der Zahl N der noch intakten Kerne. Deshalb gilt für die je Zeiteinheit zerfallenden Kerne mit der *Zerfallskonstanten* λ:

$$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = -\lambda N \tag{89}$$

woraus das *Zerfallsgesetz* folgt:

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{90}$$

Statt mit der Zerfallskonstanten λ rechnet man in der Praxis meist mit der *Halbwertszeit* $T_{1/2}$. Man versteht darunter die Zeit, die verstreicht, bis von einer (beliebig) vorgegebenen Menge N_0 einer radioaktiven Substanz die Hälfte zerfallen ist. Sie ergibt sich aus Gl. (90), wenn man $N = N_0/2$ setzt:

$$T_{1/2} = \ln 2/\lambda = 0{,}693/\lambda \tag{91}$$

Mitunter gibt man an Stelle der Halbwertszeit $T_{1/2}$ die *mittlere Lebensdauer* $\tau = 1/\lambda$ an, nach deren Ablauf $N = N_0/\mathrm{e}$ ist. Daher gilt

$$T_{1/2} = 0{,}693\tau, \qquad \tau = 1{,}443 T_{1/2} \tag{92}$$

Beispiel. Die Halbwertszeit des Radons beträgt 3,825 Tage. Nach 7,65 Tagen ist noch 1/4, nach 11,475 noch 1/8, nach 15,3 Tagen noch 1/16 der ursprünglichen Menge vorhanden.

5.3.3. Zerfallsreihen

Die natürlichen radioaktiven Nuklide stellen keine Einzelerscheinungen dar, sondern sind jeweils Glieder einer Reihe von Nukliden, von denen jedes durch radioaktive Umwandlung aus dem vorangehenden entsteht. Die Reihen (Bild 37) enden schließlich, wenn das letzte Zerfallsprodukt ein stabiler Kern ist. In allen Fällen sind es Bleiisotope.

---

*) Das Becquerel ersetzt die SI-fremde Einheit Curie (1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq). S. auch Abschn. GRÖSSEN UND EINHEITEN.

Am längsten bekannt ist die *Uran-Radium-Reihe* (Tab. 14). Bemerkenswert ist hier das Edelgas Radon (Rn), auch Radium-Emanation genannt, das sich durch α-Umwandlung aus dem Radium bildet. Es findet sich in Quellwässern gelöst und ist wegen seiner Heilwirkung bekannt. In der Nähe von Uranerzen entströmt es in geringer Konzentration den oberen Erdschichten. Erst in jüngerer Zeit ist die *Neptunium-Reihe* bekannt geworden. Weitere, heute bekannte Zweigreihen sind in Bild 37 der Übersichtlichkeit halber weggelassen worden.

Die Massenzahlen A der vier Zerfallsreihen lassen sich durch folgende Formeln ausdrücken:

Th-Reihe:	$4n$	$(n = 58\cdots52)$	U-Ra-Reihe:	$4n + 2$	$(n = 59\cdots51)$
Np-Reihe:	$4n + 1$	$(n = 60\cdots52)$	U-Ac-Reihe:	$4n + 3$	$(n = 58\cdots51)$

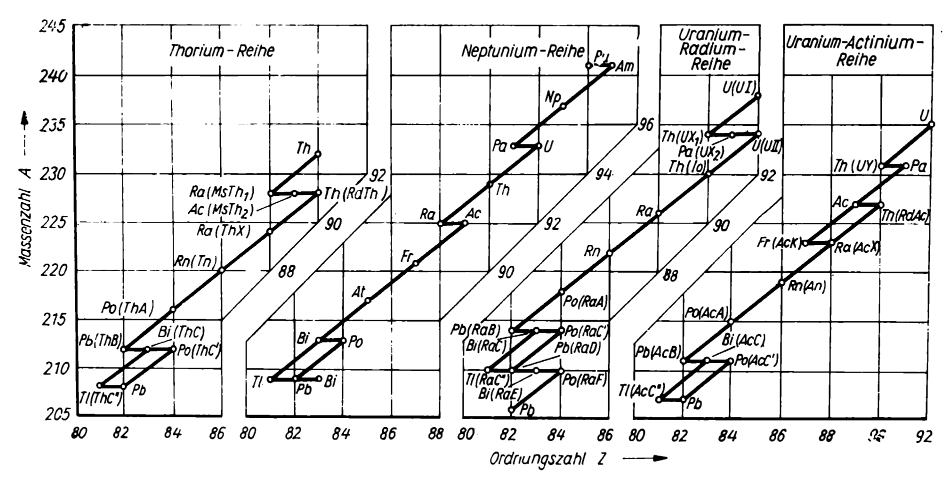


Bild 37. Die radioaktiven Zerfallsreihen ohne ihre Nebenzweige

Tabelle 14. Elemente der Uran-Radium-Reihe

Massenzahl A	Ordnungszahl Z	Symbol	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Strahlenart	Energie der Strahlung in MeV (nur wichtigste Komponenten) α	β	γ
238	92	U(U I)	$4{,}50 \cdot 10^9$ Jahre	α	4,18		
234	90	Th(U X_1)	24,1 Tage	β^-, γ		0,19	0,09
234	91	Po(U X_2)	1,18 Minuten	β^-, γ		2,32	0,32
234	92	U(U II)	$2{,}52 \cdot 10^5$ Jahre	α	4,77		
230	90	Th(Jo)	$8 \cdot 10^4$ Jahre	α, γ	4,68		0,24
226	88	Ra	1622 Jahre	α, γ	4,78		0,66
222	86	Rn	3,825 Tage	α	5,49		
218	84	Po(Ra A)	3,05 Minuten	α	6,00		
214	82	Pb(Ra B)	26,8 Minuten	β^-, γ		0,73	
214	83	Bi(Ra C)	19,7 Minuten	α, β^-, γ	5,52	3,26	1,8
214	84	Po(Ra C′)	$1{,}64 \cdot 10^{-4}$ Sekunden	α	7,68		
210	81	Tl(Ra C″)	1,32 Minuten	β^-, γ		1,96	2,36
210	82	Pb(Ra D)	19,4 Jahre	β^-, γ		0,18	0,047
210	83	Bi(Ra E)	5,01 Tage	β^-		1,17	
210	84	Po	138 Tage	α, γ	5,30		
206	82	Pb	stabil	—			

5.3.4. Radioaktive Strahlungen

Die von radioaktiven Nukliden emittierte Strahlung ist je nach ihrer physikalischen Natur α-, β- oder *γ-Strahlung.* Einige Nuklide geben auch eine der Röntgenstrahlung ähnliche *K-Strahlung* ab. Neutronen entstehen u. a. bei den Prozessen der Kernspaltung.

5.3.4.1. α-Strahlung

Die α-Strahlung besteht aus positiv geladenen Heliumkernen, die von dem betreffenden Atomkern mit großer Geschwindigkeit (Größenordnung 10000 km/s) ausgestoßen werden. Durch Abgabe eines $^4_2\alpha$-Teilchens vermindern sich die Massenzahl des Kerns um 4 Einheiten und die Kernladung um 2 Einheiten (z. B. $^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^4_2\alpha + {}^{234}_{90}\mathrm{Th}$).
Die Energie W des emittierten Teilchens steht im Zusammenhang mit seiner mittleren Reichweite $\bar{R}_\mathrm{L}$ in Luft. Hierfür gilt in guter Näherung das GEIGERsche *Reichweitengesetz:*

$$\bar{R}_\mathrm{L} = 3{,}23\,W^{1,5} \qquad (93)$$

$\bar{R}_\mathrm{L}$	W
mm	MeV

$\bar{R}_\mathrm{L}$ liegt bei den natürlichen radioaktiven Elementen in der Größenordnung von einigen Zentimetern (bei Ra ist $\bar{R}_\mathrm{L} = 33{,}8$ mm). Jedes α-strahlende radioaktive Element hat eine bestimmte *charakteristische Reichweite,* die jedoch um den statistischen Mittelwert $\bar{R}_\mathrm{L}$ schwankt.
Beim Durchgang durch Luft verliert das α-Teilchen seine Energie durch Zusammenprall mit den Luftmolekülen, wobei sich Ionen bilden (je cm Bahnlänge 30000 ··· 40000 Ionen). Noch geringer ist die Reichweite beim Durchgang durch feste Stoffe.

In Stoffen der relativen Atommasse A_r und der Dichte ϱ ist die Reichweite:

$$\bar{R}' = 3 \cdot 10^{-7} \cdot \bar{R}_\mathrm{L} \cdot \sqrt{A_\mathrm{r}}/\varrho \qquad (94)$$

$\bar{R}'$	$\bar{R}_\mathrm{L}$	A_r	ϱ
mm	mm	—	kg/m³

5.3.4.2. β-Strahlung

Die β-Strahlung besteht aus *Elektronen,* die im Moment der Kernumwandlung im Kern gebildet werden. Während bei den natürlichen radioaktiven Stoffen nur β^--Strahlen, die aus negativen Elektronen bestehen, auftreten, emittieren künstliche Radionuklide häufig auch aus *Positronen* (positive Elektronen) bestehende β^+-Strahlen.

Im ersten Fall erhöht sich durch Abgabe eines β^--Teilchens $_{-1}^{\;0}\mathrm{e}$ die Kernladung um eine Einheit, während wegen der geringen Masse des Elektrons die Massenzahl unverändert bleibt.

Beispiel. $^{234}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + {}_{-1}^{\;0}\mathrm{e}$

Im zweiten Fall vermindert sich die Kernladung um eine Einheit durch Abgabe eines β^--Teilchens $_{+1}^{\;0}\mathrm{e}$, während wegen der geringen Masse des Positrons die Massenzahl unverändert bleibt.

Beispiel. $^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}_{+1}^{\;0}\mathrm{e}$

Zur Erklärung des β^--Zerfalls nimmt man an, daß sich ein Neutron n unter Abspaltung eines Elektrons e und eines Neutrinos ν in ein Proton p umwandelt:

$$^1_0\mathrm{n} \rightarrow {}^1_1\mathrm{p} + {}_{-1}^{\;0}\mathrm{e} + \nu \qquad (95)$$

Beim β^+-Prozeß hingegen vollzieht sich die Umwandlung eines Protons p in ein Neutron n:

$$^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^1_0\mathrm{n} + {}_{+1}^{\;0}\mathrm{e} + \nu \qquad (96)$$

Positronen sind zwar ebenso stabil wie Elektronen, bestehen in Gegenwart von anderen Stoffen aber nur äußerst kurze Zeit, da sie sich sogleich mit einem Elektron vereinigen. Die Masse beider Teilchen verschwindet dabei und erscheint in Form zweier γ-Quanten als Energie. Umgekehrt kann sich ein γ-Quant von mehr als 1 MeV in je ein Elektron und Positron umwandeln (*Paarbildung*). Nach der Gleichung im

2. Beispiel könnte es so aussehen, als ob ein Proton des P-Kerns sich unter Abgabe eines Positrons in ein Neutron des entstehenden Si-Kerns umwandelt. Da jedoch das Proton leichter als das Neutron ist, kann das nicht zutreffen. Vielmehr läßt die überschüssige Kernenergie zunächst ein Elektronenpaar entstehen. Das Elektron vereinigt sich dann mit dem Proton zu einem Neutron, und das Positron wird zusammen mit einem Neutrino emittiert:

$$p + e^- + e^+ \rightarrow n + e^+ + \nu \tag{97}$$

Die Reichweite der β-Teilchen ist bei einer bestimmten Kernart nicht einheitlich, sondern liefert ein kontinuierliches Geschwindigkeitsspektrum. Um dennoch zu einer bei jedem β-Prozeß einheitlichen Energie zu gelangen, nimmt man nach FERMI an, daß zugleich mit dem Elektron noch ein Neutrino emittiert wird. Das Neutrino ist ein elektrisch neutrales Teilchen, dessen Ruhmasse mit Null angenommen wird.

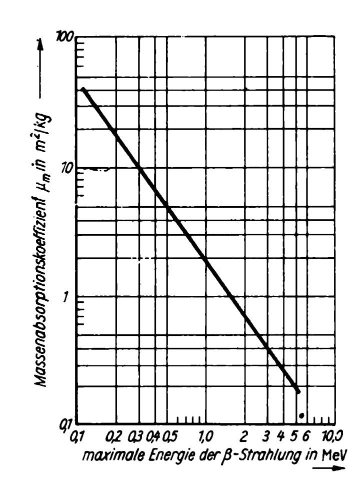


Bild 38. Massenabsorptionskoeffizienten für β-Strahlung

Monoenergetische β^-*-Strahlen,* d. h. solche von einheitlicher Energie, kann man mit besonderen Geräten, z. B. dem *Betatron,* künstlich erzeugen. Die praktische Reichweite monoenergetischer β^--Strahlen in Luft hängt von deren Energie ab. Sie beträgt bei $W = 0{,}1$ MeV etwa 0,13 m, bei $W = 0{,}4$ MeV etwa 1,20 m.
Beim Durchgang durch stoffliche Medien wird die β-Strahlung mit guter Annäherung nach folgendem *Exponentialgesetz* geschwächt:

$$N = N_0 e^{-\mu_m \varrho_d} \tag{98}$$

N_0 bzw. N Anzahl der β-Teilchen vor bzw. hinter dem Absorber, ϱ_d Flächendichte der durchstrahlten Schicht in kg/m², μ_m Massenabsorptionskoeffizient in m²/kg (Bild 38).

β-Teilchen rufen in Luft mit 50···100 Ionen je cm Weglänge eine weit geringere Ionenbildung als α-Teilchen hervor, haben aber ein besseres Durchdringungsvermögen für feste Stoffe.

5.3.4.3. γ-Strahlung

Nach der Emission eines α- oder β-Teilchens bleibt der radioaktive Kern meist in einem *angeregten Zustand* höheren Energiegehalts zurück. Erst nach (quantenhafter) Abstrahlung der Energie, die häufig auch stufenweise (*Kaskadenstrahlung*) erfolgt, erreicht der neue Kern seinen Grundzustand. Der Vorgang entspricht also etwa der *Emission von Lichtquanten* einer energetisch angeregten Atomhülle. Während aber die Energie der Lichtquanten in der Größenordnung von nur einigen eV liegt, haben die vom Kern abgegebenen γ-Quanten Energien in der Größenordnung von MeV. Die stufenweise Abgabe der Kernenergie in diskreten Einzelbeträgen ist eine wesentliche Stütze des Schalenmodells.

γ-Strahlen treten als Begleiterscheinung der α- oder β-Strahlung auf und sind als elektromagnetische Wellen von der gleichen physikalischen Natur wie Licht- oder Röntgenstrahlen; wegen ihrer großen Energie haben sie jedoch ein erheblich größeres Durchdringungsvermögen. Die Intensität der von einer punktförmigen Quelle emittierten Strahlung nimmt wie beim Licht mit dem Quadrat der Entfernung ab.

Beispiel. Die γ-Strahlung des natürlichen Kaliumisotops $^{40}_{19}K$ hat die Energie $W = 1{,}33$ MeV ($1{,}33 \cdot 1{,}6 \times 10^{-13}$ J). Ihr entsprechen die Frequenz $f = W/h$ und die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{W} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\text{m}}{1{,}33 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\,\text{J} \cdot \text{s}} = 9{,}3 \cdot 10^{-13}\,\text{m}$$

Beim Durchdringen dichterer Medien wird die γ-Strahlung mehr oder weniger geschwächt, wobei ihre Intensität exponentiell mit der durchstrahlten Schichtdicke abnimmt. Es gilt:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{99}$$

I_0 bzw. I Intensität der Strahlung vor bzw. hinter dem Absorber, μ linearer Schwächungskoeffizient (Tab. 15), x Schichtdicke

Dieses Gesetz gilt jedoch nur für den selten zutreffenden Fall eines engen Strahlenbündels. In Wirklichkeit verursacht das durchstrahlte Medium eine starke *Streuung* durch den COMPTON-Effekt. Die sich daraus ergebende Abweichung von der Gl. (99) ist dann durch den sogenannten „*Zuwachs*-" oder *Built-up-Faktor* zu berücksichtigen.
Die Schwächung der γ-Strahlung ist auf verschiedene Einzelprozesse zurückzuführen:

- *Fotoeffekt,*
- COMPTON-*Effekt,*
- *Paarbildung.* Beim Auftreffen auf den Kern wandelt sich das γ-Quant in einen *Elektronenzwilling* (Elektronenpaar) um. Dabei verschwindet das γ-Quant als solches, seine Energie tritt aber gemäß der EINSTEIN-Formel (66) als Masse m eines Elektron-Positron-Paars in Erscheinung. Da zur Bildung eines Paars die Energie von 1,1 MeV benötigt wird, kann der Vorgang erst oberhalb dieser Energie eintreten.

Tabelle 15. Lineare Schwächungskoeffizienten für γ-Strahlen

Energie der Strahlung in MeV	Linearer Schwächungskoeffizient μ in 1/mm für				
	Blei	Gußeisen	Aluminium	Beton	Wasser
0,6	0,137	0,055	0,0210	0,0179	0,00894
0,8	0,099	0,047	0,0184	0,0156	0,00786
1,0	0,079	0,043	0,0166	0,0141	0,00706
1,25	0,066	0,038	0,0149	0,0126	0,00632
1,5	0,058	0,035	0,0137	0,0116	0,00576
2,0	0,051	0,030	0,0117	0,0100	0,00493
3,0	0,046	0,026	0,0094	0,0080	0,00396
4,0	0,047	0,024	0,0084	0,0071	0,00339

Tabelle 16. Halbwertsdicken einiger Materialien für γ-Strahlen

Material	Halbwertsdicke $d_{1/2}$ in mm bei Energien der Strahlung	
	von 0,1 MeV	von 1,0 MeV
Aluminium	15	42
Beton	17	47
Wasser	41	98
Luft	$3{,}5 \cdot 10^{3}$	$8{,}5 \cdot 10^{4}$
Eisen	2,4	15
Kupfer	1,7	13
Blei	0,11	8,7

Die Halbwertsdicke $d_{1/2}$ ist die Schichtdicke, bei der die γ-Strahlung auf die Hälfte ihres Anfangswerts reduziert wird. Analog zur Definition der Halbwertszeit Gl. (91) läßt sich aus Gl. (99) ableiten:

$$d_{1/2} = 0{,}693/\mu \tag{100}$$

Halbwertsdicken verschiedener Stoffe für γ-Strahlen: siehe Tabelle 16.

5.3.4.4. K-Strahlung

In vielen Fällen tritt an die Stelle von β^+-Strahlen der K-Einfang. Hierbei übernimmt der Kern aus der innersten Elektronenschale (K-Schale) ein Elektron, wodurch sich ein Kernproton in ein Neutron umwandelt:

$$^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \nu \tag{101}$$

Beispiel. Der Umwandlung $^{52}_{25}\mathrm{Mn} \rightarrow {}^{52}_{24}\mathrm{Ce} + {}^{0}_{+1}\mathrm{e}$ folgen nur etwa 35% aller aktiven Kerne, während 65% nach der Gleichung $^{52}_{25}\mathrm{Mn} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow {}^{52}_{24}\mathrm{Cr}$ zerfallen.

Die in der K-Schale entstandene Lücke wird durch Herabfallen weiter außen liegender Elektronen wieder ausgefüllt, wobei eine der charakteristischen Röntgenstrahlung entsprechende K-Strahlung emittiert wird. Reine K-Strahler sind $^{41}_{20}\mathrm{Ca}$ und $^{54}_{25}\mathrm{Mn}$.

5.3.4.5. Innerer Übergang

Ist der angeregte Zustand eines Kerns von längerer Dauer, so stellt dieser einen *isomeren Kern* dar. Isomere Kerne sind Kerne gleicher Ordnungszahl Z und gleicher Massenzahl A, aber verschiedenen Energieinhalts. Der Übergang des energetisch höheren Isomers in das niedere geht in der Regel durch Abgabe von γ-Strahlen vor sich. Häufig geschieht es aber, daß die überschüssige Energie direkt an ein Elektron der K- oder L-Schale der Hülle abgegeben wird, wodurch dieses aus dem Atomverband herausfliegt (*Konversionselektronen*). Diesen Vorgang nennt man *inneren Übergang*, mitunter auch innere Umwandlung.

Beispiel. Der Kern $^{52}_{25}\mathrm{Mn}$ existiert in zwei Isomeren, die beide unter β^+-Strahlung bzw. K-Einfang mit den Halbwertszeiten 21 min bzw. 6,5 Tage zerfallen. Das höhere Isomer (21 min) kann auch durch inneren Übergang in das energetisch tiefere Isomer (6,5 Tage) übergehen.

5.3.5. Biologische Wirkung der Strahlen

Literatur: [18, 19, 39, 40]

Die *Aktivität* einer strahlenden Substanz (A) sagt zunächst noch nichts über die Wirkung der von ihr emittierten Strahlung aus. Alle Strahlungen einschließlich der Röntgenstrahlung bilden im durchstrahlten Medium *Ionen*. Grundlegende Größen der Strahlenwirkung sind daher die *Exposition* (Ionendosis) X (C/kg) sowie die *Energiedosis* D (Gy)*).
Um die biologische Wirkung (relative biologische Wirksamkeit, RBW) zu berücksichtigen, wird die *Äquivalentdosis* angegeben:

$$D_q = D \cdot QF \tag{102}$$

Der Qualitätsfaktor QF ist für Röntgen-, β- und γ-Strahlung 1, für schnelle Neutronen und α-Strahlung 10 und für schwere Rückstoßkerne 20.

*) s. Abschn. Grössen und Einheiten, Tabelle der Einheiten physikalischer Größen

Höchstzulässige Dosen

Die Gefährlichkeit aller ionisierenden Strahlen macht es erforderlich, zum Schutz der mit Strahlen in Berührung kommenden Menschen gewisse *Höchstgrenzen* festzulegen. Je nach Personenkreis unterscheidet man:

Kategorie A: Personen, die während ihrer beruflichen Tätigkeit in einem Kontrollbereich Strahlenbelastungen des Gesamtkörpers von mehr als 0,005 Gy (0,005 J/kg) = 0,5 rem im Jahr erhalten können.

Kategorie B: Personen, die während ihrer beruflichen Tätigkeit in einem Überwachungsbereich Strahlenbelastungen des Gesamtkörpers bis zu 0,005 Gy (0,5 rem) im Jahr erhalten können.

Kategorie C: Personen oder Personengruppen aus der Bevölkerung, die an ihrem Aufenthaltsort Strahlenbelastungen des Gesamtkörpers bis zu 0,005 Gy (0,5 rem) im Jahr erhalten können.

Ferner werden die den Strahlen ausgesetzten Organe und Körperpartien wie folgt eingeteilt:

Gruppe I: Gesamtkörper, Gonaden und blutbildendes System

Gruppe II: Augenlinsen, Magen-Darm-Kanal, Leber, Milz, Nieren, Lunge, Muskeln, Fettgewebe und andere Organe, die nicht unter den Gruppen I oder III genannt sind.

Gruppe III: Knochen, Schilddrüse, Haut

Gruppe IV: Hände, Unterarme, Füße

Für die hier genannten Gruppen gelten in der DDR die in der Tabelle 17 aufgeführten maximal zulässigen Dosen (MZD).

Tabelle 17. Maximal zulässige Äquivalentdosen

	Äquivalentdosis D_q in Gy (J/kg)							
	in 3 Monaten				in 12 Monaten			
Gruppe	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Kategorie A	0,03	0,08	0,15	0,4	0,05	0,15	0,30	0,75
B	–	–	–	–	0,005	0,015	0,03	0,075
C	–	–	–	–	0,005	0,015	0,03	–

Beim Umgang mit strahlenden Substanzen und strahlenden kernphysikalischen Einrichtungen ist größte Vorsicht geboten. Wie auch bei der Röntgenstrahlung beruhen die biologischen Wirkungen primär auf Ionisation und Anregung von Atomen und Molekülen im lebenden Organismus. Die hieraus resultierenden Reaktionen sind in leichten Fällen oberflächliche *Hautschäden*, in schweren lebensgefährliche *Erkrankung einzelner Organe* (Krebs, Leukämie) und des Gesamtkörpers. Als absolut tödlich gilt die einmalige Einwirkung von 8 Gy auf den Gesamtkörper. Besonders verhängnisvoll sind die *genetischen Schäden*. Bei Einwirkung selbst kleinster Dosismengen auf die Keimdrüsen werden die Erbanlagen des Individuums bleibend verändert, wodurch die Gefahr einer erbbiologischen, in keiner Weise korrigierbaren Schädigung entsteht.

Da die Einzelheiten außerordentlich vielfältig sind und auch medizinische Fachkenntnisse erfordern, muß auf die Fachliteratur verwiesen werden.
Die hohe Gefährlichkeit der meisten radioaktiven Präparate macht es erforderlich, alle Benutzer auf die einschlägigen Bestimmungen hinzuweisen.

5.3.6. Kosmische Strahlung und Elementarteilchen

Die kosmische Strahlung ist eine aus dem Weltraum stammende Strahlung z. T. noch ungeklärten Ursprungs von außerordentlichem Durchdringungsvermögen. Da die zur Messung radioaktiver Strahlungen benutzten Geräte auch auf diese kosmische Strahlung ansprechen, ist deren Einfluß entsprechend zu berücksichtigen. Überwiegend besteht die kosmische Strahlung aus Protonen, die mit einer Energie von $10^3 \cdots 10^{14}$ MeV in die obersten Schichten der Atmosphäre (bis zu 50 km Höhe herab nachgewiesen) einfallen. Auf ihrem Weg durch die tieferen Luftschichten treten sie in Wechselwirkung mit den Kernen der Luftmoleküle und rufen hier sekundär mannigfache Kernprozesse hervor, in deren Gefolge eine Reihe weiterer Elementarteilchen und γ-Quanten auftreten. Insbesondere erscheinen dabei *Mesonen* verschiedener Art, die bis zum Erdboden gelangen. Man unterscheidet die *weiche Komponente* (Elektronen und γ-Quanten) und die *harte Komponente* (Mesonen). 75% aller in Meereshöhe registrierten Teilchen sind Mesonen.

Tabelle 18. Übersicht über die wichtigsten Elementarteilchen

Bezeichnung	Symbol		Ruhmasse in Elektronenmassen	Mittlere Lebensdauer in s	Häufigste Zerfallsweise
	Teilchen	Antiteilchen			
Foton	γ	γ	0	stabil	—
Leptonen					
e-Neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	stabil	—
Elektron, Positron	e^-	e^+	1	stabil	—
μ-Neutrino	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	stabil	—
μ-Meson (Müon)	μ^-	μ^+	206,8	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$
Mesonen*)					
π^0-Meson (Pion)	π^0	π^0	263,9	$0{,}9 \cdot 10^{-16}$	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
π^+-Meson (Pion)	π^+	π^-	273,2	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
K^0-Meson (Kaon)	K^0	$\bar{K}^0$	974,1	K_1^0: $0{,}9 \cdot 10^{-10}$ K_2^0: $5{,}8 \cdot 10^{-8}$	$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ $K_2^0 \rightarrow \pi + e + \nu_e$
K^+-Meson (Kaon)	K^+	K^-	966,4	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
η-Meson	η_0	$\bar{\eta}_0$	1072,4	10^{-19}	$\eta \rightarrow \pi + \pi + \pi$
Baryonen*)					
Nukleonen					
Proton	p	$\bar{p}$	1836,10	stabil	—
Neutron	n	$\bar{n}$	1838,62	$1{,}01 \cdot 10^3$	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
Hyperonen					
Λ-Hyperon	Λ	$\bar{\Lambda}$	2183,2	$2{,}5 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$
Σ^0-Hyperon	Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	2333,7	$1{,}0 \cdot 10^{-14}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$
Σ^+-Hyperon	Σ^+	$\bar{\Sigma}^+$	2327,6	$0{,}8 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$
Σ^--Hyperon	Σ^-	$\bar{\Sigma}^-$	2343,1	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$
Ξ^0-Hyperon	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	2572,8	$3{,}0 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$
Ξ^--Hyperon	Ξ^-	Ξ^+	2585,5	$1{,}7 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$
Ω^--Hyperon	Ω^-	Ω^+	3273,0	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$	$\Omega^- \rightarrow \Xi + \pi^0$

*) Mesonen und Baryonen gehören zur Gruppe der Hadronen

Tabelle 18 zeigt eine Übersicht über die wichtigsten Elementarteilchen. Zu jedem Teilchen gibt es ein entsprechendes Antiteilchen. Ein schon länger bekanntes Beispiel ist das Teilchenpaar Elektron—Positron. Treffen beide Teilchen zusammen, so verschwinden ihre Massen, wofür die nach (66) berechenbare Energie zweier γ-Quanten frei wird. Ein entsprechender *Zerstrahlungsvorgang* spielt sich auch beim Zusammentreffen der übrigen Teilchen-Antiteilchen-Paare ab.
Von den aufgezählten Teilchen sind im Atomkern nur das Proton und das Neutron enthalten, in der Hülle nur negative Elektronen. Die übrigen treten erst bei künstlichen Kernprozessen und in der kosmischen Strahlung in Erscheinung.

5.3.7. Nachweis und Messung radioaktiver Strahlungen

5.3.7.1. Nebelkammer

Zur Sichtbarmachung der Bahnspuren von α- und β-Teilchen, γ-Quanten und sonstigen Kerntrümmern dient die WILSONsche *Nebelkammer* (Bild 39).

Im Prinzip ist sie ein flacher, mit gesättigtem Wasserdampf gefüllter Zylinder mit einer Vorderwand aus Glas. Durch rasches Abwärtsbewegen des Kolbens wird die Luft adiabatisch expandiert, wodurch Ab-

kühlung und Übersättigung der Luft eintritt. Die den Raum durchdringenden Teilchen werden in diesem Augenblick durch die von ihnen erzeugten Nebel- (Kondens-) Streifen indirekt sichtbar, wenn sie seitlich beleuchtet werden. Um die bereits vorher in der Kammer vorhandenen Ionen zu entfernen, legt man zwischen Kolben und vordere Glaswand ein elektrisches Feld von etwa 200 V Gleichspannung an.
Es gibt verschiedene konstruktive Ausführungen, die zur fotografischen Fixierung weitgehend automatisiert sind. Auch kontinuierliche Beobachtung ist möglich. Zuschaltung eines magnetischen Felds ergibt eine Bahnkrümmung der elektrisch geladenen Teilchen, woraus deren Geschwindigkeit bestimmt werden kann.
Eine Abart ist die *Blasenkammer*, die mit überhitztem Äther oder flüssigem Wasserstoff gefüllt ist. Durchgehende Teilchen erregen eine Spur von Dampfbläschen längs ihrer Bahn.

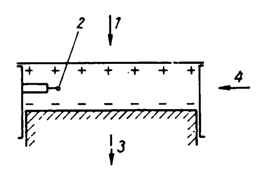


Bild 39. Schema der Nebelkammer.
1 Blickrichtung; *2* Präparat;
3 Kolben; *4* Beleuchtung

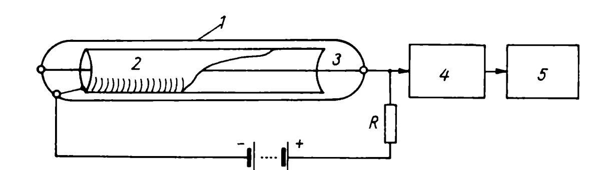


Bild 40. Schema eines Mantelzählrohrs. *1* Glasmantel; *2* Anodenzylinder; *3* Zähldraht; *4* Impulsformstufe; *5* Zählwerk; *R* hochohmiger Widerstand

5.3.7.2. Kernspurplatte

Fotografische Platten oder Filme mit besonders dicker Schicht werden der Strahlung ausgesetzt. Jedem Zentimeter Bahnlänge in Luft entsprechen etwa 10 µm Bahnlänge in der Schicht. Die entwickelten Spuren werden mit dem Mikroskop vermessen.

5.3.7.3. Ionisationskammer

Zur Messung von Strahlenintensitäten über längere Zeiträume dienen Ionisationskammern. Im einfachsten Fall ist eine solche Kammer ein geschlossenes Gefäß, in dem sich ein empfindliches Elektrometer befindet, das von außen her aufgeladen oder entladen wird.

Entlademethode. Zwischen dem aufgeladenen Elektrometer und der Gefäßwand wird ein elektrisches Feld hergestellt. Die von dem Präparat erzeugten Ionen entladen das Elektrometer mehr oder weniger schnell.
Auflademethode. Das außerhalb der eigentlichen Kammer liegende Elektroskop wird durch Abscheidung der Ladungen aufgeladen. Das Feld wird durch eine konstante Hilfsspannung erzeugt.

An Stelle der mechanisch wirkenden elektrostatischen Elektrometer werden Gleichstromverstärker mit besonderen Elektrometerröhren bevorzugt. Zur Messung von Einzelimpulsen werden Ionisationskammern kaum noch verwendet. Sie sind in dieser Hinsicht vom Zählrohr und vom Szintillationszähler verdrängt worden.

5.3.7.4. Geiger-Müller-Zählrohr

Das Zählrohr gestattet die sichere Zählung von einzelnen Teilchen bzw. γ-Quanten.

Aufbau und Arbeitsweise. Das Zählrohr ist ein Metall- oder Glasrohr mit leitendem Innenbelag (Katode), das axial von einem dünnen Draht (Anode) durchzogen ist, der gegenüber der Wand auf etwa 1000 ··· 1500 V aufgeladen wird. Das Rohr ist mit einem Gas von niedrigem Druck gefüllt, z. B. mit Argon (12 kPa) + Äthylalkohol (1,3 kPa). Während die Ionisationskammer nur die von der einfallenden Strahlung primär erzeugte Ionisation erfaßt, tritt im elektrischen Feld des Zählrohrs eine durch Ionenlawinen bewirkte zusätzliche Gasverstärkung ein. Jedes einfallende Teilchen erzeugt so eine bestimmte Ladungsmenge, die über den großen Widerstand *R* (Bild 40) abfließt und einen Spannungsstoß liefert, der über einen Verstärker registriert wird. Grundsätzlich kann das Zählrohr in zweierlei Weise betrieben werden:

1. *Proportionalzählrohr.* Innerhalb eines bestimmten Spannungsbereichs ist der Faktor M der Gasverstärkung von der primären Ionisation unabhängig, d. h., die Größe des vom Zählrohr abgegebenen Impulses

ist proportional der Energie der registrierten Teilchen. Das Proportionalzählrohr gestattet die Messung der Impulsamplitude und hat den Vorteil besonders kleiner Auflösungszeiten, da es bereits nach weniger als 1 μs nach Abgabe eines Impulses wieder aufnahmebereit ist.

2. *Auslösezählrohr*. Mit höherer Zählrohrspannung steigt der Verstärkungsfaktor M beträchtlich an, bis schließlich der Entladungsvorgang selbst von der Größe der Primärionisation unabhängig wird, d. h. jedes einfallende Teilchen einen Impuls von gleichbleibender Größe liefert. In diesem Auslösebereich wird das Zählrohr am meisten verwendet. Damit auch schnelle Impulsfolgen fehlerfrei gezählt werden, müssen die Entladungen schnell gelöscht werden. Bei den heutigen selbstlöschenden Zählrohren geschieht das durch Zusatz organischer Gase (Alkohol, Azeton o. ä.) zum Füllgas. Dennoch ist beim praktischen Betrieb auf die Totzeit (etwa 100 ··· 200 μs) zu achten, innerhalb der das Rohr keinen Impuls registriert.

Je nach Verwendungszweck gibt es die verschiedensten Zählrohrtypen und Schaltungsmöglichkeiten. Während gewöhnliche *Glaszählrohre* nur auf γ- und energiereiche β-Strahlen ansprechen, sind für weichere β- und α-Strahlen mit einem dünnen Glimmerfenster versehene Formen (z. B. *Glockenzählrohr*) notwendig.

Neutronenzählrohre. Da Neutronen selbst keine ionisierende Wirkung haben, verwendet man für den Nachweis der Neutronen eine besondere Gasfüllung, wie etwa Bortrifluorid. Dann spielt sich im Borkern der Prozeß $^{10}B(n, \alpha)^7Li$ ab; die hierbei frei werdenden α-Teilchen zählen die Neutronen indirekt.
Die vom Zählrohr abgegebenen Impulse werden über einen Verstärker einem mehrstufigen Untersetzer zugeleitet, der die Impulsfrequenz entweder dual oder dekadisch so weit herabsetzt, daß ein mechanisches Zählwerk nachgeschaltet werden kann.

5.3.7.5. Szintillationszähler

Eines der ältesten Instrumente zum Nachweis von α-Teilchen ist das *Spinthariskop*, eine mit einer Lupe versehene kleine Hülse, die am Boden einen Leuchtschirm (Zinksulfid) trägt.

Arbeitsweise. Das im Abstand von einigen mm befestigte Präparat wirft seine Strahlung auf den Schirm, jedes α-Teilchen gibt einen kleinen Lichtblitz (*Szintillation*). Bei geeigneter Bauart ist eine genaue Auszählung der Impulse möglich. Diese visuelle Beobachtungsmethode hat aber nur noch historische Bedeutung. Der *moderne Szintillationszähler* besteht aus dem eigentlichen Szintillator, d. h. einem Körper (z. B. Kristall aus Natriumjodid, Naphthalin, Stilben oder anderen Stoffen), in dem die einfallenden Teilchen bzw. γ-Quanten Lichtimpulse erzeugen. Die Lichtblitze fallen auf eine Zäsium-Antimon-Fotokatode und die hier ausgelösten Elektronen in einen *Sekundärelektronen-Vervielfacher* (SEV, Multiplier), der genügend große Spannungsimpulse liefert, die dann dem Zählgerät zugeführt werden. Die Vorteile des Szintillationszählers sind: bequeme Erfaßbarkeit von Teilchen und Quanten aller Art bereits oberhalb von 10 keV Energie, hohe Quantenausbeute (bis 90% aller einfallenden γ-Quanten werden erfaßt, gegenüber nur etwa 1% beim Zählrohr), Zählung bis zu 10^7 Teilchen je Sekunde.

5.3.7.6. Halbleiterdetektor

In Halbleitern (Si, Ge, Ge-Li) ruft die γ-Strahlung die Bildung zahlreicher Elektron-Loch-Paare hervor. Ist die Kombination in Sperrichtung gepolt, so werden die Elektronen nach dem Pluspol, die Löcher nach dem Minuspol abgesaugt. Die in Festkörpern sehr kleine Reichweite (0,1 mm in Si für 3-MeV-Protonen) und der hohe Wirkungsgrad erlauben es, die Abmessungen von Halbleiterdetektoren sehr klein zu halten (wenige Millimeter). Weitere Vorzüge sind das hohe energetische Auflösungsvermögen, die Schärfe der Signale und die geringe Energie (≈ 3 eV) zur Erzeugung eines Elektron-Loch-Paars.

5.3.7.7. Tscherenkow-Zähler

Dieser Zähler wird nur in besonderen Fällen verwendet. Die extrem schnell bewegten Teilchen durcheilen z. B. einen 0,1 m langen Piacryl-Zylinder und emittieren dabei Licht. Der Winkel ϑ gegen die Bewegungsrichtung der Elektronen, unter dem diese Tscherenkow-*Strahlung* emittiert wird, ist gegeben durch:

$$\cos\vartheta = c/nv \tag{103}$$

n Brechzahl, v Teilchengeschwindigkeit, c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum



Er erlaubt dadurch die Bestimmung der Geschwindigkeit der Teilchen.

Voraussetzung für das Zustandekommen des TSCHERENKOW-*Effekts* ist, daß die Teilchengeschwindigkeit v größer als die Lichtgeschwindigkeit c/n in dem betreffenden Medium ist.

5.4. Erzwungene Kernvorgänge

5.4.1. Kernumwandlungen mit natürlichen Strahlungsquellen

Zahlreiche Kernumwandlungen lassen sich künstlich hervorrufen, indem man die betreffenden Substanzen einer geeigneten Strahlung aussetzt und unter möglichst optimalen Reaktionsbedingungen günstige Ausbeuten anstrebt. Die erste künstlich herbeigeführte Kernumwandlung wurde 1919 von RUTHERFORD beobachtet, als er α-Teilchen eines natürlichen radioaktiven Präparats auf Stickstoff einwirken ließ. Diesen Vorgang beschreibt die Reaktionsgleichung:

$$^{14}_{7}\text{N}(\alpha, \text{p})^{17}_{8}\text{O}$$

Man nennt den Vorgang kurz einen „(α, p)-Prozeß" und setzt in der Klammer stets an erster Stelle das eingeschossene Teilchen (hier α-Teilchen) und an zweiter Stelle das abgegebene Teilchen (hier Proton p).
In der Folgezeit wurden noch zahlreiche ähnliche Reaktionen beobachtet. Doch ist die Ausbeute außerordentlich gering, da die zu treffenden Kerne im Vergleich zu ihren Abständen extrem klein sind. Auf 23000 Nebelkammeraufnahmen fanden sich z. B. nur 8 solcher Umwandlungen. Die geringen umgewandelten Mengen sind chemisch nicht nachweisbar.
Ebenfalls mit Hilfe einer natürlichen Strahlungsquelle entdeckte 1934 das Ehepaar JOLIOT-CURIE Umwandlungsvorgänge, bei denen vorher noch nicht bekannte radioaktive Nuklide entstanden. So ließen sie z. B. die α-Strahlung des Poloniums auf Aluminium einwirken und erhielten dabei ein radioaktives Isotop des Phosphors nach der Gleichung $^{27}_{13}\text{Al}(\alpha, \text{n})^{30}_{15}\text{P}$ mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 2{,}55$ min.

5.4.2. Erzeugung schneller Teilchen

Literatur: [2, 3, 16, 21, 23, 27]

Da sich mit natürlichen Strahlungsquellen nur geringe Ausbeuten erzielen lassen, ist eine Reihe von Geräten entwickelt worden, mit denen starke Teilchenströme von außerordentlicher Energie hergestellt werden können. Hierfür kommen besonders Elektronen, Protonen, Deuteronen, α-Teilchen, aber auch schwerere Kerne in Frage.

5.4.2.1. Linearbeschleuniger

Durch elektrische Entladung in einem verdünnten Gas werden zunächst positive Ionen (z. B. bei Verwendung von Wasserstoff Protonen) erzeugt. Durch Löcher oder Schlitze in der Katode fliegen sie als *Kanalstrahlen* mit der zuletzt erreichten Geschwindigkeit weiter und können in anschließenden elektrischen Feldern weiter beschleunigt werden. Bei den Linearbeschleunigern liegen diese Felder in einer Reihe hintereinander.

Wirkungsweise der Beschleunigung. Die Beschleunigung kann einmalig erfolgen oder stufenweise nacheinander. Im ersten Fall werden die benötigten hohen Gleichspannungen (1···5 MV) mit dem VAN-DE-GRAAFF*schen Generator* oder mit dem *Kaskadengenerator* erzeugt. Im zweiten Fall verwendet man zur Beschleunigung eine größere Anzahl von ring- oder rohrförmigen Elektroden, die hintereinanderliegend so angeordnet sind, daß die beschleunigten Teilchen im gleichen Takt mit dem angelegten hochfrequenten Wechselfeld durch die geladenen Elektrodenringe fliegen. Damit können bei großer Kammerlänge (bis 13 m) z. B. Protonen bis 40 MeV beschleunigt werden.

5.4.2.2. Zyklotron

Das bekannteste Gerät ist das LAWRENCE*sche Zyklotron* (Bild 41).

Es besteht aus einem Elektromagnet von außergewöhnlicher Stärke, zwischen dessen Polschuhen eine flache zylindrische, evakuierte Kammer K liegt. Diese wiederum enthält zwei hohle Halbdosen

D_1 und D_2, die mit einem Hochfrequenzgenerator (Sender) verbunden sind, so daß jede Halbdose abwechselnd positiv und negativ aufgeladen ist. Im Mittelpunkt steht die Ionenquelle M. Befindet sich z. B. ein Teilchen im Punkt A, so wird es von der linken Dose angezogen und von der rechten abgestoßen. In der (feldfreien) Dose selbst durchläuft es unter der Einwirkung des Magnetfelds einen Halbkreis. Wenn es am Punkt B angekommen ist, sind die Dosen gerade umgepolt, das Teilchen, stärker beschleunigt, beschreibt einen zweiten Halbkreis usw. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird der Radius der Kreisbahn bei konstanter Umlauffrequenz ebenfalls größer. Die Teilchen legen deshalb eine spiralige Bahn zurück und verlassen die Kammer schließlich nach Ablenkung durch die Hilfselektrode H.

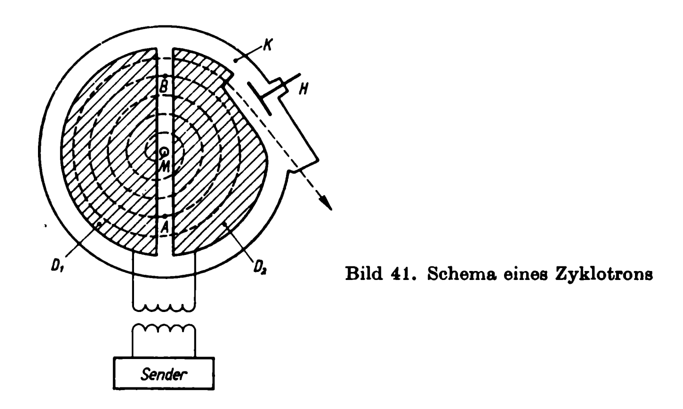


Bild 41. Schema eines Zyklotrons

Der Magnet eines großen Zyklotrons hat eine Masse von etwa $2 \cdot 10^5$ kg, zwischen seinen Halbdosen liegt eine Spannung von etwa 200 kV, die Leistung des HF-Senders beträgt etwa 100 kW. Dabei werden Teilchenströme von einigen mA und 45 MeV erzeugt.

Da mit Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit die Masse eines Teilchens größer wird, muß die Beschleunigungsfrequenz entsprechend moduliert werden, damit die umlaufenden Teilchen stets im richtigen Augenblick den Spalt zwischen den Halbdosen erreichen. Mit dem größten dieser *Synchro-Zyklotrone*, dessen Magnet eine Masse von etwa $7 \cdot 10^6$ kg hat (frequenzmoduliertes Zyklotron), können Protonen bis zu 750 MeV beschleunigt werden.

5.4.2.3. Protonen-Synchrotron

Zur Beschleunigung von Protonen dient das *Protonen-Synchrotron*, das aus zahlreichen, in einem großen Kreis aufgestellten Elektromagneten besteht. In den Zwischenräumen werden die Teilchen durch elektrische Felder beschleunigt. In Serpuchow bei Moskau erlangen Protonen auf einer Kreisbahn von 470 m Durchmesser nach je 40000 Umläufen die Energie 70 GeV. Das Gerät dient zur Erforschung der Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen, der gegenseitigen Umwandlung, der Kernkräfte usw.

5.4.2.4. Beschleuniger für Elektronen

Zur Beschleunigung von Elektronen für technische und medizinische Zwecke dient das *Betatron.*

Es stellt grundsätzlich einen Transformator dar, der an Stelle der Sekundärwicklung ein ringförmiges Vakuumrohr besitzt, in dem die Elektronen kreisförmig beschleunigt werden. Nach etwa 10^6 Umläufen erreichen die Elektronen ihre Endgeschwindigkeit. Sie können dabei Energien bis 300 MeV erhalten.

Wesentlich höhere Energien werden mit dem *Elektronen-Synchrotron* erreicht.

Nach einer Vorbeschleunigung auf 40 MeV in einem Linearbeschleuniger wird der Elektronenstrahl durch 48 in einem Kreis von 100 m Radius aufgestellte Elektromagnete in eine Kreisbahn gezwungen (LORENTZ-*Kraft*). An 16 Stellen werden die Elektronen durch Hochfrequenzresonatoren (500 MHz) auf die End-

energie 6 GeV beschleunigt. Da die Elektronen bereits im Vorbeschleuniger nahezu Lichtgeschwindigkeit erhalten, entfällt die Endenergie fast ausschließlich auf den Massenzuwachs. Große Verluste treten dabei durch die *Synchrotronstrahlung* auf, deren kontinuierliches Spektrum z. T. im sichtbaren Bereich liegt. Im Prinzip wird eine solche auch von anderen rasch im Kreise bewegten elektrischen Ladungen erzeugt, z. B. im Betatron. Geräte dieser Art arbeiten in Jerewan (UdSSR) und Hamburg (BRD).

5.4.2.5. Weitere Systeme

Außer den genannten sind in der letzten Zeit noch weitere, je nach Art und Umfang der Forschungsaufgaben unterschiedliche Typen von Teilchenbeschleunigern entwickelt worden, wie z. B. das *Spiralrücken-Zyklotron* (Genf), der *Isochron-Ringbeschleuniger* (Genf), der *Elektronen-Ringbeschleuniger* (UdSSR) u. a.

Um die Stoßwirkung der beschleunigten Teilchen noch weiter zu erhöhen, wird heute allgemein das System der *Speicherringe* angewendet. Zwei Teilchenströme werden mit entgegengesetztem Umlaufsinn aus dem Synchrotron herausgelenkt und im Magnetfeld einer separaten Anlage auf vorerst noch getrennten ringförmigen Umlaufbahnen (Durchmesser einige 100 m) gespeichert. Nach entsprechender Ablenkung prallen sie dann gegeneinander. Um die gleiche Stoßwirkung zu erzielen, müßten sie in einem gewöhnlichen Synchrotron die Energie 2000 GeV haben.

5.4.3. Ablauf von Kernreaktionen

5.4.3.1. Arten der Kernreaktionen

Je nachdem, welche Teilchen zum Beschuß des Kerns verwendet bzw. welche Teilchen von dem gebildeten Kern emittiert werden, sind die in Tabelle 19 aufgeführten Reaktionstypen möglich.

Tabelle 19. Typen möglicher Kernreaktionen

Zum Beschuß verwendetes Teilchen	Bei der Kernreaktion entstehendes Teilchen						
	α	t	p	2n	n	d	γ
α	—	—	(α, p)	—	(α, n)	(α, d)	—
t	—	—	(t, p)	—	(t, n)	—	—
d	(d, α)	—	(d, p)	(d, 2n)	(d, n)	—	—
p	(p, α)	(p, t)	—	—	(p, n)	—	(p, γ)
n	(n, α)	(n, t)	(n, p)	(n, 2n)	—	—	(n, γ)
γ	—	—	(γ, p)	—	(γ, n)	—	—

Wie bei chemischen Reaktionen unterscheidet man auch hier exo- und endotherme Kernreaktionen.

1. Eine *exotherme Kernreaktion* liegt dann vor, wenn hinsichtlich der Summe der Massen gilt (einschließlich γ-Quanten):

$$(\text{Ausgangskern} + \text{Stoßteilchen}) > (\text{Endkern} + \text{emittiertes Teilchen})$$

Beispiel. ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow 2\,{}^4_2\text{He} + W$. Die rechte Seite hat eine um 0,01868 u zu kleine Masse, was nach (88) einer Energie von 17,19 MeV entspricht, die in Form von kinetischer Energie der beiden α-Teilchen frei wird. Hierzu kommt noch die kinetische Energie von 0,4 MeV, die aufzuwenden ist, damit das Proton in den Kern eindringen kann.

2. Im umgekehrten Fall, wenn die Summe der gebildeten Massen größer ist als die vor der Reaktion vorhanden gewesenen, spricht man von *endothermen Reaktionen.* Hierbei muß das stoßende Teilchen eine der Massendifferenz entsprechende kinetische Energie haben.

Beispiel. ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H + W \rightarrow {}^{7}_{4}Be + n$. Experimentell wurde festgestellt, daß die Energie des Protons mindestens 1,76 MeV betragen muß, während die des Neutrons nur 0,16 MeV beträgt. Folglich muß die Summe der Massen auf der linken Seite um 0,0017 u kleiner sein als die auf der rechten, woraus die Masse des instabilen Be-Kerns berechnet werden kann (wichtige Methode zur Bestimmung von Kernmassen ohne Massenspektrograf).

5.4.3.2. Wirkungsquerschnitt

Um die Ausbeute von Kernreaktionen zu kennzeichnen, gibt man den Wirkungsquerschnitt σ an. Hierunter versteht man die Fläche, die ein punktförmig gedachtes Teilchen treffen muß, um eine Reaktion hervorzurufen. Er darf nicht mit dem wirklichen Querschnitt des Kerns verwechselt werden und ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen eine bestimmte Reaktion herbeiführt:

$$\sigma = N'/n'N_V d \qquad (104)$$

N' Anzahl der je m² und s erzielten Kernumwandlungen, n' Anzahl der je m² und s auftreffenden Stoßteilchen, N_V Anzahl der Atome je m³, d Dicke der Schicht in m

Der Wirkungsquerschnitt ist von der Energie der Stoßteilchen und der spezifischen Art der Kernumwandlung abhängig und liegt meist zwischen 10^{-28} und 10^{-30} m².

Je nach Art der erzielten Wirkung spricht man im einzelnen vom *Streuquerschnitt* σ_S, *Einfangquerschnitt* σ_A, *Spaltquerschnitt* σ_F usw. Der *totale Wirkungsquerschnitt* σ_T gibt dann die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß das Teilchen auf irgendeine Weise mit dem Kern reagiert:

$$\sigma_T = \sigma_S + \sigma_A + \sigma_F \qquad (105)$$

5.4.3.3. Gewinnung künstlicher Radionuklide

Fast alle der heute in Technik, Biologie und Medizin in beträchtlichem Umfang benötigten Radionuklide werden durch Bestrahlung gewöhnlicher Nuklide im Kernreaktor hergestellt. Der Ausgangsstoff (in vielen Fällen eine für die Anwendung unmittelbar geeignete chemische Verbindung) wird zu diesem Zweck im *Bestrahlungskanal* nahe dem Reaktorkern durch einen intensiven Neutronenfluß aktiviert. Je größer die Halbwertszeit des gebildeten Nuklids ist, desto länger ist die erforderliche Bestrahlungszeit.

Die Umwandlung vollzieht sich dabei fast ausschließlich nach den Schemata (n, γ) oder (n, p). Im ersten Fall entsteht ein Nuklid der gleichen Ordnungszahl, wobei eine chemische Abtrennung des gebildeten Radionuklids nicht möglich ist. Im zweiten Fall wäre eine Abtrennung wegen der veränderten Ordnungszahl möglich; der Einfachheit halber wird meist darauf verzichtet. Ebenso wird auch immer nur ein Teil des Ausgangsstoffs umgewandelt. Die spezifische Aktivität des erhaltenen Materials ergibt sich aus:

$$a = A/m \qquad (106)$$

A Aktivität, m Masse der Substanz

5.5. Kernspaltung

5.5.1. Vorgang der Kernspaltung

Auf der Suche nach Transuranen entdeckten Hahn und Strassmann 1939, daß der Kern von ${}^{235}_{92}U$ durch Bestrahlung mit Neutronen in zwei, meist ungleich schwere Teile zerfällt und außerdem dabei ein bis drei weitere Neutronen frei werden, z. B.

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{139}_{56}Ba + {}^{94}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n \qquad (107)$$

Bisher wurden etwa 200 verschiedene Spaltprodukte ermittelt. Eine genaue Halbierung des Kerns tritt nur selten ein, am häufigsten treten Bruchstücke der Massenzahlen 95 und 140 auf. Die meisten Spaltprodukte sind β-Strahler. Dies sowie der Umstand, daß bei der Spaltung freie Neutronen erscheinen,



rührt daher, daß schwere Kerne verhältnismäßig mehr Neutronen enthalten als leichte, s. Regeln der Kernsystematik.

Dringt ein Neutron in den Urankern ein, so gerät dieser in Kapillarschwingungen (*Tröpfchenmodell*) und durchläuft dabei eine langgestreckte Form. Infolge der wachsenden COULOMBschen Abstoßung schnürt sich der Kern etwa in der Mitte ein, und beide Bruchstücke fliegen mit großer Gewalt auseinander.

Obwohl für praktische Zwecke (Betrieb von Kernreaktoren) die Spaltung der Kerne U 235, U 233 und Pu 239 im Vordergrund steht, ist grundsätzlich auch die Spaltung aller anderen Kerne möglich. Hierzu sind aber erheblich größere Energien notwendig. Leichtere Kerne können nur mit von großen Teilchenbeschleunigern gelieferten Neutronen und α-Teilchen von vielen hundert MeV gespalten werden. Von großer praktischer Bedeutung ist, daß U 235 sich in außerordentlich geringem Mengenverhältnis auch spontan spalten kann.

5.5.2. Energieverhältnisse bei der Kernspaltung

Am leichtesten spalten sich Nuklide mit ungeraden Massenzahlen (U 235, U 233, Pu 239) vom Typ gu. Hierzu genügen bereits *thermische Neutronen*, d. h. solche, deren Geschwindigkeit derjenigen von Gasmolekülen bei Raumtemperatur entspricht (Größenordnung 0,025 eV). Da die Bindungsenergie des ursprünglichen Kerns je Nukleon kleiner ist als die der beiden Bruchstücke (Bild 36), ergibt die Spaltung einen *Massendefekt*, der nach Gl. (88) je gespaltenes Atom einer frei werdenden Energie von etwa 200 MeV entspricht. Diese erscheint als kinetische Energie der davonfliegenden Bruchstücke und wandelt sich überwiegend in Wärme um. Umgerechnet auf 1 kg reines U 235 ergibt das eine theoretische Ausbeute von $86{,}4 \cdot 10^{12}$ J. Wenn jedoch gewöhnliches Uran vorliegt, macht das Isotop U 235 nur 0,719% davon aus. Deshalb wird zum Zweck der Energiegewinnung angestrebt, auch das U 238 mit auszunutzen (Brutreaktor).

5.5.3. Physikalische Voraussetzungen für die Nutzung der Kernenergie

5.5.3.1. Kettenreaktion

Die bei der Spaltung frei werdenden Neutronen können ihrerseits auf weitere Kerne treffen und diese zur Spaltung veranlassen. Da bei der Spaltung im Mittel mehr Neutronen erzeugt als verbraucht werden, kann die Anzahl der Neutronen lawinenartig anwachsen; es entsteht eine *Kettenreaktion.*

Voraussetzung für eine Kettenreaktion ist, daß der Multiplikationsfaktor $k > 1$ ist. Beträgt er genau 1, so ist die Anzahl der je Zeiteinheit entstehenden Neutronen gleich der verbrauchten Anzahl. Damit sind auch die Anzahl der je Zeiteinheit gespaltenen Kerne und die Leistung der Anlage konstant.

Kritische Masse. Hat man einen Block aus reinem U oder Pu, der so groß ist, daß sein Durchmesser die mittlere freie Weglänge der Neutronen übertrifft, so führt die einsetzende Kettenreaktion zur augenblicklichen Detonation (*Kernspaltungsbombe*). Die Mindestmenge, bei der eine solche eintritt, ist die *kritische Masse*; sie liegt bei etwa einigen Kilogramm entsprechend einem Radius von einigen Zentimetern.

5.5.3.2. Erzeugung langsamer Neutronen

Die bei der Spaltung frei werdenden Neutronen werden wegen ihrer großen Energie vorzugsweise von den Kernen des U 238 eingefangen und gehen demnach für den Fortgang der Reaktion verloren. Um das zu verhindern, bremst man sie zuvor ab, indem man die Neutronen durch Schichten von geeigneten Substanzen (*Moderatoren*) laufen läßt. Dabei stoßen sie elastisch mit den Kernen des Moderators zusammen und verlieren dabei ihre überschüssige Energie.

Günstigste Bremswirkung liegt vor, wenn die Kerne des Moderators etwa die gleiche Masse wie die Neutronen haben. Schwere Kerne sind wirkungslos. Wesentlich ist ferner, daß der Moderator selbst möglichst wenig

Neutronen absorbiert. Einen Überblick gibt Tabelle 20 mit Zahlen von Absorptionsquerschnitten thermischer, also langsamer Neutronen. Am besten eignen sich gewöhnliches Wasser, schweres Wasser, Kohlenstoff in Form von Graphit und Beryllium sowie BeO.

Tabelle 20. Absorptionsquerschnitte für thermische Neutronen

Element	H	D	He	Be	C	O	U 238	U 235
Absorptionsquerschnitt σ in 10^{-28} m²	0,3	0,0008	0	0,01	0,005	0,002	3	500

5.5.3.3. Steuerung der Reaktion

Kernenergieanlagen müssen im Gegensatz zu Kernspaltungsbomben eine konstante, jederzeit regelbare und begrenzbare Leistung abgeben*).

1. Eine *künstliche Steuerung* des Reaktionsablaufs ist durch Einsatz stark Neutronen absorbierender Stoffe (*Absorber*) möglich, deren Kerne einen besonders großen Absorptionsquerschnitt aufweisen. Hierzu eignen sich besonders Stäbe aus Kadmium oder Borstahl, die mehr oder weniger tief in die Spaltzone eingesenkt werden und die Reaktion erforderlichenfalls völlig zum Stillstand bringen.
2. Eine *natürliche Selbstregelung* der Reaktion ist dadurch gegeben, daß etwa 0,75% der gebildeten Neutronen erst mit einer gewissen Verzögerung (bis 55 s) frei werden. Da der *Multiplikationsfaktor* im praktischen Betrieb bei genau 1 liegt, wird jede Steigerung darüber hinaus zuerst von diesen verzögerten Neutronen bewirkt, womit die Leistung nicht explosionsartig, sondern nur langsam anwächst.

Ferner nimmt die Neutronenabsorption mit steigender Temperatur zu, d. h., die Reaktion hat einen *negativen Temperaturkoeffizienten*. Deshalb sind aus Sicherheitsgründen alle Reaktoren so konstruiert, daß die Reaktion bei Überschreiten einer genau festgelegten Temperatur von selbst zum Erliegen kommt.

5.5.3.4. Anreicherung spaltbaren Materials

Obwohl es technisch möglich ist, eine Kettenreaktion auch in natürlichem Uran, das nur 0,71% des spaltbaren Isotops U 235 enthält, zu unterhalten, arbeiten die meisten Forschungs- und Kraftwerksreaktoren mit Uran, das mehr oder weniger (i. allg. bis zu einigen Prozent) mit U 235 angereichert ist. Die für die Anreicherung bzw. Isotopentrennung erforderlichen Anlagen sind außerordentlich aufwendig und kostspielig.
Zwei Verfahren werden hauptsächlich angewendet:

Diffusionsmethode. Gasförmiges Uranhexafluorid UF_6 diffundiert unter leichtem Überdruck durch ein weitläufiges System von porösen, aus Nickel gesinterten Röhren, wobei die leichte Komponente etwas schneller diffundiert als die schwerere.

Gaszentrifuge. Das gasförmige UF_6 befindet sich in Zylindern, die mit der Drehzahl 60000 1/min rotieren. Das schwerere Isotop reichert sich in der Randzone an. Zwischen Boden und Deckel wird ein Temperaturgefälle von etwa 15 K hergestellt, womit sich das schwerere Isotop je nach Umlaufrichtung oben oder unten anreichert. In beiden Fällen sind viele gleichzeitig laufende, hintereinander geschaltete Trennstufen erforderlich.

5.5.4. Kernreaktoren

Literatur: [1, 2, 3, 8, 16, 23, 27, 45]

5.5.4.1. Grundsätzliches

Anlagen, in denen eine gesteuerte Kettenreaktion für wissenschaftliche oder technische Zwecke unterhalten wird, nennt man *Kernreaktoren**).

*) s. auch Fachwissen des Ingenieurs, Band 6, Abschn. Kernenergieanlagen



Aufbau und Wirkungsweise (Bild 42). Das spaltbare Material wird meist in Form von Stäben oder in kleinen Stücken (*Pellets*), die in Röhren gefüllt sind, eingesetzt. Die *Brennelemente* lassen sich mehr oder weniger tief in den *Moderator* einsenken und werden zugleich vom *Kühlmittel* umspült, das die frei werdende Wärme aufnimmt und an *Wärmeaustauscher* abgibt. Zur Einstellung und Grobregelung des Reaktors dienen bewegliche *Regelstäbe*, die stark neutronenabsorbierendes Material enthalten.
Das Entweichen von Neutronen verhindert der aus Graphit, Beryllium oder BeO bestehende *Neutronenreflektor*. Die *aktive Zone* des Reaktors steht in einem großen *Druckkessel*, der mit einem mehrere Meter dicken Panzer aus Schwerbeton als *Strahlenschutz* umgeben ist.
Je nach Aufgabe, Verwendungszweck und den zur Verfügung stehenden Mitteln gibt es die unterschiedlichsten Typen von Reaktoren (Tabelle 21).

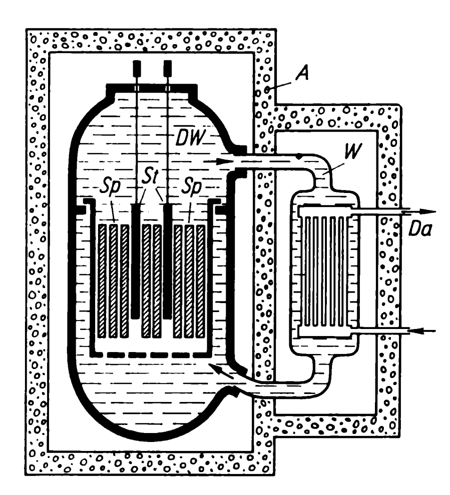


Bild 42. Schema eines Kernreaktors.
A Abschirmung; *Da* Dampf zur Turbine; *DW* unter Druck stehendes Wasser; *Sp* Stäbe mit Spaltstoff; *St* Regelstäbe; *W* Wärmeaustauscher

Tabelle 21. Gesichtspunkte für Aufbau und Unterscheidung von Reaktoren

Verwendungszweck	Brennstoff
1. Forschung 2. Energieerzeugung 3. Erzeugung von Radionukliden 4. Materialprüfung 5. Brutreaktoren zur Erzeugung spaltbaren Materials	1. Natürliches Uran 2. Uranoxid UO_2, Urankarbid UC_2 3. Leicht angereichertes Uran (2 ··· 20% U 235) 4. Hoch angereichertes Uran (80 ··· 100% U 235) 5. Plutonium 239, Uran 233, PuO_2 6. U- oder Pu-Legierung mit anderen Metallen 7. Uransalze in wäßriger Lösung
Verteilung des Brennstoffs	**Moderator**
1. Heterogen: Brennstoff und Moderator sind räumlich getrennt 2. Homogen: Brennstoff ist im Moderator gelöst oder suspendiert	1. Graphit 2. Gewöhnliches Wasser 3. Schwerwasser 4. Beryllium 5. Kein Moderator (Schnellneutronen-Reaktor)
Wärmeabführende Medien	**Neutronenspektrum**
1. Wasser unter Dampfdruck (Siedewasserreaktor) 2. Wasser unter höherem Druck (Druckwasserreaktor) 3. Kohlendioxidgas 4. Flüssiges Natrium oder Na-K-Gemisch	1. Thermischer Reaktor (Neutronenenergie $W_n \approx 0{,}025$ eV). Verwendung von Natururan oder schwach angereichertem Material möglich. 2. Epithermischer Reaktor ($W_n = 0{,}5 \cdots 10^3$ eV) 3. Schnellneutronen-Reaktor ($W_n > 0{,}1$ MeV) (s. Brutreaktor)

5.5.4.2. Leistung des Reaktors

Die *thermische* (*Wärme-*) *Leistung* eines Reaktors hängt in erster Linie vom *Neutronenfluß* $\Phi_n = n\bar{v}$ und der Gesamtmasse m des eingesetzten spaltfähigen Materials ab. Mit dem Wirkungsquerschnitt σ_F und der in 1 kg spaltbaren Materials enthaltenen Anzahl von Kernen N_A/M finden dann je Masse- und Zeiteinheit

$$z = \Phi_n \sigma_F N_A / M \tag{108}$$

Spaltungen statt.
Rechnet man für einen gespaltenen Kern mit dem Energiegewinn 190 MeV = $30{,}4 \cdot 10^{-18}$ MJ, so folgt mit $\sigma_F = 5{,}9 \cdot 10^{-26}$ m², $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{26}$ 1/kmol und $M = 235$ kg/kmol daraus der Ausdruck für die Leistung:

$$P = \Phi_n m \cdot 4{,}6 \cdot 10^{-18} \tag{109}$$

P	Φ_n	m
MW	1/m² · s	kg

Beispiel. Rechnet man mit einem für Kraftwerksreaktoren charakteristischen Neutronenfluß von $3 \cdot 10^{17}$ 1/m² · s, so errechnet sich für einen Reaktor vom Typ des Kraftwerks Rheinsberg bei einer Anreicherung von 1% (m = 180 kg) eine Leistung von

$P = 3 \cdot 10^{17} \cdot 180 \cdot 4{,}6 \cdot 10^{-18}$ MW = 248 MW

5.5.4.3. Kernkraftwerke

Je nach den technischen und volkswirtschaftlichen Gegebenheiten wurden in den einzelnen Ländern unterschiedliche Grundkonzeptionen von Kraftwerksreaktoren entwickelt. Zu den am zahlreichsten gebauten Typen gehört der *Druckwasserreaktor* [Nowoworoneshski (UdSSR), Rheinsberg, KKW Nord (DDR), Eisbrecher Arktika usw.].

Die 132 Brennelemente des *Kernkraftwerks* in Rheinsberg (DDR) enthalten insgesamt 18 t Uranoxid, das zu 1 ··· 2% mit U 235 angereichert ist. Sie befinden sich in einem Druckkessel von 18,7 m Höhe, der mit Wasser (265 °C, 10 MPa) gefüllt ist, das als Moderator und Kühlmittel dient. Da es im Betrieb radioaktiv wird, gibt es in einem Wärmeaustauscher seine Wärme an einen zweiten Dampfkreislauf (230 °C, 3,2 MPa) ab, der den Turbogenerator antreibt. Dieser ist von konventioneller Bauart und liefert bei 265 MW thermischer Eingangsleistung eine elektrische Leistung von 70 MW.
Da die Stromerzeugungskosten je kWh mit zunehmender Kraftwerksgröße stark sinken, werden im Zuge der heutigen Entwicklung wesentlich größere Blöcke errichtet, wie z. B. im KKW Nord (DDR) mit der elektrischen Leistung von 440 MW, in Nowoworoneshski (4 Blöcke von je 440 MW elektrischer Leistung) usw.

5.5.4.4. Brutreaktoren

Da das leicht spaltbare U 235 nur einen geringen Bruchteil (0,71%) des natürlichen Urans ausmacht, ist es von großer Bedeutung, das überwiegend vorhandene U 238 auf indirektem Wege auszunutzen, und zwar dadurch, daß es unter Anlagerung eines Neutrons in Plutonium umgewandelt wird:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U}(n, \gamma)\, {}^{239}_{92}\mathrm{U} + e^- \rightarrow {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + e^- \rightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} \tag{110}$$

Das Plutonium läßt sich von der Muttersubstanz auf chemischem Weg leicht abtrennen, ist wie das U 235 leicht spaltbar und geht mit einer Halbwertszeit von 24410 Jahren unter α-Strahlung in U 235 über.
Dieser Prozeß, der sich in relativ geringem Umfang in jedem gewöhnlichen Kernreaktor abspielt, wird im *Brutreaktor* so gesteuert, daß eine möglichst große Menge an Plutonium erbrütet wird. Da der Wirkungsquerschnitt für die Anlagerung von Neutronen an U 238 für die bei der Kernspaltung frei werdenden schnellen Neutronen am größten ist, läßt man den Moderator weg und arbeitet mit *hoch angereichertem Material*, um einen großen Neutronenfluß zu erzielen. In der energieliefernden Zone (*Spaltzone*) ist das spaltbare Material auf verhältnismäßig engem Raum konzentriert. Von hier aus fliegen die Neutronen

in den sie umgebenden Mantel, der aus U 238 (bzw. $^{238}_{92}UO_2$) besteht (*Brutzone*). Nach ausreichender Bestrahlung können die stabförmigen Elemente herausgezogen und das entstandene Pu extrahiert werden.

Das Verhältnis der gebildeten Plutoniummenge zur Menge des verbrauchten Spaltstoffs bezeichnet man als *Konversionsrate K*. Wird mehr Spaltstoff erzeugt als verbraucht ($K > 1$), bezeichnet man K als *Brutfaktor*.

Eine bekannte Anlage dieser Art ist der sowjetische Brutreaktor BN 350 in Schewtschenko, dessen Brutfaktor 1,5 beträgt. Sein aktiver Kern liefert die Wärmeleistung 1000 MW und die elektrische Leistung 350 MW. Der aktive Kern ist zu 17 ··· 26% mit U 235 angereichert. Von dem projektierten Kraftwerk BN 1000 wird sogar ein Brutfaktor von $K = 1{,}75$ erwartet.
Die außerordentlich hohe Leistungsdichte (800 MW/m³) erfordert ein Kühlmittel von besonders guter Wärmeleitfähigkeit und hohem Siedepunkt bei zugleich niedrigem Dampfdruck. Es wird dafür flüssiges Natrium verwendet (Temperatur im 1. Kreislauf 500 °C bei 1 MPa Dampfdruck). Der Reaktor BN 350 dient hauptsächlich zur Entsalzung von Meerwasser.

5.5.5. Kernfusion

Analog zu vielen chemischen Reaktionen, bei denen sich die beteiligten Moleküle wegen ihrer thermischen Geschwindigkeit durch Stöße gegenseitig ionisieren, sind auch Kernprozesse denkbar, bei denen die einzelnen Kerne infolge extrem hoher Temperatur miteinander reagieren. Die hierzu nötige Anregungsenergie würde allerdings eine Temperatur in der Größenordnung 10^8 Kelvin erfordern. Wahrscheinlich spielen sich solche *thermonuklearen Reaktionen* auf der Sonne und anderen Fixsternen ab, wobei mehrere Reaktionszyklen möglich sind, z. B. der *Proton-Proton-Prozeß*, bei dem jeweils 4 Protonen unter teilweiser Umwandlung in Neutronen zu einem Heliumkern zusammentreten. Man nennt diesen Vorgang daher auch *Kernfusion* (Kernverschmelzung). Infolge des eintretenden Massendefekts werden dadurch je Gramm Helium $6{,}3 \cdot 10^{11}$ J (175 MWh) frei (Quelle der Sonnenenergie).

Weitere Reaktionen dieser Art setzen Temperaturen von 10^{10} K voraus. Es ist in technischem Maßstab bis jetzt nur gelungen, derartige Prozesse *ungesteuert* ablaufen zu lassen (Wasserstoffbombe); die erforderliche hohe Zündtemperatur wird dabei von einer gewöhnlichen Kernspaltungsbombe geliefert. Versuche, *kontrollierte, steuerbare* thermonukleare Reaktionen herbeizuführen, sind an verschiedenen Orten im Gange. Wenn es möglich wird, solche Prozesse in technischem Maßstab zu realisieren, stehen der Technik unbegrenzte Energiemengen zur Verfügung, wobei die Frage des Brennstoffs wegen des überall greifbaren Wasserstoffs keine Rolle mehr spielt.

Ein zur Energiegewinnung geeigneter Reaktionszyklus wäre der folgende (die frei werdende Energie steht hinter dem jeweils entstehenden Teilchen):

$$\begin{aligned} {}^2_1D + {}^2_1D &\rightarrow ({}^3_1T + 1{,}0\ \text{MeV}) + ({}^1_1p + 3{,}0\ \text{MeV}) \\ {}^2_1D + {}^3_1T &\rightarrow ({}^4_2He + 3{,}6\ \text{MeV}) + ({}^1_0n + 14{,}1\ \text{MeV}) \end{aligned} \quad (111)$$

Beide Reaktionen spielen sich zugleich ab, wobei die 1. Reaktion das für die 2. Reaktion notwendige Tritium liefert. Das erforderliche Deuterium D steht als natürlicher Bestandteil des gewöhnlichen Wassers in praktisch unbegrenzter Menge zur Verfügung. Die Gewinnungskosten spielen im Vergleich zur Energieausbeute keine Rolle.

5.5.6. Anwendung von Radionukliden

Mit modernen Teilchenbeschleunigern und vor allem mit Hilfe des Kernreaktors lassen sich Radionuklide heute mühelos und billig herstellen. Die praktische Bedeutung dieser in großer Anzahl vorliegenden Nuklide liegt vor allem darin, daß deren Atome durch die von ihnen ausgehenden β- und γ-Strahlen gleichsam „markiert" sind (Tabelle 22). Sie dienen so als *Indikatoren* und lassen sich in kleinsten Mengen mit Hilfe leicht zu bedienender Meß- und Anzeigegeräte nachweisen. Zu beachten sind jedoch ihre meist beschränkte Lebensdauer und der Umstand, daß die Handhabung dieser Stoffe wegen ihrer intensiven Strahlung nicht ungefährlich ist.

Tabelle 22. Auswahl radioaktiver Nuklide

Nuklid	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Strahlenart	Energie der Strahlung (wichtigste Komponente) in MeV		Herstellungsweg des Nuklids
			β	γ	
$^{3}_{1}H$	12,3 Jahre	β	0,0185	—	$^{6}Li(n, \alpha)$
$^{14}_{6}C$	5700 Jahre	β	0,156	—	$^{14}N(n, p)$
$^{24}_{11}Na$	15 Stunden	β, γ	1,4	2,8	$^{23}Na(n, \gamma)$
$^{32}_{15}P$	14,3 Tage	β	1,7	—	$^{32}S(n, p)$
$^{35}_{16}S$	87 Tage	β	0,168	—	$^{35}Cl(n, p)$
$^{42}_{19}K$	12,5 Stunden	β, γ	3,55	1,5	$^{41}K(n, \gamma)$
$^{45}_{20}Ca$	163,5 Tage	β	0,26	—	$^{44}Ca(n, \gamma)$
$^{51}_{24}Cr$	27,8 Tage	γ	—	0,32	$^{50}Cr(n, \gamma)$
$^{59}_{26}Fe$	45 Tage	β, γ	0,46	1,3	$^{58}Fe(n, \gamma)$
$^{60}_{27}Co$	5,24 Jahre	β, γ	0,31	1,25	$^{59}Co(n, \gamma)$
$^{65}_{30}Zn$	244,3 Tage	β+, γ	0,32	1,1	$^{64}Zn(n, \gamma)$
$^{110}_{47}Ag$	270 Tage	β, γ	0,087	1,4	$^{109}Ag(n, \gamma)$
$^{131}_{53}J$	8 Tage	β, γ	0,606	0,7	Uranspaltung
$^{134}_{55}Cs$	2,13 Jahre	β, γ	0,66	0,79	$^{133}Cs(n, \gamma)$
$^{137}_{55}Cs$	26,6 Jahre	β, γ	0,51	0,661	Uranspaltung
$^{170}_{69}Tm$	127 Tage	β, γ	0,97	0,084	$^{169}Tm(n, \gamma)$
$^{182}_{73}Ta$	111 Tage	β, γ	0,5	1,4	$^{181}Ta(n, \gamma)$
$^{185}_{74}W$	73,2 Tage	β	0,43	—	$^{184}W(n, \gamma)$
$^{192}_{77}Ir$	74,4 Tage	β, γ	0,67	0,6	$^{191}Ir(n, \gamma)$
$^{198}_{79}Au$	2,7 Tage	β, γ	0,97	0,4	$^{197}Au(n, \gamma)$
$^{204}_{81}Tl$	4,0 Jahre	β	0,77	—	$^{203}Tl(n, \gamma)$

Tabelle 23. Geeignete radioaktive Nuklide zur Werkstoffprüfung

Werkstoffdicke	Radionuklid	Energie der γ-Strahlung
Dünn	Thulium 170	0,08 MeV
Bis 5 cm	Iridium 192	0,06 MeV
Bis 20 cm	Kobalt 60	1,3 MeV

Abgesehen von den vielseitigen Anwendungen der Radionuklide in Chemie, Medizin, Biologie und Landwirtschaft können diese bei den verschiedensten technologischen Untersuchungen, Prüf- und Kontrollverfahren mit Erfolg eingesetzt werden:

1. *Gammadefektoskopie.* Zur Feststellung von Gußfehlern, mangelhaften Schweißstellen usw.*). Die Eignung eines Radionuklids ist von der Schichtdicke des zu durchstrahlenden Werkstoffs abhängig, wie aus Tabelle 23 ersichtlich ist.

2. *Autoradiografie.* Zur Strukturanalyse von Legierungen gibt man diesen ein geeignetes Nuklid als Indikator bei, macht einen Anschliff und belichtet durch unmittelbares Auflegen des Films. Gefügeänderungen sind nach der Behandlung (Ziehen, Walzen, Pressen) auf einer zweiten Aufnahme zu erkennen.

3. *Feststellung der Diffusionsgeschwindigkeit.* Eine dünne Schicht eines Radionuklids wird elektrolytisch oder durch Aufdampfen aufgebracht. Nach Erhitzen der Probe wird diese schichtweise abgeschliffen, auf Strahlung untersucht und dadurch die Eindringtiefe des diffundierenden Metalls festgestellt.

*) siehe Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG, Gammadefektoskopie

4. *Verschleißvorgänge* werden untersucht, indem man die mit einem Radionuklid versehene Probe auf einem Gleitstück arbeiten läßt. Je nach Abnutzung geht vom Nuklid mehr oder weniger auf das Gleitstück über, dessen Radioaktivität gemessen wird. Kolbenringe können vor dem Aufziehen mit Neutronen bestrahlt werden, wodurch sie radioaktiv werden. Während des Betriebs gelangen die abgeriebenen Teilchen ins Schmieröl, dessen Radioaktivität den Grad der Abnutzung anzeigt. Um den Verschleiß von Drehmeißeln zu messen, werden diese durch Bestrahlen mit Neutronen oder bereits bei der Herstellung radioaktiv gemacht. Die Strahlung der Drehspäne zeigt den Verschleiß an.

5. *Kontaktfreie Dickenmessungen.* Die zu messenden Bänder, Folien usw. läßt man zwischen einem strahlenden Präparat und einer Ionisationskammer hindurchlaufen. Je nach der Materialdicke schwankt der Ionisationsstrom. Es eignen sich für sehr dünne Werkstoffe: C 14 (β) oder Po 210 (α), für Metallfolien: Sr 90 oder Tl 204 und für dicke Bleche: Tm 170, Ir 192 oder Co 60.
Das Meßgerät kann mit dem Walzwerk derart gekoppelt sein, daß die Dicke automatisch konstant gehalten wird. In ähnlicher Weise läßt sich auch die Dicke von Baumwollgeweben kontrollieren, ebenso mit besonderen Hilfsvorrichtungen die Dicke einzelner Werkstücke mit einer Genauigkeit bis 0,1 mm.
Weitere Beispiele. Verfahren zur Dickenmessung von Überzügen, Farbanstrichen und sonstigen Deckschichten auf Metallen, zur Kontrolle der Wanddicke von Rohren usw.

6. *Füllstandsmessung.* Häufig kommt es vor, daß der Füllstand in geschlossenen oder unter Druck stehenden Behältern gemessen werden muß und konventionelle Methoden (z. B. Anzeige durch Schwimmer, Schauglas, Lichtschranke) nicht anwendbar sind. Wird nun an der einen Seite des Behälters außen eine γ-Strahlenquelle (z. B. ^{60}Co) angebracht und an der gegenüberliegenden Seite ein Zählrohr, so wird dieses in dem Augenblick verstärkt ansprechen, wenn das Füllgut unter das damit festgelegte Niveau absinkt.

7. γ-γ-*Dichtemessung von Böden und Gesteinen.* Gelangt die von einer γ-Quelle ausgehende Strahlung in ein umgebendes Medium, so wird sie von den Atomen mehrmals gestreut, ehe sie mit einem Zählrohr gemessen wird. Um diese Streustrahlung zu erfassen, muß die Direktstrahlung des Präparats abgeschirmt werden. Die Theorie ergibt aber, daß der Streukoeffizient für die in Böden und Gesteinen gewöhnlicher Zusammensetzung vorkommenden Stoffe (Sauerstoff, Silizium, Wasser, Kalzium usw.) praktisch der Dichte proportional ist. Damit läßt sich durch Versenken einer Meßsonde in die anstehenden Massen bzw. in Bohrlöcher die Dichte in den verschiedenen Tiefen messen, was z. B. bei Baugrunduntersuchungen von großer Bedeutung ist.

8. n-*Messung zur Bestimmung des Wassergehalts.* Neutronen werden beim Auftreffen auf leichte Kerne nach wenigen Zusammenstößen auf thermische Geschwindigkeit abgebremst. Damit ergibt sich, daß die Bremsweglänge in wasserstoff- bzw. wasserhaltigen Medien bedeutend kleiner als in wasserfreien Stoffen ist. Die Dichte der sich um eine Neutronenquelle ausbreitenden Neutronenwolke ist daher in wasserhaltigen Substanzen besonders groß. Baut man also eine Neutronenquelle mit einem speziell für thermische Neutronen empfindlichen Zählrohr zu einer Meßsonde zusammen, so ergibt das Zählrohr in wasserhaltigen Stoffen eine bedeutend größere Impulszahl je Zeiteinheit als in trockenen Substanzen. So läßt sich ohne zeitraubende chemische Analyse oder umständliche Trockenverfahren der Wassergehalt von Kohle und Hölzern usw. an Hand einer Eichkurve schnell feststellen. Auf gleiche Weise kann auch der Karnallitgehalt (kristallwasserhaltig!) von Rohsalzen leicht bestimmt werden. Die Genauigkeit des Verfahrens liegt bei etwa 1%. Als Neutronenquelle eignet sich ein mit Berylliumpulver vermischtes Radiumpräparat, dessen α-Strahlung Neutronen nach der Gleichung

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + 5{,}76\ \mathrm{MeV}$$

bildet.

9. *Weitere Anwendungen.* Beseitigung der elektrischen Aufladung in Textilmaschinen, Kontrolle der Zusammensetzung von Farbbädern, Bestimmung der Verdampfungsgeschwindigkeit von Oxidkatoden, Messung der Viskosität von Flüssigkeiten in geschlossenen Leitungen, Messung der Luftbewegung in großen Räumen, Kontrolle der Korrosion im Hochofen und des Stands des flüssigen Stahls von außen her.

Literaturverzeichnis

Weiterführende Literatur

[1] *Autorenkollektiv:* Betrieb von Kernkraftwerken. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1972
[2] *Autorenkollektiv:* Brockhaus ABC Physik. — Leipzig: VEB F. A. Brockhaus Verlag 1972
[3] *Autorenkollektiv:* Kleine Enzyklopädie Atom. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1970

[4] *Autorenkollektiv:* Physik — Fundament der Technik. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[5] *Böge, A.:* Physik. Grundlagen, Versuche, Aufgaben, Lösungen. 4. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1976
[6] *Ebert, H.:* Physikalisches Taschenbuch. 5. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971
[7] *Finkelnburg, W.:* Einführung in die Atomphysik. 12. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1976
[8] *Fratzscher, W.:* Einführung in die Kernenergetik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973
[9] *Grimsehl, E.:* Lehrbuch der Physik. Band 1: Mechanik — Akustik — Wärmelehre. 22. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977
[10] *Grimsehl, E.:* Lehrbuch der Physik. Band 2: Elektromagnetisches Feld. 18. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1973
[11] *Grimsehl, E.:* Lehrbuch der Physik. Band 3: Optik. 16. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978
[12] *Grimsehl, E.:* Lehrbuch der Physik. Band 4: Struktur der Materie. 16. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1975
[13] *Hajko, V., Schilling, H.:* Elektrik, Optik, Quantentheorie. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[14] *Hajko, V.:* Mechanik und Wärmelehre. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[15] *Hammer, K.:* Lehrbuch der Physik. 10. Aufl. — München, Düsseldorf: Oldenbourg Verlag 1975
[16] *Hertz, G. (Herausgeber):* Lehrbuch der Kernphysik. 3 Bände. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966, 1960, 1962
[17] *Jaworski, B. M., Detlaf, A. A.:* Physik griffbereit. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1977
[18] *Kment, V., Kuhn, A.:* Technik des Messens radioaktiver Strahlung. 2. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. 1963
[19] *Kölling, H.-L.:* Strahlungswirkung, Strahlungsbelastung, Strahlenschutz. — Leipzig: J. A. Barth Verlag 1969
[20] *Kohlrausch, F.:* Praktische Physik. 3 Bände. 22. Aufl. — Stuttgart: B. G. Teubner 1968
[21] *Kollath, R.:* Teilchenbeschleuniger. 2. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962
[22] *Koschkin, N. J., Schirkewitsch, M. G.:* Elementarphysik griffbereit. — Braunschweig: Vieweg 1975
[23] *Lindner, H.:* Grundriß der Atom- und Kernphysik. 14. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[24] *Lindner, H.:* Lehrbuch der Physik für Ingenieure. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[25] *Mende, D., Simon, G.:* Physik. Gleichungen und Tabellen. 8. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1983
[26] *Naráy, Zs.:* Laser und ihre Anwendungen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. 1976
[27] *Orear, J.:* Physik. — München: Carl Hanser Verlag 1981
[28] *Pose, H.:* Einführung in die Physik des Atomkerns. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971
[29] *Recknagel, A.:* Physik. Elektrizität und Magnetismus. 12. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[30] *Recknagel, A.:* Physik. Mechanik. 14. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[31] *Recknagel, A.:* Physik. Optik. 10. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[32] *Recknagel, A.:* Physik. Schwingungen und Wellen — Wärmelehre. 12. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[33] *Sander, H.:* Laser — allgemeinverständlich. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[34] *Schallreuther, W.:* Einführung in die Physik. Band I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970
[35] *Schallreuther, W.:* Einführung in die Physik. Band II: Elektrizitätslehre, Optik und Atomphysik. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1968
[36] *Schilling, H.:* Elektromagnetische Felder und Wellen. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[37] *Scholz, O.:* Atomphysik — kurz und bündig. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972
[38] *Schpolski, E. W.:* Atomphysik. 2 Teile. 14. bzw. 11. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976
[39] *Schuricht V.*, u. a.: Strahlenschutzphysik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975
[40] *Sitzlack, G.:* Einführung in den Strahlenschutz. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Volk und Gesundheit 1974
[41] *Sobolew, N.:* Die Laser und ihre Zukunft. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972
[42] *Stroppe, H.:* Physik. Teilchen, Felder, Ströme, Wellen, Quanten. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[43] *Weber, H., Herziger, G.:* Laser. — Weinheim: Physik Verlag 1972



[44] *Westermann, F.:* Laser. — Stuttgart: B. G. Teubner 1976
[45] *Zeller, W., Franke, A.:* Das physikalische Rüstzeug des Ingenieurs. 11. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[46] *Lindner, H.:* Grundriß der Festkörperphysik. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1978
[47] *Kuchling, H.:* Physik. Reihe Nachschlagebücher für Grundlagenfächer. 15. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[48] *Autorenkollektiv:* Leitfaden der Physik. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[49] *Gerthsen, C., Kneser, H. O.:* Physik. 13. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1977
[50] *Westphal, W. H.:* Physik. 26. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1970

Zeitschriften über spezielle Themen der Kernphysik mit Literaturhinweisen:

Atomwirtschaft. — Karlsruhe: G. Braun (seit 1955)
Kernenergie. Zeitschrift für Kernforschung und Kerntechnik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (seit 1958)



TM Technische Mechanik

Von Dr.-Ing. Raimund Drath †, Leipzig (Abschn. 1., 2., 4. und 5., *überarbeitet von Dipl.-Ing. Johannes Winkler, Karl-Marx-Stadt*), *Ing. Paul Haase †, Dresden* (Abschn. 3.), *Dr.-Ing. Gerhard Irmer, Dresden* (Abschn. 1. und 3.) *und Dr.-Ing. Gerd Rehlich, Dresden* (Abschn. 1. und 3.)

Inhaltsverzeichnis



Wichtigste Formelzeichen[1])

Statik starrer Körper

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
F	N	Kraft	S	—	Standsicherheit
F_N	N	Normalkraft	s	—	Stabzahl bei Fachwerken
F_R	N	Reibungskraft	W_R	J	Reibungsarbeit
f	mm, m	Hebelarm der Rollreibung	x_S	mm, m	Schwerpunktkoordinate
k	—	Anzahl der Knoten eines	y_S	mm, m	Schwerpunktkoordinate
		Fachwerks	z_S	mm, m	Schwerpunktkoordinate
l	mm, m	Länge, Hebelarm	η	—, (%)	Wirkungsgrad
M	N · m	statisches Moment,	μ	—	Gleitreibungszahl
		Kraftmoment,	μ_F	—	Fahrwiderstandszahl
		Drehmoment	μ_0	—	Haftreibungszahl

Beanspruchung fester Körper

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
A	mm², m²	Querschnittsfläche	n	1/s, 1/min	Drehzahl
E	GPa	Elastizitätsmodul	O_F	—	Oberflächenfaktor
e	mm, m	Entfernung der äußeren	P	W, kW	Leistung
		Faserschicht von der	p	MPa	Druck, Flächenpressung
		spannungsfreien Faser-	q	N/mm,	Streckenlast
		schicht		N/m	
F	N	Kraft, Belastung, Last	S	—	Sicherheit
f	mm, m	Durchbiegung	W	mm³, m³	Widerstandsmoment
G	GPa	Schubmodul, Gleitmodul	α_k	—	Formzahl
I	mm⁴, m⁴	Flächenträgheitsmoment	β_k	—	Kerbwirkungszahl
		(Flächenmoment	ε	mm/m	Dehnung, Stauchung
		2. Grades)	ε_q	—	Querkontraktion
i	mm, m	Trägheitsradius	η_k	—	Empfindlichkeitszahl
K	—	Größeneinflußfaktor	ϑ	rad/m,	bezogener Verdrehwinkel
l_B	m, km	Reißlänge		(°/m)	
M	N · m,	Kraftmoment	λ	—	Schlankheitsgrad
	N · mm		μ	—	POISSON-Zahl, Querzahl
N	—	Lastspielzahl nach	σ	MPa	Normalspannung
		WÖHLER	τ	MPa	Tangentialspannung
$\bar{N}$	—	Betriebsdauer bei stocha-	φ	rad, (°)	Biegewinkel,
		stischer Beanspruchung			Verdrehwinkel
N_G	—	Grenzlastspielzahl	ω	—	Knickzahl

Bedeutung der wichtigsten Indizes

Index	Bedeutung	Index	Bedeutung
A	Lagerkennzeichnung, Spannungs-	l	Lochleibung
	amplitude	m	Mittel...
a	Spannungsamplitude, allgemein	max	maximal
B	Lagerkennzeichnung, Bruch...,	n	Nenn..., Normal...
	Zugfestigkeit	o	obere Grenzspannung
b	Biege...	P	Proportionalitätsgrenze
D	Dauerfestigkeit	p	polar
d	Druck...	Q	Quer...
E	Elastizitätsgrenze	S	Streckgrenze
k	Knick...	Sch	Schwellfestigkeit

Index	Bedeutung	Index	Bedeutung
s	Schub..., Scher..., Index für Schwerachse	xS (Sx)	Schwerachse
		y	Bezugsachse
t	Torsions..., Tangential...	yS (Sy)	Schwerachse
u	untere Grenzspannung	z, z	Zug ..., Bezugsachse
w	Wechselfestigkeit	zul	zulässig
x	Bezugsachse		

Kinematik/Kinetik starrer Körper

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
a	m/s²	Beschleunigung	n	1/s, 1/min	Drehzahl
c	N/mm, N/m	Federkonstante	P	W	Leistung
			r	m, mm	Radius, Abstand
D	—	logarithmisches Dekrement der Dämpfung	s	m, mm	Weg
			T	s	Periodendauer (Schwingungsdauer)
D	m, mm	Trägheitsdurchmesser			
F	N	Kraft	t	s, min	Zeit
f	Hz	Frequenz	v	m/s	Geschwindigkeit
g	m/s²	Fallbeschleunigung $= 9{,}80665$ m/s²	W, E	J	Arbeit, Energie
			α	rad/s², °/s²	Winkelbeschleunigung
h	m, mm	Höhe	δ	—	Abklingkonstante
J	kg · m²	Massenträgheitsmoment (Trägheitsmoment, Massenmoment 2. Grades)	η	—	Wirkungsgrad, relative Dämpfung
			ω	rad/s, °/s	Winkelgeschwindigkeit
i		Trägheitsradius	ω	1/s	Kreisfrequenz, Eigenfrequenz
k	—	Dämpfungskonstante			
L	kg · m²/s	Drehimpuls, Drall	ω_e	Hz	Erregerfrequenz
M	N · m	Kraftmoment (Drehmoment)	φ	rad, °	Phasenverschiebungswinkel
m	kg	Masse			

1. Einführung

Alle Körper unterliegen der Einwirkung von Kräften. Je nach Lage und Größe dieser Kräfte kann ein Körper in der Ruhelage bleiben oder Bewegungen ausführen. Die Untersuchung der Kräfte und Bewegungen ist Aufgabe der Mechanik.
Die Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik. Auf der Grundlage von Axiomen erarbeitet sie ihre Aussagen auf mathematischem Wege. Die klassische oder NEWTONsche Mechanik, die auf den NEWTONschen Axiomen aufgebaut ist, gilt nur für „Makroobjekte", deren Geschwindigkeit klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist.
Die *Technische Mechanik* soll das Einwirken von Kräften auf Bauwerke, Baugruppen, Aggregate und Maschinen untersuchen und die Gesetze der Mechanik nutzbringend in der Technik anwenden. Häufig ist es notwendig, die wirklichen Zusammenhänge zu vereinfachen, zu schematisieren und ein „Modell" des Vorgangs zu schaffen, das in genügender Näherung zu Ergebnissen führt, die der Wirklichkeit entsprechen.

Die Technische Mechanik wird untergliedert in:

1. Statik

Die Statik untersucht Gleichgewichtsbedingungen sowie die Kräfte, die auf einen festen starren Körper konstanter Bewegung ($a = 0$) einwirken.

2. Beanspruchungs- und Festigkeitslehre

Die Beanspruchungslehre befaßt sich mit der Wirkung von Kräften auf elastische feste Körper hinsichtlich ihres Festigkeits- und Formänderungsverhaltens.

Nachdem mit den Verfahren der Statik die äußeren Kräfte an einem im Gleichgewicht befindlichen Bauteil ermittelt sind, kann die Beanspruchungslehre die zweckmäßige Beschreibung der Wirkung der äußeren Kräfte auf das Innere des Bauteils liefern. Diese Beschreibung umfaßt:

- die Klassifizierung der angreifenden Kräfte und Momente hinsichtlich Art und Zeit ihres Einwirkens,
- die Untersuchung der im Inneren des Bauteils auftretenden Kräfte und Momente mit dem Ziel, Ort und Größe extremer Beanspruchungswerte anzugeben,
- die Einschätzung der Widerstandsfähigkeit durch Vergleich mit den Kennwerten der Werkstoffprüfung (Festigkeit, Formänderungsverhalten usw.) und
- die Ermittlung des Formänderungsverhaltens der Bauteile.

Die Grundaufgabe der Beanspruchungslehre besteht also darin, die Form und Abmessungen der belasteten Bauteile durch Abstimmen der die Beanspruchung charakterisierenden Größen mit den Festigkeitskennwerten so festzulegen, daß unerwünschte Verformung und Zerstörungen vermieden und die ökonomischen Forderungen an die Konstruktion berücksichtigt werden.

3. Kinematik

Die Kinematik untersucht die Bewegung fester starrer Körper, ohne die einwirkenden Kräfte zu berücksichtigen.

4. Kinetik

Die Kinetik untersucht Bewegungen und die dadurch hervorgerufenen Kräfte im Zusammenhang mit den auf den starren Körper einwirkenden Kräften.
Die technische Praxis erfordert die Kenntnis aller auftretenden Kräfte und Bewegungen. Sie stellt die Mechanik ständig vor neue Aufgaben, die dadurch zu einem Förderer des wissenschaftlich-technischen Fortschritts wird.

2. Statik starrer Körper

2.1. Darstellung von Kräften

Kräfte sind durch Größe, Richtung und Lage bestimmt und werden als *Vektoren* dargestellt.

Im vorliegenden Nachschlagewerk sind Vektoren durch halbfetten Druck gekennzeichnet (z. B. $\boldsymbol{F}$), ihr Betrag durch Normalschrift (z. B. $|\boldsymbol{F}| = F$). In den Zeichnungen sind Vektoren durch Pfeile dargestellt; die Beschriftung gibt bereits den Betrag an (Länge des Vektors), da die Richtung vorgegeben ist.

2.2. Grundgesetze

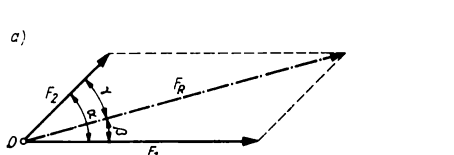
Verschiebungsgesetz: Am starren Körper kann eine Kraft auf ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden. Dabei ist gleichgültig, an welcher Stelle der Wirkungslinie die Kraft angreift. Die Kraft kann auch als außerhalb des Körpers auf ihrer Wirkungslinie liegend angesehen werden. Haben die Wirkungslinien der Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt, so können die Kräfte bis zu diesem verschoben werden und wirken dann wie Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt.

Wechselwirkungsgesetz: Kräfte werden stets von einem Körper auf einen anderen ausgeübt, wobei die beiden Körper mit gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften aufeinander wirken. So drückt z. B. ein Körper auf seine Unterlage mit derselben Kraft, mit der die Unterlage auf den Körper drückt.

2.3. Zusammenwirken zweier Kräfte

Zusammensetzung

Zeichnerisch: Die Resultierende $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ zweier im Punkt *0* angreifenden Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ ist gleich der Diagonalen des aus beiden Kräften gebildeten *Kräfteparallelogramms* oder der dritten Seite eines *Kräftedreiecks* (Kraftecks, Bild 1), dessen beide anderen Seiten aus den in beliebiger Reihenfolge aneinandergefügten Kräften $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ bestehen.



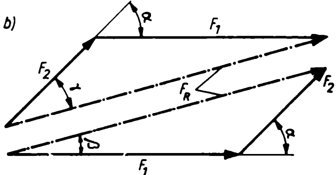


Bild 1. Zusammensetzung von zwei Kräften. a) Kräfteparallelogramm; b) Kräftedreieck (Krafteck)

Rechnerisch: Bilden die Kräfte den Winkel α, so ist:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \quad \text{bzw.} \quad F_{\mathrm{R}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha} \tag{1}$$

Die Winkel zwischen der Resultierenden $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ und den Kräften $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ (Richtungswinkel der Resultierenden) sind bestimmt durch:

$$\sin\beta = (F_2/F_{\mathrm{R}}) \sin\alpha \quad \text{und} \quad \sin\gamma = (F_1/F_{\mathrm{R}}) \sin\alpha \tag{2}$$

Gleichgewicht

Die in den Punkten A und B angreifenden Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ sind im Gleichgewicht, wenn sie die gleiche Wirkungslinie haben und gleich groß, aber entgegengesetzt sind (Bild 2). Solche Kräfte heißen *Gegenkräfte.*

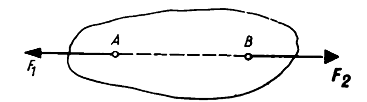


Bild 2. Gegenkräfte

Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten

Soll eine Kraft in zwei Komponenten, deren Richtungen gegeben sind, zerlegt werden, so zeichnet man vom Anfangs- und Endpunkt dieser Kraft Parallelen zu den Richtungen. Das entstehende Parallelogramm oder Dreieck ergibt die gesuchten Seitenkräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$. In mehr als zwei Komponenten, die (bzw. deren Wirkungslinien) sich in einem Punkt schneiden, kann eine Kraft in der Ebene nicht eindeutig zerlegt werden.

2.4. Ebene Kräftesysteme

2.4.1. Zentrales ebenes Kräftesystem

Die Kräfte liegen in einer Ebene und haben einen gemeinsamen Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien.

Zusammensetzung mehrerer Kräfte

Zeichnerisch: Greifen mehrere Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ (Bild 3) in einem Punkt *0* an (oder gehen die Wirkungslinien der Kräfte durch diesen Punkt *0*), so lassen sich die Kräfte zu einer Resultierenden $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ vereinigen,

die durch den Punkt 0 geht. Größe und Richtung der Resultierenden ergeben sich als *Schlußlinie eines Kräftepolygons*, das aus den aneinandergereihten Einzelkräften besteht. Der Richtungssinn der Resultierenden ist dem Umfahrungssinn der Teilkräfte entgegengesetzt; d. h., die Resultierende verläuft vom Anfangs- zum Endpunkt des Kraftecks. Die Reihenfolge der Kräfte kann beliebig sein und hat keinen Einfluß auf das Ergebnis (Bilder 3b, 3c).

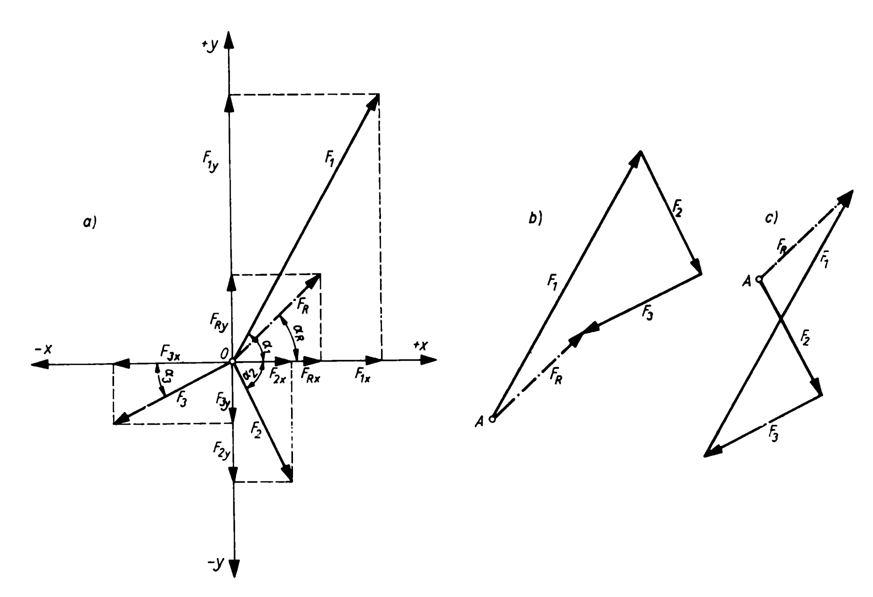


Bild 3. Zusammensetzung von drei Kräften. a) Lageplan; b) und c) mögliche Darstellung der Kräfte im Kräftepolygon (Krafteck)

Zwei nichtparallele Kräfte werden zusammengesetzt, indem man ihre Wirkungslinien bis zu ihrem Schnittpunkt O zeichnet und dort das Parallelogramm entwirft. Die Diagonale ist die gesuchte Resultierende $\boldsymbol{F}_R$ (Bilder 4a und 4b).

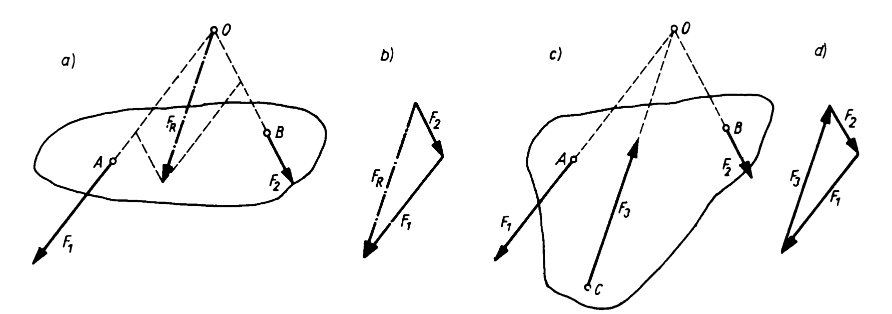


Bild 4. Zusammensetzung zweier nichtparalleler Kräfte. a) Lageplan mit Kräfteparallelogramm; b) Kräftedreieck; c) Gleichgewicht durch eine dritte Kraft; d) Kräftedreieck

Rechnerisch: Durch den Angriffspunkt 0 der Kräfte wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt (Bild 3a). $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sind die Winkel, die die Kräfte $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots$ mit der x-Achse bilden. Dann werden die Kräfte in Komponenten $F_{1x}, F_{2x}, \ldots$ und $F_{1y}, F_{2y}, \ldots$ in den Richtungen der x- und y-Achse zerlegt. Hierbei gilt unter Beachtung der Vorzeichen: Die Summe der x-Komponenten (y-Komponenten) aller

Kräfte ist gleich der x-Komponente (y-Komponente) der Resultierenden:

$$F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 - F_3 \cos\alpha_3 = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x} = F_R \cos\alpha_R = F_{Rx} \quad (3)$$

$$F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2 - F_3 \sin\alpha_3 = F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} = F_R \sin\alpha_R = F_{Ry}$$

$$\tan\alpha_R = F_{Ry}/F_{Rx}; \qquad F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Allgemein: $$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_R \cos\alpha_R = F_{Rx}; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_R \sin\alpha_R = F_{Ry} \quad (4)$$

Bei der Bestimmung des Richtungswinkels α_R sind die Vorzeichen von F_{Rx} und F_{Ry} zu berücksichtigen!

Vektorielle Schreibweise:

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \quad (5)$$

Gleichgewicht mehrerer Kräfte

Beliebig viele Kräfte eines ebenen zentralen Kräftesystems sind dann im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende Null wird, d. h., wenn sich das Krafteck schließt oder wenn (statisches Kräftegleichgewicht in den Koordinatenrichtungen):

$$\sum F_x = \sum F \cos\alpha = 0, \qquad \sum F_y = \sum F \sin\alpha = 0 \quad (6)$$

F_x waagerechte Komponenten der Kräfte, F_y senkrechte Komponenten

Drei nichtparallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt schneiden und das aus ihnen gebildete Krafteck bei gleichem Umfahrungssinn geschlossen ist (Bilder 4c und 4d).

Beispiel 1. Die in den Spreizen einer Kniehebelpresse (Bild 5) auftretenden Kräfte F_2 und F_3 sollen zeichnerisch und rechnerisch bestimmt werden, wenn die Presse mit der Kraft F_1 angetrieben wird.

Zeichnerisch: Die im Punkte *0* angreifenden Kräfte F_1, F_2 und F_3 müssen im Gleichgewicht sein, d. h., die Resultierende von F_2 und F_3 muß gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft F_1 sein. Das Krafteck aus F_1, F_2 und F_3 muß sich schließen. — Die gegebene Kraft F_1 wird nach Größe und Richtung (waagerecht) in einem bestimmten Kräftemaßstab aufgetragen, und von den Enden der Kraft F_1 werden Parallelen zu den Richtungen F_2 und F_3 gezogen. Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ ergeben die Größe von F_3 und F_2 im gewählten Kräftemaßstab.

Rechnerisch: $\sum F_x = 0$, also $F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 - F_3 \cos\alpha_3 \doteq 0$. $\sum F_y = 0$, also $F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 = 0$. Da $\alpha_1 = 0$ ist, wird $F_1 = F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3$ und $F_2 \sin\alpha_2 = F_3 \sin\alpha_3$.

Beispiel 2. Ein Wanddrehkran (Bild 6) ist in *A* und *B* drehbar gelagert. Das Querlager *A* kann nur waagerechte, das Längs- und Querlager *B* dagegen waagerechte und senkrechte Kräfte aufnehmen. Der Kran ist

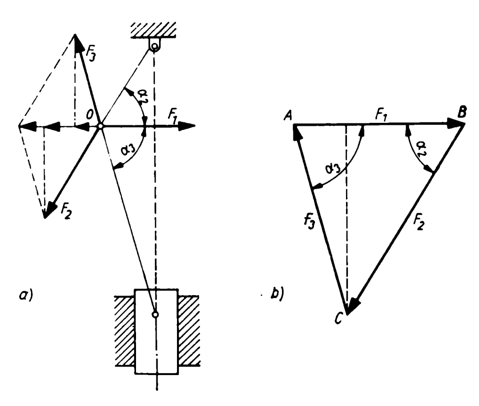


Bild 5. Kräfte an einer Kniehebelpresse

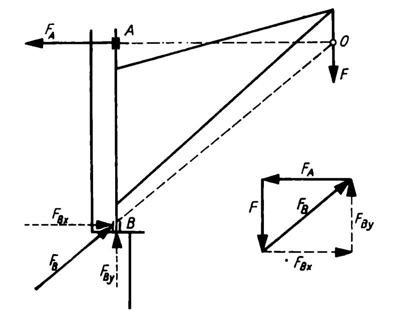


Bild 6. Kräfte an einem Wanddrehkran

im Gleichgewicht, wenn die Stützkräfte F_A und F_B der Last F das Gleichgewicht halten, wenn also diese Kräfte sich im Punkt 0 schneiden und ein geschlossenes Kraftecek mit gleichbleibendem Umfahrungssinn bilden. Die Stützkraft F_B läßt sich in eine senkrechte (F_{By}) und eine waagerechte Komponente (F_{Bx}) zerlegen. Da ferner $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$, ist $F_A = -F_{Bx}$ und $F = -F_{By}$.

2.4.2. Allgemeines ebenes Kräftesystem

Die Kräfte liegen in einer Ebene und haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien.

2.4.2.1. Statisches Moment und Drehmoment

Das statische Moment bzw. das Drehmoment einer Kraft ist das Produkt aus Kraft und Hebelarm (Bild 7):

$$M = Fl \tag{7}$$

Als *Hebelarm* einer Kraft bezeichnet man das Lot vom Drehpunkt 0 auf die Kraftrichtung. Bezieht man die Kraftwirkung auf einen beliebigen Punkt A der Kräfteebene, so spricht man vom *statischen Moment* der Kraft; bezüglich der Drehachse 0 vom *Drehmoment*. Die Drehrichtung im Uhrzeigersinn gilt als negativ (−), die entgegengesetzte als positiv (+).

Das Moment kann als Vektor dargestellt werden, der senkrecht auf der durch Kraft und Drehpunkt gehenden Ebene steht; sein Pfeil zeigt nach der Richtung, in der sich eine rechtsgängige Schraube durch Drehung fortbewegen würde. Liegt die Ebene waagerecht, so weisen positive Momente nach oben (Bild 8), negative nach unten.

Liegt der Angriffspunkt von F um die Strecke r vom Drehpunkt entfernt (Bild 9), so entsteht das Moment:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r} \quad \text{bzw.} \quad M = Fr \sin \alpha = Fl \tag{8}$$

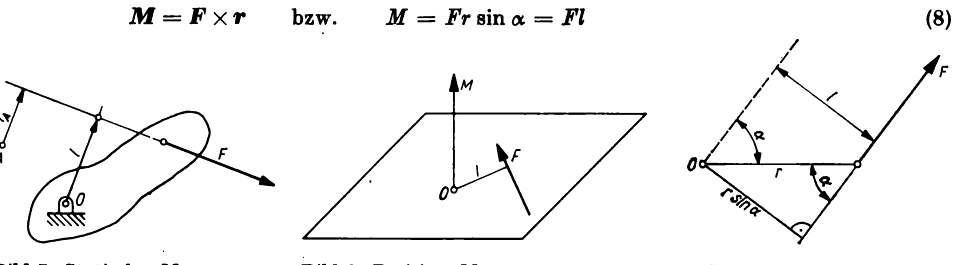


Bild 7. Statisches Moment um A und Drehmoment um 0

Bild 8. Positives Moment

Bild 9. Moment $M = Fr \sin \alpha = Fl$

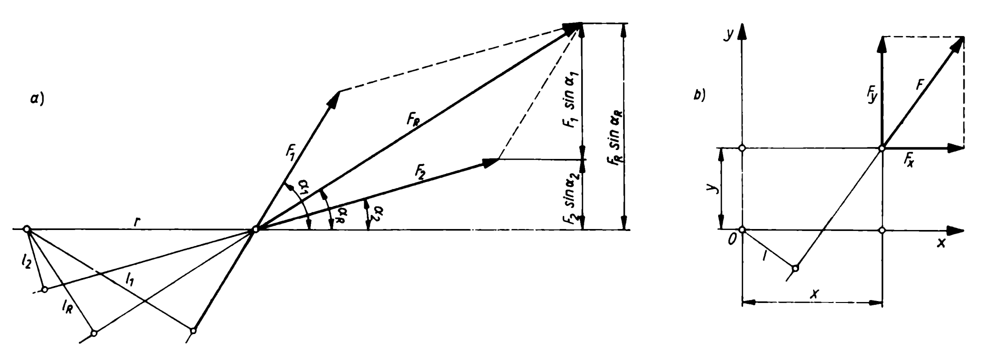


Bild 10. Statisches Moment der Resultierenden. a) schiefwinklige Darstellung; b) rechtwinklige Darstellung

Momente können wegen ihres Vektorencharakters genau wie Kräfte addiert und zerlegt werden, d. h., das Moment der Resultierenden $\boldsymbol{F}_R$ ist gleich der vektoriellen Summe der Momente aller Einzelkräfte. Liegen alle Einzelkräfte in derselben Ebene, so ist der Betrag des Moments der Resultierenden gleich der algebraischen Summe der Beträge der Momente aller Einzelkräfte (Bild 10) (***Momentensatz***):

$$F_R l_R = F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots + F_n l_n = \sum Fl = \sum M \tag{9}$$

Ist $\sum \boldsymbol{M} = 0$, so besteht statisches Momentengleichgewicht.

2.4.2.2. Kräftepaare

Zwei parallele Kräfte von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung bilden ein *Kräftepaar* (Bild 11). Bezeichnet l den kürzesten Abstand der beiden Kräfte $\boldsymbol{F}$, so ist Fl das Moment des Kräftepaars. Es läßt sich als algebraische Summe der Momente beider Kräfte darstellen,

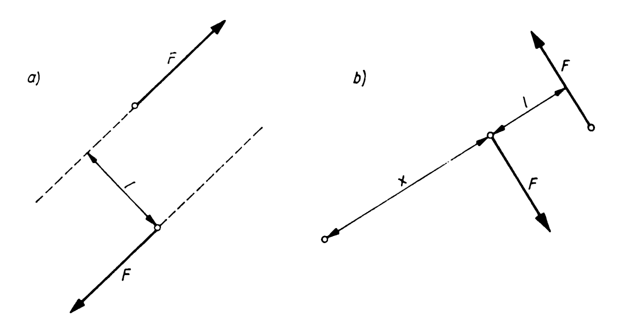


Bild 11. Kräftepaar. a) Lageplan; b) Unabhängigkeit des Moments von einem Bezugspunkt

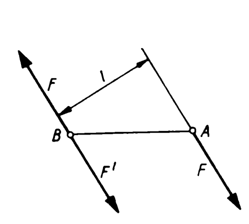


Bild 12. Parallelverschiebung einer Kraft

wobei es nicht an einen Bezugspunkt gebunden ist. Die Wirkung eines Kräftepaars ändert sich nicht, wenn das Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verschoben und gedreht oder wenn es durch ein anderes Kräftepaar von gleichem Moment und gleichem Drehsinn ersetzt oder in eine beliebige, zu seiner Wirkungsebene parallele Ebene verschoben wird.

Ein Kräftepaar läßt sich nicht durch eine resultierende Einzelkraft ersetzen, es können aber beliebig viele in einer oder in parallelen Ebenen liegende Kräftepaare zu einem resultierenden Kräftepaar zusammengesetzt werden, für das der Betrag des Moments gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist.

Im *Gleichgewicht* gehalten wird ein Kräftepaar nur durch ein anderes Kräftepaar mit gleichem Moment, aber entgegengesetztem Drehsinn.
Jede im Punkt A angreifende Kraft $\boldsymbol{F}$ läßt sich durch eine im Punkt B angreifende gleich große Kraft $\boldsymbol{F}'$ und ein Kräftepaar mit dem Moment Fl (Bild 12) ersetzen. Es kann also jede Kraft parallel zu sich selbst verschoben werden, wenn man ein Kräftepaar hinzufügt.

2.4.2.3. Krafteck und Seileck (Seileck-Verfahren)

Die Resultierende eines ebenen allgemeinen Kräftesystems ergibt sich nach Größe und Richtung aus dem Krafteck. Zur Bestimmung der Wirkungslinie dient das *Seileck*.

Regel zur zeichnerischen Ermittlung: Man zeichnet zunächst das Krafteck aus den gegebenen Kräften $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, dessen Schlußlinie Größe und Richtung von $\boldsymbol{F}_R$ ergibt (Bild 13b), wobei die Pfeilspitze der Resultierenden mit der Pfeilspitze der letzten Teilkraft zusammentrifft. Von einem beliebigen Pol 0 (zweckmäßigerweise wählt man 0 so, daß die äußeren Polstrahlen ungefähr einen rechten Winkel bilden) zieht man die Polstrahlen $\boldsymbol{F}_{S0}, \ldots, \boldsymbol{F}_{Sn}$ und parallel zu ihnen, beginnend an einem beliebigen Punkt A auf

der Wirkungslinie der ersten Kraft im Lageplan, die entsprechenden Seilstrahlen $s_0, \ldots, s_n$ (Bild 13a). Durch den Schnittpunkt von s_0 und s_n geht die Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}_R$.

Der Linienzug (*ABCD* im Bild 13) zwischen den Schnittpunkten der Wirkungslinien der Kräfte $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ mit den Seilstrahlen $s_0, \ldots, s_n$ heißt *Seileck*, weil er die Form eines Seils hat, das mit den Kräften $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ belastet ist. In jedem dieser Schnittpunkte müssen die Seilkräfte $\boldsymbol{F}_S$ mit der entsprechenden Kraft $\boldsymbol{F}$ im Gleichgewicht sein.

Im Lageplan müssen die Wirkungslinien der Kräfte unter Berücksichtigung ihrer Lage (*Längenmaßstab*) und Richtung eingetragen werden, die Kräfte brauchen nur angedeutet zu werden. Im Krafteck dagegen müssen die Kräfte in einem bestimmten *Kräftemaßstab* gezeichnet werden.

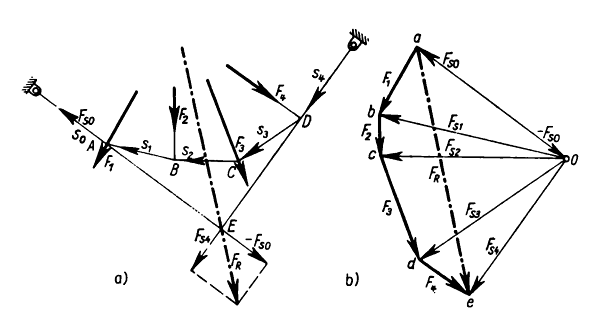


Bild 13. Zusammensetzung beliebiger Kräfte. a) Lageplan mit Seileck; b) Krafteck (Kräfteplan) mit Polstrahlen

2.4.2.4. Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene

Zeichnerisch: Beliebig gerichtete Kräfte in einer Ebene sind im Gleichgewicht, wenn das Krafteck (statisches Kräftegleichgewicht) und das Seileck (statisches Momentengleichgewicht) geschlossen sind.

Ist das Krafteck offen, so lassen sich die gegebenen Kräfte zu einer Resultierenden zusammensetzen, durch deren Größe und Richtung die Schlußlinie des Kraftecks und deren Wirkungslinie durch den Schnittpunkt der Seilkräfte $\boldsymbol{F}_{S0}$ und $\boldsymbol{F}_{Sn}$ bestimmt sind (*Seileck-Verfahren*).

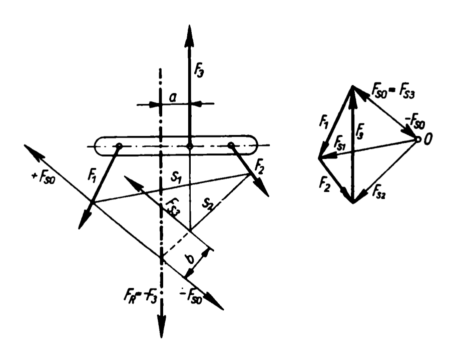


Bild 14. Gleichgewicht von Kräften. Krafteck geschlossen, Seileck offen

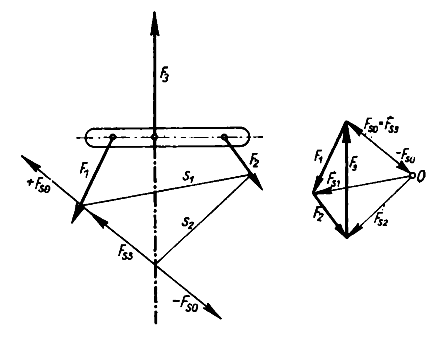


Bild 15. Gleichgewicht von Kräften. Krafteck und Seileck geschlossen

Ist das Krafteck geschlossen, das Seileck aber offen (Bild 14 mit $n = 3$), so ist die Resultierende der Kräfte $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_{n-1}$ gleich und entgegengesetzt gerichtet der letzten Kraft $\boldsymbol{F}_n$. Sie liegt aber nicht in derselben Wirkungslinie wie $\boldsymbol{F}_n$, sondern bildet mit dieser ein Kräftepaar $F_n a$; $\boldsymbol{F}_{Sn}$ fällt nicht in die Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}_{S0}$; $\boldsymbol{F}_{Sn}$ und $-\boldsymbol{F}_{S0}$ bilden ein Kräftepaar $F_{Sn} b$, dessen Moment gleich $F_n a$ ist. Ist das Seileck geschlossen, so verschwinden die Kräftepaare $F_n a$ bzw. $F_{Sn} b$ (Bild 15).

Ist das Krafteck geschlossen, so bedeutet das, daß die geometrische Summe aller Kräfte gleich 0 ist ($\sum \boldsymbol{F} = 0$), ist das Seileck geschlossen, so ist die Summe aller Momente gleich 0 ($\sum \boldsymbol{M} = 0$).

Rechnerisch: Mehrere in einer Ebene liegende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Resultierende und die Summe der Momente verschwinden. Hieraus ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}x} = \Sigma \boldsymbol{F}_x = 0; \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}y} = \Sigma \boldsymbol{F}_y = 0 \tag{10}$$

Die algebraischen Summen aller waagerechten bzw. aller senkrechten Komponenten sind gleich Null:

$$\Sigma \boldsymbol{M} = \Sigma (F_y x) + \Sigma (F_x y) = 0 \tag{11}$$

Die algebraische Summe aller Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt, ist gleich Null.

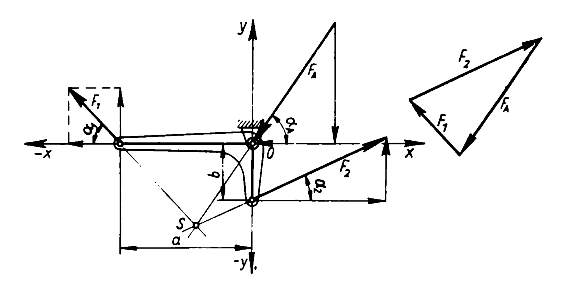


Bild 16. Kräfte an einem Winkelhebel

Beispiel. Auf einen Winkelhebel (Bild 16) wirkt die Kraft $\boldsymbol{F}_1$ unter dem Winkel α_1. Gesucht werden die unter dem Winkel α_2 wirkende Kraft $\boldsymbol{F}_2$ sowie Größe und Richtung der Lagerkraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$ im Drehpunkt *0*.

Rechnerisch: $\Sigma F_x = 0; \qquad -F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 - F_{\mathrm{A}} \cos\alpha_{\mathrm{A}} = 0$

$\Sigma F_y = 0; \qquad +F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 - F_{\mathrm{A}} \sin\alpha_{\mathrm{A}} = 0$

$\Sigma M = 0$ (bezogen auf Punkt *0*): $+F_2 b \cos\alpha_2 - F_1 a \sin\alpha_1 = 0$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die drei Unbekannten F_2, F_{A} und α_{A} bestimmen. Die Pfeilrichtungen für unbekannte Kräfte und Momente muß man festlegen und mit dem zugehörigen Vorzeichen bei der Rechnung berücksichtigen. Erhält man ein negatives Resultat, so bedeutet dies, daß die Kräfte und Momente in entgegengesetzter Richtung wirken.

Zeichnerisch: Damit der Hebel im Gleichgewicht ist. müssen $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$ sich in einem Punkte schneiden. Da die Richtungen von $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ bekannt sind, ergibt der Schnittpunkt *S* von $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ die Richtung von $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$. Die Größen von $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$ erhält man aus dem Krafteck (Bild 16 rechts).

2.4.2.5. Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten gegebener Richtungen

Die drei Komponenten der Kraft $\boldsymbol{F}$ in den drei Richtungen *I*, *II*, *III* bzw. die zugehörigen Wirkungslinien sollen sich nicht in einem Punkt schneiden (Bild 17). Die Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}$ und *I* einerseits sowie *II* und *III* andererseits werden zum Schnitt gebracht. Durch

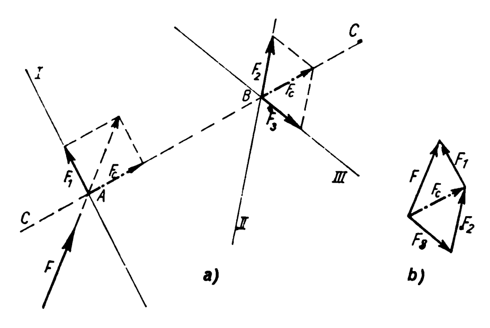


Bild 17. Zerlegung einer Kraft. a) Lageplan; b) Krafteck

die Schnittpunkte A und B wird die CULMANN*sche Gerade* $\overline{CC}$ gezogen*). Dann wird $\boldsymbol{F}$ in die Komponenten $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_C$, ferner $\boldsymbol{F}_C$ in die Komponenten $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3$ zerlegt. $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3$ sind die gesuchten Teilkräfte (Bild 17b). Die Kraft $\boldsymbol{F}$ und ihre 3 Komponenten müssen sich in 2 Schnittpunkten vereinigen lassen. Es ergeben sich die Bedingungen für das *Gleichgewicht von vier Kräften*: Kehrt man die Richtungen der Kräfte $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$ um, so müssen diese der Kraft $\boldsymbol{F}$ das Gleichgewicht halten. Hieraus folgt: Vier Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Resultierende $\boldsymbol{F}_C$ von je zwei Kräften auf einer Geraden (der CULMANNschen Geraden) liegen und gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind (Bild 18). Dann ist die Resultierende der vier Kräfte Null, und es treten keine Momente auf. Sind drei Kräfte ($\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$) nach Größe und Richtung gegeben, so kann die Gleichgewichtskraft $\boldsymbol{F}$ mit Hilfe der CULMANNschen Geraden bestimmt werden (Bild 18b).

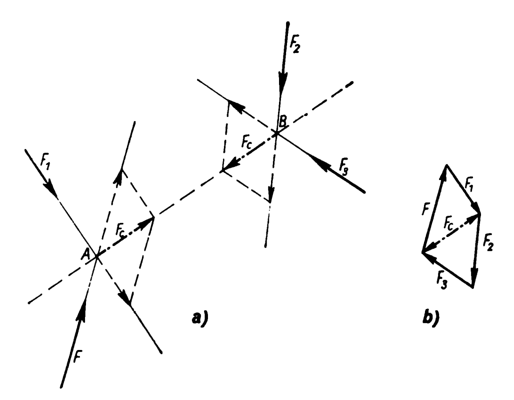
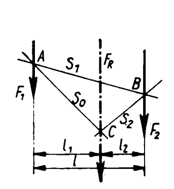


Bild 18. Gleichgewicht von vier Kräften. a) Lageplan; b) Krafteck

2.4.2.6. Parallele Kräfte

Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte

Zeichnerisch: Die Kräfte werden aneinandergereiht (das Krafteck wird zur Geraden), und von einem beliebigen Punkt 0 aus werden die Strahlen $\boldsymbol{F}_{S0}$, $\boldsymbol{F}_{S1}$, $\boldsymbol{F}_{S2}$ gezogen. Entsprechende parallele Geraden im Lageplan ergeben das Seileck ABC, die Resultierende geht durch den Punkt C (Bild 19).



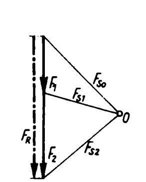




Bild 19. Gleich gerichtete parallele Kräfte

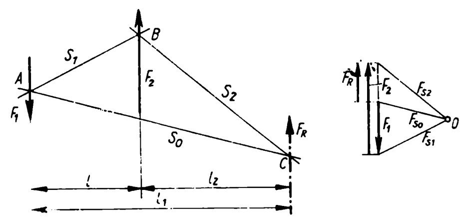


Bild 20. Entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte

Rechnerisch: $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$. Aus der Momenten-Gleichgewichtsbedingung folgt $F_R l_1 = F_2 l$; $F_R l_2 = F_1 l$; $l_1 = F_2 l / F_R$; $l_2 = F_1 l / F_R$. Durch Division folgt $l_1/l_2 = F_2/F_1$ (*Hebelgesetz*).
Sind zwei Kräfte parallel und gleich gerichtet (Bild 19), so liegt die Resultierende zwischen den Kräften, sind sie entgegengesetzt (Bild 20), so liegt sie außerhalb der Kräfte, und zwar auf der Seite der größeren

*) Außer dieser CULMANNschen Geraden $\overline{CC}$ sind noch zwei weitere Geraden möglich: Es können zum Schnitt gebracht werden $\boldsymbol{F}$ mit II und I mit III sowie $\boldsymbol{F}$ mit III und I mit II. Es gibt also drei CULMANNsche Geraden.

Kraft. Sind die Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ gleich groß und entgegengesetzt gerichtet, so ist ihre Resultierende gleich Null und unendlich weit entfernt (l_1 und $l_2 = \infty$). Ein Kräftepaar kann also *nicht* durch eine Einzelkraft ersetzt werden.

Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte

Zeichnerisch: mit Hilfe des Kraft- und Seilecks.

Rechnerisch: $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}$. Um den Abstand l_R der Resultierenden von einem beliebig gewählten Pol D zu bestimmen (Bilder 21 und 22), legt man durch diesen eine Parallele zur Kräftegruppe. Dann gilt $F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots + F_n l_n = F_R l_R$ bzw.:

$$l_R = (F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots + F_n l_n)/F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i l_i / F_R \qquad (12)$$

Legt man D in die Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}_1$, so ist $l_1 = 0$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEB und aOb folgt $H : F_R = l_R : y$ und $l_R F_R = Hy$. Das Produkt Hy ergibt das statische Moment der Resultierenden oder die Summe der statischen Momente der parallelen Einzelkräfte. Diese Beziehung gilt auch bei nichtparallelen Kräften, wenn durch den Pol D eine zur Resultierenden parallele Achse gelegt wird.

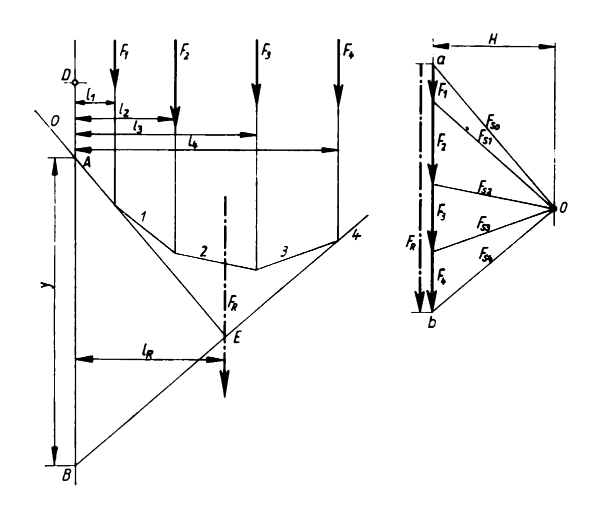


Bild 21. Zusammensetzung paralleler Kräfte gleicher Richtung

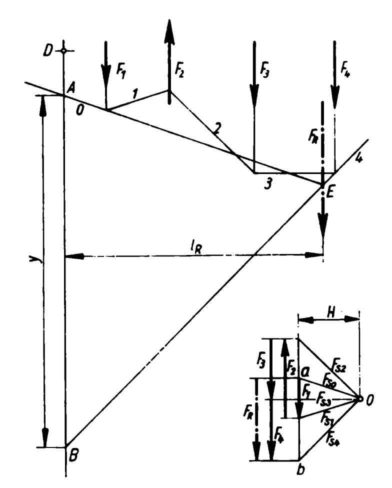


Bild 22. Zusammensetzung paralleler Kräfte entgegengesetzter Richtung

Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten

Zeichnerisch: Die Zerlegung wird ebenfalls mit Hilfe des Kraft- und Seilecks durchgeführt: Der zur Schlußlinie s_1 im Seileck parallele Polstrahl zerlegt $\boldsymbol{F}_R$ in die Komponenten $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ (Bilder 19 und 20).

Rechnerisch: $F_2 = F_R l_1/l; \qquad F_1 = F_R l_2/l$

Gleichgewicht

herrscht, wenn an Stelle von $\boldsymbol{F}_R$ eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft $\boldsymbol{F}_3$ tritt. Dann gilt $\sum \boldsymbol{F} = 0$ ($\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 0$) und $\sum \boldsymbol{M} = 0$ ($F_1 l + F_3 l_2 = 0$ oder $F_3 l_1 + F_2 l = 0$).

2.4.2.7. Bestimmung von Lagerkräften

Auf einen Körper wirkende Belastungen, sogenannte „eingeprägte Kräfte", rufen *Lagerkräfte* (*Stützkräfte*) hervor, die den Belastungen das Gleichgewicht halten. Damit die Stützkräfte bestimmt werden können, muß der Körper „frei gemacht" werden; d. h., an Stelle der Lager

denkt man sich die Stützkräfte eingesetzt. Eingeprägte Kräfte und Stützkräfte müssen ein geschlossenes Krafteck und ein geschlossenes Seileck bilden.
Überlagerungsgesetz. Wirken mehrere eingeprägte Kräfte auf einen Körper, so können die von den einzelnen Kräften in einem Lager hervorgerufenen Stützkräfte geometrisch addiert werden. Allgemein gilt: Gesamtwirkung = geometrische Summe der Einzelwirkungen. Reichen die drei Gleichgewichtsbedingungen ($\sum \boldsymbol{F}_x = 0$, $\sum \boldsymbol{F}_y = 0$, $\sum \boldsymbol{M} = 0$) zur Ermittlung der Lagerkräfte aus, so ist die Lagerung ***statisch bestimmt***, andernfalls ist sie ***statisch unbestimmt***. Statisch unbestimmte Lagerungen können nur mit Hilfe der elastischen Verformungen des Körpers berechnet werden.

Einwertige, zweiwertige und dreiwertige Lagerung. Je nach Art der Lagerung kann die Stützkraft eine, zwei oder drei Unbekannte aufweisen. Bei beweglichen Lagern (Gelenken auf Rollen, Pendelstützen, Querlagern), die als reibungsfrei angenommen werden, entsteht eine unbekannte Stützkraft $\boldsymbol{F}_A$, deren Richtung eindeutig bestimmt ist. Sie wirkt senkrecht zur Stützebene oder bei Pendelstützen in der Verbindungsgeraden der beiden Gelenke (einwertige Lagerung, Bild 23). Bei festen Auflagern entstehen zwei unbekannte Stützkräfte $\boldsymbol{F}_{Ax}$ und $\boldsymbol{F}_{Ay}$, von denen die eine in der x-, die andere in der y-Richtung wirkt (zweiwertige Lagerung, Bild 24). Bei eingespannter Lagerung entstehen die drei unbekannten Größen $\boldsymbol{F}_{Ax}$, $\boldsymbol{F}_{Ay}$ und $\boldsymbol{M}_A$ (dreiwertige Lagerung, Bild 25). — Die Lagerung eines Körpers ist dann statisch bestimmt, wenn insgesamt nicht mehr als drei unbekannte Komponenten vorhanden sind.

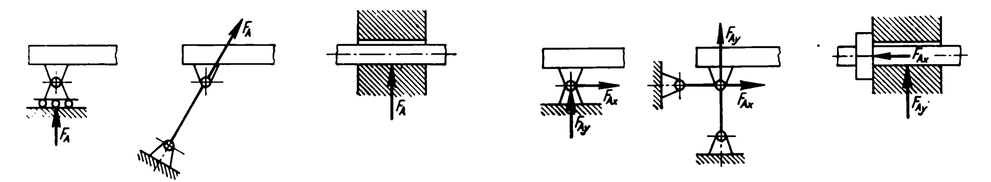


Bild 23. Einwertige Lagerungen (eine unbekannte Stützkraft)

Bild 24. Zweiwertige Lagerungen (zwei unbekannte Stützkräfte)

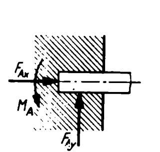


Bild 25. Dreiwertige Lagerung

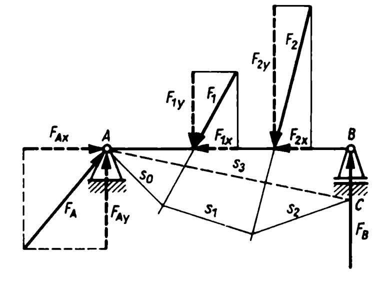


Bild 26. Träger mit festem und beweglichem Lager (statisch bestimmt)

Beispiel 1. Ein Träger mit einem festen (A) und einem beweglichen Lager (B) ist durch zwei schräge Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ belastet (Bild 26). Die unbekannten Lagerkräfte sind $\boldsymbol{F}_{Ax}$, $\boldsymbol{F}_{Ay}$ und $\boldsymbol{F}_B$. Der Träger ist statisch bestimmt. — *Zeichnerisch* ermittelt man die Lagerkräfte, indem man das Seileck durch das feste Lager A legt. Das bewegliche Lager B kann nur senkrechte Kräfte aufnehmen. Die Gerade $\overline{AC}$ ergibt die Schlußlinie des Seilecks. Der zu ihr parallele Polstrahl $\boldsymbol{F}_{S3}$ im Krafteck bestimmt die Größe der Stützkraft $\boldsymbol{F}_B$. Die Schlußlinie des Kraftecks ergibt Größe und Richtung der Stützkraft $\boldsymbol{F}_A$. — *Rechnerisch* bestimmt man die Lagerkräfte, indem man $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ in die Komponenten F_{1x}, F_{1y} und F_{2x}, F_{2y} zerlegt. Die drei Gleichgewichtsbedingungen ergeben $\boldsymbol{F}_{Ax}$, $\boldsymbol{F}_{Ay}$ und $\boldsymbol{F}_B$. Horizontale Komponenten können nur vom Lager A aufgenommen werden. — Liegt der Träger auf zwei festen Lagern, so ist er statisch unbestimmt, da dann vier unbekannte Stützkräfte ($\boldsymbol{F}_{Ax}$, $\boldsymbol{F}_{Ay}$, $\boldsymbol{F}_{Bx}$, $\boldsymbol{F}_{By}$) vorhanden sind, die durch die drei Gleichgewichtsbedingungen nicht ermittelt werden können. Die Verteilung der horizontalen Komponenten auf die Lager A und B ist in diesem Falle unbestimmt.

Beispiel 2. Sind beide Teile des Dreigelenkträgers (Bild 27) belastet, so bestimmt man zunächst nur die von $\boldsymbol{F}_1$, dann nur die von $\boldsymbol{F}_2$ hervorgerufenen Lagerkräfte $\boldsymbol{F}_{A1}$, $\boldsymbol{F}_{B1}$ bzw. $\boldsymbol{F}_{A2}$, $\boldsymbol{F}_{B2}$. Die geometrische Addition $\boldsymbol{F}_{A1} + \boldsymbol{F}_{A2} = \boldsymbol{F}_A$ und $\boldsymbol{F}_{B1} + \boldsymbol{F}_{B2} = \boldsymbol{F}_B$ ergibt nach dem Überlagerungsgesetz die resultierenden Lagerkräfte und $\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_B$ die Gelenkkraft $\boldsymbol{F}_C$. Die Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_C$, ferner $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{F}_C$ sowie $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ müssen im Gleichgewicht sein und geschlossene Kraftecke bilden.

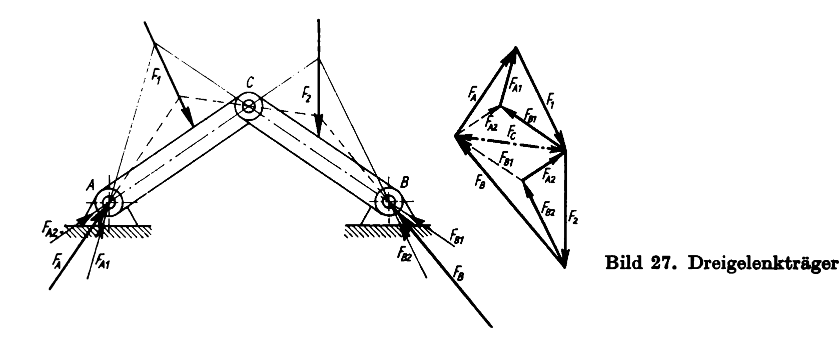


Bild 27. Dreigelenkträger

2.5. Kräfte im Raum

2.5.1. Gemeinsamer Angriffspunkt der Kräfte

Zusammensetzung

Drei beliebige, im Raum wirkende Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3$, die in einem Punkt A angreifen, können durch zweimalige Anwendung des Kräfteparallelogramms zu einer Resultierenden $\boldsymbol{F}_{123}$ zusammengesetzt werden (Bild 28):

$$\boldsymbol{F}_{123} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 \tag{13}$$

Stehen die Kräfte senkrecht zueinander und legt man durch A ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z (Bild 29), so gilt:

$$F_{xyz} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{14}$$

Die Resultierende ist die Diagonale eines Quaders, der aus den drei Einzelkräften gebildet wird.

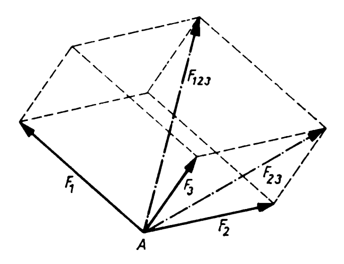


Bild 28. Zusammensetzung dreier beliebig gerichteteter Kräfte im Raum

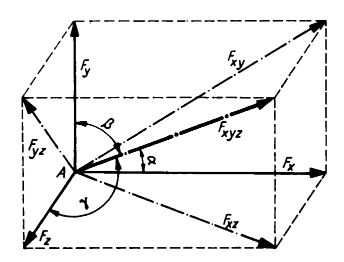


Bild 29. Zusammensetzung dreier rechtwinklig zueinander stehender Kräfte

Ist eine Kraft $\boldsymbol{F}_{xyz}$ im Raum durch zwei Projektionen, z. B. $\boldsymbol{F}_{xy}$ und $\boldsymbol{F}_{xz}$ (Vorderansicht und Draufsicht), auf zwei zueinander senkrechte Ebenen bestimmt (Bild 30), so kann die wahre Größe von $\boldsymbol{F}$ zeichnerisch ermittelt werden. Die Höhe h wird in der Draufsicht senkrecht an $\boldsymbol{F}_{xz}$ aufgetragen, die Hypotenuse des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks ergibt die wahre Größe von $\boldsymbol{F}_{xyz}$.



Greifen beliebig viele Kräfte an einem Punkt an, so ist ihre Resultierende:

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \tag{15}$$

Sind die Projektionen mehrerer in einem Punkt angreifender Kräfte in der Draufsicht (F_{xz}) und Vorderansicht (F_{xy}) gegeben (Bild 31), so können Draufsicht und Vorderansicht der Resultierenden dadurch bestimmt werden, daß man die F_{xz}-Kräfte und die F_{xy}-Kräfte zu je einer Resultierenden F_{Rxz} und F_{Rxy} zusammensetzt. F_{Rxz} und F_{Rxy} sind die Projektionen der Resultierenden F_{Rxyz} auf die x, z- und die x,y-Ebene. Trägt man die Höhe h rechtwinklig an F_{Rxz} an, so erhält man die Größe der Resultierenden F_{Rxyz}.

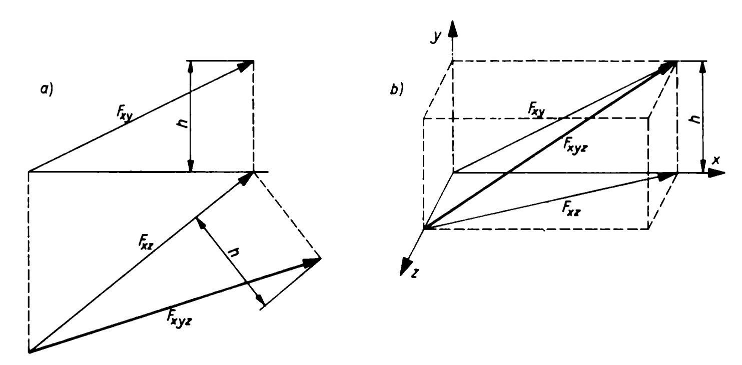


Bild 30. Bestimmung der Resultierenden. a) Vorderansicht und Draufsicht, b) räumliche Darstellung

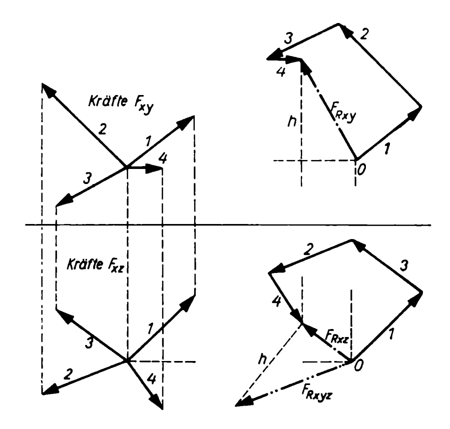


Bild 31. Bestimmung der Resultierenden

Zerlegung

Soll die Kraft $F_{xyz} = F$ in drei zueinander rechtwinklige Komponenten zerlegt werden, so müssen die drei Neigungswinkel α, β, γ der Kraft zu ihren Komponentenrichtungen bekannt sein (siehe Bild 29). Dann ist:

$$F_x = F \cos\alpha; \qquad F_y = F \cos\beta; \qquad F_z = F \cos\gamma \tag{16}$$

Hieraus folgt $F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}$ und $F = \sqrt{F^2 \cos^2\alpha + F^2 \cos^2\beta + F^2 \cos^2\gamma}$, d. h.:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{17}$$

Deshalb dürfen nur zwei der Winkel gegeben sein. Der dritte Winkel, von dem nur bekannt sein darf, ob er spitz (cos positiv) oder stumpf (cos negativ) ist, wird durch die Gleichung bestimmt.

Eine Kraft kann eindeutig in drei durch ihren Angriffspunkt gehende Richtungen zerlegt werden, wenn diese nicht in derselben Ebene liegen.

Beispiel. Ein dreibeiniges Bockgerüst, dessen Draufsicht und Vorderansicht gegeben sind, wird durch die Kraft $\boldsymbol{F}$ belastet (Bild 32). Gesucht werden die Stabkräfte $\boldsymbol{F}_{S1}$, $\boldsymbol{F}_{S2}$ und $\boldsymbol{F}_{S3}$. — *Lösung:* Die vier Kräfte $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_{S1}$, $\boldsymbol{F}_{S2}$, $\boldsymbol{F}_{S3}$ müssen im Gleichgewicht sein. Durch $\boldsymbol{F}_{S1}$ und $\boldsymbol{F}$ sowie durch $\boldsymbol{F}_{S2}$ und $\boldsymbol{F}_{S3}$ wird je eine Ebene gelegt, die die Resultierenden dieser beiden Kräftegruppen enthalten. Da beide Resultierenden im Gleichgewicht sind, müssen sie auf derselben Linie, d. h. auf der Schnittlinie beider Ebenen liegen. Diese bildet die CULMANNsche Gerade, mit deren Hilfe die drei Kräfte $\boldsymbol{F}_{S1}$, $\boldsymbol{F}_{S2}$, $\boldsymbol{F}_{S3}$ bestimmt werden können.

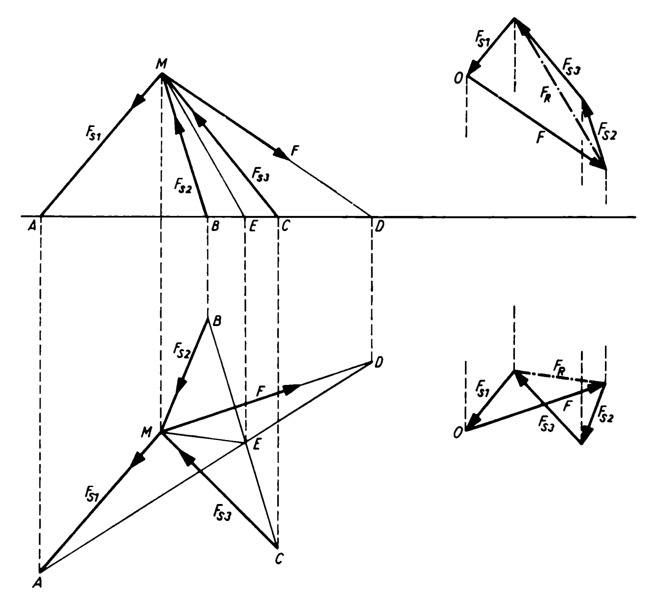


Bild 32. Dreibeiniges Bockgerüst

Bestimmung des Spurpunkts D der Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}$*:* Die Verbindungslinien $\overline{DA}$ und $\overline{BC}$ ergeben die horizontalen Spuren der Ebenen $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}_{S1}$ und $\boldsymbol{F}_{S2}\boldsymbol{F}_{S3}$; die Schnittlinie dieser Ebene ist $\overline{ME}$. Jetzt kann das Krafteck in der Draufsicht und Vorderansicht gezeichnet werden: Von einem beliebigen Punkt 0 werden die Kraft $\boldsymbol{F}$ und die Richtung von $\boldsymbol{F}_{S1}$ aufgetragen. Die Parallele zu $\overline{ME}$ durch den Endpunkt von $\boldsymbol{F}$ ergibt $\boldsymbol{F}_{S1}$ und die Resultierende $\boldsymbol{F}_R$ von $\boldsymbol{F}_{S1}$ und $\boldsymbol{F}$; Parallelen zu $\boldsymbol{F}_{S2}$ und $\boldsymbol{F}_{S3}$ ergeben im Kräfteplan die Kräfte $\boldsymbol{F}_{S2}$ und $\boldsymbol{F}_{S3}$, deren Resultierende $\boldsymbol{F}_R$ ist.

2.5.2. Verschiedene Angriffspunkte der Kräfte

Ein Kräftepaar kann durch einen Vektor dargestellt werden, der senkrecht zur Wirkungsebene steht und dessen Länge im entsprechenden Maßstab gleich dem Moment $M = Fl$ ist, seine Pfeilrichtung ergibt sich aus der Vorstellung einer Rechtsschraubung (Korkenzieherbewegung).

Ist die Ebene des Kräftepaars waagerecht, so wird bei positivem Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) der Vektor nach oben, bei negativem nach unten abgetragen. Blickt man gegen die Pfeilspitze, so wirkt das Moment entgegen dem Uhrzeigersinn (Bild 33).

Wirken Kräftepaare mit den Momenten $\boldsymbol{M}_1$ und $\boldsymbol{M}_2$ in beliebigen Ebenen I und II, so können diese unter Berücksichtigung des Pfeilsinns zu einem resultierenden Momentepaar $\boldsymbol{M}_R$ zu-

sammengesetzt werden, indem man die Momentenvektoren geometrisch addiert. Das resultierende Momentepaare wirkt in einer Ebene *III*, die senkrecht zu $\boldsymbol{M}_\mathrm{R}$ steht.

$\boldsymbol{M}_1$ und $\boldsymbol{M}_2$ werden durch gleichwertige Kräftepaare mit dem gemeinsamen Hebelarm l ersetzt und in ihren Ebenen so verschoben, daß l auf die Schnittgerade von *I* und *II* fällt (Bild 34). Die Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ können dann zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden, die in der Ebene *III* liegt.

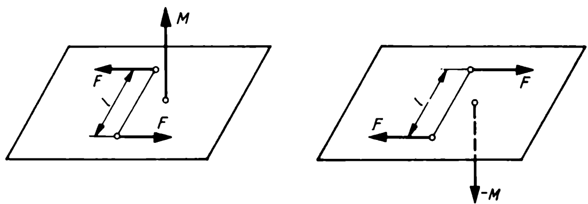


Bild 33. Momentenvektor eines Kräftepaars

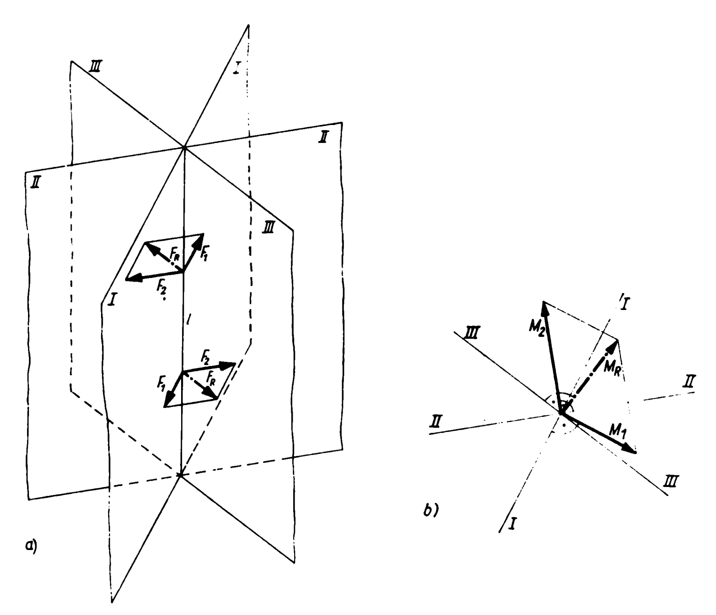


Bild 34. Kräftepaare in verschiedenen Ebenen. a) Lageplan; b) Addition der Momentenvektoren

Wirken die Kräftepaare in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen, so geht die geometrische Addition in eine algebraische über. Allgemein gilt:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{R} = \sum_i \boldsymbol{M}_i \tag{18}$$

Beispiel. Auf eine Welle wirken mehrere Kräftepaare, die z. B. an Riemenscheiben angreifen. Das resultierende Kräftepaar ergibt sich durch Addition der einzelnen Kräftepaare. Das an der Antriebsscheibe wirkende Kräftepaar muß also gleich der Summe der an den getriebenen Scheiben wirkenden Kräftepaare sein (Bild 35): $F_1D_1 + F_2D_2 + F_3D_3 = FD$.

Beliebige räumlich gerichtete Kräfte an einem Körper können zusammengefaßt werden, indem man sie parallel zu sich selbst zu einem gemeinsamen Angriffspunkt *0* verschiebt und zu jeder Kraft ein Kräftepaar hinzufügt, dessen Moment gleich Kraft mal Verschiebeweg

ist. Die Momente, die in demselben Punkt *0* angreifen, werden zu einem resultierenden Moment $\boldsymbol{M}_R$ zusammengefaßt, die Einzelkräfte im Punkt *0* zu einer resultierenden Kraft $\boldsymbol{F}_R$. Gleichgewicht bezüglich des gewählten Punkts *0* herrscht, wenn die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_R$ und das resultierende Kräftepaar $\boldsymbol{M}_R$ gleich Null sind: $\boldsymbol{F}_R = 0$; $\boldsymbol{M}_R = 0$.

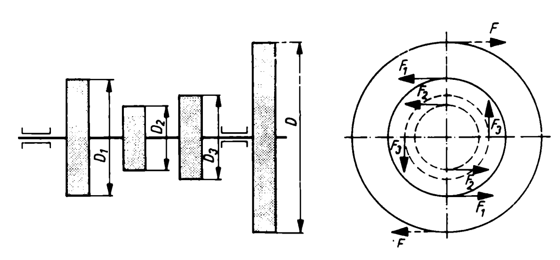


Bild 35. Kräftepaare an Riemenscheiben

Hieraus ergeben sich folgende sechs Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \boldsymbol{F}_{Rx} = \sum \boldsymbol{F}_x = 0 & 4.\ \boldsymbol{M}_{Rx} = \sum \boldsymbol{M}_x = 0 \\ 2.\ \boldsymbol{F}_{Ry} = \sum \boldsymbol{F}_y = 0 & 5.\ \boldsymbol{M}_{Ry} = \sum \boldsymbol{M}_y = 0 \\ 3.\ \boldsymbol{F}_{Rz} = \sum \boldsymbol{F}_z = 0 & 6.\ \boldsymbol{M}_{Rz} = \sum \boldsymbol{M}_z = 0 \end{array} \tag{19}$$

$\boldsymbol{M}_{Rx}$, $\boldsymbol{M}_{Ry}$ und $\boldsymbol{M}_{Rz}$ sind die Komponenten des Kräftepaarvektors in Richtung der x-, y- bzw. z-Achse, also die Kräftepaare, die den Körper um die x-, y- bzw. z-Achse zu drehen bestrebt sind. Liegt ein Kräftepaar in der x,y-Ebene, so dreht es den Körper um die z-Achse usw. Wirken alle Kräfte in der x,y-Ebene, dann fallen die Bedingungen 3, 4 und 5 weg.

2.6. Schwerpunkt und Gleichgewicht

2.6.1. Körperschwerpunkt

Der Schwerpunkt eines Körpers oder Körpersystems ist der Angriffspunkt der Resultierenden aller Schwerkräfte (Elementarkräfte), die auf die einzelnen Massenteile wirken. Die Größe der Resultierenden ist die Summe aller Elementarkräfte oder das *Gewicht* des Körpers, d. h. die

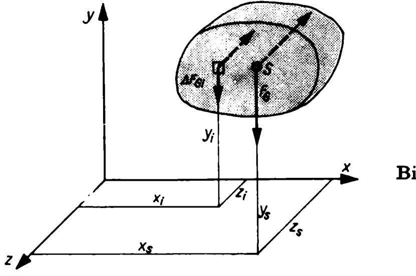


Bild 36. Körperschwerpunkt

Kraft $F_G = mg$, mit der der Körper von der Erde angezogen wird. Denkt man sich den Körper in n Einzelteile (Elementarteile) vom Gewicht ΔF_{Gi} zerlegt (Bild 36), so ist:

$$F_G = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} \tag{20}$$

Die Koordinaten des Angriffspunkts der Resultierenden (des Schwerpunkts) ermittelt man mit Hilfe des Satzes vom statischen Moment: Sind x_i, y_i, z_i die Koordinaten der Angriffspunkte aller Elementarkräfte, x_S, y_S, z_S die Koordinaten des Schwerpunkts, so gilt für die z-Achse $F_G x_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} x_i$ und für die x-Achse $F_G z_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} z_i$. Wird das System so gedreht, daß die Kräfte in negativer z-Richtung wirken, so lautet die Gleichung für die x-Achse $F_G y_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} y_i$, wobei die linken Seiten der drei Gleichungen die statischen Momente der Resultierenden (bezogen auf die x-, y- bzw. z-Achse) und die rechten Seiten die Summen der statischen Momente aller Elementarkräfte (bezogen auf dieselben Achsen) darstellen.
Die Koordinaten des Schwerpunkts ergeben sich also aus:

$$x_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} x_i / F_G; \qquad y_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} y_i / F_G; \qquad z_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_{Gi} z_i / F_G \tag{21}$$

Unterteilt man den Körper in unendlich viele Teile, dann tritt an die Stelle des Summenzeichens das *Integral*:

$$x_S = \int (x/F_G)\,\mathrm{d}F_G; \qquad y_S = \int (y/F_G)\,\mathrm{d}F_G; \qquad z_S = \int (z/F_G)\,\mathrm{d}F_G \tag{22}$$

Die Lage des Schwerpunkts S im Körper ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

Allgemein versteht man unter dem Schwerpunkt den *Massenmittelpunkt* eines Körpers. Aus (22) ergeben sich mit $F_G = mg$ folgende Gleichungen zur Bestimmung des Schwerpunkts:

$$x_S = \int (x/m)\,\mathrm{d}m; \qquad y_S = \int (y/m)\,\mathrm{d}m; \qquad z_S = \int (z/m)\,\mathrm{d}m \tag{23}$$

Für einen homogenen Körper ist $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ und $m = \varrho V$ (ϱ Dichte). Deshalb gilt:

$$x_S = \int (x/V)\,\mathrm{d}V; \qquad y_S = \int (y/V)\,\mathrm{d}V; \qquad z_S = \int (z/V)\,\mathrm{d}V \tag{24}$$

Um die Werte x_S, y_S, z_S für einen beliebigen Körper zu bestimmen, unterteilt man ihn in n Einzelteile und bringt die Teilgewichte an den Teilschwerpunkten an. Die Wirkungslinie der Resultierenden (Schwerlinie) aller parallelen Teilgewichte kann dann rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt werden. Der Schnittpunkt der Schwerlinien ist der Schwerpunkt.

2.6.2. Flächen- und Linienschwerpunkt

Den Schwerpunkt einer homogenen Fläche (Bild 37) ermittelt man aus der Beziehung:

$$x_S = \int (x/A)\,\mathrm{d}A; \qquad y_S = \int (y/A)\,\mathrm{d}A \tag{25}$$

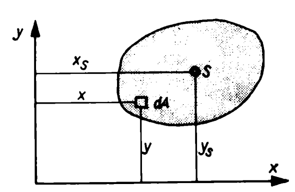


Bild 37. Schwerpunkt einer Fläche

Für Linien gilt dementsprechend:

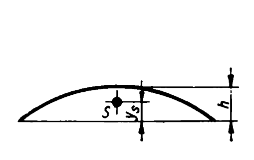
$$x_S = \int (x/l)\,\mathrm{d}l; \qquad y_S = \int (y/l)\,\mathrm{d}l \tag{26}$$

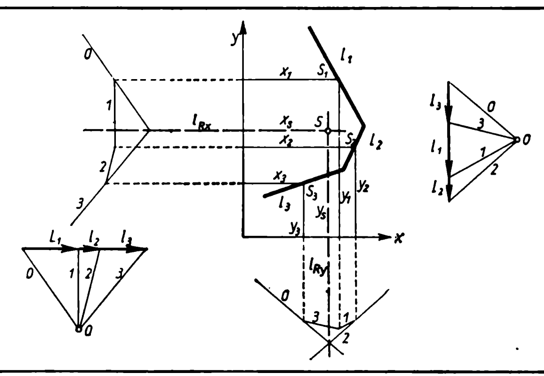
Bei symmetrischen homogenen Körpern, Flächen und Linien liegt der Schwerpunkt in der Symmetrieebene bzw. Symmetrieachse.

2.6.3. Schwerpunkte homogener Linien, Flächen und Körper

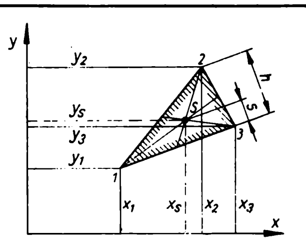
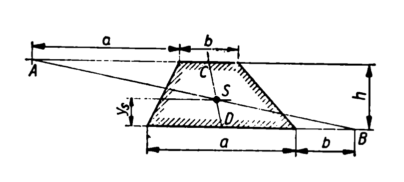
Tafel 1. Linienschwerpunkte

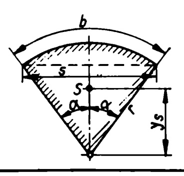
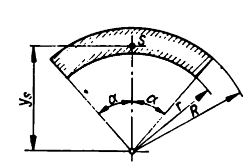
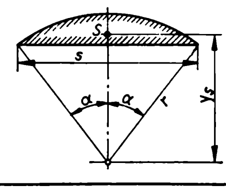
Linie	Parallelogrammumfang	Dreiecksumfang	Beliebiger Kreisbogen
Erläuterung			
Lage des Schwerpunkts	im Schnittpunkt der Diagonalen	$y_S = \dfrac{h_a(b+c)}{2(a+b+c)}$	$y_S = R\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = \dfrac{Rs}{b}$

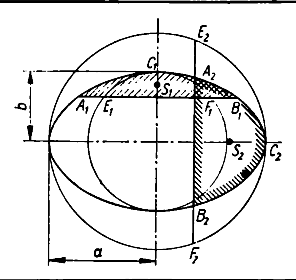
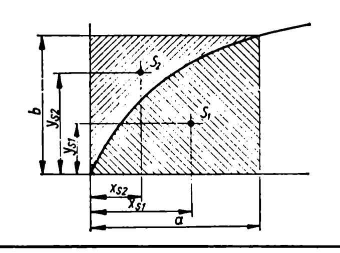
Linie	Flacher Kreisbogen, angenähert	Viertelkreisbogen, Halbkreisbogen
Erläuterung		
Lage des Schwerpunkts	$y_S \approx \dfrac{2h}{3}$	$y_S = \dfrac{2r}{\pi} \approx 0{,}637r$ (Halbkreis) $y_S = \dfrac{2r\sqrt{2}}{\pi}$ (Viertelkreis)

Linie	Beliebiger Linienzug
Erläuterung	
Lage des Schwerpunkts	$x_S = \sum_{i=1}^{n} x l_i / l \quad y_S = \sum_{i=1}^{n} y l_i / l$ *Zeichnerisch:* Unterteilung in einzelne Strecken $l_1, l_2, \ldots$ An den Mittelpunkten dieser Strecken greifen Kräfte an, die der Länge der Strecken proportional sind. Mit Hilfe von je zwei Seil- und Kraftecken werden die Schwerpunktslinien l_{Rx} und l_{Ry} bestimmt, ihr Schnittpunkt ergibt die Lage des Schwerpunkts.

Tafel 2. Flächenschwerpunkte

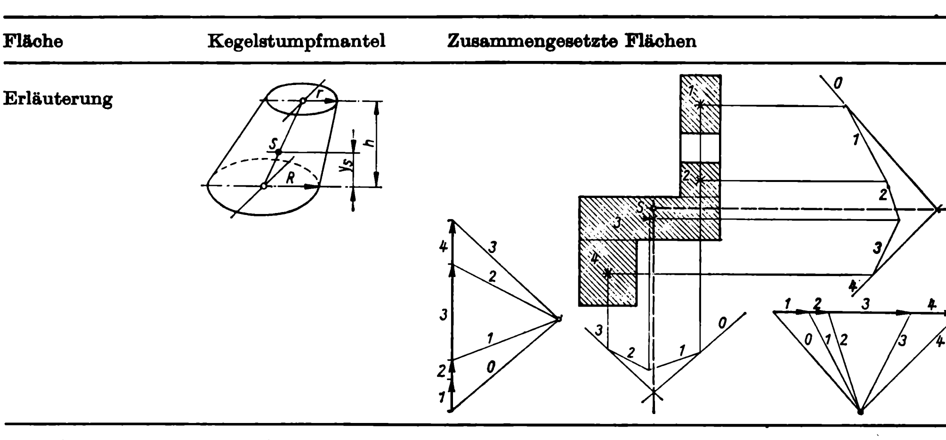
Fläche	Dreieck	Trapez
Erläuterung		
Lage des Schwerpunkts	$s = \dfrac{h}{3}$ $x_S = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $y_S = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$	$y_S = \dfrac{h(a + 2b)}{3(a + b)}$

Fläche	Kreisausschnitt (Kreissektor)	Kreisringstück	Kreisabschnitt (Segment)
Erläuterung			
Lage des Schwerpunkts	$y_S = \dfrac{2r}{3} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = \dfrac{2rs}{3b}$	$y_S = \dfrac{2(R^3 - r^3)}{3(R^2 - r^2)} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}$	$y_S = \dfrac{2r}{3} \cdot \dfrac{\sin^3\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} = \dfrac{s^3}{12A}$ $A = \dfrac{r^2(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha)}{2}$

Fläche	Ellipsenabschnitt	Parabelfläche
Erläuterung		
Lage des Schwerpunkts	Die Schwerpunkte S_1 und S_2 fallen mit den Schwerpunkten der Kreisabschnitte $C_1E_1F_1$ bzw. $C_2E_2F_2$ zusammen. Bestimmung siehe Kreisabschnitt	$x_{S1} = \dfrac{3a}{5}$; $y_{S1} = \dfrac{3b}{8}$ $x_{S2} = \dfrac{3a}{10}$; $y_{S2} = \dfrac{3b}{4}$

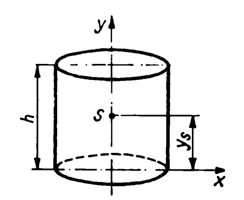
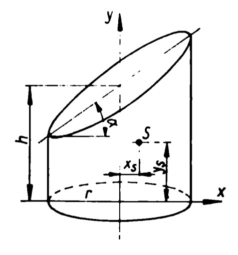
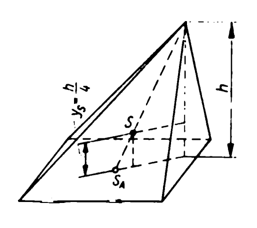
Tafel 2 (Fortsetzung)

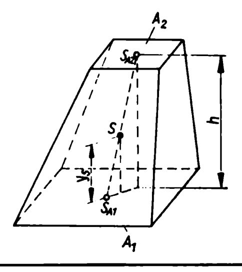
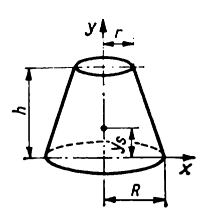
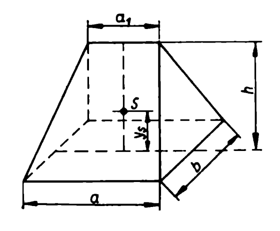
Fläche	Kugelzone	Kegelmantel
Erläuterung		
Lage des Schwerpunkts	$y_S \approx \frac{r}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$ $\cos\alpha_1 = (h + h_0)/r \quad \cos\alpha_2 = h_0/r$ Kugelhaube (Kalotte): $\alpha_1 = 0$	$y_S = \frac{h}{3}$

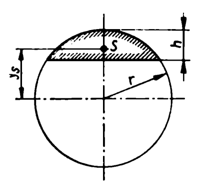
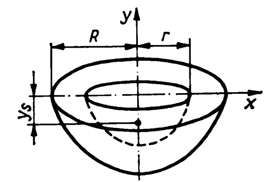
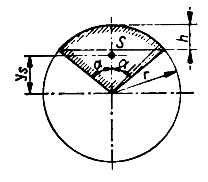
Fläche	Kegelstumpfmantel	Zusammengesetzte Flächen
Erläuterung		
Lage des Schwerpunkts	$y_S = \frac{h}{3} \cdot \frac{(R + 2r)}{(R + r)}$	Zerlegen der Gesamtfläche in n einzelne Teile, deren Schwerpunkte sich leicht bestimmen lassen. Sind $A_1, \ldots, A_n$ die Teilflächen und $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ die Schwerpunktabstände der Teilflächen, so ist $x_S = \frac{A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + \cdots + A_n} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$ $y_S = \frac{A_1 y_1 + \cdots + A_n y_n}{A_1 + \cdots + A_n} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$

Fläche	Sonderfall: Beliebiges Viereck
Erläuterung	
Lage des Schwerpunkts	Die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$ teilen das Viereck in vier Dreiecke (ABC, BCD; ABD, ACD). Man bestimmt die Schwerpunkte 1, 2, 3 und 4 dieser Dreiecke und erhält aus dem Schnittpunkt der Verbindungslinien $\overline{12}$ und $\overline{34}$ den Schwerpunkt S.

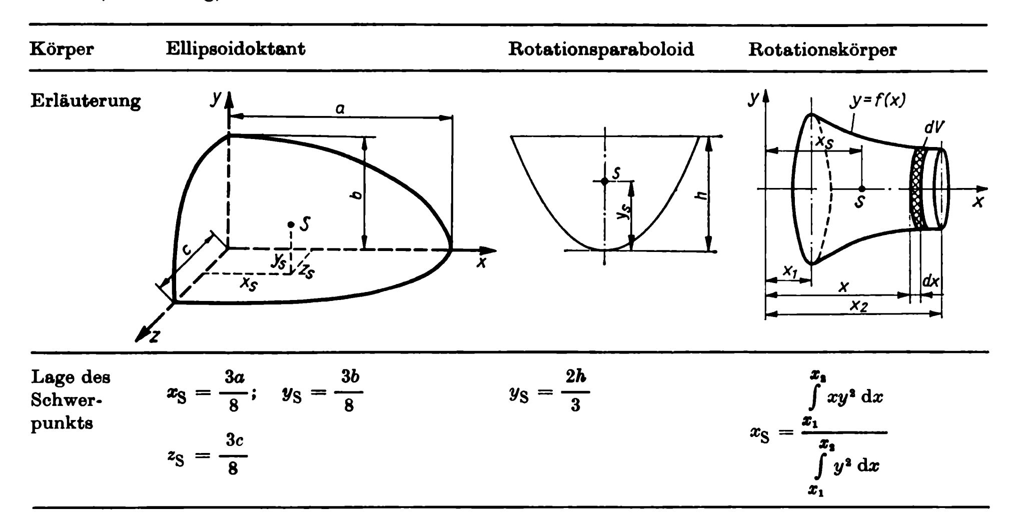
Tafel 3. Körperschwerpunkte

Körper	Prisma und Zylinder	Abgeschrägter gerader Kreiszylinder	Pyramide und Kegel
Erläuterung			
Lage des Schwerpunkts	$y_S = \frac{h}{2}$	$x_S = \frac{r^2 \tan\alpha}{4h}$ $y_S = \frac{h}{2} + \frac{r^2 \tan^2\alpha}{8h}$	$y_S = \frac{h}{4}$

Körper	Pyramidenstumpf	Abgestumpfter Kreiskegel	Keil
Erläuterung			
Lage des Schwerpunkts	$y_S = \frac{h(A_1 + 2\sqrt{A_1A_2} + 3A_2)}{4(A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2)}$	$y_S = \frac{h(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}$	$y_S = \frac{h(a + a_1)}{2(2a + a_1)}$

Körper	Kugelabschnitt	Halb-Hohlkugel	Kugelausschnitt
Erläuterung			
Lage des Schwerpunkts	$y_S = \frac{3(2r - h)^2}{4(3r - h)}$	$y_S = \frac{3(R^4 - r^4)}{8(R^3 - r^3)}$	$y_S = \frac{3r(1 + \cos\alpha)}{8}$ $= \frac{3(2r - h)}{8}$

Tafel 3 (Fortsetzung)

Körper	Ellipsoidoktant	Rotationsparaboloid	Rotationskörper
Erläuterung			
Lage des Schwerpunkts	$x_S = \frac{3a}{8}$; $y_S = \frac{3b}{8}$ $z_S = \frac{3c}{8}$	$y_S = \frac{2h}{3}$	$x_S = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}$

2.6.4. Guldinsche Regeln

Rotationssymmetrische Flächen

Dreht sich eine ebene Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse y, die die Kurve nicht schneidet (Bild 38), so ist die von der Kurve beschriebene Fläche A gleich dem Produkt aus der Länge l der Kurve und dem Weg $2\pi x_S$ ihres Schwerpunkts:

$$A = 2\pi l x_S \tag{27}$$

Beispiel. Oberfläche einer Kugel. Ein Halbkreisbogen mit dem Radius r dreht sich um die Achse y und beschreibt eine Kugelfläche. Der Schwerpunktabstand des Halbkreisbogens ist mit $\alpha = 90°$ nach Tafel 1 $x_S = 2r/\pi$, seine Länge $l = \pi r$. Dann ist $A = 2\pi \cdot \pi r \cdot 2r/\pi = 4\pi r^2$.

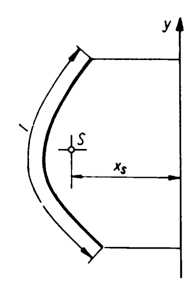



Bild 38. Drehung einer ebenen Kurve

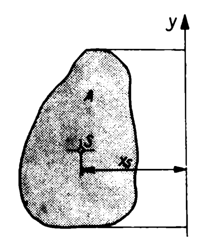


Bild 39. Drehung einer ebenen Fläche

Rotationssymmetrische Körper

Dreht sich eine ebene Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse y, die die Fläche nicht schneidet (Bild 39), so ist das von der Fläche beschriebene Volumen V gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Fläche A und ihrem Schwerpunktsweg:

$$V = 2\pi x_S A \tag{28}$$

Beispiel. Rauminhalt einer Kugel. Eine Halbkreisfläche mit dem Radius r dreht sich um die Achse y und beschreibt eine Kugel. Der Schwerpunktsabstand ($\alpha = 90°$) beträgt $x_S = 4r/3\pi$. Also ist $V = \pi r^2/2 \cdot 2\pi \times 4r/3\pi = 4\pi r^3/3$.

2.6.5. Arten des Gleichgewichts

Das Gleichgewicht ist ***stabil***, wenn ein Körper bei kleinster Auslenkung aus der Gleichgewichtslage wieder in die Ausgangslage zurückkehrt (Bild 40a).
Das Gleichgewicht ist ***labil***, wenn der Körper bei kleinster Auslenkung aus der Gleichgewichtslage nicht mehr in die Ausgangslage zurückkehrt, sondern einer neuen, stabilen Gleichgewichtslage zustrebt (Bild 40b).
Das Gleichgewicht ist ***indifferent***, wenn der Körper bei kleinster Auslenkung oder Verschiebung in der Gleichgewichtslage verbleibt (Bild 40c).

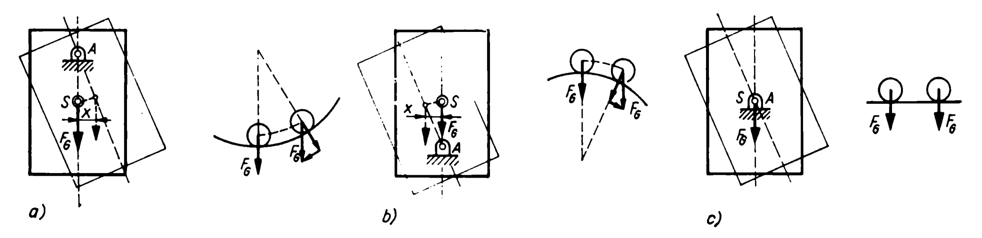


Bild 40. Arten des Gleichgewichts. a) stabil; b) labil; c) indifferent

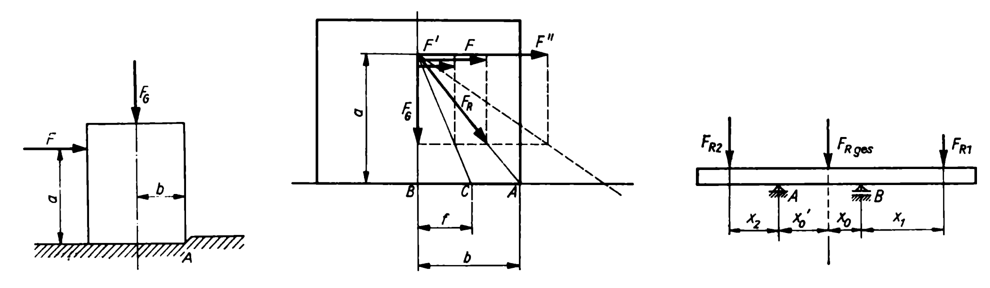


Bild 41. Kippmoment und Standmoment

Bild 42. Standsicherheit

Bild 43. Standsicherheit eines Balkens auf zwei Stützen

2.6.6. Standsicherheit

Ein Körper kippt um die Kante A, wenn das auf ihn ausgeübte Kippmoment $M_K = Fa$ größer ist als das Standmoment $M_{St} = F_G b$ (Bild 41). Damit der Körper stehen bleibt, muß gelten:

$$\sum M_{St} > \sum M_K; \tag{29}$$

$$S = \sum M_{St} / \sum M_K \tag{30}$$

S heißt *Standsicherheit*. Je größer S, um so größer ist die Sicherheit gegen Kippen; in allen Fällen muß, was auch (29) ausdrückt, $S > 1$ sein. Ist $S = 1$, also $Fa = F_G b$, so befindet sich der Körper gerade im Gleichgewicht; die Resultierende F_R von F_G und F geht dann durch die Kippkante A (Bild 42). Je nachdem, ob die Wirkungslinie von F_R innerhalb oder außerhalb der Kippkanten verläuft, ist der Körper standsicher oder kippt um.

Wirkt z. B. statt F eine kleinere horizontale Kraft F', so geht die Resultierende durch C: Der Körper ist standsicher. Bezüglich der Kippkante A gilt:

$$S = M_{St}/M_K = F_G b/F'a = Fa/F'a = b/f \tag{31}$$

Je mehr sich der Punkt C dem Punkt B nähert, um so größer ist die Standsicherheit. S ist unendlich groß, wenn C und B zusammenfallen; S ist 1, wenn C und A zusammenfallen; ist $S < 1$, so geht C über A hinaus. Der Körper kippt um.

Beispiel. Ein Träger (Bild 43) liegt auf zwei Stützen A und B. Es seien F_{R1} die Resultierende aller rechts von B angreifenden Kräfte und F_{R2} die Resultierende aller links von A angreifenden Kräfte. Damit der Träger nicht kippt, muß die Gesamtresultierende F_{Rges} der Kräfte F_{R1} und F_{R2} zwischen A und B wirken. Die Standsicherheit gegen das Kippen um A ist S_A und um B entsprechend S_B:

$$S_A = F_{R1}(x_1 + x_0 + x_0')/F_{R2}x_2 = [F_{R1}(x_1 + x_0) + F_{R1}x_0']/F_{R2}x_2$$

$$S_B = F_{R2}(x_2 + x_0 + x_0')/F_{R1}x_1$$

Soll $S_A = S_B$ werden, so muß gelten: $F_{Rges}x_0/F_{R1}x_1 = F_{Rges}x_0'/F_{R2}x_2$.

2.7. Ebene Fachwerke

2.7.1. Voraussetzungen und Annahmen

Ein Fachwerk ist eine aus Stäben zusammengesetzte *Tragkonstruktion*, die zur Aufnahme von Kräften dient. Bei der Berechnung der in den Stäben auftretenden Kräfte werden folgende Annahmen gemacht:

1. Die Stäbe sollen nur auf *Zug* oder *Druck* beansprucht werden.

Diese Forderung setzt voraus, daß alle Stäbe in den Endpunkten durch reibungsfreie Gelenke verbunden sind, die Wirkungslinien der Kräfte sich in einem Punkte schneiden und die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen. Kräfte, die nicht auf Knoten wirken, werden auf diese aufgeteilt.

2. Das Fachwerk soll *äußerlich* und *innerlich* statisch bestimmt sein.

Das Fachwerk ist *äußerlich* statisch bestimmt, wenn die Lagerkräfte mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ und $\sum M = 0$ errechnet werden können. Das Fachwerk muß also ein festes (zweiwertiges) und ein verschiebbares (einwertiges) Lager haben. Das feste Lager kann auch aus zwei Stäben, das bewegliche aus einem Stab (Pendelstütze) bestehen.

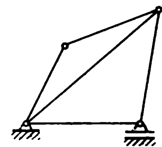


Bild 44. Statisch bestimmtes Fachwerk ($k = 4$, $s = 5$)

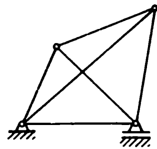


Bild 45. Statisch unbestimmtes (geometrisch überbestimmtes) Fachwerk ($k = 4$, $s = 6 > 2k - 3$)

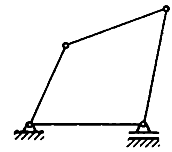


Bild 46. Bewegliches (geometrisch unbestimmtes) Fachwerk ($k = 4$, $s = 4 < 2k - 3$)

Das Fachwerk ist *innerlich* statisch bestimmt, wenn alle Stabkräfte nur aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können. Besteht es aus k Knoten, einem festen und einem beweglichen Lager, so ist die hierzu notwendige Stabzahl $s = 2k - 3$. Werden die Lager durch Stäbe ersetzt (Bild 44), so ist die Bedingung für die statische Bestimmtheit: $s = 2k$, wenn die Stäbe zu den Fachwerkstäben gerechnet werden. Ist die Stabzahl größer, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt (geometrisch überbestimmt, Bild 45); ist sie kleiner, so ist das Fachwerk beweglich (geometrisch unbestimmt, Bild 46). Die Teilfachwerke, aus denen das gegebene Fachwerk besteht, müssen ebenfalls der Bedingung $s = 2k - 3$ genügen.



2.7.2. Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit einfachem Aufbau

Fachwerke mit einfachem Aufbau sind dadurch gekennzeichnet, daß sie aus aneinandergereihten Dreiecken bestehen und mindestens einen Knotenpunkt mit nur zwei unbekannten Stabkräften haben (Bild 47a).

Cremona-Verfahren

Das Verfahren von CREMONA besteht darin, daß die zeichnerischen Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten angewendet werden. Es müssen also an jedem Knoten die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein.

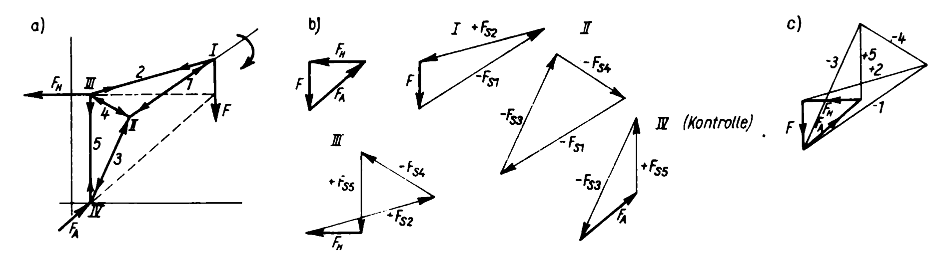


Bild 47. CREMONA-Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit einfachem Aufbau.
a) Lageplan; b) Bestimmung der Stab- und Lagerkräfte; c) Vereinigung der Kraftecke zum CREMONA-Plan

Regeln:

1. Der Lageplan ist maßstäblich zu zeichnen.
2. Stäbe werden durch arabische, Knoten durch römische Zahlen bezeichnet.
3. Die Lagerkräfte werden zeichnerisch oder rechnerisch bestimmt; das Krafteck der äußeren Kräfte muß geschlossen sein.
4. Um die Stabkräfte zu ermitteln, zeichnet man zunächst das Krafteck für einen Knotenpunkt, an dem außer bekannten äußeren Kräften noch zwei unbekannte Stabkräfte angreifen. Für den Knoten *I* ist F nach Größe und Richtung gegeben. Parallelen zu 1 und 2 im Lageplan ergeben im Krafteck die gesuchten Stabkräfte F_{S1} und F_{S2} (Kräftemaßstab für die Kräfte festlegen). Hierbei sind die Kräfte in einem bestimmten Umfahrungssinn (im Uhrzeigersinn) aneinanderzureihen: An F schließt sich F_{S1} und an F_{S1} die Kraft F_{S2} an.
5. Da der Pfeilsinn im Krafteck fortlaufend ist, kann nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Kräfte F_{S1} und F_{S2} dem Krafteck entnommen werden. Die gefundenen Pfeile werden am untersuchten Knoten in den Lageplan eingezeichnet.
6. Damit der Stab im Gleichgewicht ist, muß am anderen Knoten der entgegengesetzte Pfeil auftreten. Eine Zugkraft wirkt im Stab, wenn der Pfeil vom Knoten weg gerichtet ist (Zug — weg), eine Druckkraft, wenn er zum Knoten hin gerichtet ist (Druck — hin). Zugkräfte werden als positiv (+), Druckkräfte als negativ (—) bezeichnet.
7. Da jetzt die am Knoten *II* angreifende Kraft F_{S1} nach Größe und Richtung bekannt ist, können die unbekannten Stabkräfte F_{S3} und F_{S4} ermittelt werden, indem man das Krafteck für den Knoten *II* zeichnet. Am Knoten *III* greifen nunmehr drei bekannte Kräfte (F_H, F_{S2}, F_{S4}) und eine unbekannte Kraft (F_{S5}) an. Unter Berücksichtigung des Umfahrungssinns werden F_H, F_{S2} und F_{S4} gezeichnet, F_{S5} bildet die Schlußlinie und muß senkrecht verlaufen. Der Knoten *IV* dient zur Kontrolle: Die bereits ermittelten Kräfte F_A, F_{S5} und F_{S3} müssen ein geschlossenes Krafteck ergeben. In Bild 47b sind die Kraftecke für die einzelnen Knotenpunkte gesondert gezeichnet. Werden diese Kraftecke aneinandergereiht, so ergeben sie den CREMONA-*Plan* (Bild 47c). Hierbei empfiehlt es sich, die äußeren Kräfte stark auszuziehen und mit Pfeilen zu versehen, die Stabkräfte sind dünn und ohne Pfeile zu zeichnen.
8. Die Kräfte im CREMONA-Plan werden unter Berücksichtigung des gewählten Kräftemaßstabs ausgemessen und in einer Tabelle zusammengestellt.

Blind- oder Nullstäbe, d. h. Stäbe, die zum Aussteifen oder zur Aufnahme unkontrollierter Belastungen (z. B. möglicher Seitenkräfte) dienen und keine Kraft übertragen, können entfernt

werden, ohne daß die statische Bestimmtheit des Systems aufgehoben wird. Beim Zeichnen des CREMONA-Plans werden die Stäbe nicht berücksichtigt.

So ist z. B. an einem unbelasteten Knoten A (Bild 48) mit drei Stäben, von denen zwei in dieselbe Gerade fallen, der dritte Stab $A-B$ ein Blindstab, weil die im Punkt A angreifenden Kräfte nur dann im Gleichgewicht sind, wenn zwei davon gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind und die dritte Kraft gleich Null ist. Bei einem unbelasteten, aus zwei Stäben bestehenden Knoten (C) sind beide Stäbe Blindstäbe, bei einem belasteten, aus zwei Stäben bestehenden Knoten (D) ist der eine Stab ein Blindstab, wenn die Last in die Richtung des anderen Stabs fällt.

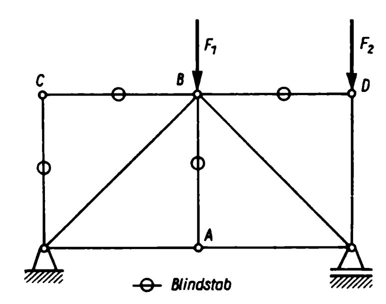


Bild 48. Blindstäbe

Culmann-Verfahren

Das Verfahren nach CULMANN ermöglicht die Bestimmung einzelner Stabkräfte, ohne daß der ganze Kräfteplan gezeichnet werden muß. Man zerlegt das Fachwerk durch einen Schnitt $s-s$, der drei Stäbe *1, 2, 3* (Bild 49) trifft, in zwei Teile (die drei geschnittenen Stäbe dürfen nicht durch einen Knotenpunkt gehen).

Am rechten Teil des Fachwerks greifen die äußeren Kräfte F_3 und F_B an, deren Resultierende F_R zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt wird. F_R muß mit den drei Kräften *1, 2, 3* im Gleichgewicht sein. Die Kräfte *1* und F_R schneiden sich im Punkt D, den man mit dem Schnittpunkt E der Kräfte *2* und *3* verbindet. $\overline{ED}$ ist die CULMANNsche Gerade ($c-c$). Man zeichnet das geschlossene Krafteck F_R *1 2 3* und entnimmt ihm die Größe der drei Stabkräfte.

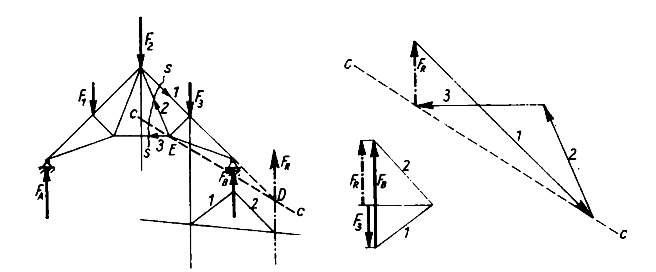


Bild 49. CULMANN-Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit einfachem Aufbau. Im Bild sind nur die Indizes i der Kräfte F_{Si} angegeben (i = 1, 2, 3)

Ritterсches Verfahren (Ritterscher Schnitt)

Um einzelne Stabkräfte rechnerisch zu bestimmen, zerlegt man das Stabfachwerk durch einen Schnitt, der nicht mehr als drei Stäbe mit unbekannten Kräften trifft, in zwei Teile. Die äußeren Kräfte am abgeschnittenen Teil müssen mit den Stabkräften an der Schnittstelle im Gleichgewicht sein. Hierbei wird zunächst angenommen, daß sämtliche Stabkräfte Zugkräfte sind. Stäbe, für die die Rechnung negative Werte ergibt, werden auf Knickung beansprucht. Nimmt man den Schnittpunkt zweier Stäbe als Momentenpunkt an, so liefert die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ die dritte Stabkraft. Die Größe der Hebelarme wird dem Lageplan entnommen.

Dieses Verfahren versagt bei zwei parallelen Kräften. Man ermittelt die Stabkraft des Diagonalstabs nach dem statischen Kräftegleichgewicht.

Beispiel. Zur Bestimmung von F_{S2} und F_{S3} wird der Schnitt durch *2, 4, 3* gelegt (Bild 50).
Drehpunkt *II* ergibt: $-Fa + F_{S2}b = 0$; $F_{S2} = +Fa/b$ (positiv, Zug).
Drehpunkt *III* ergibt: $-Fc - F_{S3}d = 0$; $F_{S3} = -Fc/d$ (negativ, Druck).
Zur Bestimmung von F_{S5} und F_{S4} wird der Schnitt durch *1, 4, 5* gelegt. Stab *1* wird bis zum Schnittpunkt *C* verlängert.
Drehpunkt *C* ergibt: $F_A f + F_{S4}e = 0$; $F_{S4} = -F_A f/e$ (negativ, Druck).
Drehpunkt *II* ergibt: $F_A g - F_{S5}h = 0$; $F_{S5} = +F_A g/h$ (positiv, Zug).
Die so gefundenen Werte müssen mit den Ergebnissen des CREMONA-Plans übereinstimmen.

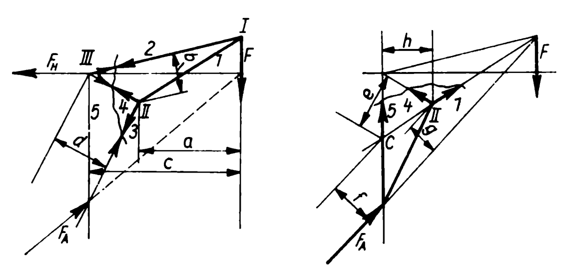


Bild 50. RITTERsches Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit einfachem Aufbau. Im Bild sind nur die Indizes i der Kräfte F_{Si} angegeben ($i = 1, \dots, 5$)

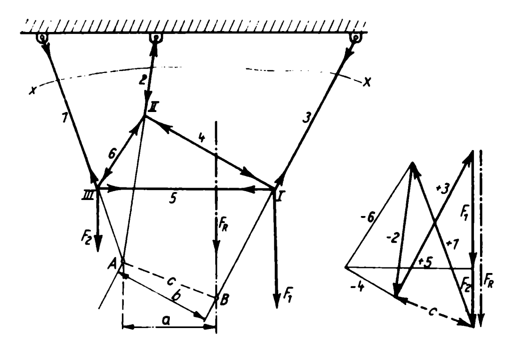


Bild 51. Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit nicht einfachem Aufbau unter Verwendung der CULMANNschen Geraden c oder des RITTERschen Schnitts $x-x$. Im Bild sind nur die Indizes i der Kräfte F_{Si} angegeben ($i = 1, \dots, 6$)

2.7.3. Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit nicht einfachem Aufbau

Fachwerke mit nicht einfachem Aufbau sind solche, bei denen kein Knoten vorhanden ist, an dem nur zwei unbekannte Stabkräfte angreifen (Bild 51). Der CREMONA-Plan kann erst gezeichnet werden, nachdem wenigstens eine der Stabkräfte ermittelt wurde. Hierzu können die folgenden Verfahren angewendet werden.

CULMANNsche Gerade

Die Kräfte F_1 und F_2 werden grafisch oder rechnerisch zu einer Resultierenden F_R zusammengefaßt. Bringt man F_{S1} und F_{S2} sowie F_R und F_{S3} zum Schnitt (Schnittpunkte *A* und *B*), so ist die Verbindungslinie $\overline{AB}$ die CULMANNsche Gerade c; nunmehr werden Kraftecke zuerst für F_R, F_{S3}, F_c und dann für F_c, F_{S1}, F_{S2} gezeichnet. Jetzt sind die Kräfte F_{S1}, F_{S2} und F_{S3} bekannt, und man kann, an irgendeinem Knotenpunkt (z. B. *I*) beginnend, mit Hilfe des CREMONA-Plans die Kräfte F_{S4}, F_{S5} und F_{S6} bestimmen.

Ritterscher Schnitt (Schnittverfahren)

Legt man einen Schnitt $x-x$ durch die Stäbe *1*, *2*, *3* und wählt A zum Momentenpunkt, so ist: $-F_R a + F_{S3} b = 0$; $F_{S3} = +F_R a/b$ (positiv, Zug).
Hiermit kann das Krafteck am Knotenpunkt *I* gezeichnet werden. Die Strecken a und b sind dem Lageplan zu entnehmen.

Verfahren des unbestimmten Maßstabs

Man beginnt mit dem Cremona-Plan an einem unbelasteten Knotenpunkt (*I*), wobei man die Größe einer der Stabkräfte (z. B. F_{S1}, Bild 52) beliebig annimmt und in bestimmter Länge in den Kräfteplan einsetzt.

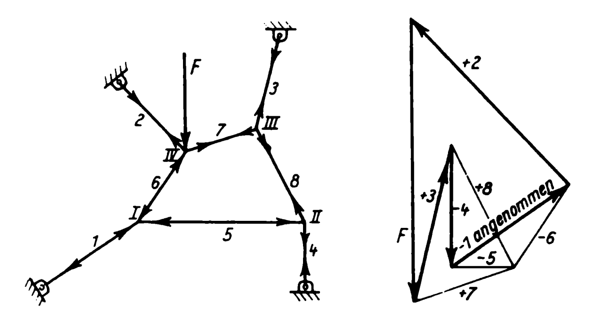


Bild 52. Verfahren des unbestimmten Maßstabs zur Bestimmung der Stabkräfte bei Fachwerken mit einfachem Aufbau. Im Bild sind nur die Indizes i der Kräfte F_{Si} angegeben ($i = 1, \ldots, 8$)

Indem man von einem Knotenpunkt zum anderen übergeht, erhält man alle Stabkräfte in einem zunächst noch unbekannten Maßstab. Das Krafteck für den Knoten *IV*, an dem die gegebene äußere Kraft F angreift, wird zuletzt gezeichnet. Diese Kraft erscheint als Schlußlinie in bestimmter Länge und liefert den Kräftemaßstab für den Cremona-Plan. Die Stabkräfte können als Vielfaches der äußeren Kraft F angegeben werden.
Wenn mehrere äußere Kräfte F_1, F_2, ... am Fachwerk angreifen, wird zuerst die Wirkung der Kraft F_1 untersucht, wobei die anderen Kräfte F_2, F_3, ... gleich Null zu setzen sind. Man wiederholt das Verfahren für die einzelnen Kräfte F_i und erhält die Kraftanteile, die diese Kräfte in den Stäben hervorrufen. Nach dem Überlagerungsgesetz können die tatsächlichen Stabkräfte durch Addition der Kraftanteile bestimmt werden.

2.8. Reibung

2.8.1. Gleitreibung

Ein Körper mit der Gewichtskraft F_G, der auf einer waagerechten ebenen Fläche liegt, kann erst dann in Bewegung gesetzt werden, wenn die auf ihn einwirkende waagerechte Kraft F einen Mindestwert erreicht hat, der gleich der *Reibungskraft* F_R ist (Bild 53). Für $F = 0$ ist die Reibungskraft $F_R = 0$. Wächst F, so nimmt die Reibungskraft in gleichem Maße zu. Hierbei ist der Körper stets im Gleichgewicht. Der Grenzfall des Gleichgewichts wird erreicht, wenn $F = F_R$ ist. Dann wirken auf den Körper an der Berührungsfläche die *Normalkraft* $F_N = F_G$ und die Reibungskraft $F_R = F$. F_R ist proportional F_N. Der Proportionalitätsfaktor μ heißt *Reibungszahl* (Reibungskoeffizient). Es gilt das Coulombsche *Reibungsgesetz:*

$$F_R = \mu F_N \qquad (32)$$

Die Reibungskraft ist stets der Bewegung entgegengesetzt gerichtet. Befindet sich der Körper in Ruhe, so ist die Reibungskraft größer als bei der Bewegung, deshalb ist die *Reibungszahl* μ_0 *der Haftreibung* (Ruhe) etwas größer als die *Reibungszahl* μ *der Gleitreibung* (Bewegung).

Die Gleitreibungszahl μ ist bei trockener oder halbtrockener Reibung fast unabhängig von der Geschwindigkeit. In der Praxis rechnet man mit einer konstanten Gleitreibungszahl und nimmt an, daß sie unabhängig von der Flächenpressung ist. Die Reibungszahl hängt außer vom Werkstoff wesentlich von der Schmierung ab. Beispiele siehe Tabelle 1.

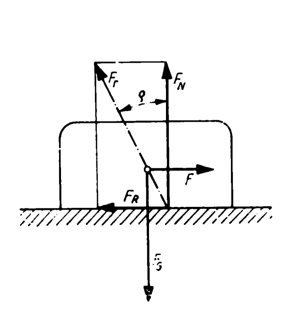


Bild 53. Kräfte bei der Gleitreibung

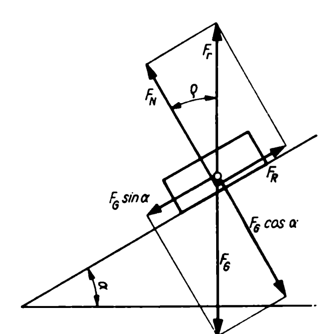


Bild 54. Geneigte Ebene (Grenzfall $\alpha = \varrho$)

Tabelle 1. Gleit- und Haftreibungszahlen

Material	μ			μ_0	
	trocken	geschmiert	mit Wasser	trocken	geschmiert
Stahl auf Stahl	0,1	0,05		0,15	0,1
Stahl auf Gußeisen, Rotguß oder Bronze	0,16	0,05		0,20	0,1
Stahl auf Gußeisen, geschliffen		0,016 ··· 0,02			
Metall auf Holz	0,2 ··· 0,5	0,02 ··· 0,08	0,22 ··· 0,28	0,55	0,1
Holz auf Holz	0,2 ··· 0,4	0,04 ··· 0,16	0,25	0,65	0,16
Leder auf Metall (Dichtungen)	0,25	0,12	0,36	0,60	0,25
Lederriemen auf Gußeisen	0,28	0,12	0,38	0,55	0,22
Gummireifen auf griffiger Bahn	0,6 ··· 0,8			0,70	
Gummireifen auf nasser schmieriger Bahn			0,2 ··· 0,3		
Bremsbelag auf Stahl	0,55	0,4			

Normalkraft und Reibungskraft ergeben eine Resultierende F_r, die den Winkel ϱ mit der Senkrechten bildet. Hierbei ist:

$$\tan\varrho = F_R/F_N = \mu \qquad (33)$$

Die Größe von F_r errechnet sich aus der Beziehung:

$$F_r = \sqrt{F_N^2 + F_R^2} = F_N\sqrt{1 + \mu^2} \qquad (34)$$

Auf einer geneigten Ebene bleibt ein Körper im Gleichgewicht, solange $F_G \sin\alpha < F_R$ ist. Im Grenzfall (Bild 54) wird

$$F_G \sin\alpha = F_R = F_G \cos\alpha \tan\varrho \qquad (35)$$

$$\tan\alpha = \tan\varrho \quad \text{oder} \quad \alpha = \varrho \qquad (36)$$

Bedingung für Selbsthemmung: $\alpha < \varrho$.

Beispiel. Es soll die Kraft F bestimmt werden, die notwendig ist, um einen Körper (Gewichtskraft F_G) auf einer geneigten Ebene mit gleichbleibender Geschwindigkeit nach oben oder nach unten zu bewegen.

1. *Kraft wirkt in Richtung der Ebene* (Bild 55): Die Kräfte F, F_G und F_r müssen im Gleichgewicht sein, wobei F_r die Resultierende aus Normalkraft und Reibungskraft bezeichnet.
Bild 55a:

$$F = F_G \sin\alpha + F_G \cos\alpha \tan\varrho; \quad F = F_G \sin(\alpha + \varrho)/\cos\varrho \tag{37}$$

Ist $\varrho > \alpha$, so wird F beim Abwärtsgang negativ, d. h., zur Abwärtsbewegung des Körpers muß eine abwärts gerichtete Kraft angesetzt werden (Bild 55b):

$$F = F_G \sin\alpha - F_G \cos\alpha \tan\varrho; \quad F = F_G \sin(\alpha - \varrho)/\cos\varrho \tag{38}$$

2. *Kraft wirkt waagerecht:*

Bild 56a: $$F = F_G \tan(\alpha + \varrho) \tag{39}$$

Bild 56b: $$F = F_G \tan(\alpha - \varrho) \tag{40}$$

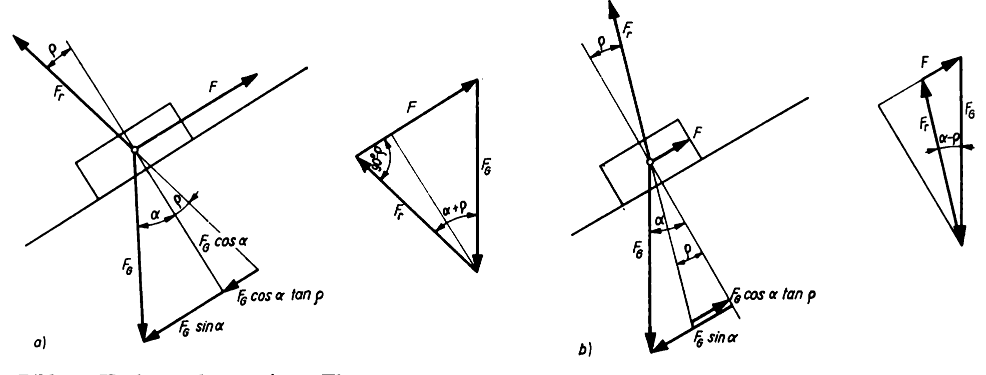


Bild 55. Kräfte an der geneigten Ebene

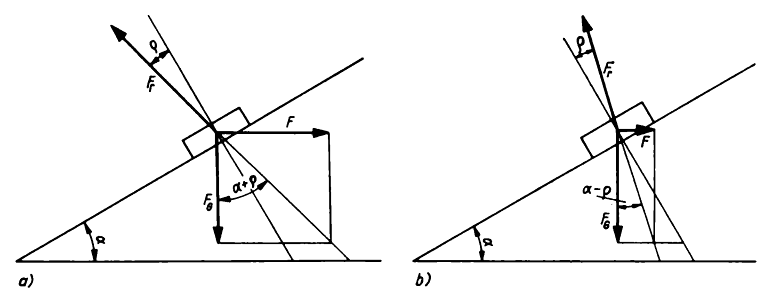


Bild 56. Kräfte an der geneigten Ebene

2.8.2. Anwendungen

Reibung in Keilnuten

Ein durch die Kraft F_G belasteter prismatischer Körper wird in einer Keilnut (Bild 57) bewegt (Führung an Werkzeugmaschinen). Normalkraft F_N und Reibungskraft F_R betragen:

$$F_N = F_G/(2 \sin\alpha) \tag{41}$$

$$F_R = 2\mu F_N = \mu F_G/\sin\alpha = \mu' F_G \tag{42}$$

μ Gleitreibungszahl, μ' Keilreibungszahl

Reibung in Führungen

Das Festklemmen der Buchse (Bild 58) tritt ein, wenn die Last F durch den gemeinsamen Raum der Reibungskegel an den Anlegestellen A und B geht. In diesem Fall besteht Gleichgewicht zwischen den Lagerkräften F_A, F_B und der Last F, die sich in einem Punkt schneiden, der innerhalb des schraffierten Raums liegt.

Bild 57. Reibung in einer Keilnut

Bild 58. Festklemmen einer Buchse

Bild 59. Kräfte am Keil

Reibung bei Keilen

Anheben eines Stößels **(Bild 59)**

Durch Verschieben des unteren Keils A wird der durch F_{St} belastete Stößel B mit gleichbleibender Geschwindigkeit angehoben. Auf den Stößel wirken die Kräfte F_{St}, F_{r2} und F_{r3}, die im Gleichgewicht sein müssen und deren Schnittpunkt M in der Symmetrieachse des Stößels liegen soll. Hierdurch ist die Lage des Punkts a bestimmt, der die Mitte der Lagerfläche des Stößels auf den Keil kennzeichnet. Es ist deshalb oft notwendig, den Stößel zu unterschneiden. — Auf den Keil wirken die Kräfte F, F'_{r2} und F_{r1}, die ebenfalls im Gleichgewicht sind. Die Reibungswinkel ϱ aller Gleitflächen sollen gleich sein.

Das Krafteck CDF für den Stößel ergibt die Größe von F_{r3} und F_{r2}. Da $F'_{r2} = -F_{r2}$, lassen sich F und F_{r1} bestimmen. F_{St} und F sowie F_{r1} und F_{r3} bilden rechte Winkel. Die Punkte C, D, E, F des Kraftecks liegen auf einem Kreis. $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ECD = \alpha + 2\varrho$. Folglich ist:

$$F = F_{St} \tan(\alpha + 2\varrho) \tag{43}$$

Im Idealfall (wenn keine Reibung vorhanden ist) ist $\varrho = 0$. Dann ist $F_{id} = F_{St} \tan \alpha$. Der Wirkungsgrad beim Heben der Last ist also:

$$\eta = F_{id}/F = \tan \alpha / \tan(\alpha + 2\varrho) \tag{44}$$

Die Kraft F', die ein Herausdrücken des Keils verhindert, ist:

$$F' = F_{St} \tan(\alpha - 2\varrho) \tag{45}$$

Ist $\alpha < 2\varrho$, so wird F' negativ. Das Keilgetriebe ist dann *selbsthemmend*, d. h., zum Heraustreiben des Keils muß eine Kraft in entgegengesetzter Richtung wirken.
Sind die drei Reibungswinkel $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, die den Kräften F_{r1}, F_{r2}, F_{r3} entsprechen, nicht gleich groß, so ist $F = F_{St} \sin(\alpha + \varrho_1 + \varrho_3) \cos \varrho_2/[\cos(\alpha + \varrho_2 + \varrho_3) \cos \varrho_1]$.

Keilräderpaar eines Reibradgetriebes (Bild 60)

Das Räderpaar wird mit der Kraft F aneinandergedrückt. F_r ist die Resultierende der Kraft F_N und der Reibungskraft μF_N. Da die Räder symmetrisch sind, sind F_r, F_N und μF_N für beide Seiten gleich. Aus dem Krafteck folgt:

$$2(F_N \sin\alpha + \mu F_N \cos\alpha) = F \quad \text{und somit} \quad 2F_N = F/(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{46}$$

Damit wird die übertragene Umfangskraft F_u, die der Reibungskraft F_R nach (42) entspricht:

$$F_u = 2\mu F_N = \mu' F/(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = \mu'' F \tag{47}$$

Für Reibräder mit halbem Keilwinkel $\alpha = 15°$ ist die Keilreibungszahl $\mu'' = 2{,}5\mu$; für Gußeisen ist $\mu = 0{,}15$ und $\mu'' = 0{,}37$.

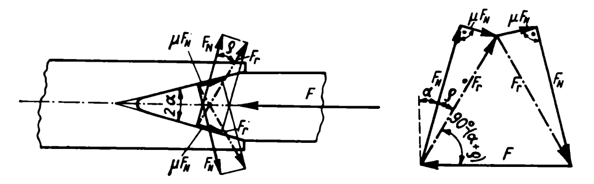


Bild 60. Kräfte am Keilräderpaar

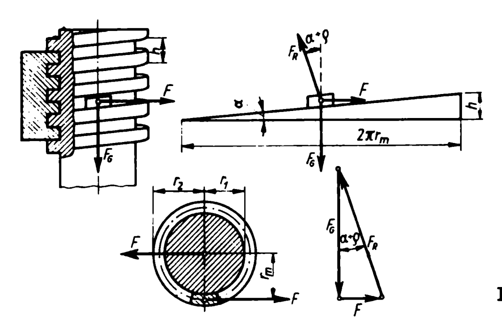


Bild 61. Reibung an einer Schraube

Reibung an Schrauben

— *Mit Flachgewinde* (Bild 61)

Bei einer Umdrehung der Schraube wird die Last F_G um den Betrag h heraufgeschoben. Das hierzu erforderliche Drehmoment ist $M = Fr_m$, worin F die am mittleren Gewindehalbmesser $r_m = (r_1 + r_2)/2$ angreifende Kraft ist. Nach (39) ist $F = F_G \tan(\alpha + \varrho)$, wobei $\tan\alpha = h/(2\pi r_m)$, wie aus Bild 61 hervorgeht. Das erforderliche Drehmoment ist also:

$$M = Fr_m = F_G \tan(\alpha + \varrho)\, r_m \tag{48}$$

Ist keine Reibung vorhanden ($\varrho = 0$), so ist die ideelle Kraft $F_{id} = F_G \tan\alpha$. Der Wirkungsgrad η in der Schraube ist:

$$\eta = F_{id}/F = \tan\alpha/\tan(\alpha + \varrho) \tag{49}$$

Zur Verhinderung des Sinkens der Last muß die Kraft F' aufgewendet werden:

$$F' = F_G \tan(\alpha - \varrho) \tag{50}$$

Selbsthemmung tritt ein, wenn $F' \leqq 0$ (also negativ) ist; hierzu muß $\alpha \leqq \varrho$ sein. Im Grenzfall $\alpha = \varrho$ ist der Wirkungsgrad $\eta = \tan\alpha/\tan 2\alpha \approx 0{,}5$.
Der Wirkungsgrad einer selbsthemmenden Schraube ist stets kleiner als 0,5.

– ***Mit Spitzgewinde und Trapezgewinde*** **(Bild 62)**

Berücksichtigt man, daß die senkrecht zur Gewindefläche stehende Komponente der Last: $F_{Gs} = F_G/(\cos \beta/2)$ ist, so gilt für die Reibungskraft:

$$F_R = \mu F_{Gs} = \mu F_G/(\cos \beta/2) \tag{51}$$

Setzt man:

$$\mu/(\cos \beta/2) = \mu' = \tan \varrho' \tag{52}$$

so können die Formeln für das Flachgewinde auch für Schrauben mit Trapezgewinde und mit Spitzgewinde verwendet werden, wenn man ϱ durch ϱ' bzw. μ durch μ' ersetzt.
Für Trapezgewinde ist $\beta = 30°$ und $\mu' = 1{,}04\mu$; für metrisches Gewinde ist $\beta = 60°$ und $\mu' = 1{,}15\mu$.
Wegen ihrer größeren Reibung und Selbsthemmung werden Schrauben mit Spitzgewinde vorwiegend als Befestigungsschrauben verwendet.

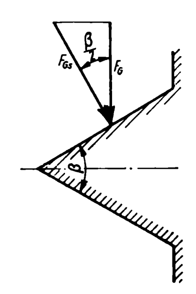


Bild 62. Lastwirkung am Gang eines Spitzgewindes

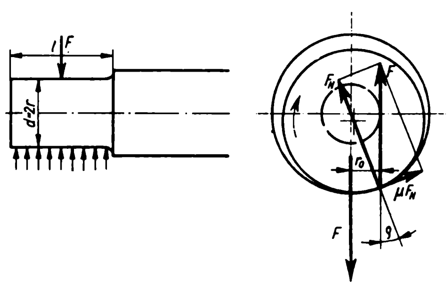


Bild 63. Kräfte am Lagerzapfen bei trockener Reibung ($p = F/ld$)

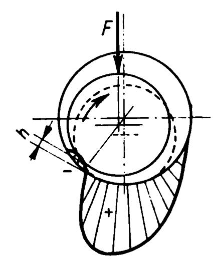


Bild 64. Druckverteilung am Lagerzapfen bei flüssiger Reibung

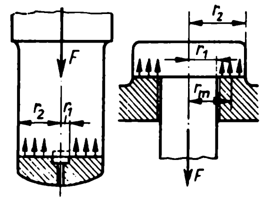


Bild 65. Spurlager (Lagerdruck $p = 2F/\pi d^2$)

Lagerreibung

Traglager **(Bild 63)**

Beim Anlauf des Zapfens ist mit trockener Reibung zu rechnen. Bei *trockener und halbflüssiger Reibung* wird sich die Berührungslinie zwischen Zapfen und Lager um den Reibungswinkel ϱ entgegen der Drehrichtung verlagern. Aus Bild 63 ist ersichtlich, daß $\mu F_N = F_N \tan \varrho = F \sin \varrho$ ist. Setzt man $\sin \varrho = \mu_1$, so ist $\mu F_N = \mu_1 F$. Das Reibungsmoment beträgt dann $Fr \sin \varrho = Fr_0$. Die Kraft F berührt einen Kreis mit dem Halbmesser $r_0 = r \sin \varrho$ (Reibungskreis, im Bild 63 gestrichelt eingetragen). Die Reibungsarbeit je Zeiteinheit beträgt:

$$\dot{W}_R = M_R \omega = F \mu_1 r \omega \tag{53}$$

Bei *flüssiger Reibung* bildet sich zwischen Lager und Zapfen ein Ölkeil aus, der den Zapfen trägt (Bild 64). Da der Druck rechts größer ist, wird sich der Mittelpunkt des Zapfens (Ruhelage gestrichelt gezeichnet) in Drehrichtung verlagern (im Gegensatz zur trockenen Reibung).

Spurlager **(Bild 65)**

Die Reibungsmomente eines neuen und eines eingelaufenen Zapfens betragen $M_{R0} = \mu F(r/3)$ und $M_{Rl} = \mu F(r/2)$. Das Reibungsmoment eines Ringzapfens ist $M_R = \mu F r_m$, wobei $r_m = (r_1 + r_2)/2$. Die Reibungsarbeit je Zeiteinheit beträgt $\dot{W}_R = M_R \omega$.

2.8.3. Seilreibung

Wird um eine feststehende Scheibe (Bild 66) ein vollkommen biegsames Seil (Riemen, Stahlband) gelegt, das die Scheibe auf dem Bogen α umspannt, so ist ein Gleichgewicht vorhanden, wenn gilt (EYTELWEIN-GRASHOFsche Gleichung):

$$F_{S1} = F_{S2}\,e^{\mu\alpha} \tag{54}$$

F_{S1} Spannkraft in Richtung der relativen Seilbewegung auf der Scheibe; F_{S2} Gegenkraft; μ Reibungszahl des Seils auf der Scheibe; α Umschlingungswinkel im Bogenmaß

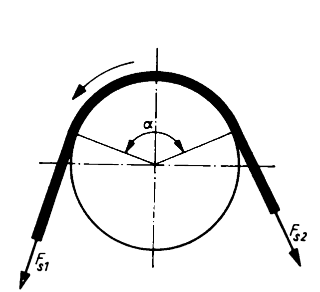


Bild 66. Zur Seilreibung

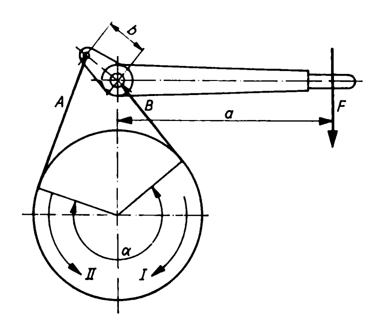


Bild 67. Bandbremse

Mit zunehmendem Winkel α wächst F_{S1} schnell an. Die Abhängigkeit der $e^{\mu\alpha}$-Werte von α und μ ist aus Tabelle 2 zu ersehen. Die Reibungskraft beträgt:

$$F_R = F_{S1} - F_{S2} = F_{S2}(e^{\mu\alpha} - 1) = F_{S1}(e^{\mu\alpha} - 1)/e^{\mu\alpha} \tag{55}$$

F_R ist die größte Umfangskraft, die eine Seil- oder Riemenscheibe zu übertragen vermag.

Bandbremse (Bild 67). Die Handkraft F erzeugt am Bremsband A eine Kraft $F_A = Fa/b$. Dreht sich die Scheibe in Richtung I, so ist nach (54) die Bandkraft bei B: $F_B = F_A e^{\mu\alpha}$. Die bremsende Umfangskraft F_u an der Scheibe ist nach (55) $F_u = F_B - F_A = F_A(e^{\mu\alpha} - 1)$. Dreht sich die Scheibe in Richtung II, so ist nach (54) $F_A = F_B e^{\mu\alpha}$; $F_B = F_A/e^{\mu\alpha}$. Die bremsende Umfangskraft ist dann $F_u = F_A - F_B = F_A(1 - 1/e^{\mu\alpha})$.

Beispiel. Gegeben $\alpha = 210°$, $\mu = 0{,}3$. α im Bogenmaß ist $\frac{2\pi}{360°} \cdot 210° = 3{,}66$ und $\mu\alpha \approx 1{,}1$, somit $e^{\mu\alpha} = e^{1,1} \approx 3{,}00$.

2.8.4. Rollreibung

1. Das belastete Rad wird etwas in die Fahrbahn eingedrückt (Bild 68). Die Mitte A der Berührungsfläche ist deshalb um den Betrag f in der Fahrtrichtung verschoben. Die senkrechte Komponente F_N der Bodenkraft F_B bildet mit der Gewichtskraft F_G des Rades ein

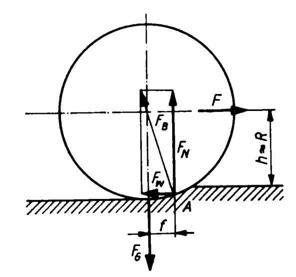


Bild 68. Zur Rollreibung

Tabelle 2. $e^{\mu\alpha}$-Werte in Abhängigkeit vom Umschlingungswinkel α und von der Reibungszahl μ *)

$\frac{\alpha}{2\pi}$	$\hat{\alpha}$	α	Reibungszahl μ									
			0,025	0,050	0,075	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,025	0,05π	9°	1,004	1,008	1,012	1,016	1,032	1,048	1,065	1,082	1,099	1,116
0,050	0,10π	18°	1,008	1,016	1,024	1,032	1,065	1,099	1,134	1,170	1,207	1,246
0,075	0,15π	27°	1,012	1,024	1,036	1,048	1,099	1,152	1,207	1,266	1,327	1,391
0,100	0,20π	36°	1,016	1,032	1,048	1,065	1,134	1,207	1,286	1,369	1,458	1,552
0,2	0,4π	72°	1,03	1,06	1,10	1,13	1,29	1,46	1,65	1,87	2,13	2,41
0,3	0,6π	108°	1,05	1,10	1,15	1,21	1,46	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74
0,4	0,8π	144°	1,06	1,13	1,21	1,29	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81
0,5	1,0π	180°	1,08	1,17	1,27	1,37	1,87	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02
0,6	1,2π	216°	1,10	1,21	1,33	1,46	2,13	3,10	4,52	6,59	9,60	14,00
0,7	1,4π	252°	1,12	1,25	1,39	1,55	2,41	3,74	5,81	9,02	14,00	21,73
0,8	1,6π	288°	1,13	1,29	1,46	1,65	2,73	4,52	7,47	12,35	20,41	33,74
0,9	1,8π	324°	1,15	1,33	1,53	1,76	3,10	5,45	9,60	16,90	29,75	52,37
1,0	2,0π	360°	1,17	1,37	1,60	1,87	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31
2	4π	720°	1,37	1,87	2,57	3,51	12,3	43,4	152	536	1 880	6 610
3	6π	1 080°	1,60	2,57	4,11	6,59	43,4	286	1 880	12 400	81 600	538 000
4	8π	1 440°	1,87	3,51	6,59	12,3	152	1 800	23 200	287 000	$3,54 \cdot 10^6$	$43,7 \cdot 10^6$
5	10π	1 800°	2,19	4,81	10,6	23,1	535	12 400	287 000	$6,64 \cdot 10^6$	$154 \cdot 10^6$	$3 550 \cdot 10^6$

*) *Zur Interpolation:* Die Zeilen und Spalten der Tabelle sind geometrische Folgen der $e^{\mu\alpha}$-Werte. Zwischen den Werten 72° und 360° wird von 9° zu 9° interpoliert, indem der zu dem nächstniedrigeren α-Wert gehörende $e^{\mu\alpha}$-Wert mit dem $e^{\mu\alpha}$-Wert des in den oberen vier Zeilen stehenden Differenzwinkels 9°, 18° usw. multipliziert wird. Ein noch weiter gehendes Interpolieren kann linear erfolgen. Zwischen 720° und 1800° wird sinngemäß interpoliert, indem die Differenzwinkel aus den darüberstehenden α-Werten zusammengesetzt werden. Das Interpolieren der μ-Werte von 0,025 zu 0,025 geschieht in gleicher Weise.

Kräftepaar $F_G f$, das der Bewegung des Rads entgegenwirkt. Die waagerechte Komponente F_w der Bodenkraft F_B muß gleich der Zugkraft F sein und bildet mit dieser ein Kräftepaar $F_w h \approx F_w R$. Greift F an der Radachse an, so gilt ($F_G R = F_G f$):

$$F_w = F_G f/R \tag{56}$$

Der Wert f heißt *Hebelarm der Rollreibung*. Er beträgt für Stahlräder auf Schienen $\approx$ 0,5 mm, für gehärtete Stahlkugeln auf Laufringen 0,005⋯0,01 mm.

2. Wird die Last F_Q auf einer Walze (Gewichtskraft F_G) bewegt (Bild 69), so gilt:

$$FD = F_Q f_1 + (F_G + F_Q) f_2 \tag{57}$$

Für $f_1 = f_2 = f$ und $F_G = 0$ ist $FD = 2F_Q f$ oder $FR = F_Q f$.

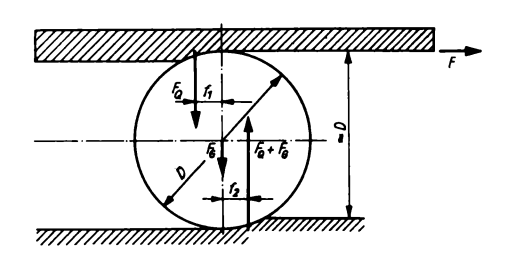



Bild 69. Rollreibung zwischen Walze und Last

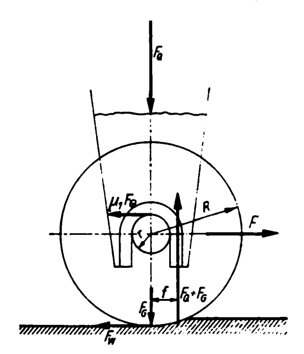


Bild 70. Fahrwiderstand

2.8.5. Fahrwiderstand

Beim Fortbewegen eines Wagens (Bild 70) ist außer der Rollreibung noch die Gleitreibung des Lagers zu überwinden. Der Gesamtwiderstand beträgt somit:

$$F_w = \mu_1 F_Q r/R + (F_Q + F_G) f/R \tag{58}$$

F_w Fahrwiderstand; μ_1 Reibungszahl des Lagers; F_Q Gewichtskraft des Wagens, F_G Gewichtskraft des Rads, r Radius des Achszapfens, R Radius des Rads, f Hebelarm der Rollreibung

Damit sich die Räder drehen, muß die Haftreibung zwischen Rad und Fahrbahn $\mu_0(F_Q + F_G) \geq F_w$ betragen. Da F_G meist sehr klein im Verhältnis zu F_Q ist, wird aus (58):

$$F_w = F_Q(\mu_1 r + f)/R = \mu_F F_Q \tag{59}$$

Nach Versuchsergebnissen können die in Tabelle 3 enthaltenen Mittelwerte für die Widerstandszahl μ_F angenommen werden.

Tabelle 3. Richtwerte für Fahrwiderstandszahlen μ_F

Fahrzeuge	μ_F
Eisenbahnwaggons	0,0025
Straßenbahnen mit Kugellagern	0,005
Straßenbahnen mit Gleitlagern	0,018
Loren in Bergwerken	0,01
Wagen auf asphaltierter Straße	0,01
Wagen auf Steinpflaster	0,04
Wagen auf der Landstraße	0,05⋯0,15
Kraftfahrzeuge (Gummi auf Asphalt)	0,02⋯0,03
Drahtseilbahnen	0,007⋯0,017



2.9. Rollen und Flaschenzüge

Feste Rolle (Bild 71)

Im Idealfall (ohne Berücksichtigung der Verluste) ist $F_{\mathrm{id}} = F_{\mathrm{QLast}}$. Seilsteifigkeit und Lagerreibung bedingen einen Wirkungsgrad η_{f} der festen Rolle:

$$\eta_{\mathrm{f}} = F_{\mathrm{Q}}/F = F_{\mathrm{id}}/F \tag{60}$$

der für Ketten und Seile etwa 0,95 beträgt. F ist die Kraft zum Heben der Last F_{Q} unter Berücksichtigung der Verluste.

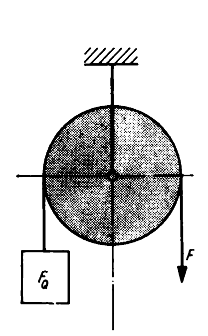


Bild 71. Feste Rolle

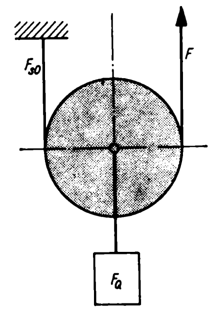


Bild 72. Lose Rolle

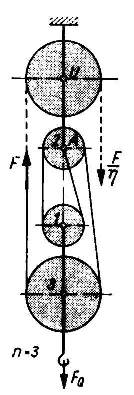


Bild 73. Flaschenzug mit drei Rollen und Umlenkrolle

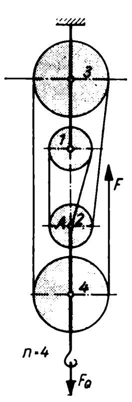


Bild 74. Flaschenzug mit vier Rollen

Lose Rolle (Bild 72)

Die Last F_{Q} verteilt sich auf zwei Seilenden, von denen das eine an einem Festpunkt angebracht ist, während am anderen die Kraft F angreift. Im Idealfall (ohne Berücksichtigung der Verluste) ist $F_{\mathrm{id}} = F_{\mathrm{Q}}/2$. Dementsprechend ist $s_{\mathrm{F}} = 2s_{\mathrm{Q}}$, wobei s_{F} der Kraftweg und s_{Q} der Lastweg ist. Bezeichnet F_{S0} die Seilkraft am festen Ende, so beträgt die zum Heben von F_{Q} erforderliche Kraft $F = F_{\mathrm{S0}}/\eta_{\mathrm{f}}$. Aus der Beziehung $F_{\mathrm{Q}} = F + F_{\mathrm{S0}}$, die die Lastverteilung auf die Seilenden ausdrückt, folgt:

$$F = (F_{\mathrm{Q}} - F)/\eta_{\mathrm{f}} = F_{\mathrm{Q}}/(\eta_{\mathrm{f}} + 1) \tag{61}$$

Der Wirkungsgrad η_{l} der losen Rolle ist:

$$\eta_{\mathrm{l}} = F_{\mathrm{id}}/F = F_{\mathrm{Q}}/2F = (\eta_{\mathrm{f}} + 1)/2 \tag{62}$$

Mit $\eta_{\mathrm{f}} = 0{,}95$ ergibt sich $\eta_{\mathrm{l}} = 1{,}95/2 = 0{,}975$. Der Wirkungsgrad der losen Rolle ist also höher als der der festen. In der Praxis rechnet man jedoch für feste und lose Rollen mit $\eta = 0{,}95$.

Flaschenzug (Bilder 73 und 74)

Flaschenzüge dienen zum Heben von Lasten und bestehen aus mehreren festen und losen Rollen, über die ein Seil gelegt ist. Das eine Ende A des Seils ist mit einer Flasche verbunden, während am anderen Ende die Kraft F angreift. Ist das Seilende A mit einer festen Rolle verbunden (Bild 73), so ist die Anzahl der Rollen ungerade, ist A mit einer losen Rolle verbunden (Bild 74), so ist die Anzahl der Rollen gerade. In beiden Fällen ist F nach oben gerichtet. Soll F nach unten oder zur Seite gerichtet sein, so ist noch eine weitere Umlenkrolle U vorzusehen.
Die Anzahl der tragenden Seilstränge ist stets $n + 1$, wobei n die Anzahl der Rollen ohne Umlenkrolle bedeutet.
Ohne Reibung ist $F_{\mathrm{id}} = F_{\mathrm{Q}}/(n + 1)$. Ist η der Wirkungsgrad einer Rolle, so gilt:

$$F_{\mathrm{Q}} = F + F\eta + F\eta^2 + \cdots + F\eta^n = F(1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^n) = F(1 - \eta^{n+1})/(1 - \eta) \tag{63}$$

Daraus ergibt sich:

$$F = F_{\mathrm{Q}}(1 - \eta)/(1 - \eta^{n+1}) \tag{64}$$

Zur Berechnung des Gesamtwirkungsgrads $\eta_{ges} = F_{id}/F$ stellt man zunächst die Formel auf: $F = F_Q/(n + 1)\,\eta_{ges}$. Daraus ergibt sich ohne Umlenkrolle:

$$\eta_{ges} = (1 - \eta^{n+1})/(n + 1)\,(1 - \eta) \tag{65}$$

Läuft das Seil von einer Umlenkrolle ab, dann ist:

$$\eta_{ges} = (1 - \eta^{n+1})\,\eta/(n + 1)\,(1 - \eta) \tag{66}$$

Werte für η_{ges} siehe Tabelle 4.

Tabelle 4. Wirkungsgrade η_{ges} für Flaschenzüge (bei $\eta = 0{,}95$)

Anzahl der Rollen n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η_{ges} ohne Umlenkrolle	0,975	0,954	0,925	0,904	0,884	0,862	0,842	0,823	0,803	0,785
η_{ges} mit Umlenkrolle	0,926	0,906	0,879	0,859	0,839	0,818	0,799	0,782	0,762	0,746

3. Beanspruchung fester Körper

3.1. Grundbegriffe

3.1.1. Festigkeit, Elastizität, Beanspruchung

Lasten sind äußere Kräfte und (oder) Kräftepaare (Momente), deren Einwirken auf Bauteile der technischen Praxis konstruktiv vorgesehen oder verwirklicht ist.
Belastung ist der Vorgang des Wirkens von Lasten. Durch die Belastung werden im Werkstoffgefüge des Bauteils Widerstände (Kohäsionskräfte) hervorgerufen. Die Eigenschaft des Werkstoffs, Widerstand gegen Verschiebung oder Trennung seiner Elementarteile zu leisten, nennt man *Festigkeit.* Die äußeren Kräfte sind also Ursache für das Entstehen der in der Beanspruchungslehre interessierenden inneren Kräfte.
Als *Elastizität* eines Werkstoffs bezeichnet man seine Eigenschaft, bei Belastung die Form (Gestalt und Größe) zu ändern, wobei die Änderungen bei Entlastung ganz oder teilweise wieder zurückgehen.
Der Begriff *Beanspruchung* bedeutet allgemein die Inanspruchnahme spezifischer Festigkeits- und Elastizitätseigenschaften im Hinblick auf das Erreichen der möglichen Grenzwerte.*)

3.1.2. Beanspruchungs- und Belastungsarten

Zur theoretischen Erfassung der Bauteilbeanspruchungen werden ideelle Beanspruchungsarten eines Idealstabs bzw. -trägers als Arten der *Grundbeanspruchung* (auch Solitärbeanspruchung) definiert. Dazu dienen Angaben über Lage und Richtung der Lasten (Kräfte) im Vergleich zur Stab- bzw. Trägerachse und über entstehende Verformungen (Tafel 4).
Wird bei der Analyse der Beanspruchung eines beliebigen Bauteils festgestellt, daß mehrere Grundbeanspruchungsarten auftreten, so liegt *Komplexbeanspruchung* vor. Der rationellen Beschreibung und Berechnung aller Bauteilbeanspruchungen liegt der Gedanke zugrunde, diese auf die Grundbeanspruchungen zurückzuführen.

*) Im Sprachgebrauch ist eine saubere Trennung der Begriffe *Belastung* und *Beanspruchung* nicht üblich. Die Festigkeitseigenschaften und damit der Grad ihrer Inanspruchnahme werden durch den Spannungsbegriff gefaßt; die Spannung ist Maß der Beanspruchung, die Festigkeit erscheint als Grenzwert der Beanspruchung. Es wird daher empfohlen, den Begriff der Beanspruchung so zu verwenden, daß er den Spannungsbegriff einschließt, während der Begriff Belastung auf die Beschreibung der Lasten orientiert sein sollte.



Tafel 4. Grundbeanspruchungsarten

Art	Erläuterung
Zug	Die äußeren Kräfte wirken in der Stabachse und längen den Stab.
Druck	Die äußeren Kräfte wirken in der Stabachse und kürzen den Stab.
Biegung	Die äußeren Kräfte und (oder) Kräftepaare wirken senkrecht zur Trägerachse und rufen deren Krümmung hervor.
Scherung	Zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte wirken in einer Ebene senkrecht zur Stabachse und versuchen, die Werkstoffteilchen in dieser Ebene gegeneinander zu verschieben.
Schub	Scherung wird zu Schub, wenn die Kräfte nicht mehr in einer Wirkungslinie, sondern in einem Abstand voneinander wirken (Kräftepaar).
Torsion	Der Stab wird durch Kräftepaare beansprucht, welche in Ebenen senkrecht zur Stabachse wirken und ein gegenseitiges Verdrehen der Stabquerschnitte hervorrufen.
Knickung	Die Kräfte wirken wie bei Druckbeanspruchung, jedoch ist der Schlankheitsgrad des Stabs so groß, daß von einer bestimmten Belastung an die Gefahr des seitlichen Wegbiegens (Ausknickens) besteht.

Belastung und damit auch Beanspruchung und Festigkeit können zeitabhängig sein. Der zeitliche Verlauf der Belastung wird durch folgende *Belastungsarten* charakterisiert:

1. im Hinblick auf die Form der Änderung:
   - konstante (statische) Belastung,
   - schwingende (dynamische) Belastung und
   - Stoßbelastung;

2. im Hinblick auf den Zeitumfang:
   - zeitlich begrenzte Belastung und
   - Dauerbelastung.

Die genannten Belastungsarten führen zu entsprechenden Beanspruchungen (z. B. Dauerbeanspruchung) und Festigkeitskenngrößen (z. B. Dauerstandfestigkeit, Dauerschwingfestigkeit)*).

3.1.3. Schnittverfahren

Um die inneren Kräfte und Momente darstellen und sie rechnerisch erfassen zu können, denkt man sich an der zu untersuchenden Stelle des Körpers einen Schnitt gelegt und entfernt eines der beiden entstehenden Teile. An der Schnittstelle werden nun die Kräfte und Momente angetragen, die das entfernte Teil auszuüben in der Lage gewesen wäre. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der *Statik* (Einbeziehung aller am betrachteten geschnittenen Körperteil wirkenden Kräfte und Momente) gelingt es dann, zu Aussagen über die inneren Kräfte und Momente (Schnittreaktionen) zu gelangen.

3.1.4. Spannungen

Als Maß für die inneren Kräfte (für die Beanspruchung) dient die Spannung*). Man unterscheidet zwei Spannungskategorien:

1. *Normalspannungen* wirken rechtwinklig zur Schnittebene und werden durch senkrecht zur Schnittebene wirkende Kräfte bzw. Kraftkomponenten hervorgerufen. Sie längen oder kürzen die Werkstoffasern.

$$\sigma = \mathrm{d}F_\mathrm{n}/\mathrm{d}A \qquad (67)$$

Normalspannungen sind *Zug-, Druck-, Biege- und Knickspannungen.*

Beispiel: In einem Zugstab ohne schroffe Querschnittsänderungen ist in einem Querschnitt (Fläche A) senkrecht zur Stabachse die durch die Kraft F hervorgerufene Normalspannung $\sigma_z = F/A$.

2. *Tangentialspannungen* wirken in der Schnittebene und werden durch Kräfte bzw. Kraftkomponenten der gleichen Richtung hervorgerufen. Tangentialspannungen sind bestrebt, die Querschnitte gegeneinander zu verschieben.

$$\tau = \mathrm{d}F_\mathrm{t}/\mathrm{d}A \qquad (68)$$

Tangentialspannungen sind *Abscher-, Schub- und Torsionsspannungen.*

3.1.5. Formänderungen und Hookesches Gesetz bei Zugbeanspruchung

Wird ein Stab bei Raumtemperatur einer stetig zunehmenden Zug- oder Druckbeanspruchung unterworfen, erfährt er eine Längenänderung $\Delta l = l - l_0$. Die auf die Länge l_0 des unbelasteten Stabs bezogene Längenänderung heißt *Dehnung,* bei Druckbeanspruchung *Stauchung:*

$$\varepsilon = \Delta l/l_0 = (l - l_0)/l_0 \qquad (69)$$

Mit der Längenänderung ist eine Querschnittsveränderung verbunden. Als *Querkontraktion* bezeichnet man das Verhältnis:

$$\varepsilon_\mathrm{q} = \pm \Delta d/d_0 \qquad (70)$$

*) s. auch Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG

Der Quotient aus Quer- und Längsdehnung heißt POISSON-*Zahl* (Querzahl):

$$\mu = \varepsilon_Q/\varepsilon \quad (71)$$

Die POISSON-Zahl ist werkstoffabhängig. Für technisch wichtige Metalle (außer lamellarem Grauguß) rechnet man mit $\mu = 0{,}3$; bei Grauguß mit $\mu = 0{,}11 \cdots 0{,}2$; bei Beton mit $\mu = 0{,}17$.

Mißt man während eines Zugversuchs*) Spannung und Dehnung des Probestabs und untersucht deren Veränderungen, dann ergibt sich insbesondere bei Stählen bis zur Proportionalitätsgrenze Proportionalität zwischen beiden Größen. Dieser Zusammenhang wird durch das HOOKE*sche Gesetz* mathematisch formuliert:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (72)$$

Der Proportionalitätsfaktor E ist der ***Elastizitätsmodul,*** eine für viele Werkstoffe weitgehend konstante Formänderungskenngröße. Richtwerte siehe Tabelle 5.

Tabelle 5. Elastizitätsmoduln einiger Metalle (Richtwerte)

Material	Stahl	Stahlguß	Grauguß	Alu-Legierung	Rotguß	Messing
Elastizitätsmodul E in GPa	210 ··· 220	210	75 ··· 110	65 ··· 75	88	79

Mit Hilfe der Werkstoffkonstante Elastizitätsmodul E kann die Formänderung von Bauteilen berechnet werden. So ergibt sich aus (72) die Verlängerung eines auf Zug beanspruchten Stabs mit gleichbleibendem Querschnitt aus:

$$\Delta l = \sigma l_0/E = Fl_0/AE \quad (73)$$

Beispiel. Ein Stahlbandmaß von 30 m Länge und 6 mm² Querschnittsfläche wird bei der Messung mit 100 N belastet. Es ergeben sich

Verlängerung (absoluter Fehler) $\Delta l = \dfrac{100\ \text{N} \cdot 30 \cdot 10^3\ \text{mm}}{6\ \text{mm}^2 \cdot 2{,}10 \cdot 10^5\ \text{N/mm}^2} = 2{,}38\ \text{mm}$

und Dehnung (relativer Fehler) $\varepsilon = \Delta l/l_0 = 79 \cdot 10^{-6} \mathrel{\hat{=}} 0{,}0079\%$.

Die Meßgenauigkeit wird mithin durch die Formänderung praktisch nicht beeinträchtigt.

3.1.6. Charakteristische Spannungsgrenzen bei statischer Beanspruchung

Wird ein Probestab*) über die *Proportionalitätsgrenze* σ_P hinaus belastet, so verhält er sich bis zur ***Elastizitätsgrenze*** σ_E voll elastisch, d. h., er nimmt nach Entlastung seine ursprüngliche Länge l_0 wieder an. Meßtechnisch bedingt legt man praktisch als Elastizitätsgrenze diejenige Spannung fest, bei der die bleibende Verformung 0,01% bzw. 0,005% erreicht hat.

Streckgrenze σ_S heißt die Spannung, bei der die Länge des Zugstabs weiterhin zunimmt, obgleich die Belastung konstant bleibt oder sogar zurückgeht.

Ist die Streckgrenze im *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* (Bild 75) nicht zu erkennen, so wird die Spannung bei der bleibenden Dehnung 0,2% als Streckgrenze festgelegt ($\sigma_{0,2}$).

Als ***Zugfestigkeit*** σ_B bezeichnet man die Spannung, die sich als Quotient aus der höchsten erreichten Last F_{max} und dem spannungsfreien Querschnitt A_0 ergibt, also $\sigma_B = F_{max}/A_0$. Die praktisch benötigten σ_B-Werte sind Tabellen der Werkstoffkunde zu entnehmen.

Die genannten Grenzspannungen gelten allgemein für den Fall der zügigen, kurzzeitigen

*) s. Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG

statischen Belastung. Wirkt die statische Belastung dauernd, so kann bei einigen Werkstoffen (bei Stahl nur bei höheren Temperaturen) *Kriechen* eintreten, d. h., der Werkstoff dehnt sich langsam weiter aus, was bis zum Bruch führen kann. An die Stelle der Zugfestigkeit σ_B tritt dann die *Dauerstandfestigkeit* σ_{DSt}*) (Bild 76).

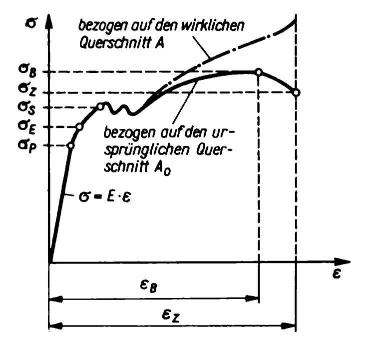


Bild 75. Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Flußstahl



Bild 76. Abhängigkeit der Dauerstandfestigkeit von der Temperatur

3.1.7. Sicherheit und Sicherheitsgrad bei statischer Beanspruchung

Die Beanspruchung der Bauteile darf nur so hoch zugelassen werden, daß Bruch und bleibende Verformung mit Sicherheit nicht eintreten, d. h., die durch die Belastung im Bauteil entstehende höchste Betriebsspannung σ_{max} muß kleiner sein als die in Frage kommenden Grenzspannungen der Werkstoffprüfung.
Es gilt für statische Beanspruchung:

Sicherheit gegen Gewaltbruch: $S_B = \sigma_B/\sigma_{max}$ (74)

Sicherheit gegen bleibende Verformung (Fließen):

$$S_S = \sigma_S/\sigma_{max} \quad \text{bzw.} \quad S_S = \sigma_{0,2}/\sigma_{max} \tag{75}$$

Durch den Sicherheitsgrad S werden Unzulänglichkeiten im Berechnungsverfahren, Ungleichmäßigkeiten in den Werkstoffeigenschaften, Abweichung der Form des Bauteils von der geometrischen Form der Prüfkörper und unsichere Erfassung der Kräfte (z. B. bei stoßweisen Beanspruchungen) berücksichtigt. Der erforderliche Sicherheitsgrad ist ein Erfahrungswert, dessen Größe durch Erprobung in der Praxis bestätigt sein muß. Gesicherte spezielle Werte lassen sich nur für bestimmte Maschinen bzw. Maschinenteile angeben. Durchschnittliche Sicherheitsgrade, die sich für den allgemeinen Maschinenbau bewährt haben und empfohlen werden können, sind bei walz- und schmiedbaren Werkstoffen: $S_B \geqq 3$ gegen Gewaltbruchgefahr und $S_S \geqq 2$ gegen Fließgefahr; sowie bei gegossenen Werkstoffen: $S_B \geqq 5$ gegen Gewaltbruchgefahr.

Die Sicherheit kann um so niedriger angesetzt werden, je zuverlässiger das Berechnungsverfahren die tatsächlichen Verhältnisse erfaßt und Überlastungen unwahrscheinlich sind.

3.1.8. Zulässige Spannung

Durch Festlegung eines Sicherheitsgrads wird die Höhe der Spannung bestimmt, die als Bruchteil der in Frage kommenden Grenzspannung als Höchstspannung im Bauteil zugelassen werden darf. So ist für statische Beanspruchung die zulässige Spannung:

$$\sigma_{zul} = \sigma_B/S_B \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{zul} = \sigma_S/S_S \tag{76}$$

*) s. auch Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG

Tabelle 6. Richtwerte für zulässige Spannungen im allgemeinen Maschinenbau

M Maschinenstahl, E Einsatzstahl, V Vergütungsstahl, A Automatenstahl, e einsatzgehärtet, v vergütet. Werte in MPa

Stahlart	Werkstoff	Lastfall	Zug und Druck	Biegung	Scherung	Drehung und Schub
		I	110	114	88	60
M	St 34	II	92	95	74	52
A	9S20v	III	50	60	40	33
		I	120	130	96	70
M	St 37	II	96	110	77	60
A	10S20v	III	55	70	45	39
M	St 42	I	125	150	100	80
E	C10e	II	109	130	87	70
A	22S20v	III	65	85	50	43
M	St 50	I	155	180	124	95
E	C15c	II	135	160	108	83
V	C22v	III	75	105	60	54
M	St 60	I	180	210	144	110
A	35S20v	II	157	185	126	95
V	C35v	III	85	120	70	62
M	St 70	I	210	245	168	130
A	45S20v	II	175	220	140	113
V	C45v	III	100	135	80	73
E	15Cr3e	I	225	250	180	135
A	60S20v	II	170	215	136	117
V	C60v	III	100	150	90	73
E	16MnCr5e	I	280	330	212	170
V	40Mn4v	II	190	250	150	148
V	34Cr4v	III	140	160	100	85
V	25CrMo4v					
E	20MnCr5e	I	310	340	220	160
		II	260	280	160	140
V	34CrMo4v	III	150	180	110	78
E	15CrNi6e	I	330	360	240	180
V	37MnSi5v	II	280	300	180	155
V	36CrNiMo4v	III	160	180	120	90
E	18CrNi8e	I	350	420	280	215
V	12MnV7v	II	300	320	180	175
V	41Crv	III	190	200	120	90
E	41Cr4e	I	380	500	310	270
V	34CrNiMo6v	II	320	350	310	230
V	30CrNiMo8v	III	210	230	140	110
	GS-38	I	110	130	90	66
	geglüht	II	85	100	70	51
		III	50	60	40	27
	GS-45	I	130	145	110	77
	geglüht	II	90	120	80	61
		III	60	70	50	36

Tabelle 7. Richtwerte für Gußeisen. Werte in MPa

Werkstoff	Lastfall	Zug	Druck	Scherung Schub	Torsion			
					●	○	■	▮
Grauguß	I	40	100	40	35	25	45	50
GG-12	II	35	80	35	30	22	40	45
*)	III	25	—	25	20	16	28	30

Lastfall	Biegung mit Gußhaut			Biegung bearbeitet		
	●	■	I	●	■	I
I	60	50	40	70	60	50
II	50	45	35	55	50	45
III	35	30	25	40	35	30

*) Für festere Grauguß- und Tempergußsorten sowie Sphäroguß können obige Werte erhöht werden, und zwar im Verhältnis von deren Festigkeitswerten σ_B zu σ = 140 MPa abzüglich 30%.

Tabelle 8. Richtwerte für Holzarten der Güteklasse II. Werte in MPa

Art der Beanspruchung	Nadelholz	Eiche, Buche
Druck in der Faserrichtung	8,5	10
Biegung	10	11
Zug in der Faserrichtung	8,5	10
Druck rechtwinklig zur Faserrichtung	2	3
desgl. bei Bauteilen, bei denen geringe Eindrückungen unbedenklich sind	2,5	4
Abscheren in der Faserrichtung und Leimfuge	0,9	1

Tabelle 9. Richtwerte für sonstige Werkstoffe. Werte in MPa

Werkstoff	Lastfall	Zug	Biegung	Scherung	Torsion, Schub	Druck
Hartpapier	I	25	30	20	17	30
Hartgewebe	I	20	10	20	17	50
Phenoplaste	I	8	20	6,5	5,7	40
Aminoplaste	I	17	25	13	10	80
Polymerisate	I	20	30	16	12	30
Jenaer Glas	I	10	5			80
Hochbrand-Porzellan	I	5	5			40
Lederriemen	I	3				3 ··· 5
Weichgummi	I			1 ··· 2	1 ··· 2	0,5 ··· 1,0
	II			0,3 ··· 0,5	0,3 ··· 1,0	



Für praktische Berechnungen (vor allem Entwurfs- und Überschlagsberechnungen) ist es zweckmäßig, mit Richtwerten für zulässige Spannungen zu arbeiten. Die in den Tabellen 6···9 zusammengestellten Werte sind mit den oben angegebenen Mindestsicherheitsgraden ermittelt und gelten für den allgemeinen Maschinenbau als Empfehlung*).

Die Lastfälle haben folgende Bedeutung:

Lastfall I: *konstante* (statische) *Beanspruchung*
Lastfall II: *Schwellbeanspruchung.* Die Last verändert sich ständig zwischen Null und dem Maximalwert.
Lastfall III: *Wechselbeanspruchung.* Die Last verändert sich ständig zwischen einem positiven und einem gleich großen negativen Wert.

Bei Unstetigkeiten im Spannungsverlauf infolge Kerbwirkung sind die zulässigen Spannungen im Lastfall II und III um 15···25% zu verringern (bei Sorten mit niedrigen Festigkeiten und im geglühten Zustand um den niedrigeren Prozentsatz, bei kerbempfindlicheren, festeren Sorten und im durchgehärteten oder vergüteten Zustand um den höheren Prozentsatz).

3.2. Grundbeanspruchungsarten

3.2.1. Zugbeanspruchung

Wird ein Stab vom Querschnitt A und der Länge l auf Zug beansprucht, so ergibt sich aus einer Schnittbetrachtung für gleichmäßige Verteilung der Spannung über den Stabquerschnitt die Festigkeitsgrundgleichung:

$$\sigma_{z,\text{vorh}} = F/A \leqq \sigma_{z,\text{zul}} \tag{77}$$

Zur Kennzeichnung von zugbeanspruchten Materialien, besonders Textilien u. ä., dient der Begriff ***Reißlänge*** oder Bruchlänge. Man versteht darunter die Länge l_B, bei der ein freihängender Stab (Faden, Draht) konstanten Querschnitts durch sein Eigengewicht abreißt. Aus $A\sigma_B = \varrho g l_B A$ folgt:

$$l_B = \sigma_B / g\varrho \tag{78}$$

Beispiel 1. Wie groß ist die Zugspannung in der 15 mm dicken Strebe des Steuergestänges (Bild 77), und um welchen Betrag Δl wird sie durch die Beanspruchung verlängert?

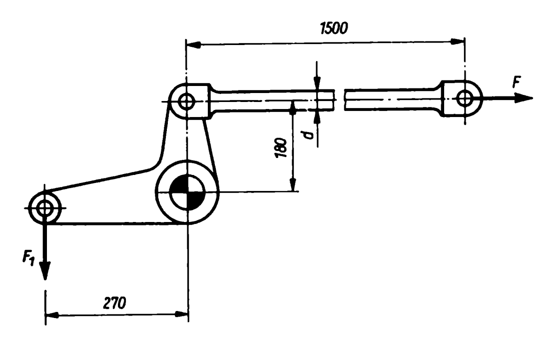


Bild 77. Zugstange (F_1 = 9,4 kN)

Die Zugkraft im Gestänge beträgt:

$F = F_1(a/h) = 9{,}4 \cdot 10^3 \cdot (270/180)$ N $= 14{,}1 \cdot 10^3$ N $= 14{,}1$ kN. Daraus folgt $\sigma = 4F/\pi d^2 = (4 \cdot 14{,}1 \cdot 10^3/\pi \cdot 15^2)$ N/mm² $= 79{,}8$ MPa und $\Delta l = \sigma l_0/E = (79{,}8 \cdot 1500/2{,}1 \cdot 10^5)$ mm $= 0{,}57$ mm.

---

*) Bei der Öffentlichkeit zugänglichen Konstruktionen und Bauten, bei deren Versagen Menschenleben gefährdet wären, kann die Festlegung des Sicherheitsgrads nicht dem Konstrukteur überlassen bleiben. Die erforderlichen Sicherheitsgrade werden daher gesetzlich vorgeschrieben (verbindliche Werte der zulässigen Spannungen). Sie sind den neuesten einschlägigen Bauvorschriften zu entnehmen.

Beispiel 2. Welchen Durchmesser D muß ein quergebohrter Rundstab aus St 38 besitzen, der statisch auf Zug beansprucht wird (Bild 78)? $\sigma_{z,zul} = 120$ MPa.

$\sigma_{z,zul} = F/A = F/[(\pi D^2/4) - dD]$. Daraus folgt $D^2 - (4d/\pi)\,D - 4F/\pi\sigma_{z,zul} = 0$ bzw.

$D = (2d/\pi) + \sqrt{(2d/\pi)^2 + (4F/\pi\sigma_{z,zul})} = (2 \cdot 15/\pi)\text{ mm} + \sqrt{(2 \cdot 15/\pi)^2 + (4 \cdot 4 \cdot 10^4/\pi \cdot 120)}\text{ mm}$
≈ 32 mm.

Beispiel 3. Ein beiderseits fest eingespannter Stahlstab erfährt eine Temperaturveränderung von 50 K. Wie groß ist die Spannung?

Ein nicht eingespannter Stab würde seine Länge um den Betrag $\Delta l = l_0\alpha\Delta t$ ändern (α = Längenausdehnungskoeffizient; für Stahl gilt $\alpha = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$). Wird die Längenänderung durch eine äußere Kraft rückgängig gemacht, ergibt sich entsprechend Gl. (73) die Spannung $\sigma = E(\Delta l/l_0)$. Durch Einsetzen der Längenänderung erhält man $\sigma = E\alpha\Delta t = 120{,}8$ MPa. Bei Erwärmung würde es sich hierbei um eine Druckspannung handeln, bei Abkühlung um eine Zugspannung.

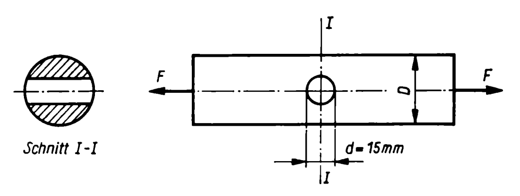


Bild 78. Quergebohrter Zugstab ($F = 40$ kN)

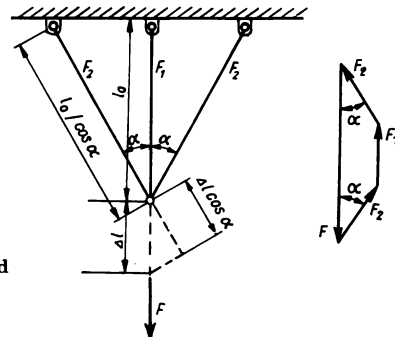


Bild 79. Kräfte und Verlängerungen im Stabverband

Beispiel 4. Welche Kräfte und Zugspannungen treten in dem statisch unbestimmten Stabverband nach Bild 79 auf, wenn $F = 5 \cdot 10^4$ N; $A = 200\ \text{mm}^2$, $\alpha = 30°$ und $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa? Der Ansatz der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma F_y = 0$ liefert $F = F_1 + 2F_2 \cos\alpha$. Weitere Gleichgewichtsbedingungen führen zu keiner Lösung; bei statisch unbestimmten Systemen ist die Einbeziehung von Formänderungsgleichungen notwendig: Die Dehnung des mittleren Stabs ist $\varepsilon_1 = \Delta l/l_0$, also $F_1 = EA\varepsilon_1 = EA\,\Delta l/l_0$. Die Dehnung der Außenstäbe beträgt $\varepsilon_2 = \Delta l \cos\alpha/(l_0/\cos\alpha) = \Delta l \cos^2\alpha/l_0$; also $F_2 = EA\varepsilon_2 = EA\,\Delta l \cos^2\alpha/l_0 = F_1 \cos^2\alpha$. Somit wird $F = EA\,\Delta l/l_0 + 2EA\,\Delta l \cos^3\alpha/l_0 = (EA\,\Delta l/l_0) \cdot (1 + 2\cos^3\alpha)$ und hieraus $\Delta l/l_0 = F/EA(1 + 2\cos^3\alpha)$.
Mit den oben festgelegten Werten ergibt sich somit:

$\Delta l/l_0 = 5 \cdot 10^4\ \text{N}/2{,}1 \cdot 10^5\ \text{N/mm}^2 \cdot 200\ \text{mm}^2[1 + (3\sqrt{3}/4)] = 1/1930.$

$F_1 = (2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 200/1930)\ \text{N} = 21{,}8 \cdot 10^3\ \text{N} = 21{,}8$ kN und $F_2 = 21{,}8\ \text{kN} \cdot 0{,}75 = 16{,}4$ kN.

Mit diesen Kräften erhält man in den Stäben folgende Zugspannungen:

$\sigma_1 = F_1/A = 21{,}8 \cdot 10^3\ \text{N}/200\ \text{mm}^2 = 109$ MPa und $\sigma_2 = F_2/A = 16{,}4 \cdot 10^3\ \text{N}/200\ \text{mm}^2 = 82$ MPa.

3.2.2. Druckbeanspruchung

Festigkeitsberechnung für Druckstäbe

Analog der Berechnung von Zugstäben ergibt sich die Grundgleichung

$$\sigma_d = F/A \leqq \sigma_{d,zul} \tag{79}$$

Treten in einem Querschnitt Druckspannungen und Zugspannungen auf, dann erhalten Druckspannungen ein negatives, Zugspannungen ein positives Vorzeichen.
Gl. (79) läßt sich nur für die Berechnung *gedrungener Druckstäbe* anwenden; schlanke Stäbe sind auf Knicken zu berechnen.

Flächenpressung

Flächenpressung tritt an den Berührungsflächen zweier gegeneinander gedrückter Körper auf. Sie wird in der Einheit Kraft je Fläche angegeben. Die Berechnung richtet sich nach der Form der Oberflächen. In Tabelle 10 sind die Berechnungsgleichungen sowie die zulässigen Pressungswerte zusammengestellt.

Tabelle 10. Gleichungen und Werte für die Flächenpressung

Form der Oberflächen	Gleichung für Pressung	Bemerkung	Zulässige Werte für p bzw. σ_l
Ebene – Ebene	$p = F/A$		*gegenseitig bewegt und Mischreibung:* $p_{zul} = (0{,}5 \cdots 0{,}7)\,\sigma_{d,zul}$ *gegenseitig in Ruhe:* $p_{zul} = (0{,}75 \cdots 1{,}0)\,\sigma_{d,zul}$
Zapfen – Bohrung	$p = F/dl$	d Zapfendurchmesser l tragende Länge	*gegenseitig bewegt*):* $p_{zul} = 2{,}5 \cdots 30$ MPa
	$\sigma_l = F/dl$	σ_l Lochleibungsspannung	*Nietverbindungen im Stahlbau:* $\sigma_{l,zul} = 2\tau_{a,zul}$ *Stift- und Bolzenverbindungen:* $\sigma_{l,zul} = (1{,}3 \cdots 1{,}6)\,\sigma_{d,zul}$
Kugel – Ebene	$p_{max} = 0{,}388 \sqrt[3]{FE^2/r^2}$		*Grauguß:* $p_{zul} = 500$ MPa
Kugel – Kugel	p_{max} wie bei Kugel – Ebene mit $1/r = 1/r_1 + 1/r_2$	r_1, r_2 Kugelradien	*Stahlguß:* $p_{zul} = (8 \cdots 10) \cdot 10^2$ MPa
Zylinder – Ebene	$p_{max} = 0{,}418 \sqrt{FE/rl}$	r Zylinderradius l tragende Länge	*Stahl, gehärtet:* $p_{zul} = (9 \cdots 10) \cdot 10^2$ MPa
Zylinder – Zylinder	p_{max} wie bei Zylinder – Ebene mit $1/r = 1/r_1 + 1/r_2$	bei unterschiedlichen E-Moduln: $E = 2E_1E_2/(E_1 + E_2)$ (gilt für alle Fälle der HERTZschen Pressung)	

*) spezielle Werte s. Fachliteratur für Maschinenelemente

3.2.3. Biegebeanspruchung

3.2.3.1. Herleitung der Grundgleichung

Erfährt ein Träger Biegebeanspruchung, dann werden dessen Faserschichten auf der einen Trägerseite gedehnt, auf der anderen gestaucht (Bild 80). Dazwischen liegt eine Faserschicht, die ihre ursprüngliche Länge beibehält. Diese *normalspannungsfreie Schicht* (*neutrale Faser*) schneidet jeden Querschnitt in einer Geraden N—N (*Nullinie*).

Es wird angenommen, daß die Querschnitte während des Biegevorgangs eben bleiben und daß das HOOKEsche Gesetz, Gl. (72), Gültigkeit besitzt. Hieraus folgt, daß die Dehnungen und damit auch die Spannungen proportional mit der Entfernung von der Nullinie linear anwachsen,

sofern die Spannungen unter der Proportionalitätsgrenze liegen. Die Herleitung gilt für den Fall, daß die Biegung um eine *Trägheitshauptachse* erfolgt.
Aus der Proportion $\sigma/\sigma_1 = y/e_1$ (Bild 80) folgt:

$$\sigma = (\sigma_1/e_1)\, y = (\sigma_2/e_2)\, y \tag{80}$$

Der Stabquerschnitt sei im Verhältnis zur Stablänge klein, so daß die Schubspannungen vernachlässigt werden können.

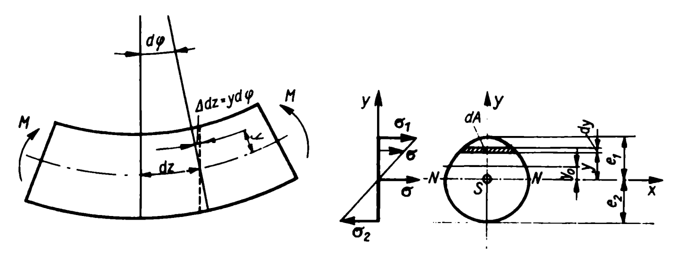


Bild 80. Formänderungen und Spannungen beim Biegeträger

Nach den Gleichgewichtsbedingungen der Statik ergeben sich folgende Beziehungen:

1. In Richtung der Achse z gilt $\int \sigma\, \mathrm{d}A = 0$ (statisches Kräftegleichgewicht in Richtung der Trägerachse). Unter Berücksichtigung von Gl. (80) wird $(\sigma_1/e_1) \int y\, \mathrm{d}A = 0$, also:

$$\int y\, \mathrm{d}A = 0 \tag{81}$$

Da $\int y\, \mathrm{d}A$ das statische Flächenmoment in bezug auf die Nullinie und gleich Null ist, folgt, daß diese Achse durch den *Schwerpunkt* führt; die Nullinie ist somit eine *Schwerachse.*

2. Die in der Gleichgewichtsbedingung $\sum F_y = 0$ (statisches Kräftegleichgewicht senkrecht zur Trägerachse) enthaltenen Schubspannungen τ werden vernachlässigt.

3. Ist M_b das Biegemoment im betrachteten Querschnitt, so wird entsprechend der statischen Momentengleichgewichtsbedingung $M_\mathrm{b} = \int \sigma\, y \mathrm{d}A$, oder mit (80):

$$M_\mathrm{b} = (\sigma_1/e_1) \int y^2\, \mathrm{d}A; \tag{82}$$

$$I_x = \int y^2\, \mathrm{d}A \tag{83}$$

I_x nennt man *axiales* (*äquatoriales*) *Flächenträgheitsmoment*; der Index x weist darauf hin, daß die Bezugsachse hier die x-Achse ist. Mit (83) wird:

$$M_\mathrm{b} = (\sigma_1/e_1)\, I_x = (\sigma/y) I_x \tag{84}$$

woraus die *allgemeine Gleichung des Biegespannungsverlaufs* folgt:

$$\sigma = (M_\mathrm{b}/I_x)\, y \tag{85}$$

Wirkt M_b um die y-Achse, so ergibt sich analog:

$$\sigma = (M_\mathrm{b}/I_y)\, x \tag{86}$$

Die größten Spannungen treten in den Randschichten (bei $y = e_1$ bzw. $y = e_2$) auf:

$$\sigma_1 = (M_\mathrm{b}/I_x)\, e_1, \qquad \sigma_2 = (M_\mathrm{b}/I_x)\, e_2 \tag{87}$$

Bei einfachen Querschnitten sowie standardisierten Profilträgern ist es üblich, die Querschnittskenngrößen I und e zum Widerstandsmoment zusammenzufassen:

$$W_x = I_x/e_y \quad \text{bzw.} \quad W_y = I_y/e_x \tag{88}$$

Bei Querschnitten mit unterschiedlichen Randschichtabständen e vom Schwerpunkt ergeben sich zwei Widerstandsmomente, wobei bei Stahlträgern das kleinste für die Berechnung der maximalen Biegespannung maßgebend ist:

$$\sigma_{\mathrm{b,max}} = M_{\mathrm{b}}/W_{x,\mathrm{min}} \tag{89}$$

3.2.3.2. Flächenmomente

Für Berechnungen von Bauteilen, die auf Biegung, Knickung oder Torsion beansprucht werden, benötigt man Querschnittskennwerte, die unter dem Oberbegriff *Flächenmomente* zusammengefaßt werden können:

— Als *Flächenmoment erster Ordnung* (ersten Grades) bezeichnet man das statische Moment einer Fläche.

— *Flächenmomente zweiter Ordnung* (zweiten Grades) sind:

1. Das *axiale* (*äquatoriale*) *Trägheitsmoment* I_x (bzw. I_y) einer Querschnittsfläche, bezogen auf eine in dieser Ebene liegende beliebige Achse x (bzw. y), ist das Integral (x bzw. y ist der Abstand des Flächenelements $\mathrm{d}A$ von der Bezugsachse, siehe Bild 81):

$$I_x = \int y^2 \,\mathrm{d}A, \qquad I_y = \int x^2 \,\mathrm{d}A \tag{90}$$

2. Das *polare Trägheitsmoment* I_{p} einer Querschnittsfläche, bezogen auf einen in dieser Ebene liegenden beliebigen Punkt *0*, ist das Integral (Bild 81):

$$I_{\mathrm{p}} = \int r^2 \,\mathrm{d}A = \int (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}A = \int x^2 \,\mathrm{d}A + \int y^2 \,\mathrm{d}A = I_x + I_y \tag{91}$$

Das polare Trägheitsmoment ist gleich der Summe der äquatorialen Trägheitsmomente, die auf die durch Null gehenden und aufeinander senkrecht stehenden Achsen (x, y) bezogen sind.

3. Das *Zentrifugalmoment* I_{xy} einer Fläche, bezogen auf ein in dieser Ebene liegendes beliebiges Achsensystem (x, y), ist das Integral (Bild 81):

$$I_{xy} = \int xy \,\mathrm{d}A \tag{92}$$

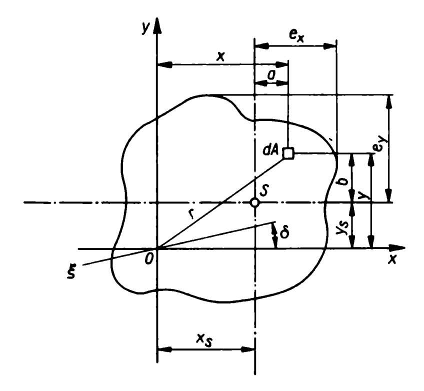


Bild 81. Zur Berechnung der Trägheitsmomente

Während axiale und polare Trägheitsmomente stets positiv sind, können Zentrifugalmomente positiv, negativ oder Null sein. Bezeichnet man mit s_x eine Schwerlinie (Schwerpunktskoordinaten x_{S} und y_{S}), so ist für die zu s_x im Abstand y_{S} parallele Achse x mit $y = y_{\mathrm{S}} + b$ nach Bild 81:

$$I_x = \int y^2 \,\mathrm{d}A = \int (y_{\mathrm{S}} + b)^2 \,\mathrm{d}A = y_{\mathrm{S}}^2 \int \mathrm{d}A + 2y_{\mathrm{S}} \int b \,\mathrm{d}A + \int b^2 \,\mathrm{d}A \tag{93}$$

Da $\int b^2 \,\mathrm{d}A = I_{sx}$ das auf die Schwerlinie s_x bezogene äquatoriale Trägheitsmoment ist und

$\int \mathrm{d}A = A$ sowie $\int b \, \mathrm{d}A = 0$ (statisches Flächenmoment, bezogen auf die Schwerlinie), ergibt sich der *Satz von* STEINER*):

$$I_x = I_{sx} + A y_S^2 \tag{94}$$

Analog:

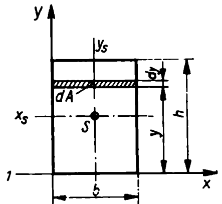
$$I_y = I_{sy} + A x_S^2 \tag{95}$$

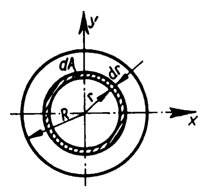
Mit diesen Gleichungen kann eine Umrechnung des Trägheitsmoments von der Schwerachse auf eine beliebige parallele Achse vorgenommen werden und umgekehrt.
Der Satz von STEINER hat für Zentrifugalmomente die Form:

$$I_{xy} = I_{sxy} + x_S y_S A \tag{96}$$

I_{xy} Zentrifugalmoment für beliebige, zueinander rechtwinklige Bezugsachsen x, y; I_{sxy} Zentrifugalmoment für die Schwerachsen s_x, s_y; x_S, y_S Abstände der Bezugsachsen von den Schwerachsen und A Fläche

Das Zentrifugalmoment ist stets Null, wenn eine der Bezugsachsen eine Symmetrieachse ist.





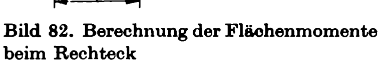


Bild 82. Berechnung der Flächenmomente beim Rechteck

Bild 83. Berechnung der Flächenmomente beim Kreis

Beispiel. Berechnung der Trägheits- und Zentrifugalmomente für Rechteck und Kreis.

Rechteck (Bild 82). Bezogen auf die durch die Grundlinie b gehende Achse ist

$$I_x = \int y^2 \, \mathrm{d}A = \int_0^h y^2 b \, \mathrm{d}y = b\left[y^3/3\right]_0^h = bh^3/3$$

Nach dem Satz von STEINER (94) wird $I_x = I_{sx} + y_S^2 A = I_{sx} + (h/2)^2 A$, wobei $I_{sx} = I_x - h^2 A/4 = bh^3/3 - bh^3/4 = bh^3/12$. Durch Vertauschen von h und b ergibt sich für die Achse y: $I_{sy} = hb^3/12$. Das Zentrifugalmoment, bezogen auf die Achsen s_x, s_y als Hauptachsen, ist $I_{sxy} = 0$. Bezogen auf die Achsen x, y wird $I_{xy} = I_{sxy} + x_S y_S A = (b/2)\,(h/2)\,bh = b^2h^2/4$.

Kreis (Bild 83). Das polare Trägheitsmoment ist $I_p = \int r^2 \, \mathrm{d}A$. Mit $\mathrm{d}A = 2\pi r \, \mathrm{d}r$ wird

$$I_p = \int_0^R r^2 2\pi r \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R r^3 \, \mathrm{d}r = 2\pi\left[r^4/4\right]_0^R = \pi R^4/2$$

Setzt man den Durchmesser ein, so ergibt sich $I_p = \pi d^4/32$. Aus $I = I_x = I_y = I_p/2$ wird das äquatoriale Trägheitsmoment $I = I_x = I_y = \pi d^4/64$.
Zahlenwerte für Trägheits- und Widerstandsmomente in Abhängigkeit vom Durchmesser sind in Tabelle 11 angegeben.
Für den *Kreisring* mit den Durchmessern D und d gilt:

$$I_p = \pi(D^4 - d^4)/32 \quad \text{bzw.} \quad I = \pi(D^4 - d^4)/64$$

Anwendung: Trägheitsmomente zusammengesetzter Flächen

Zunächst wird der Flächenschwerpunkt bestimmt**). Danach berechnet man die Trägheitsmomente für eine Schwerpunktachse additiv aus den Trägheitsmomenten der Einzelflächen, bezogen auf ihre Schwerpunktachsen, und den Produkten der Flächen mit den Quadraten der Abstände der Schwerpunktachsen. In bestimmten Fällen kann ein anderer Weg rationeller sein, siehe z. B. Berechnung von I_{sx} im Beispiel.

*) s. auch Kinetik starrer Körper, 5.3.
**) s. Statik starrer Körper, Tafel 2

Tabelle 11. Trägheits- und Widerstandsmomente kreisförmiger Querschnitte. Die Werte für das polare Trägheits- und Widerstandsmoment erhält man durch Multiplikation mit 2. d in mm (cm bzw. m), I in mm⁴ (cm⁴ bzw. m⁴) und W in mm³ (cm³ bzw. m³)

d	$I = \pi d^4/64$	$W = \pi d^3/32$	d	$I = \pi d^4/64$	$W = \pi d^3/32$	d	$I = \pi d^4/64$	$W = \pi d^3/32$
1	0,0491	0,0982	51	332 086	13 023	101	5 108 055	101 150
2	0,7854	0,7854	52	358 908	13 804	102	5 313 378	104 184
3	3,976	2,651	53	387 323	14 616	103	5 524 830	107 278
4	12,57	6,283	54	417 393	15 459	104	5 742 532	110 433
5	30,68	12,27	55	449 180	16 334	105	5 966 604	113 650
6	63,62	21,21	56	482 750	17 241	106	6 197 171	116 928
7	117,9	33,67	57	518 166	18 181	107	6 434 357	120 268
8	201,1	50,27	58	555 497	19 155	108	6 678 287	123 672
9	322,1	71,57	59	594 810	20 163	109	6 929 087	127 139
10	490,9	98,17	60	636 172	21 206	110	7 186 886	130 671
11	718,7	130,7	61	679 651	22 284	111	7 451 813	134 267
12	1 018	169,6	62	725 332	23 398	112	7 723 997	137 929
13	1 402	215,7	63	773 272	24 548	113	8 003 571	141 656
14	1 886	269,4	64	823 550	25 736	114	8 290 666	145 450
15	2 485	331,3	65	876 240	26 961	115	8 585 417	149 312
16	3 217	402,1	66	931 420	28 225	116	8 887 958	153 241
17	4 100	482,3	67	989 166	29 527	117	9 198 425	157 238
18	5 153	572,6	68	1 049 556	30 869	118	9 516 956	161 304
19	6 397	673,4	69	1 112 660	32 251	119	9 843 689	165 440
20	7 854	785,4	70	1 178 588	33 674	120	10 178 763	169 646
21	9 547	909,2	71	1 247 393	35 138	121	10 522 320	173 923
22	11 499	1 045	72	1 319 167	36 644	122	10 874 501	178 271
23	13 737	1 194	73	1 393 995	38 192	123	11 235 450	182 690
24	16 286	1 357	74	1 471 963	39 783	124	11 605 311	187 182
25	19 175	1 534	75	1 553 156	41 417	125	11 984 229	191 748
26	22 432	1 726	76	1 637 662	43 096	126	12 372 350	196 387
27	26 087	1 932	77	1 725 571	44 820	127	12 769 824	201 100
28	30 172	2 155	78	1 816 972	46 589	128	13 176 799	205 887
29	34 719	2 394	79	1 911 967	48 404	129	13 593 424	210 751
30	39 761	2 651	80	2 010 619	50 265	130	14 019 852	215 690
31	45 333	2 925	81	2 113 051	52 174	131	14 456 235	220 706
32	51 472	3 217	82	2 219 347	54 130	132	14 902 727	225 799
33	58 214	3 528	83	2 329 605	56 135	133	15 359 483	230 970
34	65 597	3 859	84	2 443 920	58 189	134	15 826 658	236 219
35	73 662	4 209	85	2 562 392	60 292	135	16 204 411	241 547
36	82 448	4 580	86	2 685 120	62 445	136	16 792 899	246 954
37	91 998	4 973	87	2 812 205	64 648	137	17 292 282	252 442
38	102 354	5 387	88	2 943 748	66 903	138	17 802 721	258 010
39	113 561	5 824	89	3 079 853	69 210	139	18 324 378	263 660
40	125 664	6 283	90	3 220 623	71 569	140	18 857 416	269 392
41	138 709	6 766	91	3 366 165	73 982	141	19 401 999	275 206
42	152 745	7 274	92	3 516 586	76 448	142	19 958 294	281 103
43	167 820	7 806	93	3 671 992	78 968	143	20 526 466	287 083
44	183 984	8 363	94	3 832 492	81 542	144	21 106 684	293 148
45	201 289	8 946	95	3 998 198	84 173	145	21 699 116	299 298
46	219 787	9 556	96	4 169 220	86 859	146	22 303 933	305 533
47	239 531	10 193	97	4 345 671	89 601	147	22 921 307	311 855
48	260 576	10 857	98	4 527 664	92 401	148	23 551 409	318 262
49	282 979	11 550	99	4 715 315	95 259	149	24 194 414	324 757
50	306 796	12 272	100	4 908 738	98 175	150	24 850 496	331 340

Beispiel 1. Für den Querschnitt nach Bild 84 ergibt sich mit Hilfe der Tafel 2 der Schwerpunktabstand von der Achse x:

$$y_S = (4\cdot 40\cdot 20 + 4\cdot 40\cdot 20 + 4\cdot 52\cdot 2)/(4\cdot 40 + 4\cdot 40 + 4\cdot 52)\ \text{mm} = 12{,}9\ \text{mm}$$

$$x_S = 30\ \text{mm (aus Symmetriegründen)}$$

Das Trägheitsmoment I_x ergibt sich aus $I_x = 2(4\cdot 40^3/3)\ \text{mm}^4 + (52\cdot 4^3/3)\ \text{mm}^4 = 172\cdot 10^3\ \text{mm}^4$. Für die Schwerachse ergibt sich nach Umstellung von (94): $I_{sx} = I_x - y_S^2A = I_x - y_S^2A = (172\cdot 10^3 - 12{,}9^2\cdot 528)\ \text{mm}^4 = 84\cdot 10^3\ \text{mm}^4$. Das Trägheitsmoment I_{sy} berechnet sich aus $I_{sy} = (4\cdot 52^3/12)\ \text{mm}^4 + 2[(40\cdot 4^3/12) + 40\cdot 4\cdot 28^2]\ \text{mm}^4 = 298\cdot 10^3\ \text{mm}^4$ oder bei Ansatz des Flächenausschnitts als negative Fläche aus $I_{sy} = (40\cdot 60^3/12)\ \text{mm}^4 - (36\cdot 52^3/12)\ \text{mm}^4 = 298\cdot 10^3\ \text{mm}^4$.

Beispiel 2. Für den Querschnitt nach Bild 85 bestimmt man das Trägheitsmoment für die Symmetrieachse x aus den Trägheitsmomenten von zwei positiven und vier negativen Rechtecken:

$$I_x = [(15\cdot 25^3/12) + (6\cdot 10^3/12) - (2{,}5\cdot 12^3/12) - (11\cdot 22^3/12) - (5\cdot 8^3/12) - (1\cdot 5^3/12)]\cdot 10^4\ \text{mm}^4 = 97\cdot 10^6\ \text{mm}^4.$$

Beispiel 3. Die Trägheitsmomente für die x- und die y-Achse des aus einem Stegblech 460 mm × 10 mm, vier Gurtplatten 220 mm × 11 mm und aus vier Winkelstählen 90 mm × 90 mm × 11 mm bestehenden Trägers errechnen sich, wenn man die Nietlöcher von 20 mm Durchmesser in den Gurtplatten abzieht (Bild 86), aus:

$$Ix = [(1\cdot 46^3/12) + 4\cdot 138 + 4\cdot 18{,}7\cdot 20{,}38^2 + 2(22-4)\ 2{,}2^3/12 + 2(22-4)\cdot 2{,}2\cdot 24{,}1^2]\cdot 10^4\ \text{mm}^4 = 857{,}5\cdot 10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \{(46\cdot 1^3/12) + 4\cdot 138 + 4\cdot 18{,}7\cdot 3{,}12^2 + (4{,}4\cdot 22^3/12) - 4[(3{,}3\cdot 2^3/12) + 3{,}3\cdot 2\cdot 5{,}5^2\}\cdot 10^4\ \text{mm}^4 = 43{,}8\cdot 10^6\ \text{mm}^4$$

Für L 90 mm × 90 mm × 11 mm ist $I_{sx} = I_{sy} = 1{,}38\cdot 10^6\ \text{mm}^4$, $A = 1{,}87\cdot 10^3\ \text{mm}^2$ und $e = 26{,}2$ mm nach den Profiltabellen für Winkelstahl[1]).

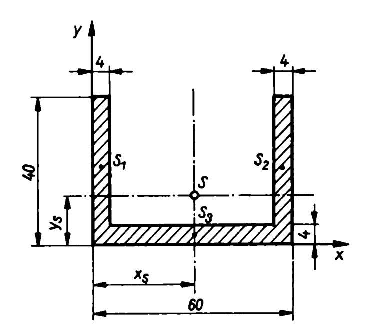


Bild 84. Berechnung des Schwerpunktabstands und der Trägheitsmomente einer zusammengesetzten Fläche

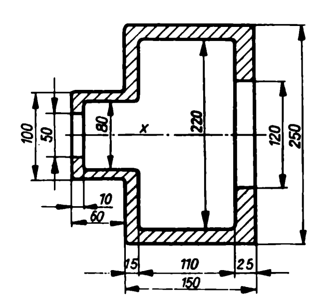


Bild 85. Durchbrochener Kastenquerschnitt

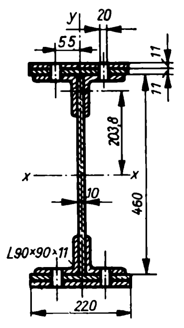


Bild 86. Zusammengesetzter Biegeträger

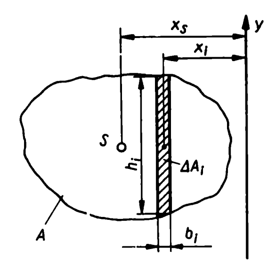


Bild 87. Näherungsweise Berechnung des Trägheitsmoments

Anwendung: Trägheitsmomente beliebig begrenzter Flächen

Ist die genaue Berechnung der Trägheitsmomente bei beliebig begrenzten Flächen zu aufwendig oder zu schwierig, dann kann eine näherungsweise Berechnung erfolgen. Soll z. B. für den Querschnitt nach Bild 87 das Trägheitsmoment für die y-Achse bestimmt werden, so teilt man die Fläche A in eine Anzahl schmaler, zu y paralleler Streifen ΔA_i, deren Schwerpunktabstände von y die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ haben. Aus der Definitionsgleichung $I_y = \int x^2 \, \mathrm{d}A$ ergibt sich dann $I_y \approx \sum x_i^2 \, \Delta A_i$, wobei die Trägheitsmomente der als Rechtecke angenäherten schmalen Streifen in bezug auf ihre Schwerpunktachse vernachlässigt werden können (siehe Satz von STEINER).
Die Rechnung kann tabellarisch bis zur gewünschten Genauigkeit ausgeführt werden, wobei gleichzeitig der Schwerpunkt mitbestimmt wird. Empfohlener Tabellenaufbau:

Teilfläche i	Breite b_i	Höhe h_i	$\Delta A_i = b_i h_i$	x_i	$x_i \, \Delta A_i$	$x_i^2 \, \Delta A_i$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			$\Sigma = A$		$\Sigma = S$	$\Sigma = I_y$

$$I_y \approx \sum x_i^2 A_i, \qquad x_S \approx S/A, \qquad I_{yS} \approx I_y - x_S^2 A \tag{97}$$

Zur näherungsweisen Ermittlung der Querschnittskennwerte können auch zeichnerische Verfahren zur Anwendung gelangen [8]. Flächenträgheits- und Widerstandsmomente verschiedener Querschnittsflächen sind der Tafel 5 zu entnehmen.

3.2.3.3. Konjugierte Achsen und Hauptachsen

Man kann einem Querschnitt beliebig viele Achsen zuordnen und die darauf bezogenen Trägheitsmomente berechnen. Für Biegefestigkeitsberechnungen haben jedoch vorrangig die Schwerachsen Bedeutung, für die die Trägheitsmomente Extremwerte aufweisen.
Zwei Achsen, für die das Zentrifugalmoment Null ist, heißen *zugeordnete* oder *konjugierte Achsen*. Stehen diese senkrecht aufeinander, so heißen sie *Hauptachsen*. Auf die Hauptachsen beziehen sich das größte und das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment. Diese Momente werden *Hauptträgheitsmomente* genannt und meist mit I_{I} und I_{II} bezeichnet. Kennt man für ein beliebiges rechtwinkliges Achsenpaar (x, y) die äquatorialen Trägheitsmomente und das Zentrifugalmoment, so findet man für eine unter dem Winkel δ gegen die x-Achse geneigte Achse das äquatoriale Trägheitsmoment:

$$I_\xi = I_x \cos^2 \delta + I_y \sin^2 \delta - I_{xy} \sin 2\delta \tag{98}$$

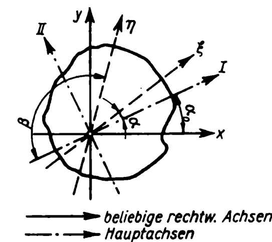


Bild 88. Berechnung der Flächenmomente bei Drehung der Achsen

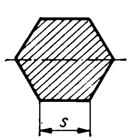
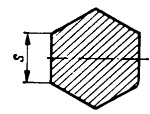
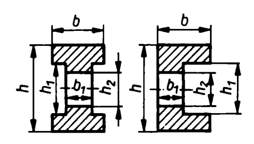
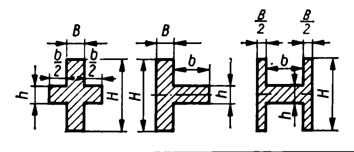
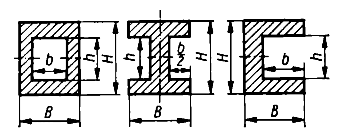
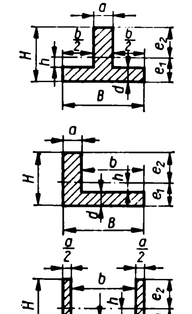
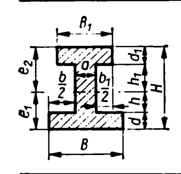
Da für jeden Punkt einer Fläche ein Hauptachsenpaar existiert, ergibt sich für eine unter dem Winkel α gegen die Achse I geneigte Achse ξ das Trägheitsmoment (Bild 88):

$$I_\xi = I_{\mathrm{I}} \cos^2 \alpha + I_{\mathrm{II}} \sin^2 \alpha \tag{99}$$

Tafel 5. Flächenträgheits- und Widerstandsmomente sowie Trägheitsradien verschiedener Querschnitte. Die Gleichungen beziehen sich auf die eingezeichneten Achsen

Querschnitt	Trägheitsmoment I, Widerstandsmoment W, Trägheitsradius i
	$I = bh^3/12$ $\quad W = bh^2/6$ $i = 0{,}29h$ $\quad i_{\min} = 0{,}29b$
	$I = h^4/12$ $\quad W = h^3/6$ $i = 0{,}29h$
	$I = ah^3/36$ $\quad W = ah^2/24$ $e = 2h/3$ $\quad i = 0{,}236h$
	$I = (6b^2 + 6bb_1 + b_1^2)h^3/36(2b + b_1)$ $W = (6b^2 + 6bb_1 + b_1^2)h^2/12(3b + 2b_1)$ $e = (3b + 2b_1)h/3(2b + b_1)$
	$I = \pi d^4/64$ $\quad W = \pi d^3/32 \approx 0{,}1d^3$ $i = 0{,}25d$
	$I = \pi(D^4 - d^4)/64$ $\quad W = \pi(D^4 - d^4)/32D$ $i = \sqrt{D^2 + d^2}/4$
	$I = \pi a^3b/4$ $\quad W = \pi a^2b/4$ $i = 0{,}5a$ $\quad i_{\min} = 0{,}5b$
	$I = \pi(a^3b - a_1^3b_1)/4 \approx \pi a^2(a + 3b)d/4$ $W \approx \pi a(a + 3b)\, d/4$

Tafel 5 (Fortsetzung)

Querschnitt	Trägheitsmoment I, Widerstandsmoment W, Trägheitsradius i
	$I = 5\sqrt{3}s^4/16 = 0{,}5413 s^4;\quad i = 0{,}456 s$ $W = 5s^3/8 = 0{,}625 s^3$
	$I = 5\sqrt{3}s^4/16 = 0{,}5413 s^4;\quad i = 0{,}456 s$ $W = 0{,}5413 s^3$
	$I = [b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)]/12$ $W = [b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)]/6h$
	$I = (BH^3 + bh^3)/12$ $W = (BH^3 + bh^3)/6H$
	$I = (BH^3 - bh^3)/12$ $W = (BH^3 - bh^3)/6H$
	$I = (Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3)/3$ $e_1 = (aH^2 + bd^2)/2(aH + bd);\quad e_2 = H - e_1$
	$I = (Be_1^3 - bh^3 + B_1e_2^3 - b_1h_1^3)/3$ $e_1 = [aH^2 + bd^2 + b_1d_1(2H - d_1)]/2(aH + bd + b_1d_1)$ $e_2 = H - e_1$

Sind für ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz (x, y) die Momente I_x, I_y und I_{xy} bekannt, so ergibt sich der Winkel α_0, um den das Achsenkreuz gedreht werden muß, damit es die Lage der Hauptachsen annimmt, aus:

$$\tan 2\alpha_0 = 2I_{xy}/(I_y - I_x) \tag{100}$$

Die Hauptträgheitsmomente sind:

$$I_{\mathrm{I,II}} = (I_x + I_y)/2 \pm \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}/2 \tag{101}$$

Jede Symmetrieachse einer Fläche ist auch eine *Trägheitshauptachse*. Sind die Hauptträgheitsmomente I_{I} und I_{II} bekannt, so ergibt sich für eine unter dem Winkel α gegen die Achse I geneigte Achse ξ die zugehörige konjugierte Achse η aus der Beziehung (Bild 88):

$$\tan \alpha \tan \beta = I_{\mathrm{I}}/I_{\mathrm{II}} \tag{102}$$

Für die senkrecht aufeinanderstehenden Hauptachsen ist das Zentrifugalmoment Null. Die Lage der Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente können nach den Gln. (101) und (102) oder mit Hilfe des Trägheitskreises nach MOHR-LAND bestimmt werden.

3.2.3.4. Trägheitskreis nach Mohr-Land

Zeichnerisches Verfahren zur Ermittlung der Hauptträgheitsmomente:

Man trägt $I_x + I_y = I_p$ von 0 aus auf der y-Achse auf (Bild 89a) und errichtet im Teilpunkt U eine Senkrechte $\overline{UT} = I_{xy}$ (für positives I_{xy} nach rechts und für negatives I_{xy} nach links). Über $\overline{0V}$ als Durchmesser zeichnet man den *Trägheitskreis*. Der Durchmesser durch den Trägheitspunkt T und den Mittelpunkt M schneidet den Kreis in A und B. Die Geraden $\overline{A0}$ und $\overline{0B}$ sind Hauptachsen; es ist $\overline{AT} = I_{max}$ und $\overline{BT} = I_{min}$. Zur beliebigen Achse ξ (Bild 89b) findet man die konjugierte Achse η, indem man die Gerade $\overline{CT}$ zum Schnitt mit dem Kreis in D bringt; es wird dann $\overline{D0} = \eta$. Für die zu ξ senkrechte Achse η' erhält man das Zentrifugalmoment durch die Senkrechte $\overline{TF}$ auf dem Durchmesser $\overline{CE}$; es ist ferner $\overline{EF} = I_\eta$ und $\overline{CF} = I_\xi$.

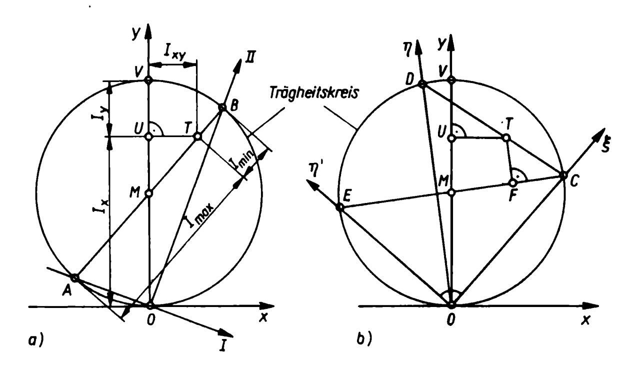


Bild 89. Trägheitskreis nach MOHR-LAND. a) Bestimmung der Hauptachsen; b) Ermittlung der konjugierten Achsen

3.2.3.5. Rechnerische Bestimmung der Lagerkräfte, Querkräfte und Biegemomente

Lagerkräfte:

Wenn die Trägerlasten bekannt sind, können die Lagerkräfte mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_y = 0$ und $\sum M = 0$ ermittelt werden*). Für Biegeträger auf zwei oder mehr

*) s. Statik starrer Körper



Lagern ist die Kenntnis der Lagerkräfte unerläßliche Voraussetzung für die Ermittlung der *Schnittreaktionen.*

Querkräfte:

Querkräfte sind innere Kräfte, die rechtwinklig zur Trägerachse wirken. Sie werden ermittelt, indem man den Träger an der zu untersuchenden Stelle schneidet, die Querkraft als Schnittkraft anbringt und die statische Gleichgewichtsbedingung $\sum F_y = 0$ für die am Trägerabschnitt verbleibenden Kräfte einschließlich der Querkraft ansetzt. Für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung z von F_A ist (Bild 90), sofern man den linken Trägerteil betrachtet:

$$F_Q = F_A - F_3 - F_1$$

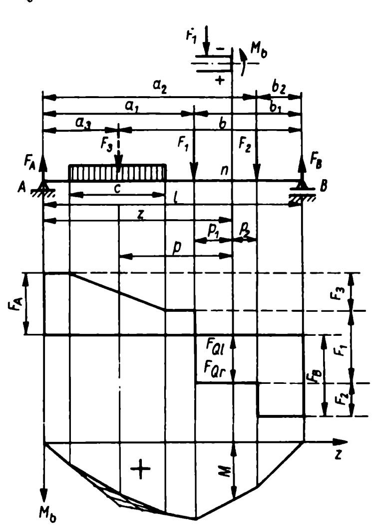


Bild 90. Träger auf zwei Stützen (Einzelkräfte F_1 und F_2, Streckenlast F_3)

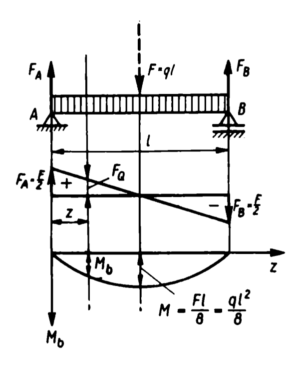


Bild 91. Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Streckenlast

Querkräfte, die am linken Trägerteil nach oben oder am rechten nach unten gerichtet sind, erhalten ein positives Vorzeichen oder umgekehrt.

Trägt man von einer Nullinie aus die an jeder Stelle des Trägers auftretenden Querkräfte F_Q in einem bestimmten Maßstab als Ordinaten auf, so ergibt sich die Querkraftlinie. Sie verläuft bei Einzellasten parallel zur Nullinie; bei gleichmäßig verteilten Lasten ist sie eine zur Nullinie geneigte Gerade.

Nach Bild 91 ist für den Träger mit gleichmäßig verteilter Last in der Entfernung z von F_A die Querkraft $F_Q = F_A - qz = ql/2 - qz$, d. h., der Querkraftverlauf ist linear. Die Querkraft hat für $z = 0$ die Größe $F/2$ und ist in der Mitte ($z = l/2$) gleich Null.

Das Querkraftdiagramm ermöglicht auch Aussagen hinsichtlich der Biegemomente und kann auch ohne weitere Rechnungen mit allen äußeren Kräften gezeichnet werden.

Biegemomente:

Biegemomente sind innere Momente, die um eine Trägheitshauptachse der Querschnittsfläche wirken. Sie werden ermittelt, indem man den Träger an der zu untersuchenden Stelle schneidet, das Biegemoment anträgt (Bild 90) und die statische Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ für alle am Trägerabschnitt verbleibenden Kräfte einschließlich des Biegemoments ansetzt.

So ergibt sich für die Stelle n des Trägers nach Bild 90:

$$M_b = F_A z - F_3 p - F_1 p_1$$

Das Auftragen des Biegemoments über der z-Achse ergibt die Momentenlinie. Es gilt die Vereinbarung, daß die Biegemomente nach der Seite aufgetragen werden, auf der die Zugfaserschichten des Trägers liegen.

Im Bereich zwischen Einzelkräften und außerhalb von Streckenlasten ist die Momentenlinie eine Gerade (siehe obige Gleichung), im Bereich konstanter Streckenlasten eine Parabel. Für die gleichmäßig verteilte Last nach Bild 91 ist das Biegemoment in der Entfernung z von F_A:

$$M_b = F_A z - qz \cdot z/2 = (ql/2)\, z - qz^2/2$$

Die erste Ableitung der Momentenfunktion lautet:

$$dM_b/dz = ql/2 - qz = F_Q \tag{103}$$

Sie führt also zur *Querkraft*. Daraus folgt die wichtige Aussage:

Die Biegemomentenfunktion weist an den Stellen Extremwerte auf, an denen die Querkraft Null ist bzw. ihr Vorzeichen wechselt.

Nach Bild 91 ergibt sich aus $F_Q = ql/2 - qz = 0$ die Stelle des größten Biegemoments: $z = l/2$. Wird dieser Wert in die Biegemomentengleichung eingesetzt, dann erhält man:

$$M_{b,max} = (ql/2)\, l/2 - q(l^2/4)/2 = ql^2/8 \tag{104}$$

3.2.3.6. Zeichnerische Bestimmung des Biegemomentenverlaufs

Für Biegeträger mit senkrecht zur Trägerachse wirkenden Lasten werden die Lagerkräfte zeichnerisch mit Hilfe des *Krafteck-Seileck-Verfahrens* gefunden. Das Querkraftdiagramm kann dann durch Parallelprojektion des Kräftezugs auf die Kraftwirkungslinien im *Lageplan* entwickelt werden.
Das Biegemomentendiagramm ist bereits in der *Seileckfigur* enthalten, da die Seileckordinaten den Werten der Biegemomente proportional sind. Der Zusammenhang ist in Bild 92 dargestellt.

An der beliebigen Stelle n zwischen F_1 und F_2 ist das Biegemoment: $M_b = F_B z - F_2 p_2$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke bce und $0F_BF_2$ folgt $\overline{ce}/z = F_B/H$, also $F_B z = H \cdot \overline{ce}$. Analog folgt $F_2 p_2 = H \cdot \overline{de}$. Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man $M_b = F_B z - F_2 p_2 = H(\overline{ce} - \overline{de}) = Hy$, d. h., das Biegemoment an einer beliebigen Stelle des Trägers ist gleich dem Produkt aus der Ordinate y des Seilecks und der Polweite H unter Berücksichtigung des Längenmaßstabs m_l (in mm/mm) und des Kräftemaßstabs m_F (in N/mm).

Beispiel 1. Beim Berechnen des in Bild 92 gegebenen Trägers ergibt sich für die Stelle n die Querkraft $F_Q = F_B - F_2$. Es ist: $F_B = (F_3 a_3 + F_1 a_1 + F_2 a_2)/l = (2000 \cdot 2500 + 1500 \cdot 5000 + 1200 \cdot 6500)$ N/8000 = 2537,5 N.
Damit wird $F_Q = 2537{,}5$ N $- 1200$ N $= 1337{,}5$ N. Mit diesem errechneten Wert stimmt der gemessene gut überein.
Für die Stelle n wird ferner die Seileckordinate gemessen ($y = 6$ mm), während der Kräfteplan die Polweite $H = 14$ mm liefert. Damit ergibt sich das Biegemoment:
$M_b = yHm_l m_F = 6$ mm $\cdot$ 14 mm $\cdot$ (250 mm/mm) $\cdot$ (250 N/mm) $= 5{,}25 \cdot 10^6$ N $\cdot$ mm $= 5250$ N $\cdot$ m. Die rein rechnerische Lösung würde den Wert $M_b = F_B z - F_2 p_2 = (2537{,}5 \cdot 2500 - 1200 \cdot 1000)$ N $\cdot$ mm $= 5144$ N $\cdot$ m liefern. Der zeichnerisch gefundene Wert weicht vom errechneten um etwa 2% ab, d. h., es ist gute Übereinstimmung vorhanden.
Aus dem Seileck folgt ferner:

$M_{max} = y_{max} H m_l m_F = 6{,}5$ mm $\cdot$ 14 mm $\cdot$ (250 mm/mm) $\cdot$ (250 N/mm) $= 5688$ N $\cdot$ m.

Beispiel 2. Entwurfsberechnung. Welches I-Normalprofil muß man für einen Freiträger wählen, wenn eine Last von 6,5 kN einmal am Ende und das andere Mal gleichmäßig verteilt über die ganze Länge von 2 m angreift ($\sigma_{b,zul} = 140$ MPa)?

a) Für den Fall Last am Trägerende ergibt sich das maximale Biegemoment $M_b = Fl = 6500$ N $\cdot$ 2000 mm $= 13 \cdot 10^6$ N $\cdot$ mm $= 13 \cdot 10^3$ N $\cdot$ m. $W_{erf} = M_b/\sigma_{b,zul} = (13 \cdot 10^6/140)$ mm³ $= 93 \cdot 10^3$ mm³.
Gewählt wird nach dem Standard[1]) I 16 mit $W = 117 \cdot 10^3$ mm³, so daß $\sigma_{b\,vorh} = M_b/W = (13 \cdot 10^6/117 \cdot 10^3)$ N/mm² $= 111$ MPa ist.

b) Bei gleichmäßig verteilter Last ist an der Einspannstelle: $M_b = Fl/2 = 6500$ N $\cdot$ 2000 mm/2 $= 6{,}5 \times 10^6$ N $\cdot$ mm $= 6500$ N $\cdot$ m. $W_{erf} = M_b/\sigma_{b,zul} = 6{,}5 \cdot 10^6$ N $\cdot$ mm/(140 N/mm²) $= 46{,}4 \cdot 10^3$ mm³. Gewählt wird nach dem Standard[1]) I 12 mit $W = 54{,}7 \cdot 10^3$ mm³, so daß $\sigma_{b,vorh} = M_b/W = 6{,}5 \cdot 10^6$ N $\cdot$ mm/54,7 $\cdot$ 10³ mm³ $= 119$ MPa. Aus der entsprechenden Profiltabelle ist ersichtlich, daß die Masse von 1 m Träger 11,2 kg bzw. sein Gewicht 110 N ist, so daß die Gesamtbelastung 6500 N + 2 $\cdot$ 110 N = 6720 N

beträgt. Somit wird $\sigma_{b,vorh} = M_b/W = 6{,}72 \cdot 10^6\ \mathrm{N \cdot mm}/54{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3 = 123\ \mathrm{MPa}$. Man erkennt, daß das Trägergewicht nur unbedeutenden Einfluß hat und daher in der Praxis meist unberücksichtigt bleiben kann.

Beispiel 3. Welches I-Profil ist für den Belastungsfall nach Bild 93 zu wählen, wenn $\sigma_{b,zul} = 120$ MPa betragen soll? Die Lagerkräfte errechnen sich aus:

$F_A = 24 \cdot 10^3 \cdot 2{,}2\ \mathrm{N}/3{,}4 = 15{,}53\ \mathrm{kN}$; $F_B = 24 \cdot 10^3\ \mathrm{N} - 15{,}53 \cdot 10^3\ \mathrm{N} = 8{,}47\ \mathrm{kN}$. Das größte Biegemoment tritt in der Entfernung z von F_A auf. Für die Berechnung gilt $F_A - qz = 0$; also $q = 24 \cdot 10^3\ \mathrm{N}/2{,}4\ \mathrm{m} = 10^4\ \mathrm{N/m}$; $z = F_A/q = 15{,}53 \cdot 10^3\ \mathrm{N}/(10^4\ \mathrm{N/m}) = 1{,}553\ \mathrm{m}$. Das maximale Moment wird $M_{max} = F_A z - qz^2/2 = (15{,}53 \cdot 1{,}553 - 10 \cdot 1{,}553^2/2) \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot m} = 12{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot m}$ und damit $W_{erf} = M_b/\sigma_{b,zul} = (12{,}1 \cdot 10^6/120)\ \mathrm{mm}^3 \approx 10^5\ \mathrm{mm}^3$. Gewählt wird I 16 [3]) mit $W = 117 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3$. Zeichnerisch findet man das maximale Moment, indem man für die Einzellast F das fiktive Moment $F_A \cdot 1200\ \mathrm{mm} = 15{,}53 \cdot 10^3\ \mathrm{N} \times 1200\ \mathrm{mm} = 18{,}64 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot m}$ errechnet, die dreieckförmige Momentenfläche zeichnet und unter der gleichmäßig verteilten Last die Parabel konstruiert.

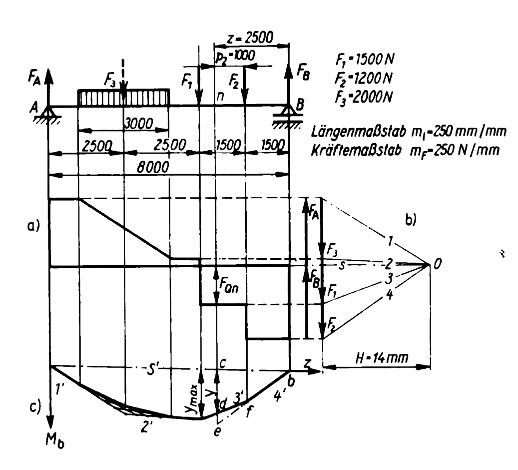


Bild 92. Zeichnerische Bestimmung der Lagerkräfte, Querkräfte und Biegemomente

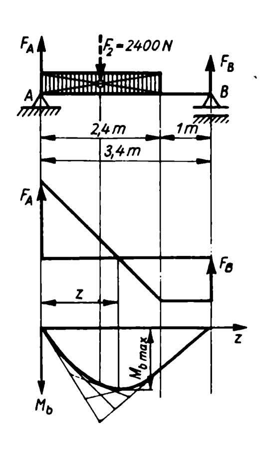


Bild 93. Träger mit Teilstreckenlast

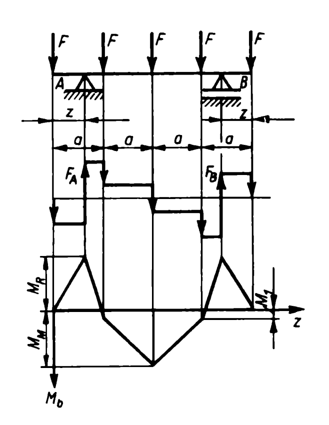


Bild 94. Träger bei Belastung mit fünf gleich großen Kräften

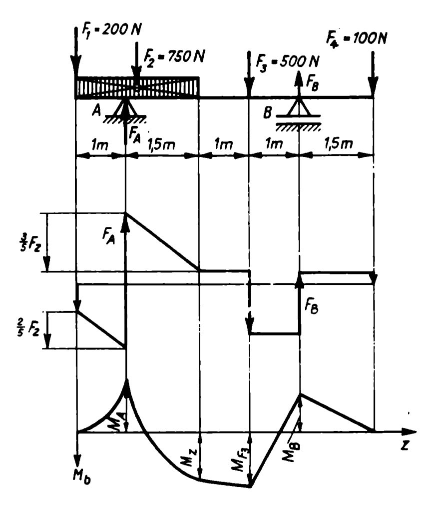


Bild 95. Doppelseitiger Kragträger mit Einzel- und Streckenlasten

Beispiel 4. Fünf Lasten F, die in der gleichen Entfernung a voneinander angeordnet sind, belasten einen Träger (Bild 94). In welcher Entfernung z von den letzten Lasten müssen die Lager angeordnet werden, damit der Träger ein möglichst kleines Profil bekommt?

Ordnet man die Lager an den Trägerenden an, so wird der Träger nur durch gleichsinnige Biegemomente beansprucht. Werden die Lager nach innen gerückt, entsteht jeweils ein rückbiegendes Moment M_R; das Mittenmoment M_M wird kleiner. Die günstigste Stelle für die Lager ergibt sich, wenn die Momente an dieser entgegengesetzt und betragsmäßig gleich dem Mittenmoment sind, also $M_R = -M_M$. Nun ist $M_R = Fz$, und mit $F_A = 2{,}5F$ gilt $M_M = F \cdot 2l - 2{,}5F(2l - z) + Fl$. Durch Gleichsetzen erhält man daraus $z = 0{,}571l$. Somit wird $M_R = -M_M = 0{,}571Fl$ und $M_1 = -0{,}0725Fl$. Würden die Lager am Trägerende liegen, wäre $M_M = 2Fl$, also wesentlich größer als oben.

Beispiel 5. Für den doppelseitigen Kragträger (Bild 95) sollen das größte Biegemoment bestimmt und die Querkraft- und Momentenlinie gezeichnet werden.

Lagerkräfte: Aus $F_A \cdot 3{,}5\,\text{m} - F_1 \cdot 4{,}5\,\text{m} - F_2 \cdot 3{,}25\,\text{m} - F_3 \cdot 1\,\text{m} + F_4 \cdot 1{,}5\,\text{m} = 0$ ergibt sich $F_A = 1080\,\text{N}$. $F_B = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_A = 470\,\text{N}$.
Nach der Querkraftlinie ergeben sich *maximale Momente* bei F_A, F_3 und F_B. Es ist mit $q = 750\,\text{N}/2{,}5\,\text{m} = 300\,\text{N/m}$: $M_A = -F_1 \cdot 1\,\text{m} - q \cdot 1\,\text{m} \cdot 1\,\text{m}/2 = -350\,\text{N} \cdot \text{m}$; $M_{F_3} = F_B \cdot 1\,\text{m} - F_4 \cdot 2{,}5\,\text{m} = +220\,\text{N} \cdot \text{m}$. $M_B = -F_4 \cdot 1{,}5\,\text{m} = -150\,\text{N} \cdot \text{m}$. Ferner ist $M_z = F_A \cdot 1{,}5\,\text{m} - F_1 \cdot 2{,}5\,\text{m} - F_2 \times 1{,}25\,\text{m} = 182\,\text{N} \cdot \text{m}$.

3.2.3.7. Träger mit konstanter Biegebeanspruchung

Unter einem Träger konstanter Biegebeanspruchung wird ein auf Biegung beanspruchter Träger verstanden, dessen sämtliche Querschnitte die gleiche Randspannung $\sigma_b = M_b/W$ aufweisen (Idealform).
Aus Tafel 6 sind Formen, Maße und Berechnungsformeln einiger solcher Träger ersichtlich.

Tafel 6. Trägerformen gleicher Biegebeanspruchung

	Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitt	Begrenzung des Längsschnitts	Formeln zur Berechnung der Querschnittsabmessungen
F greift am Ende des Trägers an		Rechteck mit b = konst., $y = f(z)$ (Konsolträger)	*obere:* Gerade *untere:* quadratische Parabel	$y = h\sqrt{z/l} = \sqrt{6Fz/b\sigma_{zul}}$ $h = \sqrt{6Fl/b\sigma_{zul}}$
		Rechteck mit h = konst., $y = f(z)$ (Dreieckfeder)	Gerade	$y = bz/l = 6Fz/h^2\sigma_{zul}$ $b = 6Fl/h^2\sigma_{zul}$ *Durchbiegung in A:* $f = 6Fl^3/Fbh^3$
		Kreis	kubische Parabel	$y = d\sqrt{z/l} = \sqrt[3]{32Fz/\pi\sigma_{zul}}$ $d = \sqrt{32Fl/\pi\sigma_{zul}}$ *Durchbiegung in A:* $f = (3Fl^3/5E)\,(64/\pi d^4)$
F ist gleichmäßig über den Träger verteilt		b = konst., $y = f(z)$	Gerade	$y = hz/l = \sqrt{3Fz/bl\sigma_{zul}}$ $h = \sqrt{3Fl/b\sigma_{zul}}$

Beispiel. Hat ein Freiträger nach Bild 96 rechteckigen Querschnitt und konstante Höhe h, so wird bei Einzellast an der Spitze $M_b(z) = Fz$; $W_z = yh^2/6$, also $M_b(z) = (yh^2/6)\,\sigma_{b,zul}$. An der Einspannstelle ist $M_b = Fl = (bh^2/6)\,\sigma_{b,zul}$. Bildet man unter Berücksichtigung von $M_b(z) = Fz$ das Verhältnis $M_b(z)/M_b$, dann ergibt sich $z/l = y/b$. Aus dieser Proportion geht hervor, daß die Begrenzungslinie eine Gerade (die Draufsicht des Trägers ein Dreieck) sein muß.

Sind die Träger gleicher Biegebeanspruchung durch Kurven begrenzt, so wählt man für die praktische Ausführung eine durch Tangenten an die Kurve gefundene oder abgestufte Form (zylindrische oder kegelige Abstufung).
Die angenäherte Form darf in ihren Umrissen die Idealform nicht unterschneiden.
In der Praxis haben besonders einseitig eingespannte Träger (*Freiträger*) gleicher Biegebeanspruchung Bedeutung. Auch Wellen von Dampfturbinen und Achsen und Wellen im Schwermaschinenbau werden aus Gründen der Materialökonomie möglichst als Träger gleicher Biegebeanspruchung ausgeführt.

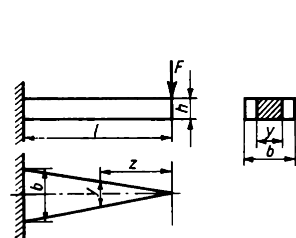
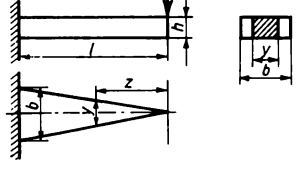



Bild 96. Freiträger mit gleicher Biegespannung

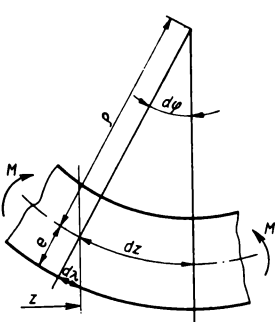


Bild 97. Verformung bei Biegung

3.2.3.8. Formänderung bei Biegung

Ein auf Biegung beanspruchter Träger krümmt sich. Die Kurve, die hierbei die normalspannungsfreie Faserschicht einnimmt, heißt *elastische Linie* oder *Biegelinie.* Zur Herleitung der elastischen Linie nimmt man die Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes an. Die Verformung sei gering.
Durch die Biegung des Trägers werden die vorher parallelen Stirnflächen jedes Stabelements um den Winkel $\mathrm{d}\varphi$ gegeneinander geneigt. Die Schenkel dieses Winkels sind Normalen der elastischen Linie. Ihre Länge ϱ ist der Krümmungsradius für das betrachtete Kurvenelement. Vergrößert sich die Länge der Zugfaser in der Entfernung e von der Neutralen um den Betrag $\mathrm{d}\lambda$ (Bild 97), so ist $\mathrm{d}z/\varrho = \mathrm{d}\lambda/e$, also:

$$\mathrm{d}\lambda = (e/\varrho)\,\mathrm{d}z \tag{105}$$

Nach dem HOOKEschen Gesetz gilt $\mathrm{d}\lambda = \varepsilon\,\mathrm{d}z = (\sigma/E)\,\mathrm{d}z$, also:

$$(e/\varrho)\,\mathrm{d}z = (\sigma/E)\,\mathrm{d}z \tag{106}$$

und somit: $\varrho = Ee/\sigma$ (107)

Allgemein ist der *Krümmungsradius:*

$$\varrho = \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]^{3/2} \Big/ \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\right) \tag{108}$$

Für wenig gekrümmte Kurven (z. B. elastische Linien mit kleiner Durchbiegung) ist die Ableitung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z$ und insbesondere das Quadrat davon klein, so daß es gegenüber 1 vernachlässigt werden kann. Dadurch wird $\varrho \approx 1/(\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2)$, und durch Gleichsetzen mit (107) erhält man

$$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = \sigma/Ee \tag{109}$$

Setzt man $\sigma = M/W = Me/I$, so wird $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = M/EI$. Da in dem gewählten Koordinatensystem y negativ ist, das Moment aber positiv, wird die *Differentialgleichung der elastischen Linie:*

$$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = -M/EI \tag{110}$$

Einmalige Integration ergibt den Tangens des Biegewinkels:

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = \tan\varphi \approx \varphi \tag{111}$$

Zweimalige Integration liefert die Gleichung der elastischen Linie $y = y(z)$. Die auftretenden Integrationskonstanten sind aus den speziellen Rand- bzw. Zusammenhangsbedingungen des jeweiligen Trägers zu ermitteln.

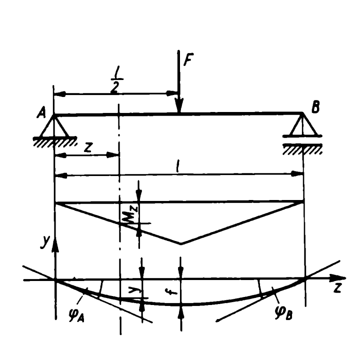


Bild 98. Momentenlinie und elastische Linie bei einem in der Mitte belasteten Biegeträger

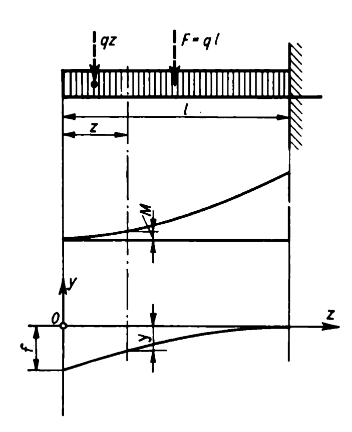


Bild 99. Freiträger mit Streckenlast

Beispiel 1. Für einen Träger mit gleichbleibendem Querschnitt und Mittenlast (Bild 98) auf zwei Stützen sind die Gleichungen für den Biegewinkel, die elastische Linie, die größte Durchbiegung sowie der Biegewinkel am Lager A zu bestimmen.
Es ist $F_\mathrm{A} = F_\mathrm{B} = F/2$ und $M = F_\mathrm{A}z = Fz/2$. M, in Gl. (110) eingesetzt, ergibt $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = -M/EI = -Fz/2EI$.
Integration liefert: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = -(F/2EI)\,z^2/2 + C_1 = \tan\varphi \approx \varphi$. Für $z = l/2$ ist $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = 0$, folglich ist $C_1 = Fl^2/16EI$ und $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = -Fz^2/4EI + Fl^2/16EI$.
Bei Lager A ist $z = 0$, also $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = \tan\varphi_\mathrm{A} = Fl^2/16EI \approx \varphi_\mathrm{A}$.
Für den Winkel φ_B am Lager B ergibt sich aus Symmetriegründen der negative Wert des Winkels φ_A.
Aus der Integration von $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z$ folgt: $y = -(F/4EI)\,z^3/3 + Fl^2z/16EI + C_2$. Für 0 ist $y = 0$, daher gilt $C_2 = 0$. Damit wird: $y = (Fl^3/16EI)\,[(z/l) - (4z^3/3l^3)]$.
In der Mitte ($z = l/2$) wird $y = f = (Fl^3/16EI)\,[(1/2) - (4/24)] = Fl^3/48EI$.

Beispiel 2. Der Freiträger von gleichbleibendem Querschnitt (Bild 99) ist durch eine gleichmäßig verteilte Last beansprucht. Wie lautet die Gleichung der elastischen Linie, und wie groß sind Durchbiegung und Biegewinkel am Ende des Balkens? Da y und M negativ sind, ist $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = M/EI$. Für das gezeichnete Koordinatensystem ist $M_z = qz^2/2$, und damit wird: $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = qz^2 2EI$.
Integration dieses Ausdrucks liefert $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = qz^3/6EI + C_1 = \tan\varphi$. Für $z = l$ ist $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = 0$, also $C_1 = -ql^3/6EI$. Damit ist $dy/dz = q(z^3 - l^3)/6EI = \tan\varphi \approx \varphi$.
Am Trägerende ist $z = 0$, und es ergibt sich hier der Wert $\tan\varphi_0 = -ql^3/6EI \approx \varphi_0$.
Aus der Integration der ersten Ableitung folgt $y = (qz^4/24EI) - (ql^3z/6EI) + C_2$. Für $z = l$ ist $y = 0$, woraus $C_2 = ql^4/8EI$ folgt. Also ist $y = qz^4/24EI - ql^3z/6EI + ql^4/8EI = (ql^4/24EI)\,[(z^4/l^4) - 4z/l + 3]$.
Für $z = 0$ wird $y = f = ql^4/8EI = Fl^3/8EI$.
Legt man die y-Achse so, daß die Kurve durch den Ursprung geht, und wird in der Gleichung für y der Abstand z durch $(l - z)$ ersetzt, so ergibt sich die in Tafel 7 angegebene Gleichung.

3.2.3.9. Verfahren von Mohr (Mohrsches Ersatzträgerverfahren)

Das Mohrsche Verfahren dient zur zeichnerischen Bestimmung der Verformung biegebeanspruchter Träger. Es wird hauptsächlich dann angewandt, wenn der Biegeträger keinen konstanten Querschnitt über seine Länge aufweist.

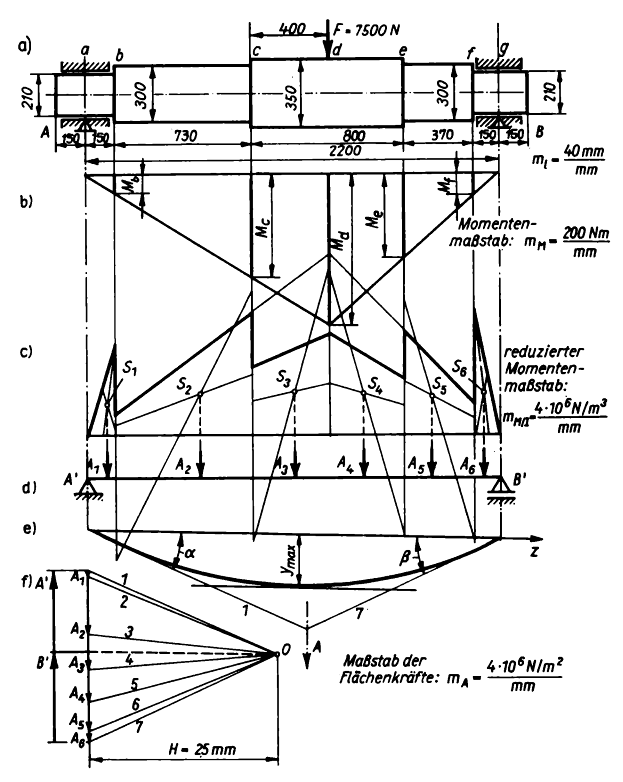


Bild 100. Zeichnerische Bestimmung der Durchbiegung einer abgesetzten Welle

Tabelle 12. Werte zu Bild 100

Stelle	d in mm	I in 10^{-6} m⁴	M in N · m	M/I in 10^6 N/m³	Fläche △	Inhalt in 10^6 N/m²
a	210	95,47	—	—	A_1	3,72
b	210	95,47	4720	49,5		
	300	397,61		11,9	A_2	29,7
c	300	397,61	27600	69,5		
	350	736,22		37,5	A_3	18,4
d	350	736,22	40200	54,6	A_4	17,0
e	350	736,22	22700	30,8		
	300	397,61		57,0	A_5	15,4
f	30	397,61	6560	16,5		
	21	95,47		68,8	A_6	51,7
g	210	95,47	—	—		

Beispiel. Für die Welle (Bild 100) soll die Durchbiegung nach dem Verfahren von MOHR bestimmt werden.
Lagerkräfte: $F_A = 7{,}5 \cdot 10^4 \cdot 920/2200$ N = 31,4 kN und $F_B = 7{,}5 \cdot 10^4 \cdot 1280/2200$ N = 43,6 kN.
Aus der dreieckförmigen Momentenfläche (Bild 100b) ergeben sich die Momente für die Stellen b, c, e und f. In Tabelle 12 sind die Werte für den Durchmesser, das Trägheitsmoment, das Biegemoment und den Quotienten M/I zusammengestellt. Im Bild 100c ist der Träger durch die M/I-Fläche (reduzierte Momentenfläche) belastet. An den Stellen b, c, e und f sind jeweils zwei Trägheitsmomente, also auch zwei M/I-Werte, vorhanden, die im Maßstab $m_{M/I} = (4 \cdot 10^6$ N/m³)/mm über der Nullinie aufgetragen sind. Dadurch ergibt sich der gebrochene Linienzug, dessen schräge Linien sich alle auf der Wirkungslinie von F schneiden müssen. Die Schwerpunkte der sechs Einzelflächen werden bestimmt, und die Flächeninhalte der reduzierten Momentenflächen ($A_1, \ldots, A_6$) werden als Einzelkräfte aufgefaßt, die den Ersatzträger $\overline{A'B'}$ belasten. Die Teilfläche A_1 ist ein Dreieck mit der Grundlinie 150 mm und der „Höhe" $49{,}5 \cdot 10^6$ N/m³. Also ist $A_1 \triangleq (0{,}15 \text{ m} \cdot 49{,}5 \cdot 10^6/2)$ N/m³ = $3{,}72 \cdot 10^6$ N/m². Für die Teilflächen A_2 bis A_5 wurden die Flächeninhalte mittels der Trapezformel*) errechnet und in der Tabelle zusammengestellt. Im Bild 100e ist für den Belastungsfall des Ersatzträgers (Bild 100d) das Seileck entworfen und die Seillinie eingezeichnet. Die zur Schlußlinie parallele Tangente bestimmt die Ordinate $y_{\max} = 7$ mm.
Aus der Analogie von Seillinie und elastischer Linie folgt nun, daß die Durchbiegung der Welle gleich dem Biegemoment des Ersatzträgers ist, der durch die reduzierte Momentenfläche belastet wird. Da die Belastung nur durch die M/I-Fläche erfolgt, muß das Ergebnis noch mit $1/E$ multipliziert werden. Somit ist die größte Durchbiegung der Welle:

$$f = y_{\max} H m_l m_A / E = (7 \cdot 25 \cdot 40 \text{ mm} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2)/(2{,}1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2) = 0{,}133 \text{ mm}.$$

3.2.3.10. Wichtigste Belastungsfälle bei Biegeträgern

In Tafel 7 sind die wichtigsten Belastungsfälle von einseitig eingespannten (Freiträger) sowie auf zwei Stützen gelagerten biegebelasteten Trägern zusammengestellt.

Die Punkte W sind *Wendepunkte der elastischen Linie.* In diesen Punkten gehen Zug- in Druckspannungen und Druck- in Zugspannungen über, die Momente sind Null. *Gesamtlasten* sind, gleichgültig ob Einzel- oder Streckenlasten, mit F bezeichnet. Auf die Längeneinheit bezogene *Streckenlasten* (gleich- oder ungleichmäßig über den Träger verteilt) sind mit q gekennzeichnet. Positive Momente sind nach oben, negative nach unten abgetragen. Treten zwei oder mehrere der Belastungsfälle gleichzeitig auf, dann addieren sich die Lagerkräfte, Biegemomente und Ordinaten der elastischen Linien für die Einzelbelastungen algebraisch.

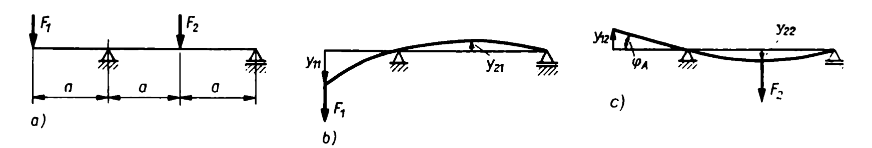


Bild 101. Kragträger mit zwei Einzelkräften. a) Belastungsschema; b) Verformung durch F_1; c) Verformung durch F_2

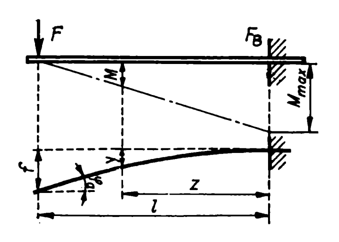
Beispiel. Ein Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI (Bild 101) ist durch die Einzelkräfte $F_1 = F_2 = F$ belastet. Wie groß sind die Durchbiegungen y_1 bei F_1 und y_2 bei F_2?
Denkt man sich den Träger nur durch F_1 (= F) belastet, dann ergibt sich aus Tafel 7 mit $l = 2a$ und $b = 3a$: $y_{11} = (F_1 a^2/3EI) \cdot (3a) = Fa^3/EI$ und mit $z = a$ für $y = y_{21} = -(F_1 a/6EI \cdot 2a)\,[(2a)^2 - a^2]a = -(Fa^3/4EI)$. Bei Belastung durch F_2 (= F) erhält man mit $l = 2a$ für $y_{22} = f = F_2(2a)^3/48EI = Fa^3/6EI$ sowie $\tan\varphi_A = F_2(2a)^2/16EI = Fa^2/4EI \approx \varphi_A$. Der Kragarm ist wegen des Fehlens einer Kraft nicht gekrümmt; die Auslenkung y_{12} ergibt sich aus $y_{12} = -a\tan\varphi_A = -Fa^3/4EI$. Die Gesamtdurchbiegungen erhält man durch Addition der Einzeldurchbiegungen: $y_1 = y_{11} + y_{12} = Fa^3/EI - Fa^3/3EI = 2Fa^3/3EI$ (positives Vorzeichen: nach unten) und $y_2 = y_{21} + y_{22} = -Fa^3/4EI + Fa^3/6EI = -Fa^3/12EI$ (negatives Vorzeichen: nach oben).

*) s. Abschn. MATHEMATIK

Tafel 7. Verformungen von Biegeträgern mit EI = **konst.** bei verschiedenen Belastungsfällen

Belastungsschema, Biegelinie und Momentendiagramm	Gleichungen

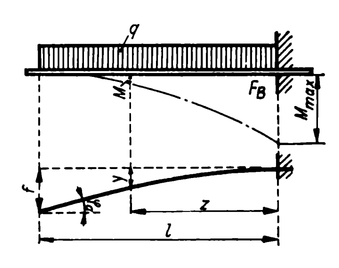
Statisch bestimmte Belastungsfälle



$F_B = F;\quad M = -F(l - z);\quad M_{max} = -Fl$

$$y = \frac{Flz^2}{3EI}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)\right]$$

$f = Fl^3/3EI;\quad \varphi_a = Fl^2/2EI = 3f/2l$

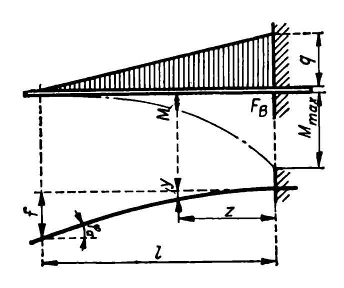


Gesamtlast $F = ql;\quad F_B = F$

$M = -(Fl/2)\,[1 - (z/l)]^2;\quad M_{max} = -Fl/2$

$$y = \frac{Flz^2}{8EI}\left[2 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{l}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$f = Fl^3/8EI;\quad \varphi_a = Fl^2/6EI = 4f/3l$

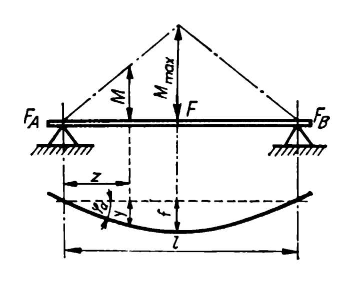


Gesamtlast $F = ql/2;\quad F_B = F$

$M = -(Fl/3)\,[1 - (z/l)]^2;\quad M_{max} = -Fl/3$

$$y = \frac{Flz^2}{6EI}\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2 - \frac{1}{10}\left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$$

$f = Fl^3/15EI;\quad \varphi_a = Fl^2/12EI = 5f/4l$



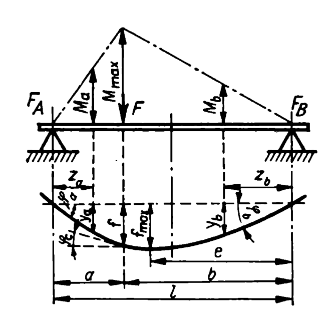
$F_A = F_B = F/2;\quad M = Fz/2;\quad M_{max} = Fl/4$

$$y = \frac{Fl^2z}{16EI}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$f = Fl^3/48EI;\quad \varphi_a = Fl^2/16EI = 3f/l$

Tafel 7 (Fortsetzung)

Belastungsschema, Biegelinie und Momentendiagramm	Gleichungen



$F_A = Fb/l;\quad F_B = Fa/l$

$M_a = Fbz_a/l;\quad M_b = Faz_b/l;\quad M_{max} = Fab/l$

$$y_a = \frac{Fblz_a}{6EI}\left[1 - \left(\frac{b}{l}\right)^2 - \left(\frac{z_a}{l}\right)^2\right]$$

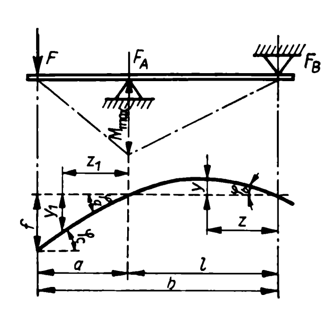
$$y_b = \frac{Falz_b}{6EI}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(\frac{z_b}{l}\right)^2\right]$$

$f = Fa^2b^2/3EIl;\quad f_{max} = (f/3a)\,(l + a)\,\sqrt{(l + a)/3b}$

bei $e = b\,\sqrt{(l + a)/3b}$ $(b > a)$

$\varphi_a = (Fab/6EI)\,[1 + (b/l)];\quad \varphi_b = (Fab/6EI)\,[1 + (a/l)]$

$\varphi_c = (Fab/3EI)\,[(b/l) - (a/l)]$

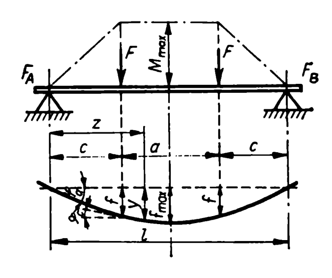


$F_A = Fb/l;\quad F_B = Fa/l;\quad M_{max} = -Fa$

$y = -Faz(l^2 - z^2)/6EIl;\quad y_1 = Fz_1(2al + 3az_1 - z_1^2)/6EI$

$f = Fa^2b/3EI;\quad \varphi_a = Fal/3EI$

$\varphi_b = Fal/6EI;\quad \varphi_c = Fa(2l + 3a)/6EI$



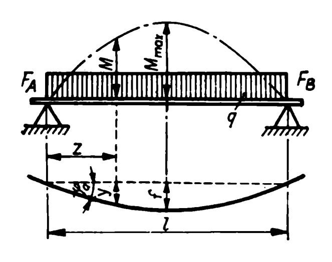
$F_A = F_B = F;\quad M_{max} = Fc$

$$y = \frac{F}{2EI}\,[(l - c)\,cz - (z^3/3)] \text{ für } z \leqq c$$

$$y = \frac{F}{2EI}\,[(l - z)\,cz - (c^3/3)] \text{ für } c \leqq z \leqq l/2$$

$f = (Fc^2/2EI)\,[l - (4c/3)];\quad f_{max} = (Fc/8EI)\,[l^2 - (4c^2/3)]$

$\varphi_a = Fc(l - c)/2EI = -\varphi_b;\quad \varphi_c = Fc(l - 2c)/2EI$



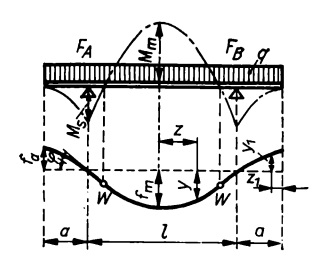
Gesamtlast $F = ql$; $F_A = F_B = F/2$

$M = (Fz/2)\,[1 - (z/l)];\quad M_{max} = Fl/8$

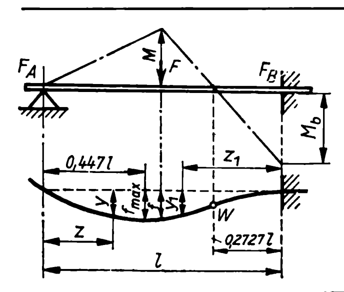
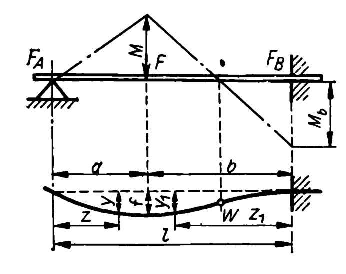
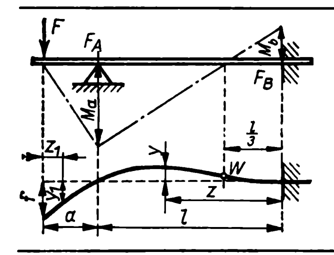
$$y = \frac{Fl^2z}{24EI}\left[1 - 2\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$$

$f = 5Fl^3/384EI;\quad \varphi_a = Fl^2/24EI = -\varphi_b = 16f/5l$

Tafel 7 (Fortsetzung)

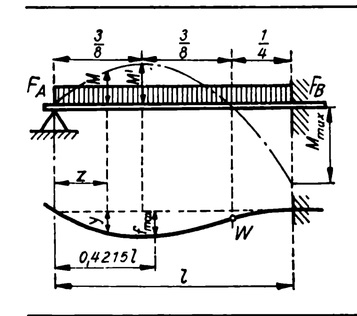
Belastungsschema, Biegelinie und Momentendiagramm	Gleichungen
	$F_A = F_B = q[(l/2) + a]$; $M_s = -qa^2/2$ $M_m = (ql^2/2)[(1/4) - (a/l)^2]$; $M_m = 0$ für $a = l/2$ $f_m = (ql^4/16EI)[(5/24) - (a/l)^2]$; $f_m = 0$ für $a = l\sqrt{5/24}$ Wendepunkte bei $z = \pm l\sqrt{1 - (4a^2/l^2)}$ $y = \dfrac{ql^4}{16EI}\left[1 - \dfrac{4z^2}{l^2}\right]\left[\dfrac{5}{24} - \dfrac{a^2}{l^2} - \dfrac{z^2}{6l^2}\right]$ für $-l/2 \leqq z \leqq l/2$ $y_1 = \dfrac{ql^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{z_1}{l}\right)^4 + \left[1 - 6\left(\dfrac{a}{l}\right)^2 - 4\left(\dfrac{a}{l}\right)^3\right]\left(\dfrac{z_1}{l}\right) - \left(\dfrac{a}{l}\right)\left[1 - 6\left(\dfrac{a}{l}\right)^2 - 3\left(\dfrac{a}{l}\right)^3\right]\right\}$ für $z_1 \leqq a$ $f_a = (ql^3a/4EI)[(1/6) - (a^2/l^2) - (a^3/2l^3)]$ $\varphi_a = (ql^3/4EI)[(1/6) - (a^2/l^2)]$; $\varphi_a = 0$ für $a = l/\sqrt{6}$

Statisch unbestimmte Belastungsfälle

	F Belastung in Trägermitte; $F_A = 5F/16$; $F_B = 11F/16$ $M = 5Fl/32$ (in der Trägermitte) $M_b = M_{max} = -3Fl/16$ (Einspannmoment) $f = 7Fl^3/768EI$; $f_{max} = Fl^3/48\sqrt{5}\,EI$ bei $z = 0{,}447l$ $y = \dfrac{Fl^2z}{32EI}\left[1 - \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{z}{l}\right)^2\right]$ für $z \leqq l/2$ $y_1 = \dfrac{Flz^2}{32EI}\left(3 - \dfrac{11z_1}{3l}\right)$ für $z_1 \leqq l/2$
	$F_A = F[1 + (a^3/2l^3) - (3a/2l)]$ $F_B = F[-(a^3/2l^3) + (3a/2l)] = F - F_A$ $M = Fa[1 + (a^3/2l^3) - (3a/2l)]$ $M_b = -(Fa/2)[1 - (a^2/l^2)]$ (Einspannmoment) $y = \dfrac{Fb^2z}{4EI}\left[\dfrac{a}{l} - \dfrac{2}{3}\left(1 + \dfrac{a}{2l}\right)\left(\dfrac{z}{l}\right)^2\right]$ für $z \leqq a$ $y_1 = \dfrac{Faz_1}{4EI}\left[1 - \left(\dfrac{a}{l}\right)^2 - \left(1 - \dfrac{a^2}{3l^2}\right)\dfrac{z_1}{l}\right]$ für $z_1 \leqq b$ $f = (Fa^2b^3/4EIl^3)[1 + (a/3l)]$ $f_{max} = (Fab^2/6EI)\sqrt{(a/2l)/[1 + (a/2l)]}$
	$F_A = F[(3a/2l) + 1]$; $F_B = -3Fa/2l$; $M_a = -Fa$ $M_b = Fa/2$; $f = (Fla^2/4EI)[1 + (4a/3l)]$ $y = (Faz^2/4EI)[(z/l) - 1]$ für $z \leqq l$ $y_1 = [F(a - z_1)/2EI][-(z^2/3) + a(a - z_1) + (al/2)]$ für $z_1 \leqq a$

Tafel 7 (Fortsetzung)

Belastungsschema, Biegelinie und Momentendiagramm	Gleichungen



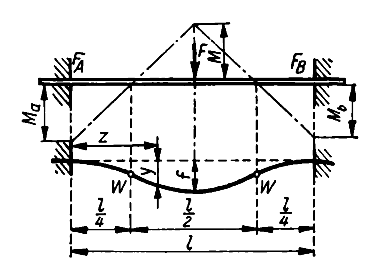
Gesamtlast $F = ql$; $F_A = 3F/8$; $F_B = 5F/8$

$M = (Fz/2)\,[(3/4) - (z/l)]$; $M_{max} = -Fl/8$ (Einspannmoment)

$M' = 9Fl/128$ für $z = 3l/8$ (relatives Maximum)

$$y = \frac{Fl^2 z}{48EI}\left[1 - 3\left(\frac{z}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$$

$f_{max} = Fl^3/185EI$ für $z = 0{,}4215l$

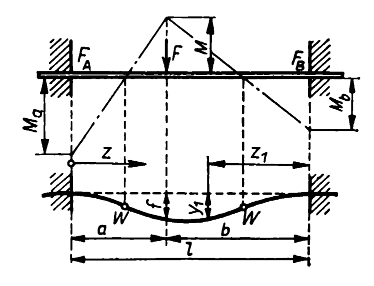


$F_A = F_B = F/2$; $M = Fl/8$ (Mittenmoment)

$M_a = M_b = -Fl/8$ (Einspannmomente)

$y = (Flz^2/16EI)\,[1 - (4z/3l)]$

$f = Fl^3/192EI = f_{max}$



$F_A = F[(b/l) - (a^2b/l^3) + (b^2a/l^3)]$

$F_B = F[(a/l) - (b^2a/l^3) + (a^2b/l^3)]$

$M_a = -(Fab^2/l^2)$; $M_b = -(Fba^2/l^2)$ (Einspannmomente)

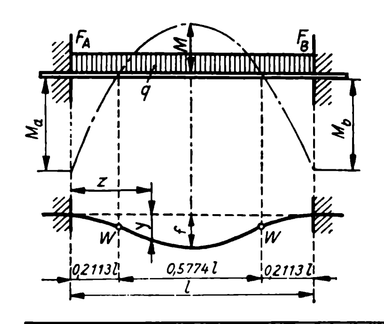
$M = 2Fa^2b^2/l^3$; $f = (Fl^3/3EI)\,(a/l)^3\,(b/l)^3$ (an der Laststelle)

$$y = \frac{Fl^3}{2EI}\left(\frac{b}{l}\right)^2\left(\frac{z}{l}\right)^2\left[\frac{a}{l} - \frac{z}{3l}\left(1 + \frac{2a}{l}\right)\right] \quad \text{für } z \leqq a$$

$$y_1 = \frac{Fl^3}{2EI}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(\frac{z_1}{l}\right)^2\left[\frac{b}{l} - \frac{z_1}{3l}\left(1 + \frac{2b}{l}\right)\right] \quad \text{für } z_1 \leqq b$$

$$f_{max} = (2Fb^3a^2/3EIl^2)\left(\frac{l}{2a + l}\right)^2 \quad \text{für } a < b,$$

für $b < a$ sind a und b zu vertauschen



Gesamtlast $F = ql$; $F_A = F_B = F/2$

$M = Fl/24$ (in Trägermitte); $M_a = M_b = M_{max}$
$= Fl/12$ (Einspannmomente)

$y = (Flz^2/24EI)\,[1 - (2z/l) + (z/l)^2]$

$f = Fl^3/384EI = f_{max}$

3.2.4. Schubbeanspruchung

3.2.4.1. Hookesches Gesetz für Schubspannungen

An einem quaderförmigen Körperelement, dessen Grundfläche man sich festgehalten denke, wirke parallel zur Grundfläche die Kraft F_Q (Bild 102), die eine Verschiebung der Deckfläche zur Folge hat. Zwischen γ und der Belastung F_Q bzw. der Spannung $\tau = F_Q/\Delta A$ besteht der Zusammenhang (HOOKE*sches Gesetz für Tangentialspannungen*):

$$\tau = G\gamma = E\gamma/2(1 + \mu) \tag{112}$$

G Gleitmodul, E Elastizitätsmodul, μ POISSON-Zahl (für Stahl gilt z. B. mit $\mu = 0{,}30$: $G = 0{,}385E$).

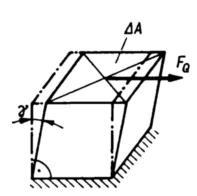


Bild 102. Schubverformung

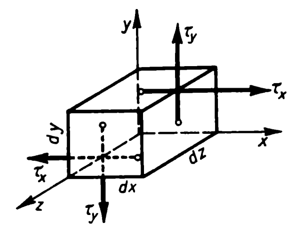


Bild 103. Schubspannungspaare

3.2.4.2. Paarweises Auftreten von Schubspannungen

Aus Gleichgewichtsgründen ist das Wirken nur einer Kraft F_Q am quaderförmigen Körperelement nicht möglich; es müssen an mindestens vier senkrecht zueinander stehenden Flächen Kräfte wirken, deren Momente in bezug auf die Mittelachse entgegengesetzten Drehsinn aufweisen (Bild 103). Setzt man mit der Annahme gleichmäßig am Element verteilter Spannungen $\tau = F_Q/\Delta A$ die Gleichgewichtsbedingung $\sum M_z = 0$ an, dann gilt $(\tau_y \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x - (\tau_x \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y = 0$, woraus sich ergibt:

$$\tau_y = \tau_x \tag{113}$$

Gl. (113) besagt, daß Schubspannungen stets *paarweise* auftreten; sie haben an Schnittkanten in Querschnitten und Längsschnitten gleiche Größe. Die Spannungen eines Paars wirken entweder zur Kante der aneinanderstoßenden Flächen hin oder weg von ihr.

3.2.4.3. Schubspannungen in biegebeanspruchten Trägern

In der Praxis treten Schubspannungen meist in Verbindung mit Biegespannungen auf. In Bild 104 ist aus einem auf Biegung beanspruchten Träger an beliebiger Stelle ein Element der Länge dz herausgeschnitten. Dabei nehme von links nach rechts die Querkraft F_Q um den Betrag $\mathrm{d}F_Q$ und das Moment M um den Betrag $\mathrm{d}M$ zu. In der Entfernung y von der normalspannungsfreien Schicht sei ein Längsschnitt gelegt. Die Schubspannungen im Quer- und Längsschnitt müssen nach Gl. (113) gleich groß sein. In der Entfernung y von der spannungsfreien Schicht sei ihre Größe τ. Bei gleichmäßiger Verteilung über die Breite b wird dann:

$$\tau b\,\mathrm{d}z + \int \sigma\,\mathrm{d}A = \int (\sigma + \mathrm{d}\sigma)\,\mathrm{d}A, \quad \text{also} \quad \tau b\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}A \tag{114}$$

Im betrachteten Flächenelement ist $\sigma = M\eta/I$. Da M und somit σ sich mit der Entfernung z (z. B. vom Auflager) ändern, wird:

$$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}z = (\eta/I)\,(\mathrm{d}M/\mathrm{d}z) \tag{115}$$

Nun gilt $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z = F_Q$, also $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}z = \eta F_Q/I$ und $\mathrm{d}\sigma = \eta F_Q\,\mathrm{d}z/I$. Damit wird mit Gl. (114):

$$\tau b = (F_Q/I) \int \eta \,\mathrm{d}A = (F_Q/I)\, M_{st} \tag{116}$$

oder

$$\tau = F_Q M_{st}/Ib \tag{117}$$

M_{st} ist das statische Moment der Querschnittsteilfläche zwischen der äußeren Faserschicht und einer im Abstand y liegenden Parallelen zur neutralen Faserschicht (normalspannungsfreien Schicht), bezogen auf die Neutrale.

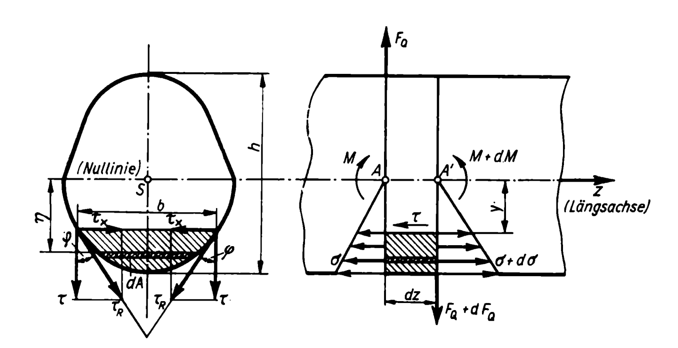


Bild 104. Schubbeanspruchung eines Biegeträgers

Auf der Oberfläche können keine Schubspannungen auftreten. Deshalb müssen in den Randpunkten des Querschnitts die Randspannungen tangential zum Umfang verlaufen (Bild 104). Da die senkrechten Schubspannungskomponenten von τ_R in der Entfernung y den Wert τ haben, wird:

$$\tau_R = \tau/\cos\varphi = F_Q M_{st}/Ib \cos\varphi \tag{118}$$

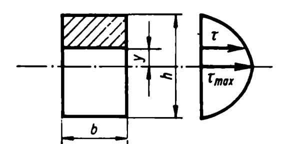


Bild 105. Berechnung des statischen Moments einer Rechteckfläche

Für den rechteckigen Querschnitt nach Bild 105 ergibt sich:

$$M_{st} = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{bh^2}{8}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$$

und $I = bh^3/12$. Damit wird im Abstand y von der Neutralen:

$$\tau = (3F_Q/2bh)\,[1 - (2y/h)^2] \tag{119}$$

τ ändert sich also parabelförmig. Für $y = h/2$ wird $\tau_{min} = 0$ und für $y = 0$:

$$\tau = \tau_{max} = 3F_Q/2A \tag{120}$$

Man erkennt, daß die Annahme einer gleichmäßigen Schubspannungsverteilung über den Querschnitt nicht zutrifft, sondern daß τ_{max} beim Rechteck um 50% größer als $\tau_m = F_Q/A$ wird. Ähnliches gilt für den Kreis, hier ist $\tau_{max} = 4F_Q/3A$.

3.2.4.4. Abscheren

Niete und kurze Paßbolzen werden auf Abscheren beansprucht. Dabei verteilen sich die Schubspannungen nicht gleichmäßig über den Querschnitt. Biegespannungen werden vernachlässigt. Trotz ungleichmäßiger Spannungsverteilung setzt man:

$$\tau_a = F/A \leqq \tau_{a,zul} \tag{121}$$

Man rechnet meist mit $\tau_{a,zul} = 0{,}8\sigma_{zul}$.
In der halben Mantelfläche zwischen Niet bzw. Bolzen und der Bohrung tritt Flächenpressung auf, die *Lochleibungsdruck* genannt wird:

$$\sigma_l = F/nds \tag{122}$$

F Kraft, n Anzahl der Niete oder Bolzen, d Bohrungsdurchmesser, s Blechdicke

Der zulässige Lochleibungsdruck beträgt

- für Nietverbindungen im Stahlbau: $\sigma_{l,zul} = 2\tau_{a,zul}$
- für Gelenkbolzen im Stahlbau: $\sigma_{l,zul} = 1{,}3\sigma_{d,zul}$
- für Stiftverbindungen im Maschinenbau: $\sigma_{l,zul} = 1{,}6\sigma_{d,zul}$

Beispiel 1. Der erforderliche Querschnitt der einschnittigen Niete (Bild 106) errechnet sich mit $\sigma_{zul} = 120$ MPa und $n = 2$ aus Gl. (121):

$A_{erf} = F/0{,}8\sigma_{zul}\,n = 5 \cdot 10^4$ N$/0{,}8 \cdot (120$ N/mm$^2) \cdot 2 = 260$ mm^2.

Aus (122) ergibt sich der erforderliche Durchmesser ($s = 8$ mm): $d_{erf} = 18{,}2$ mm; ausgeführt wird $d = 20$ mm. Der Lochleibungsdruck beträgt damit:

$\sigma_l = 5 \cdot 10^4$ N$/2 \cdot 20 \cdot 8$ mm$^2 = 156$ MPa $< \sigma_{l,zul} = 2 \cdot 0{,}8 \cdot \sigma_{zul} = 192$ MPa.

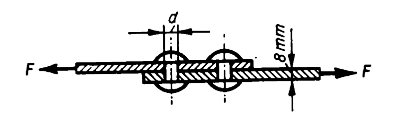


Bild 106. Scherbeanspruchung zweier Niete ($F = 50$ kN)

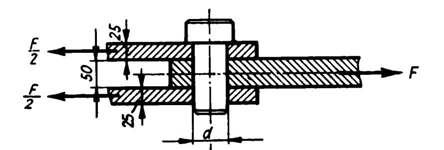


Bild 107. Scherbeanspruchung eines Bolzens

Beispiel 2. Der Bolzendurchmesser der Laschenverbindung nach Bild 107 errechnet sich auf Abscheren mit $F = 10^5$ N und $\tau_{a,zul} = 0{,}8\sigma_{zul} = 0{,}8 \cdot 120$ MPa $= 96$ MPa als zweischnittiger Scherstab (daher doppelte Fläche angesetzt!) aus:

$A = 2\pi d^2/4 = F/\tau_{a,zul} = 10^5$ N$/(96$ N/mm$^2) = 1042$ mm^2 zu $d = 26$ mm.

Die Nachrechnung auf Biegung mit gleichmäßig verteilter Streckenlast ergibt:

$M_b = (F/2) \cdot 37{,}5$ mm $- (F/2) \cdot 12{,}5$ mm $= 1{,}25 \cdot 10^6$ N $\cdot$ mm $= 1{,}25 \cdot 10^3$ N $\cdot$ m und
$W_{erf} = M_b/\sigma_{b,zul} = 1{,}25 \cdot 10^6$ N $\cdot$ mm$/(120$ N/mm$^2) = 1{,}04 \cdot 10^4$ mm^3.

Ausgeführt wird $d = 50$ mm, d. h., hier ist die Größe der Biegespannung ausschlaggebend.

Beispiel 3. Für den Belastungsfall (Bild 108) soll das Trägerprofil unter der Voraussetzung möglichst geringen Werkstoffverbrauchs bestimmt werden ($\sigma_{b,zul} = 140$ MPa).

Lagerkräfte: $\sum M_B = -F_1 \cdot 8\,\text{m} + F_A \cdot 6\,\text{m} - F_2 \cdot 3\,\text{m} = 0$; $F_A = (6 \cdot 8 + 18 \cdot 3) \cdot 10^4$ N $\cdot$ m/6 m $= 170$ kN; $F_B = (24 - 17) \cdot 10^4$ N $= 70$ kN.

Größte Biegemomente treten bei F_A und z auf: $M_A = 6 \cdot 10^4 \cdot 2$ N $\cdot$ m $= 12 \cdot 10^4$ N $\cdot$ m.
Rechnerisch wird $-F_1 + F_A - qz = 0$; daraus ergibt sich $z = (17 - 6) \cdot 10^4$ N$/(3 \cdot 10^4$ N/m$) = 3{,}67$ m und $M_z = -(6 \cdot 5{,}67 \cdot 10^4)$ N $\cdot$ m $+ 17 \cdot 3{,}67 \cdot 10^4$ N $\cdot$ m $- (3 \cdot 3{,}67^2/2 \cdot 10^4)$ N $\cdot$ m $= 8{,}17 \cdot 10^4$ N $\cdot$ m.
Die Momentenlinie läßt sich aus der dreieckförmigen Momentenlinie der Kraglast F_1 und der parabelförmigen Momentenlinie der gleichmäßig verteilten Last F_2 durch geometrische Addition der Ordinaten konstruieren. Aus der resultierenden Momentenlinie erkennt man, daß der Träger sehr ungleichmäßig

beansprucht wird und daß die Momentenspitze bei A das Profil bestimmt. Um Werkstoff zu sparen, wählt man ein Grundprofil, das z. B. dem Biegemoment bei z genügt, und verstärkt es über A durch aufgenietete Gurtbleche. Das Grundprofil erfordert $W_x = M_b(z)/\sigma_{b,zul} = 81{,}7 \cdot 10^6\ \text{N} \cdot \text{mm}/(140\ \text{N/mm}^2) = 583 \times 10^3\ \text{mm}^3$. Gewählt wird I 28 mit $W_x = 542 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$ und $I_x = 75{,}9 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$. Nimmt man zur Verstärkung zwei Gurtbleche 120 mm × 10 mm, so wird nach Bild 109: $I_{ges} = I_x + 2[(bh^3/12) + bha^2] = 75{,}9 \cdot 10^6\ \text{mm}^4 + 2[(120 \cdot 10^3/12) + 120 \cdot 10 \cdot 145^2]\ \text{mm}^4 = 126{,}4 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$ und $W_{ges} = 126{,}4 \cdot 10^6\ \text{mm}^3/150 = 843 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$.

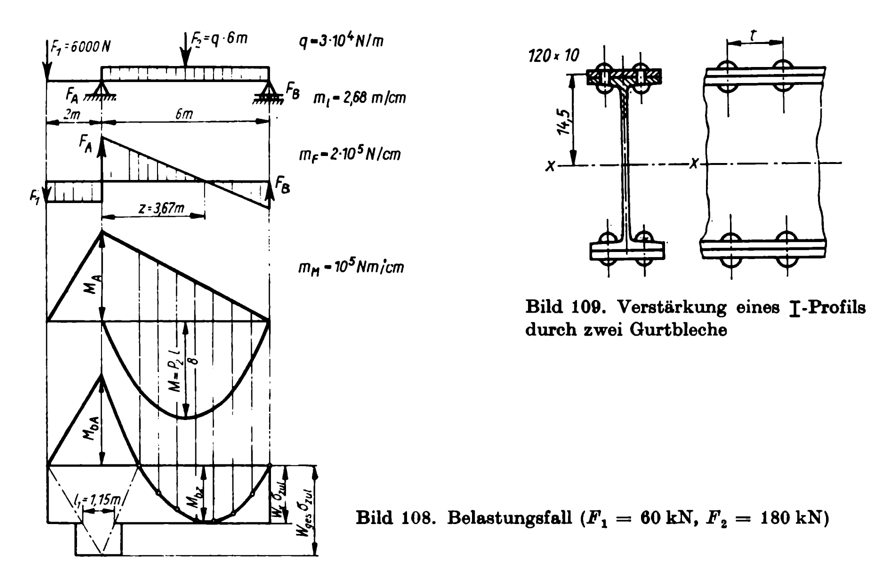


Bild 109. Verstärkung eines I-Profils durch zwei Gurtbleche

Bild 108. Belastungsfall ($F_1 = 60$ kN, $F_2 = 180$ kN)

Die Biegespannung bei A ist $\sigma_{vorh} = M_A/W_{ges} = (120 \cdot 10^6/843 \cdot 10^3)\ \text{N/mm}^2 = 142$ MPa. Die Länge der Gurtbleche ergibt sich aus der Momentenlinie $l = l_1 + 2 \cdot 50$ mm Überstand, also $l = 1150$ mm + 100 mm = 1250 mm. Die Gurtniete müssen die Schubkräfte des Längsschnitts in der Entfernung von 140 mm von der spannungsfreien Schicht aufnehmen. Multipliziert man beide Seiten der Gl. (117) mit b, so ist $\tau b = F_Q M_{st}/I$ die *Längsschubkraft* je Längeneinheit. Ist t die Längsteilung der Nietpaare, dann wird $\tau b t = F_Q M_{st} t/I$ die von einem Nietpaar aufgenommene *Schubkraft*. Bezeichnet man diese Kraft mit F_S, so wird die *Teilung:*

$$t = IF_S/F_Q M_{st} \tag{123}$$

Bei einer Wahl des Nietdurchmessers von $d = 14$ mm und $\tau_{zul} = 0{,}8 \cdot 140$ MPa wird $F_S = 2\pi d^2 \tau_{zul}/4 = (2 \cdot \pi \cdot 14^2 \cdot 0{,}8 \cdot 140/4)\ \text{N} = 34{,}5$ kN. Das statische Moment des aufgenieteten Gurtstabs ist $M_{st} = Aa = 120 \cdot 10 \cdot 145\ \text{mm}^3 = 174 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$, und damit ist $t = (126{,}4 \cdot 10^6 \cdot 34{,}5 \cdot 10^3/17 \cdot 10^4 \cdot 174 \cdot 10^3)$ mm = 147,4 mm. Diese Nietteilung $t \approx 10d$ ist nur zulässig, solange gesetzliche Vorschriften keinen kleineren Wert vorschreiben, wie z. B. im Brückenbau mit $t_{max} = 6d$.

3.2.5. Torsionsbeanspruchung

3.2.5.1. Spannung und Formänderung im Kreiszylinder

Ein gerader zylindrischer Stab sei an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch ein Kräftepaar $M_t = FR$, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse steht, belastet (Bild 110). Versuche haben ergeben, daß bei zylindrischen Stäben die Querschnitte auch bei der Verdrehung eben bleiben. Bleibt $\tau_{t,max}$ unterhalb der Proportionalitätsgrenze, so wächst die Spannung vom Mittelpunkt aus geradlinig nach außen an. Das betrachtete Flächenelement dA im Abstand ϱ vom Mittelpunkt überträgt ein Moment $\varrho\tau_t\,\text{d}A$. Aus $\sum M = 0$ folgt:

$$M_t = \int \varrho \tau_t \,\text{d}A \tag{124}$$



Mit der Proportion $\tau/\varrho = \tau_t/r$ wird $M_t = (\tau_t/r) \int \varrho^2 \, dA = (\tau_t/r) I_p$. Hierbei ist I_p das polare Trägheitsmoment der Kreisfläche, so daß $M_t = \tau_t I_p/r$. Da $I_p/r = W_p = \pi d^3/16$, gilt:

$$M_t = W_p \tau_t = \pi d^3 \tau_t/16 \tag{125}$$

Für $\tau_t \leqq \tau_{t,zul}$ wird hieraus die Entwurfsgleichung:

$$d = \sqrt[3]{16 M_t/\pi\tau_{t,zul}} \approx \sqrt[3]{5 M_t/\tau_{t,zul}} \tag{126}$$

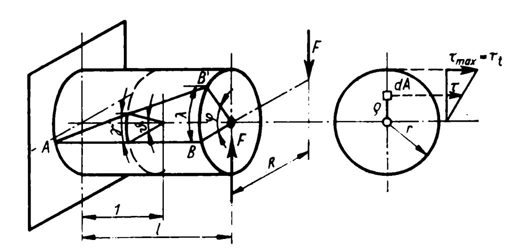


Bild 110. Verformung bei Torsion

Bei Wellen sind meist statt des Moments M_t die Leistung P sowie die Drehzahl n gegeben. Das Moment M_t ist dann:

$$M_t = 9{,}55 \cdot 10^6 \, P/n \tag{127}$$

M_t	P	n
N · mm	kW	min⁻¹

Es ist günstig, Gl. (127) in Gl. (126) einzusetzen, wodurch man die Entwurfsgleichung erhält:

$$d = 365 \sqrt[3]{P/n\tau_{t,zul}} \tag{128}$$

d	P	$\tau_{t,zul}$	n
mm	kW	MPa	min⁻¹

In der Praxis werden Wellen oft unter Vernachlässigung der Biegebeanspruchung nur auf Verdrehung und deshalb mit einer relativ kleinen zulässigen Spannung $\tau_{t,zul} \approx 12$ MPa vorausberechnet. Durch Einsetzen in Gl. (128) ergibt sich die Entwurfsgleichung:

$$d \approx 160 \sqrt[3]{P/n} \tag{129}$$

d	P	n
mm	kW	min⁻¹

Der Winkel, um den sich zwei Querschnitte im Abstand l gegenseitig verdrehen, sei φ (Bild 110). Für die Stäbe mit prismatischem Querschnitt ist $\vartheta = \varphi/l$ der *spezifische Drehwinkel*. Nach dem HOOKEschen Gesetz für Schub gilt $\tau_{t,max} = G\gamma = G\lambda/l = Gr\varphi/l$, und nach dem Einsetzen von $\tau_{t,max} = M_t/W_t = M_t r/I_p$ ergibt sich nach Umformung der *Verdrehwinkel*:

$$\varphi = M_t l/G I_p \tag{130}$$

Rechnet man mit $\vartheta_{zul} = 1°/4$ m, dann folgt bei gegebener Leistung P und Drehzahl n für Wellen aus Stahl ($G = 80 \cdot 10^3$ MPa) die Entwurfsgleichung:

$$d = 130 \sqrt[4]{P/n} \tag{131}$$

d	P	n
mm	kW	min⁻¹

Für $P/n > 1/12$ ergibt die Zahlenwertgleichung (129) und für $P/n < 1/12$ die Zahlenwertgleichung (131) den größeren Durchmesser.

Beispiel. Eine Triebwerkswelle von 1500 mm Länge soll $P = 75$ kW Leistung bei $n = 250$ min⁻¹ übertragen. Welcher Durchmesser ist erforderlich?

Da $P/n = 75/250 = 1/3{,}33 > 1/12$ ist Gl. (129) zur Berechnung heranzuziehen. Danach ist $d = 160 \times \sqrt[3]{1/3{,}33}$ mm $= 107$ mm, ausgeführt wird vorerst $d = 120$ mm (es ist ein genauer Spannungsnachweis unter Berücksichtigung der Biegespannungen und der Kerbwirkung erforderlich).

Der spezifische Drehwinkel ergibt sich mit $I_p = 10{,}18 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$ und $M_t = (9{,}55 \cdot 10^6 \cdot 75/250)\,\text{N} \cdot \text{mm} = 2{,}865 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{m}$:

$\hat{\vartheta} = \hat{\varphi}/l = M_t/GI_p = (2{,}865 \cdot 10^6/80 \cdot 10^3 \cdot 10{,}18 \cdot 10^6)\,1/\text{mm} = 1/284\,\text{m}$ oder

$\vartheta = 180°\hat{\vartheta}/\pi = 1°/4{,}96\,\text{m} < 1°/4\,\text{m}$.

3.2.5.2. Stäbe mit beliebigem Querschnitt

Im Gegensatz zur Biegung bleiben bei der Torsion nur beim Zylinder oder Hohlzylinder die Querschnitte während der Verformung eben, während bei allen anderen Querschnitten eine *Wölbung* eintritt. Die mathematische Ableitung bei beliebigen Querschnitten führt auf Differentialgleichungen. Die praktische Berechnung erfolgt nach den Gleichungen:

$$\tau_t = M_t/W_t \leqq \tau_{zul} \qquad \text{und} \qquad \hat{\varphi} = M_t l/GI_t \qquad (132, 133)$$

I_t nennt man *Torsionsträgheitsmoment*, W_t Torsionswiderstandsmoment. Die Werte für I_t und W_t sind für die einzelnen Querschnitte in Tafel 8 enthalten. Die Berechnung nach Tafel 8 setzt voraus, daß der Stab ohne jede Wölbbehinderung tordieren kann, weil bei nicht wölbfreien Profilen erhebliche zusätzliche Spannungen auftreten (*Wölbnormalspannungen*).

Beispiel 1. Ein $l = 2$ m langer Stab aus Stahl mit $\tau_{zul} = 80$ MPa hat ein Torsionsmoment $M_t = 8 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{m}$ zu übertragen. Welcher Querschnitt ist erforderlich, und wie groß ist der Verdrehwinkel a) bei Kreisquerschnitt und b) bei Rechteckquerschnitt mit $h:b = 1{,}5$?

a) Nach Gl. (126) ist $d = \sqrt[3]{16M_t/\pi\tau_{t,zul}} = \sqrt[3]{16 \cdot 8 \cdot 10^6\,\text{N} \cdot \text{mm}/(\pi \cdot 80\,\text{N/mm}^2)} \approx 80\,\text{mm}$, und nach Gl. (130) ergibt sich $\hat{\varphi} = M_t l/I_p G = 8 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{mm}^2/4{,}02 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{mm}^2 \approx 0{,}05 \mathrel{\hat{=}} 2{,}86°$.

b) Für $h/b \approx 1{,}5$ ergibt sich nach Tafel 8 $W_t = 0{,}346b^3$. Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung $W_t = M_t/\tau_{t,zul}$ ein, so folgt durch Umstellen nach b:

$b = \sqrt[3]{M_t/0{,}346\tau_{t,zul}} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^6\text{N} \cdot \text{mm}/0{,}346 \cdot 80\,\text{N/mm}^2} = 66{,}1\,\text{mm}$.

Ausgeführt wird $b = 66$ mm, $h = 100$ mm, $I_t = 0{,}294b^4 = 5{,}578 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$.
Der Verdrehwinkel ist somit $\hat{\varphi} = 8 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{mm}^2/5{,}578 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{mm}^2 = 0{,}0358 \mathrel{\hat{=}} 2{,}05°$.

Beispiel 2. Ein Träger ($l = 1$ m, $s = 8$ mm) aus [-förmig gebogenem Stahlblech wird durch ein Torsionsmoment $M_t = 4 \cdot 10^5\,\text{N} \cdot \text{mm}$ beansprucht. Zu berechnen sind die Torsionsspannung sowie der Verdrehwinkel für das [-Profil und für ein Kastenprofil, das sich durch Aufschweißen eines Blechstreifens auf die offene Seite des [-Profils ergibt (Bild 111).

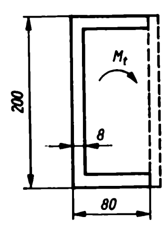


Bild 111. [-Profil

a) Berechnung des offenen Profils:

$I_t = \sum s_i^3 a_i/3 = (2 \cdot 8^3 \cdot 76 + 8^3 \cdot 192)/3\,\text{mm}^4 = 58{,}7 \cdot 10^3\,\text{mm}^4$,

$W_t = I_t/s_{max} = 58{,}7 \cdot 10^3/8\,\text{mm}^3 = 7337{,}5\,\text{mm}^3$,

$\tau_{t,vorh} = M_t/W_t = 4 \cdot 10^5/7337\,\text{N/mm}^2 = 54{,}5\,\text{MPa}$.

$\hat{\varphi} = M_t l/I_t G = 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3/58{,}7 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 10^3 = 0{,}0851$, also $\varphi = 4{,}9°$

b) Berechnung des verstärkten Profils:

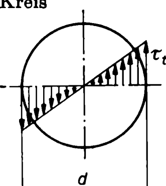
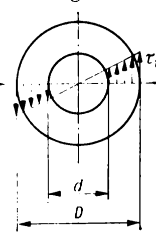
$I_t = 4A_m^2/\sum(u_i/s_i) = 4(80 \cdot 192)^2/[2(80/8) + 2(192/8)]\,\text{mm}^4 = 13{,}9 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$,

$W_t = 2A_m s = 2 \cdot 80 \cdot 192 \cdot 8\,\text{mm}^3 = 245{,}76 \cdot 10^3\,\text{mm}^3$,

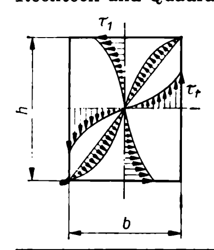
$\tau_{t,vorh} = M_t/W_t = 4 \cdot 10^5/245{,}76 \cdot 10^3\,\text{N/mm}^2 = 1{,}63\,\text{MPa}$,

$\hat{\varphi} = M_t l/I_t G = 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3/13{,}9 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^3 = 0{,}00036$, also $\varphi = 0{,}021°$.

Tafel 8. Trägheits- und Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte bei Torsionsbeanspruchung

Querschnittsform	Torsionsträgheitsmoment	Torsionswiderstandsmoment
Kreis 	$I_t = \pi d^4/32 = I_p \approx 0{,}1 d^4$	$W_t = \pi d^3/16$ $= W_p \approx 0{,}2 d^3$
Kreisring 	$I_t = \pi(D^4 - d^4)/32 = I_p$ $\approx 0{,}1(D^4 - d^4)$	$W_t = \pi(D^4 - d^4)/16D = W_p$ $\approx 0{,}2(D^4 - d^4)/D$

Rechteck und Quadrat



h/b	I_t	W_t	τ_1/τ_t
1,0	$0{,}140 b^4$	$0{,}208 b^3$	1,00
1,5	$0{,}294 b^4$	$0{,}346 b^3$	0,859
2,0	$0{,}457 b^4$	$0{,}493 b^3$	0,795
3,0	$0{,}790 b^4$	$0{,}810 b^3$	0,753
4,0	$1{,}123 b^4$	$1{,}138 b^3$	0,745

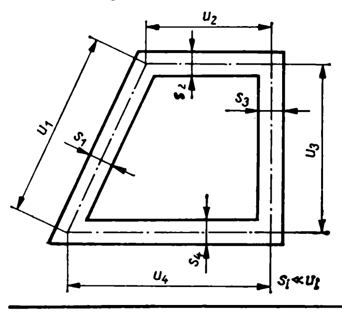
Offene dünnwandige Profile

	Torsionsträgheitsmoment	Torsionswiderstandsmoment
Offene dünnwandige Profile	$I_t = (\sum_i s_i^3 a_i)/3$	$W_t = (\sum_i s_i^3 a_i)/3 s_{max}$

s_2 s s_1

Die Querschnitte sind in Rechtecke (Länge a_i, Breite s_i) aufzuteilen, gekrümmte Teile müssen gestreckt werden.

Einfach geschlossene dünnwandige Profile



$I_t = 4 A_m^2 / \sum_i (u_i/s_i)$ $\qquad W_t = 2 A_m s$

Bei gleicher Wandstärke:

$I_t = W_t^2 / s \sum_i u_i$

$\tau_{max} = M_t / 2 A_m s_{min}$

$\tau_{min} = M_t / 2 A_m s_{max}$

A_m ist die von der Wandungsmittellinie eingeschlossene Fläche.

Die Gegenüberstellung der Trägheits- und Widerstandsmomente beider Querschnitte läßt erkennen, daß das Kastenprofil gegenüber dem offenen wesentlich verwindungssteifer ist. Im vorliegenden Fall erhöht sich die Masse um $^1/_4$, während das Trägheitsmoment auf den 237fachen Wert anwächst. Der Kastenbalken kann also bei gleicher Beanspruchung einen spürbar kleineren Querschnitt erhalten.

Beispiel 3. Welche Maße b und h muß ein Kastenprofil aus 3 mm starkem Stahlblech bei $\tau_{t,zul} = 60$ MPa und $M_t = 4 \cdot 10^5$ N · mm erhalten? Gewählt wird $h = 1{,}5b$.
Es ist $W_t = M_t/\tau_{zul} = 4 \cdot 10^5/60\ \text{mm}^3 = 6{,}667 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$. Für das Kastenprofil gilt nach Tafel 8: $W_t = 2A_m s = 2(h - b)(b - s)s = 2(1{,}5b - s)(b - s)s = 3b^2 s - 5bs^2 + 2s^3 = 6{,}67 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$, daraus erhält man durch Einsetzen von $s = 3$ mm nach Umformen die Gleichung $b^2 - 5b - 734 = 0$, die die eine Lösung $b = 29{,}7$ mm hat. Ausgeführt wird $b = 30$ mm und $h = 45$ mm, wobei $W_t = 6{,}8 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$, $I_t = 33{,}5 \cdot 10^3\ \text{mm}^4$ und $\tau_{t,vorh} = 58{,}8$ MPa ist. Der Werkstoffaufwand des [-Profils gegenüber dem Kastenquerschnitt des Beispiels 2 beträgt im vorliegenden Fall $m_{[}/m_{\square} = \varrho l(2 \cdot 8 \cdot 77 + 8 \cdot 200)/\varrho l(30 \times 45 - 24 \cdot 39) = 6{,}84$.

3.3. Einfache Stabilitätsprobleme

Festigkeitsberechnungen setzen ein *stabiles Gleichgewicht* zwischen inneren und äußeren Kräften voraus. Bei Bauteilen bestimmter Form (schlank, dünnwandig) können jedoch auch *indifferente* und *labile Zustände* auftreten. Diese Bauteile entziehen sich der weiteren Lastaufnahme durch Ausweichen, sobald die steigende Belastung einen bestimmten Wert (*kritische Last*) erreicht hat (Bild 112). Die sichere Funktion des Bauteils ist im allgemeinen nur bei einer Belastung gegeben, die kleiner als die kritische ist, wobei erfahrungsgemäß eine bestimmte Sicherheit einzuhalten ist. Während man das Ausweichen von Stäben *Knicken* nennt, heißt das Ausweichen von Platten und Schalen *Beulen* und das von Trägern *Kippen.*

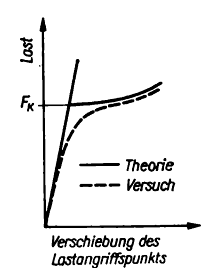


Bild 112. Kraft-Formänderungs-Diagramm eines schlanken Druckstabs

3.3.1. Knickung

Ein gerader Stab, dessen Länge gegenüber dem Querschnitt sehr groß ist, erfährt eine Verkürzung, wenn er an seinen Stirnflächen durch je eine Druckkraft beansprucht wird (gleich große Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie, Tafel 4). Beim Erreichen der kritischen oder Knicklast F_k entzieht sich der Stab durch seitliches Ausweichen einer weiteren Lastaufnahme.
Vor der Berechnung muß untersucht werden, ob die Knickspannung $\sigma_k = F_k/A$ unterhalb (*elastische Knickung*) oder oberhalb (*unelastische Knickung*) der Proportionalitätsgrenze σ_p liegt.

3.3.1.1. Elastische Knickung

Die *Knicklast* ergibt sich aus der EULERschen Knickgleichung:

$$F_k = \pi^2 EI/s^2 \tag{134}$$

Diese Gleichung erfaßt den Einfluß von Stablänge und Lagerungsart (zusammengefaßt mit Hilfe des Begriffs *freie Knicklänge s*). Theoretisch sind die in Bild 113 dargestellten 4 Fälle zu unterscheiden. Es lassen sich jedoch Einspannungen nach Fall 3 und 4 in der Praxis nur



unvollkommen realisieren. Man rechnet deshalb auch in diesen Fällen praktisch nach Fall 2; hier gilt:

$$F_k = \pi^2 EI/l^2 \tag{135}$$

Der Fall 1 ist der ungünstigste, er tritt nur selten auf. Der in der EULER-Gleichung enthaltene Querschnittskennwert I ist das *Trägheitsmoment in bezug auf die Querschnittshauptachse*, um die der Stab beim Ausknicken gebogen wird. Im allgemeinen ist das minimale Trägheitsmoment maßgebend. Es gibt jedoch auch Fälle, in denen die Lagerung bezüglich der beiden Hauptachsen unterschiedlich gestaltet ist. So ergeben sich z. B. bei der Berechnung eines Pleuels auf Knicken zwei unterschiedliche freie Knicklängen und damit zwei Rechnungsgänge.

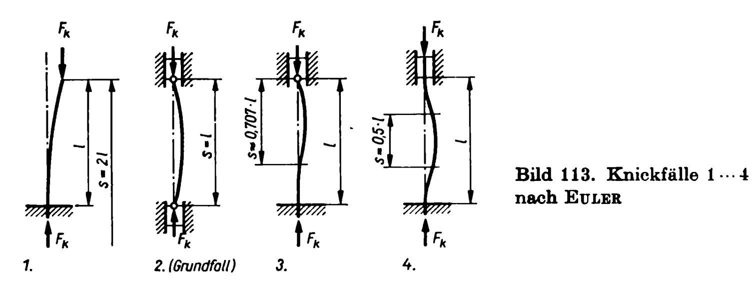


Bild 113. Knickfälle 1 ··· 4 nach EULER

Auch bei Knickbeanspruchungen ist es notwendig, eine *Sicherheit* vorzusehen. Bei S_k-facher Sicherheit ist die zulässige Kraft:

$$F_{zul} = \pi^2 EI/S_k s^2 \tag{136}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung für das erforderliche Trägheitsmoment:

$$I_{erf} = Fs^2 S_k/\pi^2 E \tag{137}$$

Der Gültigkeitsbereich der EULERschen Knickgleichung wird durch die Proportionalitätsspannung σ_p festgelegt. Dividiert man (134) durch den Stabquerschnitt A, so ergibt sich:

$$F_k/A = \sigma_k = \pi^2 EI/As^2 = \pi^2 E/\lambda^2 \leqq \sigma_p \tag{138}$$

wobei λ der Schlankheitsgrad ist:

$$\lambda = s/\sqrt{(I/A)} = s/i \tag{139}$$

i Trägheitsradius, siehe Tafel 5

Der Grenzwert λ_p für die Knickberechnung nach EULER ist somit:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{E/\sigma_p} \tag{140}$$

In Tabelle 13 sind Grenzwerte λ_p für einige Werkstoffe angegeben. Eine Knicklastberechnung nach EULER ist nur zulässig, wenn der Stab einen Schlankheitsgrad $\lambda \geqq \lambda_p$ aufweist.

Tabelle 13. Grenzwerte λ_p für die Gültigkeit der EULER-Knickgleichung und TETMAJER-Gleichungen zur Bestimmung der Knicklast (gültig für $\lambda < \lambda_p$)

Werkstoff	λ_p	σ_k in MPa
Nadelholz	100	$28{,}8 - 0{,}19\lambda$
Grauguß	80	$762 - 11{,}8\lambda - 0{,}052\lambda^2$
St 38, St 42	105	$304 - 1{,}12\lambda$
St 50, St 70	89	$329 - 0{,}61\lambda$
Legierte Baustähle	86	$461 - 2{,}26\lambda$

3.3.1.2. Unelastische Knickung

Im Bereich oberhalb der Proportionalitätsgrenze haben sich im Maschinenbau die von Tetmajer durch Versuche gewonnenen Gleichungen bewährt. Die Kurve der Versuchswerte wird bei Holz und Stahl durch die Gleichung $\sigma_k = a - b\lambda$ angenähert. In Tabelle 13 sind die Tetmajer-Gleichungen für einige wichtige Werkstoffe zusammengestellt.

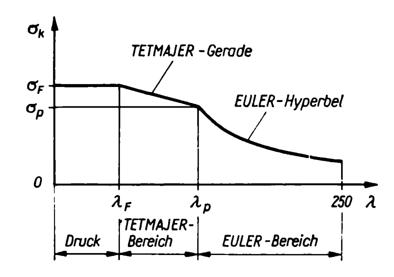


Bild 114. Knickspannung als Funktion des Schlankheitsgrads

Diese Gleichungen setzen voraus, daß die Stababmessungen bekannt sind; sie können deshalb nur zum Spannungsnachweis benutzt werden. Im Bild 114 sind die Knickspannungen über dem Schlankheitsgrad aufgetragen. Die Kurve ist im Euler-*Bereich* ($\lambda_p \leqq \lambda \leqq 250$) eine Hyperbel, im Tetmajer-*Bereich* ($\lambda_F < \lambda < \lambda_p$) für Stahl und Holz eine Gerade, deren höchster Punkt durch die *Quetschgrenze* σ_F festgelegt wird.

3.3.1.3. Omega-Verfahren

Im *ω-Verfahren* sind eine Reihe nebeneinander bestehender Vorschriften über die Druck- bzw. Knickberechnung im Hoch-, Kran- und Brückenbau zusammengefaßt.[3]) Die Knicksicherheit ist gesetzlich festgelegt und in den Berechnungsvorschriften berücksichtigt. Das ω-Verfahren dient zur Nachrechnung, wobei diese ähnlich wie bei einfacher Druckbeanspruchung geführt wird. Es gilt:

$$\sigma_{d,vorh} = F\omega/A \leqq \sigma_{d,zul} \tag{141}$$

Die Knickzahl ω ist abhängig vom Schlankheitsgrad und kann Tabellen entnommen werden:

$$\omega = \sigma_{d,zul}/\sigma_{k,zul} \tag{142}$$

Beispiel 1. Die 1600 mm lange Kolbenstange eines Luftverdichters aus St 50 wird durch die Kraft $F = 1,2 \cdot 10^5$ N auf Knickung nach Fall 2 (Bild 113) beansprucht. Welchen Durchmesser muß sie bei 5,5facher Sicherheit erhalten?
Nach Gl. (137) ergibt sich:

$$I_{erf} = Fl^2S_k/\pi^2E = 1,2 \cdot 10^5 \cdot 1,6^2 \cdot 10^6 \cdot 5,5/\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 = 8,15 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Tabelle 11 der Durchmesser $d = 64$ mm. Da $\lambda = l/i = 4l/d = 1600/16 = 100 > \lambda_p = 89$, ist die Berechnung nach Euler gerechtfertigt.

Beispiel 2. Ein 3 m langes Stahlrohr St 42 ($D = 120$ mm, $d = 100$ mm) soll als Stütze verwendet werden. Welche Kraft darf es bei 4facher Sicherheit aufnehmen?
Berechnung des Schlankheitsgrads: $i = 0,25\sqrt{D^2 + d^2} = 0,25 \cdot \sqrt{120^2 + 100^2}$ mm $= 39$ mm, $\lambda = l/i = 3000/39 = 77 < \lambda_p = 105$. Berechnung also nach Tetmajer. Nach Tabelle 13 ist: $\sigma_k = 304 - 1,12\lambda = 218$ MPa. Daraus ergibt sich mit $A = \pi(D^2 - d^2)/4 = 3455,7$ mm² die Knicklast $F_k = \sigma_k A = 218 \times 3455,7$ N $= 753 \cdot 10^3$ N $= 753$ kN. Die zulässige Kraft bei vierfacher Sicherheit beträgt somit $F = F_k/S_k = 753$ kN$/4 \approx 188$ kN.

Tafel 9. Verschiedene Beulfälle dünnwandiger Stahlbleche*)

Beulfall	Kritische Beulspannung σ_k bzw. τ_k in MPa	kE-Werte in MPa gelenkige Lagerung		feste Einspannung a/b	kE
Langes Druckblech $a \geqq b$	$kE(100s/b)^2$	74,5		1,0	188
				1,2	176
				1,4	174
				1,6	153
				1,8	150
				2,0	147
				2,5	141
				3,0	135
				∞	129
Kurzes Druckblech $a < b$	$kE(100s/a)^2$	$18{,}6\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2$		0,2	76
				0,3	79
				0,4	82
				0,5	88
				0,6	97
				0,7	112
				0,8	130
				0,9	156
Stegblech (Biegung)	$kE(100s/b)^2$	a/b	kE		
		$\geqq 0{,}67$	44,5		
		$< 0{,}67$	$30{,}8 + 34{,}8 \cdot (b^2/a^2) + 159(a^2/b^2)$		
Schubblech	$kE(100s/b)^2$	für $a > b$: $100 + 73{,}6(b^2/a^2)$ für $a < b$: $168 + 103(b^2/a^2)$ Werte von Lagerart unabhängig!			

Beulfall	Kritische Beulspannung	Bedingung	
Röhre unter Druck	$59{,}2 \cdot 10^3(s/r)$	$4r\sqrt{r/s} \geqq a \leqq 6\sqrt{sr}$	
	$18{,}7\ (100s/a)^2$	$a \leqq 0{,}1r$ (Rohrstummel)	
Röhre unter Schub	$\tau_{k,\text{eben}} + 20{,}5 \cdot 10^3(s/r)$	$a < 5r$	$\tau_{k,\text{eben}}$ siehe Beulfall Schubblech
	$44{,}4 \cdot 10^3 \cdot (s/r)\sqrt{100s/r}$	$a > 30r$	

*) Für andere Werkstoffe als Stahl sind die kE-Werte mit dem Faktor $E/(2{,}1 \cdot 10^5$ MPa) zu multiplizieren.

3.3.2. Beulung

Beulung tritt bei dünnwandigen Blechen, Röhren und Schalen auf. Das Ausbeulen beginnt bei der *Beulspannung* σ_k und ist abhängig von Werkstoff, Lagerung, Abmessungen und Beanspruchungsart. Wichtige Beulfälle sind in Tafel 9 angegeben. Die Beulformeln sind für gelenkige Lagerung oder feste Einspannung aller Plattenränder abgeleitet. Für die in der Praxis meist auftretenden Zwischenzustände müssen Zwischenwerte geschätzt werden.

Beispiel 1. Ein prismatisches Gerätegestell aus 1 mm starkem Stahlblech ist an den Kanten durch Winkelprofile versteift. Es hat quadratischen Grundriß mit $b = 400$ mm Seitenlänge, seine Höhe a beträgt 800 mm. Wird das Gestell auf Druck belastet, besteht die Gefahr des Ausbeulens der Wandbleche. Ab welcher Druckspannung ist mit dem Ausbeulen der Blechwände zu rechnen? Welchem Drucklastanteil entspricht die Beulspannung?
Im Sinne der Plattenbeulfälle der Tafel 9 liegt ein langes Druckblech vor. Mit der Annahme „gelenkige Lagerung" der Blechfeldränder ergibt sich die kritische Beulspannung aus:

$\sigma_k = kE(100s/b)^2 = 74{,}5\ \text{MPa} \cdot (100/400)^2 = 4{,}66\ \text{MPa}.$

Für den Idealfall („feste Einspannung") würde sich mit dem Seitenverhältnis $a/b = 400/200 = 2$ der Wert $kE = 147$ MPa und damit ein etwa doppelt so hoher Beulungswert ergeben. In Wirklichkeit wird das Beulen bei einem mittleren, zum Grenzfall „gelenkige Lagerung" tendierenden Spannungswert eintreten. Der Beulspannung $\sigma_k = 4{,}66$ MPa entspricht ein Druckkraftanteil von $F = \sigma_k A_{\text{Blech}} = 4{,}66\ \text{N/mm}^2 \cdot 4 \times 400\ \text{mm}^2 = 7456$ N. Bis zu diesem Wert können also die Wandbleche zur Aufnahme einer Last herangezogen werden.

Beispiel 2. Für eine Luftrohrleitung aus Stahlblech ($s = 0{,}5$ mm) mit einem Durchmesser von 400 mm und einer Länge a von 5 m besteht die Gefahr des Auftretens von Längsbelastung durch behinderte Wärmedehnung. Bei welcher Spannung würde theoretisch ein Ausbeulen (örtliches Knicken) zu erwarten sein?
Die Leitung kann als gedrungene Röhre unter Druck (Tafel 9) angesehen werden, denn sie erfüllt die Bedingung $4r\sqrt{r/s} = 4 \cdot 200\sqrt{200/0{,}5}\ \text{mm} = 16\ \text{m} > a = 10\ \text{m}$. Damit ergibt sich die kritische Beulspannung: $\sigma_k = 59{,}2 \cdot 10^3 \cdot (s/r) \cdot \text{MPa} = 148\ \text{MPa}$. Dieser Wert ist relativ hoch und würde einer Längskraft von $F_L = \sigma_k A = 148 \cdot \pi \cdot 400 \cdot 0{,}5\ \text{N} = 93\ \text{kN}$ entsprechen, d. h., Rohre üblicher Abmessungen sind beulsteif. Trotzdem liegt die Beulspannung im Beispiel unter dem Knickspannungswert nach Tetmajer. Es folgt nach der Tafel 5 (Kreisring-Querschnitt) mit $D \approx d$ für dünnwandige Rohre $i = 0{,}25 \times \sqrt{D^2 + d^2} \approx 0{,}25\sqrt{2d^2} = 0{,}353d = 141$ mm und $\lambda = a/i = (5000/141) = 35{,}5$, woraus sich die Knickspannung nach Tetmajer ergibt (siehe hierzu Tabelle 13): $\sigma_{kT} = (304 - 1{,}12\lambda)\ \text{MPa} = (304 - 1{,}12 \times 35{,}5)\ \text{MPa} = 264\ \text{MPa}$. Die Röhre würde also bei entsprechender Längslast nicht bogenförmig ausknicken, sondern durch Beulen örtlich nachgeben.

3.4. Komplexbeanspruchungen

In der Praxis treten meist mehrere Grundbeanspruchungsarten zugleich auf. Man unterscheidet gemeinsames Auftreten mehrerer Normalspannungen, mehrerer Tangentialspannungen oder gemeinsames Wirken von Normal- und Tangentialspannungen.

3.4.1. Beanspruchung mit Normalspannungen

Es werden die Spannungen berechnet, die jeweils die einzelnen Grundbeanspruchungsarten bewirken. Danach erfolgt für die interessierenden Stellen des zu untersuchenden Querschnitts eine Summierung dieser Einzelspannungen, wobei deren Vorzeichen zu berücksichtigen sind: Zugspannungen sind positiv, Druckspannungen negativ. In Tafel 10 sind häufig auftretende Komplexbeanspruchungen zusammengestellt. Die x- bzw. y-Achse ist jeweils Hauptachse des Querschnitts. Der Einfachheit halber wurden Rechteckquerschnitte gewählt.
Ein allgemeiner Fall ist in Beispiel 4 behandelt.

Beispiel 1. Welchen Durchmesser erhält die Zugstange (Bild 115), wenn die Kraft $F = 30$ kN am angeschmiedeten Auge so angreift, daß die Wirkungslinie mit einer Mantellinie zusammenfällt? Es sei $\sigma_{zul} = 120$ MPa.

Tafel 10. Häufig vorkommende Fälle von zusammengesetzten Beanspruchungen mit Normalspannungen

	Exzentrischer Zug (oder Druck)	Biegung und Zug (oder Druck)	Schiefe Biegung (Biegung um zwei Hauptachsen ohne Querkräfte)	
Schnittreaktionen und äußere Belastung	$M_b = Fa$	$M_b = F_x z$	$M_x = F_y z$ $M_y = F_x z$	$M_x = F_y z$ $M_y = F_x z_1$
Spannungen	$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fa}{I_y} x$ $\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{Fa}{W}$ $= \sigma_z + \sigma_b$	$\sigma = \frac{F_z}{A} + \frac{F_x z}{I_y} x$ $\sigma_{max} = \frac{F_z}{A} + \frac{F_x z}{W}$ $= \sigma_z + \sigma_b$	$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$ (im Punkt P) $\sigma_A = -\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$ $= \sigma_{max}$	
Nullinie	$x_0 = -\frac{I_y}{Aa}$	$x_0 = -\frac{F_z I_y}{F_x A z}$	$y_1 = \frac{I_x M_y}{I_y M_x} x = x \tan \alpha$	

Aus $\sigma_{max} = F/A + Fea/I = 4F/d^2\pi + 64Fd^2/4d^4\pi = 20F/d^2\pi \leqq \sigma_{zul}$ wird $d = \sqrt{20F/\sigma_{zul}\pi} = \sqrt{20 \cdot 30 \cdot 10^3/120\pi}$ mm $\approx$ 40 mm. Der Querschnitt wird fünfmal so groß wie bei reinem Zug, wo $d = \sqrt{4F/\sigma_{zul}\pi}$ ist.

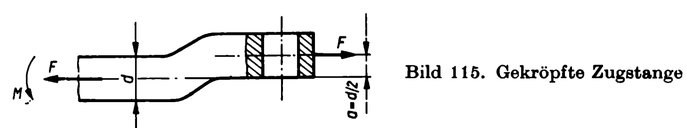


Bild 115. Gekröpfte Zugstange

Beispiel 2. Am Ende eines prismatischen Stabs mit $h = 1{,}5b$ greift eine Kraft $F = 1000$ N an (Bild 116). a) Bei welchem Winkel φ ist die Spannung in A ein Maximum? b) Wie groß sind die Spannungen in den Eckpunkten A, B, C und D? c) Welche Neigung hat die Nullinie gegenüber der x-Achse? d) Wie groß ist σ_A, wenn $\varphi = 0°$ bzw. $90°$?

a) $\sigma_A = F_x l/W_y + F_y l/W_x = 6Fl \cos\varphi/hb^2 + 6Fl \sin\varphi/bh^2 = 6Fl \cdot [(\cos\varphi/1{,}5b^3) + (\sin\varphi/1{,}5^2b^3)]$ $= 6Fl(1{,}5 \cdot \cos\varphi + \sin\varphi)/2{,}25b^3$. σ_A wird ein Maximum, wenn $d\sigma_A/d\varphi = 6Fl(-1{,}5 \sin\varphi + \cos\varphi)/2{,}25b^3 = 0$. Dieser Wert muß in seinem Klammerausdruck gleich Null sein, woraus sich $\cos\varphi = 1{,}5 \sin\varphi$ oder $\cos^2\varphi = 2{,}25 \sin^2\varphi = 2{,}25 \cdot (1 - \cos^2\varphi)$ ergibt.
Daraus folgt $\cos\varphi = 0{,}8320$, oder $\varphi \approx 33{,}70°$.

b) Aus $W_x = bh^2/6 = 3 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$ und $W_y = hb^2/6 = 2 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$ sowie $M_y = F_x l = Fl \cos\varphi = 166{,}4 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{mm}$ und $M_x = F_y l = Fl \sin\varphi = 110{,}9 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot \text{mm}$ ergeben sich die Spannungen:
$\sigma_A = F_x l/W_y + F_y l/W_x = (166{,}4/2 + 110{,}9/3)\ \text{MPa} = 120{,}2\ \text{MPa}$ und $\sigma_B = F_x l/W_y - F_y l/W_x$ $= (166{,}4/2 - 110{,}9/3)\ \text{N/mm}^2 = 46{,}2\ \text{MPa}$ sowie $\sigma_C = -(F_x l/W_y) - (F_y l/W_x) = -\sigma_A = -120{,}2\ \text{MPa}$ und $\sigma_D = -(F_x l/W_y) + (F_y l/W_x) = -\sigma_B = -46{,}2\ \text{MPa}$.

c) Die Neigung der Nullinie gegenüber der x-Achse ergibt sich mit $I_x = bh^3/12 = 45 \cdot 10^3\ \text{mm}^4$ und $I_y = hb^3/12 = 20 \cdot 10^3\ \text{mm}^4$ aus $\tan\alpha = I_x M_y / I_y M_x = 3{,}38$. Der Winkel beträgt also $\alpha = 73{,}5°$.

d) Bei $\varphi = 0$ ist $\sigma_A = Fl/W_y = 100\ \text{MPa}$ und bei $\varphi = 90°$ ist $\sigma_A = Fl/W_x = 66{,}7\ \text{MPa}$.

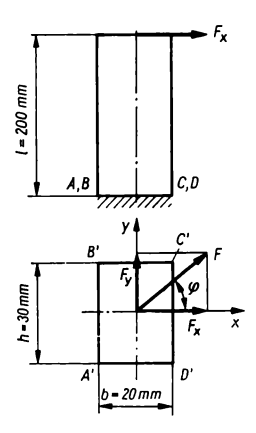


Bild 116. Schiefe Biegung

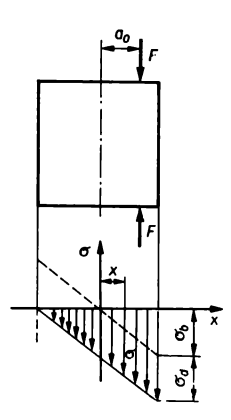


Bild 117. Exzentrischer Druck, Bestimmung der Kernweite

Beispiel 3. Gegeben ist eine Säule mit Kreisquerschnitt und außermittiger Druckbelastung. Um welchen Betrag a_0 darf die Druckkraft F im Höchstfalle außermittig angreifen, wenn nur Druckspannungen im Querschnitt auftreten sollen?
Entsprechend Bild 117 gilt für die linke äußere Faserschicht die Bedingung $\sigma_b - \sigma_d = 0$ oder $Fa_0/W - F/A = 0$. Daraus ergibt sich mit $W = \pi D^3/32$ und $A = \pi D^2/4$ der Wert $a_0 = D/8$.
a_0 heißt *Kernweite*, die von der Kernweite begrenzte Fläche *Querschnittskern*. Für den Kreisring beträgt die Kernweite $a_0 = (D/8)\,[1 + (d/D)^2]$, für das Quadrat $a_0 = a/6$.

Beispiel 4. Der Querschnitt eines Freiträgers sei ein ungleichschenkliges Winkelprofil 60 mm × 40 mm × 6 mm (Bild 118). Der Träger werde durch eine im Querschnittspunkt F wirkende Längskraft $F = 10$ kN auf exzentrischen Zug allgemeiner Art belastet, d. h., im Querschnitt entstehen gleichzeitig Biegung um beide Querschnittshauptachsen und Zugbelastung. Es sind die in den Eckpunkten A, B, C und D entstehenden Normalspannungswerte sowie die Lage der normalspannungsfreien Linie (Nullinie) des Querschnitts zu ermitteln!
Zur Berechnung der Flächenmomente wird der Querschnitt in zwei Rechteckteilflächen ① und ② gegliedert, wodurch zunächst die Schwerpunktskoordinaten bestimmt werden können. Danach folgt die Berechnung der Flächenmomente 2. Ordnung in bezug auf die Schwerpunktsachsen x und y. Mit den Werten nach Bild 118a ergibt sich durch mehrfache Anwendung der Sätze von STEINER (94), (95) und (96):

$$I_x = [(40 \cdot 6^3/12) + 17{,}2^2 \cdot 240 + (6 \cdot 54^3/12) + 12{,}8^2 \cdot 324]\ \text{mm}^4 = 203 \cdot 10^3\ \text{mm}^4,$$

$$I_y = [(6 \cdot 40^3/12) + 9{,}8^2 \cdot 240 + (54 \cdot 6^3/12) + 7{,}2^2 \cdot 324]\ \text{mm}^4 = 73 \cdot 10^3\ \text{mm}^4,$$

$$I_{xy} = [0 + 9{,}8 \cdot 17{,}2 \cdot 240 + (-7{,}2) \cdot (-12{,}8) \cdot 324]\ \text{mm}^4 = 70{,}3 \cdot 10^3\ \text{mm}^4.$$

Wegen der Asymmetrie des Querschnitts sind y und x jedoch keine Trägheitshauptachsen. Es werden daher nach Gl. (101) die Hauptträgheitsmomente berechnet:

$$I_{I,II} = \left[(203 + 73) \cdot 10^3/2 \pm (10^3/2)\sqrt{(203 - 73)^2 + 4 \cdot 70{,}3^2}\right]\ \text{mm}^4.$$

Also ist $I_{\mathrm{I}} = 233{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^4$ das *maximale* Trägheitsmoment und $I_{\mathrm{II}} = 42{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^4$ das *minimale* Trägheitsmoment.
Die Lage der Hauptachsen folgt aus Gl. (100):
$\tan 2\alpha_0 = 2 \cdot 70{,}3 \cdot 10^3/(73 - 203) \cdot 10^3 = -1{,}08$ bzw. $\alpha_0 = -23{,}6°$.
Die Hauptträgheitsachsen werden in den Querschnitt eingezeichnet (Bild 118b) und die Koordinaten des Lastangriffspunkts F im Hauptachsensystem bestimmt: $a_{\mathrm{I}} = 11{,}6\,\mathrm{mm}$, $a_{\mathrm{II}} = 23{,}6\,\mathrm{mm}$. In analoger Weise können die Abstände e_{I} und e_{II} der Eckpunkte von den Hauptachsen bestimmt werden.

Bild 118. Zur Berechnung eines Winkelprofils

Die Gesamtspannung in jedem der Eckpunkte A bis E ergibt sich dann durch algebraische Addition der Zugspannungen σ_z durch die Längskraft F (Diagramm 1), der Biegespannungen σ_{bI} aus der Biegung durch das Moment $M_{\mathrm{I}} = Fa_{\mathrm{II}}$ um die Achse I (Diagramm 2) und der Biegung durch das Moment $M_{\mathrm{II}} = Fa_{\mathrm{I}}$ um die Achse II (Diagramm 3). Allgemein gilt:

$\sigma = \sigma_z + \sigma_{\mathrm{bI}} + \sigma_{\mathrm{bII}}$, speziell unter Beachtung der Vorzeichen:

$$\sigma_{\mathrm{A}} = +(F/A) + (Fa_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{IIA}}/I_{\mathrm{I}}) + (Fa_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{IA}}/I_{\mathrm{II}}),$$
$$\sigma_{\mathrm{B}} = +(F/A) + (Fa_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{IIB}}/I_{\mathrm{I}}) + (Fa_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{IB}}/I_{\mathrm{II}}),$$
$$\sigma_{\mathrm{C}} = +(F/A) - (Fa_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{IIC}}/I_{\mathrm{I}}) + (Fa_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{IC}}/I_{\mathrm{II}}),$$
$$\sigma_{\mathrm{D}} = +(F/A) - (Fa_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{IID}}/I_{\mathrm{I}}) + (Fa_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{ID}}/I_{\mathrm{II}}),$$
$$\sigma_{\mathrm{E}} = +(F/A) + (Fa_{\mathrm{II}}e_{\mathrm{IIE}}/I_{\mathrm{I}}) - (Fa_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{IE}}/I_{\mathrm{II}}).$$

Die Rechnung ergibt folgende Zahlenwerte:

$\sigma_A = (17{,}7 + 1{,}01 \cdot 30{,}0 + 2{,}74 \cdot 19{,}3)\ \text{N/mm}^2 = 100{,}9\ \text{MPa},$
$\sigma_B = (17{,}7 + 1{,}01 \cdot 24{,}6 + 2{,}74 \cdot 21{,}4)\ \text{N/mm}^2 = 101{,}1\ \text{MPa}$
$\sigma_C = (17{,}7 - 1{,}01 \cdot 38{,}5 + 2{,}74 \cdot 11{,}8)\ \text{N/mm}^2 = 11{,}1\ \text{MPa},$
$\sigma_D = (17{,}7 - 1{,}01 \cdot 40{,}7 + 2{,}74 \cdot 6{,}5)\ \text{N/mm}^2 = -5{,}6\ \text{MPa}.$
$\sigma_E = (17{,}7 + 1{,}01 \cdot 14{,}2 - 2{,}74 \cdot 17{,}4)\ \text{N/mm}^2 = -15{,}7\ \text{MPa}$

Es wird empfohlen, die Spannungsdiagramme der Grundbeanspruchungen maßstäblich aufzuzeichnen (Bild 118b, Diagramme 1 bis 3). Die Nullinie des Querschnitts kann zeichnerisch gefunden werden. In den Spannungsdiagrammen 4 und 5 sind die resultierenden Spannungswerte für die Eckpunkte $C-D$ und $E-A$ aufgetragen, zwischen denen im Querschnitt der Umschlag von positiven zu negativen Spannungen erfolgt. Die Diagrammnullpunkte liefern die geometrischen Orte der spannungsfreien Randpunkte R_1 und R_2, wodurch die Nullinie gezeichnet werden kann.

Hinweis auf den Komplexbeanspruchungsfall „Schiefe Biegung mit Längskraftbelastung“:

Das in Beispiel 4 dargestellte Lösungsverfahren kann auch für allgemeine Fälle schiefer Biegung angewendet werden, wenn an die Stelle der Momentenausdrücke $M = F \cdot a$ die Biegemomente der schiefen Biegung eingesetzt werden.

3.4.2. Beanspruchung mit Normal- und Tangentialspannungen

3.4.2.1. Einführen einer Vergleichsspannung

Treten σ und τ gleichzeitig an einem Schnittelement auf, so liegt ein *mehrachsiger Spannungszustand* vor, d. h., die auftretenden Spannungen wirken in mindestens zwei Richtungen des (kartesischen) Koordinatensystems. Dagegen sind die die Festigkeitseigenschaften beschreibenden Kennwerte (σ_B, σ_F) für den *einachsigen Spannungszustand* bekannt. Um die Bruchgefahr beim mehrachsigen Spannungszustand einschätzen zu können, führt man diesen rechnerisch mit Hilfe der *Bruchhypothese* (Festigkeitshypothese) auf einen einachsigen zurück (Bild 119). Dies geschieht, indem eine *Vergleichsspannung* σ_v ermittelt wird, für die dann stets $\sigma_v \approx \sigma_{zul}$ gelten muß.

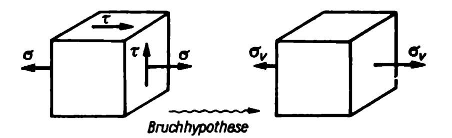


Bild 119. Zurückführen des mehrachsigen Spannungszustandes auf den einachsigen Spannungszustand

Von den möglichen Hypothesen haben für zähe Werkstoffe (also auch für die meisten Stähle) die folgenden die größte praktische Bedeutung erlangt.

Schubspannungshypothese (nach MOHR)

$$\sigma_{vS} = \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \tag{143}$$

$$\alpha_0 = \sigma_{zul}/2\tau_{zul} \tag{144}$$

Hypothese der größten spezifischen Gestaltänderungsenergie (nach HUBER, V. MISES *und* HENCKY)

$$\sigma_{vG} = \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2} \tag{145}$$

$$\alpha_0 = \sigma_{zul}/1{,}73\tau_{zul} \tag{146}$$

Das Anstrengungsverhältnis α_0 hängt von den Lastfällen für σ und τ ab. Es ist gleich eins zu setzen, wenn gleiche Lastfälle (I, II oder III) für die beiden Beanspruchungen vorliegen.

Beispiel 1. Bei einem Torsionspendel aus Stahldraht ($d = 3$ mm, $l = 0{,}8$ m) betrage die Auslenkung der Schwungscheibe ($F_G = 400$ N) aus der Mittellage jeweils 30°. Welche Vergleichsspannung liegt nach der Schubspannungshypothese vor ($\sigma_{zul} = 330$ MPa, $\tau_{t,III,zul} = 90$ MPa)?
Aus $\hat{\varphi} = M_t l/GI_t$ ergibt sich $M_t = GI_t\hat{\varphi}/l = GW_t d\hat{\varphi}/2l$. Damit wird $\tau_t = M_t/W_t = Gd\hat{\varphi}/2l = (Gd/2l) \times (\varphi/57{,}3°) = (80 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0{,}523/2 \cdot 800)$ N/mm² $= 78{,}5$ MPa. Weiterhin ist $\sigma_z = F_G/A = 400/7{,}07$ N/mm² $= 56{,}6$ MPa und $\alpha_0 = 330/2 \cdot 90 = 1{,}83$.
Nach der Schubspannungshypothese ergibt sich

$$\sigma_{vS} = \sqrt{56{,}6^2 + 4(1{,}83 \cdot 78{,}5)^2}\ \text{N/mm}^2 = 293\ \text{MPa} < \sigma_{zul}.$$

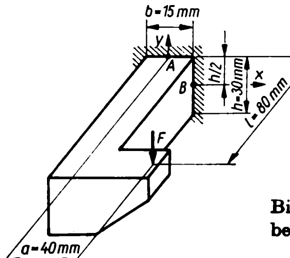


Bild 120. Tragtraverse mit Biege- und Torsionsbeanspruchung ($F = 2$ kN)

Beispiel 2. Eine Traverse mit Rechteckquerschnitt wird statisch belastet (Bild 120). Gesucht sind die Spannungen in den Punkten A und B des Einspannungsquerschnitts nach der Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie!
Für den Punkt A gilt:
$\sigma_b = M_b/W = 6Fl/bh^2 = 6 \cdot 2000 \cdot 80$ N $\cdot$ mm$/15 \cdot 30^2$ mm³ $= (160/2{,}25)$ N/mm² $= 71$ MPa. Nach Tafel 8 (Rechteck und Quadrat) ist für $h/b = 3/1{,}5 = 2$ das Torsionswiderstandsmoment $W_t = 0{,}493b^3 = 1{,}66 \times 10^3$ mm³ und $\tau_1/\tau_t = 0{,}795$. Daraus errechnet sich τ_1:
$\tau_1 = 0{,}795\tau_t = 0{,}795M_t/W_t = 0{,}795Fa/0{,}493b^3 = (0{,}795 \cdot 80/1{,}66)$ N/mm² $= 38{,}3$ MPa. Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese beträgt also:

$$\sigma_{vG} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_1^2} = \sqrt{71^2 + 3 \cdot 38{,}3^2}\ \text{N/mm}^2 = 97{,}2\ \text{MPa}.$$

Im Punkt B wirken die Torsionsspannung $\tau_t = M_t/W_t = Fa/0{,}493b^3 = 48{,}1$ MPa sowie die durch die Querkraft bedingte Schubspannung $\tau_s = 3F_Q/2A = 3F/2bh = (3 \cdot 2000/2 \cdot 15 \cdot 30)$ N/mm² $= 6{,}7$ MPa. Beide Spannungen haben die gleiche Richtung (senkrecht nach oben) und können somit addiert werden (Normalspannungen sind in B nicht vorhanden): $\tau_B = (48{,}1 + 6{,}7)$ N/mm² $= 54{,}8$ MPa.

3.4.2.2. Biegung und Torsion kreisförmiger Querschnitte

Die Berechnung der Vergleichsspannung setzt die Kenntnis der Normal- und Tangentialspannungen voraus, d. h., die Kräfte und Momente sowie der Querschnitt müssen bekannt sein.
In dem häufig vorkommenden Fall Biegung und Verdrehung von Stäben mit kreisförmigem Querschnitt ist es möglich, eine Entwurfsgleichung anzugeben. Aus der Gl. (143) ergibt sich zusammen mit $\sigma_b = M_b/W$, $\tau_t = M_t/W_t = M_t/2W$:

$$\sigma_{vS} = \sqrt{M_b^2 + \alpha_0^2 M_t^2}/W = M_{vS}/W \leqq \sigma_{b,zul} \tag{147}$$

und daraus die Entwurfsgleichung für W_{erf} (M_{vS} Vergleichsmoment):

$$W_{erf} = M_{vS}/\sigma_{b,zul} = \sqrt{M_b^2 + \alpha_0^2 M_t^2}/\sigma_{b,zul} \tag{148}$$

Nach der Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie gilt die Entwurfsgleichung:

$$W_{erf} = M_{vG}/\sigma_{b,zul} = \sqrt{M_b^2 + 0{,}75\alpha_0^2 M_t^2}/\sigma_{b,zul} \tag{149}$$

Beispiel. Auf einer bei A und B gelagerten Welle konstanten Querschnitts (Bild 121) sind zwei Hebel befestigt, an deren Enden die Kräfte F_1 und F_2 angreifen. $\sigma_{b,zul} = 130$ MPa. Es ist der Wellendurchmesser zu bestimmen!

Aus den Gleichgewichtsbedingungen erhält man:

$\Sigma M_z = 0 \rightarrow F_2 = F_1 l_1 / l_2 = 1000(150/250)\ \text{N} = 600\ \text{N},$

$\Sigma M_x = 0 \rightarrow F_{By} = F_1(50/130) = 1000(50/130)\ \text{N} = 385\ \text{N},$

$\Sigma M_y = 0 \rightarrow F_{Bx} = F_2(80/130) = 600(80/130)\ \text{N} = 369\ \text{N}$ und

$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{369^2 + 384^2}\ \text{N} = 533\ \text{N}.$

Bei A ist das Biegemoment $M_b = F_1 \cdot 50\ \text{mm} = 1000 \cdot 50\ \text{N} \cdot \text{mm} = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$ und das Torsionsmoment $M_t = F_1 l_1 = 150\ \text{N} \cdot \text{m}$. Am Sitz des Hebels 2 wirken das Biegemoment $M_b = F_B \cdot 50\ \text{mm} = 26{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}$ und das Torsionsmoment $M_t = F_2 l_2 = 150\ \text{N} \cdot \text{m}$. Die Welle wird also am Lager A am höchsten beansprucht.

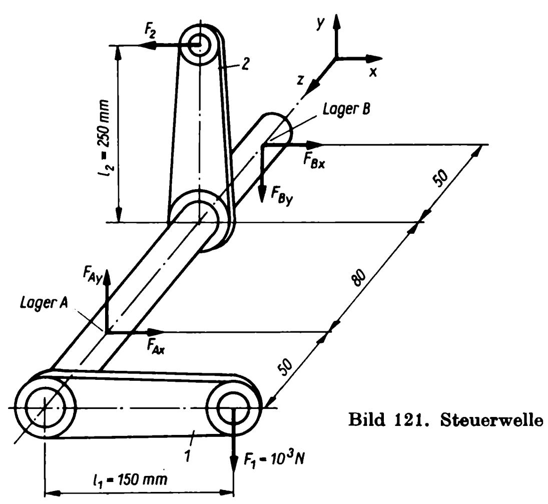


Bild 121. Steuerwelle

Bestimmung des Vergleichsmoments bei A: Da Biegung und Torsion von den gleichen Kräften hervorgerufen werden, liegen gleiche Lastfälle vor, deshalb ist $\alpha_0 = 1$. Es gilt:

$M_{vG} = \sqrt{M_b{}^2 + 0{,}75 M_t{}^2} = 10^4 \sqrt{5^2 + 0{,}75 \cdot 15^2}\ \text{N} \cdot \text{mm} = 139\ \text{N} \cdot \text{m}.$

Daraus bestimmt sich W_{erf} zu: $W_{erf} = M_{vG}/\sigma_{b,zul} = 139 \cdot 10^3/130\ \text{mm}^3 = 1{,}07 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$. Mit Hilfe der Tabelle 11 ergibt sich hieraus der Durchmesser $d = 22{,}2$ mm. Ausgeführt wird $d = 25$ mm.
Um Werkstoff zu sparen, werden für glatte Wellen oft Rohre verwendet. Wählt man im vorliegenden Fall ein Rohr mit dem Außendurchmesser $D = 40$ mm, so berechnet sich der Innendurchmesser aus: $I_{erf} = W_{erf} D/2 = 21{,}4 \cdot 10^3\ \text{mm}^4$. Aus $I = \pi D^4/64 - \pi d^4/64$ ergibt sich $\pi d^4/64 = \pi D^4/64 - I = 104{,}3 \times 10^3\ \text{mm}^4$. Gewählt wird nach Tabelle 11 $d = 36$ mm mit $I = 82{,}448 \cdot 10^3\ \text{mm}^4$. Das Querschnittsverhältnis von Rohr zu Vollwelle beträgt also $(\pi/4)\,(40^2 - 36^2)/(\pi/4) \cdot 25^2 = 0{,}49$. Die Einsparung an Werkstoff beträgt bei Verwendung von Rohr an Stelle des Vollmaterials etwa 50%.

3.5. Festigkeit bei dynamischer Beanspruchung

3.5.1. Unterscheidungsmerkmale

Funktionell bedeutsame Bauteile und Tragkonstruktionen (z. B. in Maschinen, Förderanlagen, Fahrzeugen, Geräten der Landtechnik, Brücken usw.) unterliegen meist *dynamischen* (*schwingenden*) *Beanspruchungen*, d. h., die belastenden Kräfte und Momente ändern sich ständig oder zumindest zeitweilig. Bei der Festigkeitsberechnung ist dabei zu unterscheiden, ob das betreffende Bauteil für eine *unbegrenzte* oder *begrenzte Betriebsdauer* ausgelegt werden muß. Im Fall einer begrenzten Betriebsdauer ist zu berücksichtigen, ob die Beanspruchungen *stochastischer Art* (wie z. B. bei der Beanspruchung der Achsschenkel in einem Kraftfahrzeug) sind, oder ob Sonderfälle vorliegen, in denen die Beanspruchungen zwischen zwei festen Grenzen pendeln (siehe Bild 122).

3.5.2. Beanspruchungen mit konstanter Ober- und Unterspannung, Wöhler-Kurve, Dauerfestigkeitsdiagramm

Die zeitlichen Spannungsänderungen zwischen einem festen oberen Wert σ_o (*Oberspannung*) und einem festen unteren Wert σ_u (*Unterspannung*) sind im Bild 122a (idealisiert) dargestellt. Ein einmaliger Lastwechsel heißt *Lastspiel*. Weiterhin sind definiert*):

- *Mittelspannung* $\sigma_m = (\sigma_o + \sigma_u)/2$
- *Spannungsamplitude* $\sigma_a = (\sigma_o - \sigma_u)/2$
- *Spannungsverhältnis* $\varkappa = \sigma_u/\sigma_o$

Weitere Begriffe sind dem Standard zu entnehmen.[4])
Häufig treten Sonderfälle auf:

- *Schwellbeanspruchung* (Lastfall II)
  Die Spannung pendelt zwischen Null und einem Maximalwert (Bild 122b) — z. B. Biegespannungen im Zahnfuß von Zahnrädern (Voraussetzung: konstantes Drehmoment).
- *Wechselbeanspruchung* (Lastfall III)
  Die Spannung pendelt zwischen einem positiven und einem gleich großen negativen Wert (Bild 122c) — z. B. Spannungen in einer auf Biegung beanspruchten Welle (Umlaufbiegung).

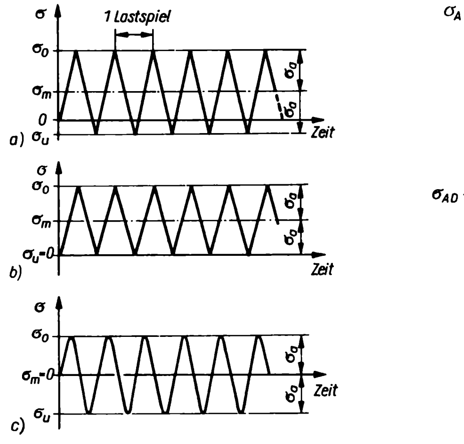


Bild 122. Dynamische Beanspruchung mit konstanter Mittelspannung σ_m und konstanten Spannungsamplituden σ_a. a) allgemein; b) Lastfall II; c) Lastfall III

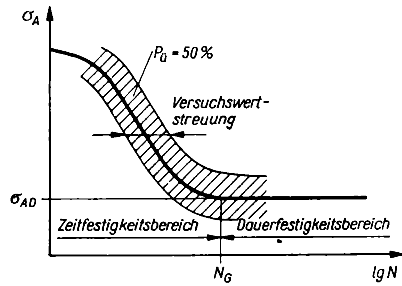


Bild 123. Wöhler-Kurve

Die experimentelle Festigkeitsermittlung dynamisch beanspruchter Teile erfolgt auf *Dauerschwingprüfmaschinen**). Die meist sehr stark streuenden Versuchsergebnisse werden statistisch ausgewertet (Bestimmung der *Überlebenswahrscheinlichkeit* $P_ü$)[5]) und als Wöhler-*Kurven* dargestellt[4]) (Bild 123). In den Diagrammen sind die Spannungsamplituden (nur bei konstanter Mittelspannung) oder die Oberspannungen über der zugehörigen, bis zum Bruch (oder Anriß) ertragenen Lastwechselzahl logarithmisch oder doppeltlogarithmisch aufgetragen.
Mit sinkender Spannung wächst die Lastwechselzahl. Spannungen unterhalb der Dauerschwingfestigkeitsamplitude erträgt der Versuchskörper (aus Stahl) praktisch unbegrenzt. Die *Grenzlastspielzahl* N_G unterteilt das Diagramm in einen *Zeitfestigkeits-* und in einen *Dauerfestigkeitsbereich.* Andere wichtige Werkstoffe (z. B. Aluminiumlegierungen) weisen keine ausgeprägte Dauerfestigkeitsgrenze auf.

*) s. auch Abschn. Werkstoffprüfung, Dynamische Dauerschwingversuche

Man bezeichnet $\sigma_D = \sigma_m \pm \sigma_A$ als *Dauerschwingfestigkeit* (kurz Dauerfestigkeit). Dieser Wert wird für Festigkeitsberechnungen von Bauteilen benötigt, die eine praktisch unbegrenzte Betriebsdauer aufweisen müssen.

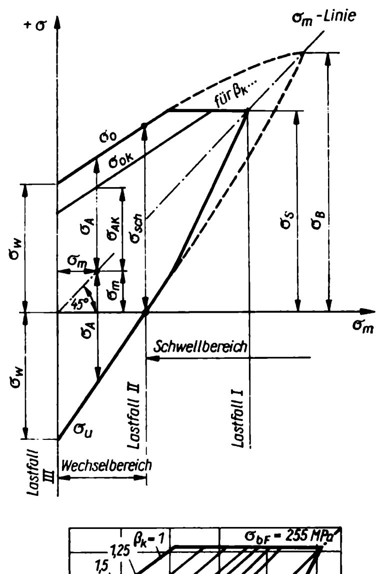


Bild 124. Dauerfestigkeitsdiagramm nach SMITH

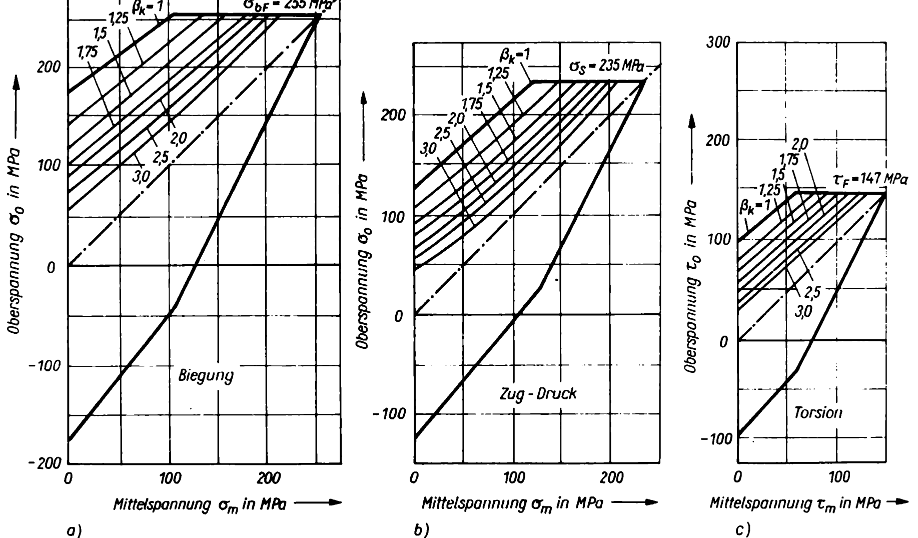


Bild 125. Dauerfestigkeitsdiagramme von St 38

Die Ergebnisse der Dauerfestigkeitsprüfungen, vorgenommen an Probestäben mit bestimmten Abmessungen und festgelegter Form, werden in Dauerfestigkeitsdiagrammen (Bild 124)*) wiedergegeben[6]). Je nach Zuordnung der Festigkeitskennwerte unterscheidet man Dauerfestigkeitsdiagramme nach

— SMITH $\sigma_D = f(\sigma_m)$, Bilder 124 bis 126
— HAIGH $\sigma_a = f(\sigma_m)$
— MOORE-KOMMERS-JASPER $\sigma_o = f(\sigma_u/\sigma_o)$

*) s. auch Bild 31, Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG



Die Diagramme (Bild 124 und Bild 125) nach [6]) gelten für glatte ($\beta_k = 1$) sowie gekerbte Probestäbe ($\beta_k > 1$), wobei die an den Kurven stehenden β_k-Werte nur bei $\sigma_m = 0$ Gültigkeit besitzen. Bei Beanspruchungen mit $\sigma_m > 0$ ist β_k als Zuordnung für die Bestimmung der Oberspannung aufzufassen und in der weiteren Berechnung zu verwenden.

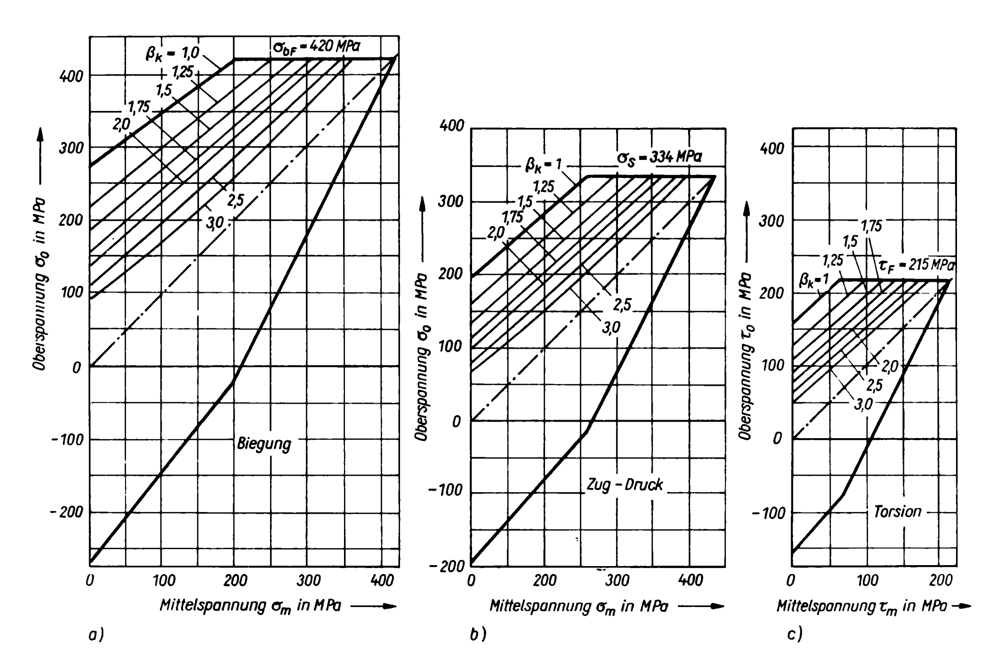


Bild 126. Dauerfestigkeitsdiagramme von St 60

3.5.3. Einflüsse auf die Dauerfestigkeit

Die Bauteile weichen hinsichtlich ihrer Form, Größe und Oberflächenbeschaffenheit praktisch immer von den für Dauerfestigkeitsbestimmungen verwendeten Probestäben ab. Die vom Bauteil ertragbare Spannungsamplitude berechnet sich aus:

$$\sigma'_{AK} = \sigma_{AK} K O_F q \qquad (150)$$

σ'_{AK} ertragbare Spannung; σ_{AK} Spannung unter Berücksichtigung der Kerbwirkung, dem Dauerfestigkeitsdiagramm zu entnehmen; K Größen(einfluß)faktor; O_F Oberflächenfaktor; q Querschnittsfaktor, Querschnittsbeiwert

Einfluß des Querschnitts

Die Querschnittsgröße wird durch die Faktoren K_1, K_2 und K_3 erfaßt (Bild 127). Siehe hierzu auch Tabelle 14. Die Einflußgröße q für die Querschnittsform ist ebenfalls Tabelle 14 zu entnehmen.

Einfluß der Oberfläche

Der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit wird durch den **Oberflächenfaktor** O_F berücksichtigt (Bild 128).
Bei Torsion ist O_F umzurechnen:

$$O_{Ft} = 0{,}575 O_F + 0{,}425 \qquad (151)$$

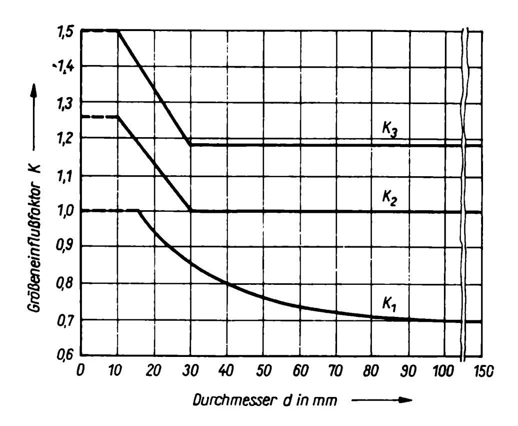


Bild 127. Abhängigkeit der Größeneinflußfaktoren

Tabelle 14. Größeneinflußfaktoren K und Querschnittsfaktoren q

Faktor		Biegung: Flachbiegung (Hin- und Herbieg.)	Biegung: Umlaufbiegung	Zug—Druck	Torsion
K für	Baustähle, Vergütungsstähle		K_1	1	K_1
	Einsatzstähle		K_1K_3	K_2	K_1K_3
q für	Kreisquerschnitt	0,9	1,0	1,0	1,0
	Rechteckquerschnitt	1,1	0,8	0,9	0,8

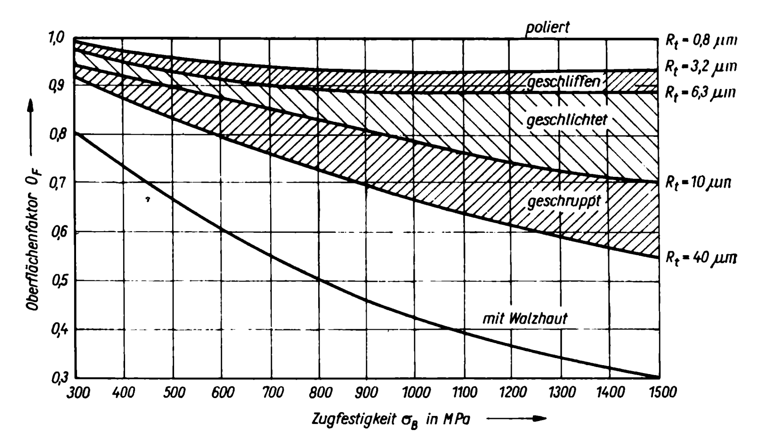


Bild 128. Oberflächenfaktor O_F für Biegung, Zug und Druck (R_t Rauhtiefe)



3.5.3.1. Kerbwirkung

Besitzt ein Bauteil schroffe Querschnittsänderungen (Bohrungen, Rillen, Absätze o. ä.), dann treten bei Belastungen an diesen Stellen Spannungserhöhungen auf. Die maximale Spannung kann unter Zuhilfenahme der *Formziffer* α_k und der *Nennspannung* σ_n, die man aus der jeweiligen Grundspannung erhält, berechnet werden (Bild 129):

$$\sigma_{max} = \sigma_n \alpha_k \quad \text{bzw.} \quad \tau_{max} = \tau_n \alpha_k \tag{152}$$

Hierbei sind idealelastisches Verhalten des Werkstoffs sowie ruhende Belastung vorausgesetzt. α_k läßt sich analytisch ermitteln; die Ergebnisse sind in Diagrammen zusammengefaßt.[6])

Für Dauerfestigkeitsberechnungen gekerbter Bauteile wird die *Kerbwirkungszahl* β_k benötigt ($\beta_k = \sigma_{D,ungekerbt}/\sigma_{D,gekerbt}$). Für technisch häufige Fälle ist sie durch Versuche ermittelt und in Diagrammen dargestellt worden (siehe Bilder 130, 131, 132 und Tafel 11).[6]) Stehen spezielle Unterlagen nicht zur Verfügung, muß β_k über die Formziffer α_k näherungsweise berechnet werden.

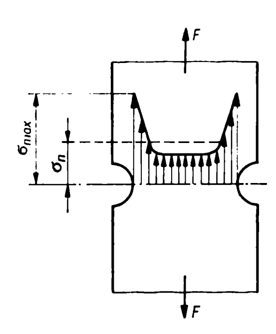


Bild 129. Spannungsverteilung in einem gekerbten Zugstab

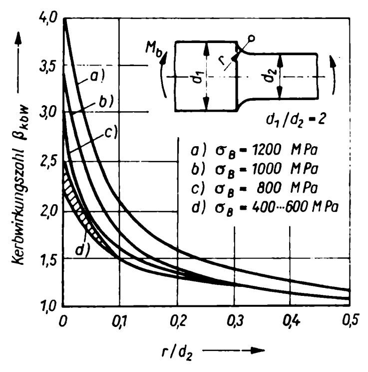


Bild 130. Kerbwirkungszahl für biegebeanspruchte Rundstäbe ($d_1/d_2 = 2$)

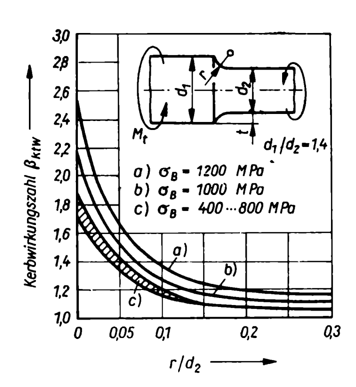


Bild 131. Kerbwirkungszahl für torsionsbeanspruchte Rundstäbe ($d_1/d_2 = 1,4$)

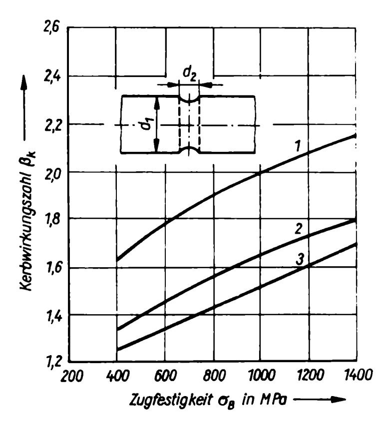


Bild 132. Kerbwirkungszahlen quergebohrter Rundstäbe. *1* bei Zug—Druck ($d_2/d_1 = 0,2$ bis 0,45); *2* bei Biegung ($d_2/d_1 = 0,15 \cdots 0,55$); *3* bei Torsion ($d_2/d_1 = 0,15 \cdots 0,5$); $d_1 = 15$ mm

Tafel 11. Kerbwirkungszahlen β_{kbW} und β_{ktW} für Wellen mit Nabensitzen*)*)

Nabenform	Passung	β_k, bezogen auf d		Zugfestigkeit σ_B in MPa								
				400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
	H7/n6	β_{kbW}		1,8	2,0	2,1	2,3	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9
		β_{ktW}		1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9
	H8/u8	β_{kbW}		1,8	2,0	2,1	2,3	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9
		β_{ktW}		1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9
$\frac{r}{d} \geq 0{,}06$	H8/u8	β_{kbW}		1,6	1,7	1,8	1,9	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3
		β_{ktW}		1,0	1,1	1,2	1,2	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5
$\frac{r}{d} \geq 0{,}06$	H7/h6	Naben-sitz	β_{kbW}	2,0	2,2	2,4	2,6	3,0	3,1	3,2	3,2	3,2
			β_{ktW}	1,3	1,4	1,6	1,7	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1
		Gewinde-kern	β_{kbW}	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0
			β_{ktW}	1,0	1,0	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4
	H8/u8	β_{kbW}		1,5	1,6	1,7	1,8	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2
		β_{ktW}		1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5
$1{,}75d$; $\frac{r}{d} = 0{,}5$	H8/u8	β_{kbW}		1,0	1,0	1,1	1,1	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4
		β_{ktW}		1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2

*) Für Passungen mit festerem Sitz gelten die gleichen Werte β_k für die entsprechende Nabenform.

In Tafel 11 sind Kerbwirkungszahlen für die Biegebeanspruchung von Wellen (β_{kbW}) und Kerbwirkungszahlen für die Torsionsbeanspruchung von Wellen (β_{ktW}) angegeben. Da die β_k-Werte nur für das jeweilige Durchmesser-Verhältnis gelten, sind sie für andere Verhältnisse umzurechnen:

$$\beta_k' = 1 + c(\beta_k - 1) \tag{153}$$

Die Umrechnungsfaktoren c für $d_1/d_2 \leqq 1{,}4$ (Torsion) und für $d_1/d_2 \leqq 2$ (Biegung) sind Bild 133 zu entnehmen.

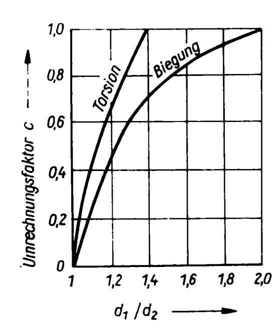


Bild 133. Umrechnungsfaktor c

3.5.3.2. Sicherheit gegen Dauerbruch[6])

Die *Sicherheit* dynamisch beanspruchter Bauteile ist das Verhältnis von *ertragbarer Spannungsamplitude* σ'_{AK} bzw. τ'_{AK} zu *Nennspannungsausschlag* σ_a bzw. τ_a (der mit Hilfe der entsprechenden Festigkeitsgleichung bestimmt wird):

$$S_\sigma = \sigma'_{AK}/\sigma_a = \sigma_{AK} K O_F q/\sigma_a \tag{154}$$

$$S_\tau = \tau'_{AK}/\tau_a = \tau_{AK} K O_{F\tau} q/\tau_a \tag{155}$$

Falls kein Dauerfestigkeitsdiagramm zur Verfügung steht, aus dem σ_{AK} bzw. τ_{AK} unmittelbar entnommen werden kann, bestimmt man diesen Wert aus dem für den glatten Probestab gültigen Spannungsausschlag σ_A bzw. τ_A und der Kerbwirkungszahl β_k:

$$\sigma_{AK} = \sigma_A/\beta_k \tag{156}$$

$$\tau_{AK} = \tau_A/\beta_k \tag{157}$$

Die Sicherheit von Bauteilen, die einer zusammengesetzten Beanspruchung ausgesetzt sind, berechnet man als *Vergleichssicherheit* S_v aus:

$$S_v = S_\sigma S_\tau/\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2} \tag{158}$$

oder bei Biegung und Zug aus:

$$S_v = (S_{\sigma z} + S_{\sigma b})/S_{\sigma z} S_{\sigma b} \tag{159}$$

Die Sicherheiten S_σ, $S_{\sigma z}$, $S_{\sigma b}$ und S_τ der Grundbeanspruchungen werden jeweils getrennt bestimmt. Allgemein verbindliche Zahlenangaben für Sicherheiten gegen Dauerbruch lassen sich nicht festlegen. Falls die der Berechnung zugrunde liegenden Annahmen zuverlässig sind, kann man S bzw. $S_v = 1{,}2 \cdots 1{,}5$ noch als zuverlässig ansehen.

Hänchen gibt Sicherheitswerte unter Berücksichtigung von Beanspruchungsart und prozentualer Häufigkeit der Höchstbelastung an [1].
Liegen über Belastung, Betriebszustände, Kerbwirkung u. a. nur Annahmen vor, dann sind größere Sicherheitszahlen als oben angegeben festzulegen.

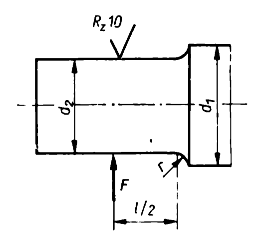


Bild 134. Lagerzapfen einer Welle

Beispiel 1. Es ist der Durchmesser d_2 des Lagerzapfens einer Welle (Bild 134) zu berechnen sowie die Sicherheit gegen Dauerbruch nachzuweisen.
Gegeben: Umlaufbiegung, $d_1 = 32$ mm; $l/2 = 20$ mm; $r = 3$ mm; $F = 8000$ N; St 60, geschliffene Oberfläche.
Aus der Berechnung von W_{erf} ergibt sich der Durchmesser d_2 nach der Tabelle 11:
$W_{erf} = M_b/\sigma_{b,III,zul} = (8000 \cdot 20/100)$ mm³ $= 1{,}6 \cdot 10^3$ mm³. Gewählt wird $d_2 = 25$ mm mit $W = 1{,}534 \times 10^3$ mm³. Daraus folgt $\sigma_a = M_b/W = (8000 \cdot 20/1{,}534 \cdot 10^3)$ N/mm² $= 104{,}3$ MPa.

Sicherheitsnachweis:

a) Mit $r/d_2 = 3/25 = 0{,}12$ ist nach Bild 130 $\beta_{kbW} = 1{,}4$.
b) Mit $d_1/d_2 = 32/25 = 1{,}28$ ist nach Bild 133 $c = 0{,}57$.
c) $\beta_k' = 1 + c(\beta_{kb} - 1) = 1 + 0{,}57(1{,}4 - 1) = 1{,}23$, daraus folgt mit Hilfe von Bild 126 $\sigma_{AK} = 220$ MPa.
d) Der Größeneinflußfaktor ist nach Bild 127 für $d = 25$ mm $K_t = 0{,}89$.

e) Der Oberflächenfaktor für geschliffene Oberfläche ist nach Bild 128 für St 60 ($\sigma_B \approx 600$ MPa) $O_F = 0{,}92$.
f) Der Tabelle 14 ist der Querschnittsfaktor q für Umlaufbiegung bei Kreisquerschnitt zu entnehmen: $q = 1{,}0$.
g) Für die Sicherheit ergibt sich also:
$S = \sigma_{AK} K_1 O_F q / \sigma_a = 220 \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}92 \cdot 1{,}0/104{,}5 = 1{,}72$.

Diese Sicherheit wird als ausreichend angesehen.

Beispiel 2. Eine abgesetzte Welle (St 60) wird auf Biegung nach Lastfall III mit $M_b = 300$ N · m und auf Torsion nach Lastfall II mit $M_t = 200$ N · m beansprucht (Bild 135), der Stoßfaktor beträgt $\varphi = 1{,}5$. Es ist die Sicherheit gegen Dauerbruch zu berechnen.

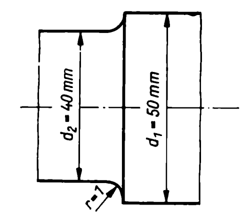


Bild 135. Abgesetzte Welle

Biegung: $W = 6{,}28 \cdot 10^3$ mm³, $\sigma_b = \sigma_a = M_b/W = (300 \cdot 10^3/6{,}28 \cdot 10^3)$ N/mm² $= 47{,}7$ MPa. Für $r/d_2 = 1/40 = 0{,}025$ ergibt sich aus Bild 130 $\beta_k = 2{,}1$ und für $d_1/d_2 = 50/40 = 1{,}25$ aus Bild 133 $c = 0{,}55$. Somit wird $\beta_k' = 1 + c(\beta_k - 1) = 1 + 0{,}55(2{,}1 - 1) = 1{,}6$. Entsprechend Bild 132 ist $\sigma_0 = \sigma_{Wk} = \sigma_{AK} = 170$ MPa.
Weiterhin ergeben sich aus den Bildern 127 und 128 die Faktoren $O_F = 0{,}9$ und $K = K_1 = 0{,}8$ sowie aus Tabelle 14 der Faktor $q = 1{,}0$. Damit wird mit $\sigma_b = \sigma_a$:

$S_\sigma = \sigma_{AK} O_F K q / \sigma_a \varphi = 170 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}0/47{,}7 \cdot 1{,}5 = 1{,}71$.

Torsion: $W_t = 12{,}56 \cdot 10^3$ mm³, $\tau_t = 2\tau_a = M_t/W_t = 200 \cdot 10^3/12{,}56 \cdot 10^3$ N/mm² $= 15{,}9$ MPa. Für $r/d_2 = 0{,}025$ ist nach Bild 131 $\beta_{kt} = 1{,}6$ und für $d_1/d_2 = 1{,}25$ nach Bild 133 $c = 0{,}78$. Damit wird $\beta_k' = 1 + 0{,}78(1{,}6 - 1{,}0) = 1{,}47$. Aus Bild 126c entnimmt man $\tau_0 = 2\tau_A = 215$ MPa, also ist $2\tau_{AK} = (215$ MPa$)/1{,}47 = 146$ MPa. Der Oberflächenfaktor ist $O_{Ft} = 0{,}575 O_F + 0{,}425 = 0{,}943$, der Größenfaktor $K = K_1 = 0{,}8$ und $q = 1{,}0$. Damit errechnet sich die Sicherheit bei Torsion aus $S_\tau = 2\tau_{AK} O_{Ft} K q / 2\tau_a \varphi = 146 \cdot 0{,}943 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}0/15{,}9 \cdot 1{,}5 = 4{,}61$.
Die Vergleichssicherheit der abgesetzten Welle beträgt somit:

$S_v = S_\sigma S_\tau / \sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2} = 1{,}71 \cdot 4{,}61/\sqrt{1{,}71^2 + 4{,}61^2} = 1{,}60$.

3.5.4. Stochastischer Beanspruchungsverlauf, Spannungskollektiv, Betriebsdauerlinie

Stochastische (zufällige) Beanspruchungen sind durch zeitliche Änderungen der Lasten bzw. Spannungen gekennzeichnet (Bild 136a). Zum Zweck des Vergleichs, der Gruppierung und der Berechnung werden die Spannungs-Zeit-Diagramme nach *Klassierverfahren* ausgewertet und in *Spannungskollektiven* dargestellt [4, 5]. Bild 136b zeigt ein Kollektiv, welches durch Erfassen der *Klassengrenzenüberschreitungen* (markierte Punkte im Bild 136) entstand.

Hinweis: Das dargestellte Kollektiv erfaßt nur einen sehr kurzen Zeitraum, ist also nicht typisch hinsichtlich der praktisch vorkommenden Kollektivumfänge.

Für viele dynamisch beanspruchte Bauteile in Maschinen, Fahrzeugen, Brücken usw. sind bestimmte Kollektivformen typisch. Häufig findet man GAUSSsche *Normalverteilungen* in einfacher oder zusammengesetzter Form (Mischkollektive), weniger häufig *logarithmische Normalverteilungen* oder *Geradlinienverteilungen* (Dreieck- oder Trapezform im logarithmischen Koordinatensystem). Für die Bemessung der Bauteile interessiert der Zusammenhang zwischen der größten Spannung $\bar{\sigma}$ (Betriebsfestigkeit) oder Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m$ im Kollektiv und der Anzahl der unter Kollektivbeanspruchung bis zum Versagen ertragbaren Schwingspiele (Betriebsdauer $\bar{N}$). Dieser Zusammenhang kann durch Versuche (*Betriebs-*

festigkeits- und Randomversuche) oder näherungsweise auch rechnerisch (nach MINER, CORTEN-DOLAN, HAIBACH, LEHMANN, HOFMANN, COTTIN u. a. [9]) gefunden werden. Voraussetzung ist hierfür die Kenntnis der WÖHLER-Kurve des Bauteils sowie des Spannungskollektivs.

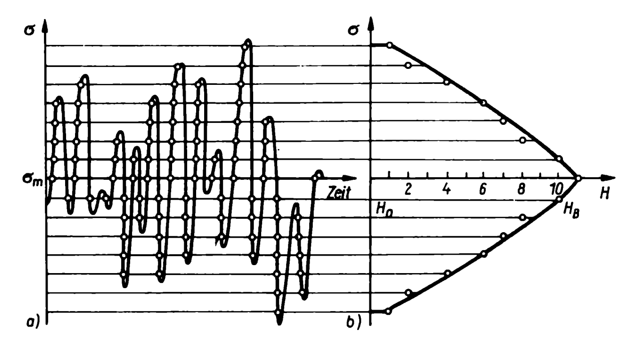


Bild 136. Stochastische Beanspruchung. a) Spannungsverlauf; b) Häufigkeitssummen H der Klassengrenzenüberschreitungen (Spannungskollektiv)

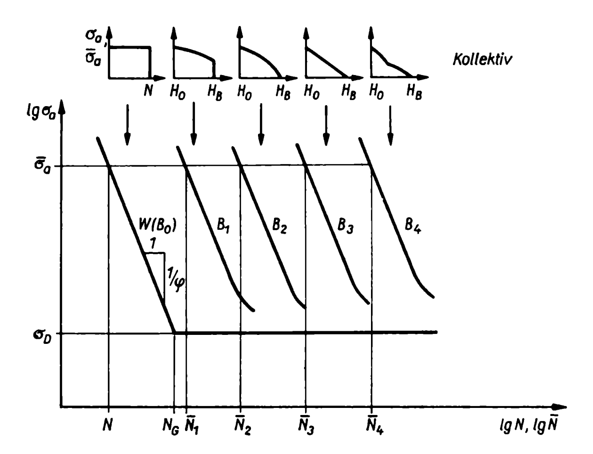


Bild 137. WÖHLER-Kurve W und Betriebsdauerlinien $B_1, \ldots, B_4$ für verschiedene Spannungskollektive. $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_4$ Betriebsdauer; H Häufigkeitssummen der Spannungsamplituden; $\bar{\sigma}_a$ größte Spannungsamplitude im Kollektiv

Im Bild 137 sind Ergebnisse derartiger Versuche für ein Bauteil in Form von *Betriebsdauerlinien* $B_1, \ldots, B_4$ dargestellt. Dabei ist der Einfluß der Kollektivform auf die Betriebsdauer erkennbar. Die Betriebsdauer erhöht sich mit steigendem Anteil kleiner Spannungsamplituden σ_a im Kollektiv. Das Kollektiv für WÖHLER-Versuche enthält nur Spannungsausschläge gleicher Größe und hat Rechteckform. Es ist ein Sonderfall und stellt den Grenzfall im Sinne der höchsten Beanspruchung dar. Entsprechend kann die WÖHLER-Kurve W als die am weitesten links liegende Betriebsdauerlinie B_0 aufgefaßt werden.

Tabelle 15. Näherungsgleichungen für die Betriebsdauer $\bar{N}_{CD}$ nach CORTEN-DOLAN (φ WÖHLER-Kurvenexponent, N Normalkollektiv, G Geradlinienkollektiv)

φ		3	4	5	6
$\bar{N}_{CD}/N_G$ für	N	$0{,}627(t_0 q_D)^3$	$0{,}33(t_0 q_D)^4$	$0{,}157(t_0 q_D)^5$	$0{,}067(t_0 q_D)^6$
	G	$(C q_D)^3/6$	$(C q_D)^4/24$	$(C q_D)^5/120$	$(C q_D)^6/720$

In der Praxis wird für Überschlagsrechnungen oft die Betriebsdauer $\overline{N}_{CD}$ nach CORTEN-DOLAN benutzt. Für deren Bestimmung können die in Tabelle 15 angegebenen Näherungsgleichungen herangezogen werden. Dabei gilt:

$$q_D = \sigma_D/\bar{\sigma}_a, \qquad C = \ln (H_B/H_0) \tag{160}$$

t_0 ist Bild 138 zu entnehmen.

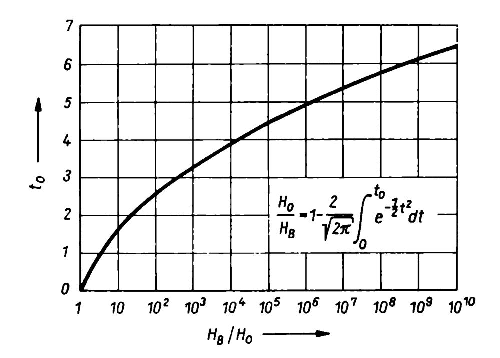


Bild 138. Zusammenhang zwischen bezogenem Kollektivumfang H_B/H_0 des Normalkollektivs und der Integrationsgrenze t_0 des GAUSSschen Wahrscheinlichkeitsintegrals

Die Betriebsdauerlinien nach CORTEN-DOLAN sind Parallelen zur WÖHLER-Kurve. Deren horizontaler Abstand ergibt sich aus den Gleichungen nach Tabelle 15, wenn man $q_D = 1$ setzt. Dann ist $\overline{N}_{CD}/N_G = v_N$. Dieser Wert heißt *Betriebsdauervielfaches*. Die nach CORTEN-DOLAN berechnete Betriebsdauer ist in manchen Fällen größer als die tatsächliche Betriebsdauer $\overline{N}$. Man erhält sichere Werte bei Benutzung der *Korrekturgleichung*:

$$\overline{N} = \overline{N}_{CD} a_{CD} \tag{161}$$

Für Bauteile aus Stahl gilt:

$$a_{CD} = 1{,}0 - 0{,}15 \lg v_N \tag{162}$$

Beispiel. Es ist die Betriebsdauer des dynamisch beanspruchten Bauteils einer Landmaschine rechnerisch zu bestimmen. Das Kollektiv der Spannungsamplituden weist Normalverteilung mit dem bezogenen Kollektivumfang $H_B/H_0 = 10^6$, $p = 0$ und Symmetrie gegenüber der Mittelspannung auf. Die durch Versuche ermittelte WÖHLER-Kurve verläuft im doppeltlogarithmischen Koordinatensystem annähernd als Gerade mit dem Kehrwert der Neigung $\varphi = 5$ (WÖHLER-Kurvenexponent), die Grenzlastspielzahl beträgt $N_G = 2 \cdot 10^6$ Lastwechsel und die Dauerfestigkeit $\sigma_D = 200$ MPa. Welche Betriebsdauer ist nach der Hypothese von CORTEN-DOLAN zu erwarten, wenn an der schwingbruchgefährdeten Stelle mit $\bar{\sigma}_a = 400$ MPa gerechnet werden muß, und wie groß ist der korrigierte Wert $\overline{N}$?
Für $H_B/H_0 = 10^6$ ergibt sich nach Bild 138 $t_0 = 4{,}417$. Mit $q_D = \sigma_D/\bar{\sigma}_a = 0{,}5$ ist nach Tabelle 15 $\overline{N}_{CD}/N_G = 0{,}157(4{,}417 \cdot 0{,}5)^5 = 8{,}2$; also ist $\overline{N}_{CD} = N_G \overline{N}_{CD}/N_G = 2 \cdot 10^6 \cdot 8{,}2 = 16{,}4 \cdot 10^6$.
Für die Ermittlung des auf der sicheren Seite liegenden Werts $\overline{N}$ ist v_N notwendig. Mit $q_D = 1$ erhält man $v_N = 0{,}157 t_0^5$; diese Beziehung, in Gl. (162) eingesetzt, liefert:
$a_{CD} = 1{,}0 - 0{,}15 \lg (0{,}157 t_0^5) = 1{,}0 - 0{,}15 (\lg 0{,}157 + 5 \lg 4{,}417) = 0{,}636$, und der mit Sicherheit erreichte Betriebsdauerwert ist nach Gl. (161) $\overline{N} = \overline{N}_{CD} a_{CD} = 16{,}4 \cdot 10^6 \cdot 0{,}636 = 10{,}43 \cdot 10^6$.
Das Bauteil erträgt also mindestens $10{,}43 \cdot 10^6$ Lastspiele bei Schwingbeanspruchung mit unterschiedlichen Amplituden.

3.6. Anwendungen

3.6.1. Spannungen und Verformungen bei ebenen Platten

Unter den Voraussetzungen: gleichmäßige Flächenbelastung p; $s \ll r$; $s \ll 2a$; $s \ll 2b$; $f \ll s$ gelten die in Tabelle 16 zusammengestellten Gleichungen. Konstanten siehe Tabelle 17.

s Plattendicke, r Kreisplattenradius, $2a$ bzw. $2b$ Rechteckplattenseiten, f Durchbiegung, μ POISSON-Zahl

Dabei sei die Seite $2a$ der x-Achse und die Seite $2b$ der y-Achse zugeordnet.

Tabelle 16. Spannungen und Verformungen ebener Kreis- und Rechteckplatten

Plattenform		Plattenränder	
		frei aufliegend	fest eingespannt
Kreis $d = 2r$	Spannungen in der Mitte	$\sigma_{max} = 1{,}24pr^2/s^2$	$\sigma = 0{,}488pr^2/s^2$
	Spannungen am Rand	—	$\sigma_{max} = 0{,}750pr^2/s^2$
	Durchbiegung in der Mitte	$f = 0{,}693pr^4/Es^3$	$f = 0{,}171pr^4/Es^3$
Rechteck $2a \cdot 2b$	Spannungen in der Mitte	$\sigma_x = K_2pb^2/s^2$ $\sigma_y = K_3pb^2/s^2$	$\sigma_x = K_4pa^2/s^2$ $\sigma_y = K_5pb^2/s^2$
	Spannungen am Rand	—	$\sigma_{max} = \sigma_y = K_6pb^2/s^2$ in der Mitte der langen Seite $\sigma_x = \mu\sigma_y$
	Durchbiegung in der Mitte	$f = K_1pb^4/Es^3$	$f = K_7pb^4/Es^3$

Tabelle 17. Konstanten entsprechend Tabelle 16

a/b	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	∞
K_1	0,71	1,35	1,78	2,14	2,24	2,28
K_2	1,15	1,20	1,10	0,96	0,92	0,90
K_3	1,15	1,95	2,44	2,86	2,97	3,00
K_4	0,53	0,48	0,31	0,31	0,30	0,30
K_5	0,53	0,87	0,94	0,97	0,99	1,00
K_6	1,24	1,81	1,92	1,97	1,99	2,00
K_7	0,225	0,394	0,431	0,450	0,452	0,455

3.6.2. Spannungen in zylindrischen Gefäßen

Hohlzylinder mit Innendruck

Für den dreiachsigen Spannungszustand ergeben sich je nach Art der benutzten Bruchhypothese Gleichungen, deren Ergebnisse etwas voneinander abweichen. Die größten Spannungen treten innen auf. Nach der Hypothese von Mohr wird:

$$\sigma_t = \sigma_{max} = p_i(r_a^2 + r_i^2)/(r_a^2 - r_i^2) = p_i(a^2 + 1)/(a^2 - 1) \tag{163}$$

σ_t tangentiale Spannung, p_i Innendruck, r_a Außenradius, r_i Innenradius, $a = r_a/r_i$, σ_r radiale Spannung, σ_z Spannung in Richtung der Zylinderachse, p_a Außendruck

Ferner wird innen $\sigma_r = p_i$ und $\sigma_z = 0$ bei offenem bzw. $\sigma_z = (p_i r_i^2)/(r_a^2 - r_i^2)$ bei geschlossenem Zylinder. Für kleine Wanddicken ist $\sigma_z \approx p_i r_i/s$.

Hohlzylinder mit Außendruck

Die größten Spannungen treten innen auf. Es ist:

$$\sigma_t = \sigma_{max} = 2p_a r_a^2/(r_a^2 - r_i^2) = 2p_a a^2/(a^2 - 1) \tag{164}$$

$\sigma_r = 0$ und $\sigma_z = 0$ bei offenem bzw. $\sigma_z = p_a r_a^2/(r_a^2 - r_i^2)$ bei geschlossenem Zylinder. Für kleine Wanddicken ist $s \approx p_a r_a/\sigma_{d,zul}$.

Hohlzylinder mit Außen- und Innendruck

Da die Wanddicken für sehr hohe Drücke sehr groß werden, empfiehlt es sich, in solchen Fällen den Hohlzylinder unter Außen- und Innendruck zu setzen. Das erreicht man z. B. dadurch, daß man einzelne Rohre durch Schrumpfen verbindet. Dann wird

$$\textit{innen:}\ \sigma_r = A - B/r_i^2 \quad \text{und} \quad \sigma_t = A + B/r_i^2 \tag{165}$$

$$\textit{außen:}\ \sigma_r = A - B/r_a^2 \quad \text{und} \quad \sigma_t = A + B/r_a^2 \tag{166}$$

Dabei ist $A = (p_i r_i^2 - p_a r_a^2)/(r_a^2 - r_i^2)$ und $B = r_a^2 r_i^2 (p_i - p_a)/(r_a^2 - r_i^2)$.

4. Kinematik starrer Körper

4.1. Bewegung eines Punkts in der Ebene

Man unterscheidet zwischen dem *zeitlichen Bewegungsablauf* (Bewegungszustand), der die Art der Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit kennzeichnet (z. B. Ruhe, gleichförmige oder ungleichförmige Bewegung), und dem *geometrischen Bewegungsablauf* (Bewegungsbahn), der die Art der Bewegung unabhängig von der Zeit kennzeichnet (z. B. geradlinige oder krummlinige Bewegung).

4.1.1. Geradlinige Bewegung

4.1.1.1. Gleichförmige geradlinige Bewegung

Die Bewegung eines Punkts ist gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt: $s = vt$. Der Proportionalitätsfaktor v ist die *Geschwindigkeit*, er kennzeichnet den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg:

$$v = s/t = \text{konst.} \tag{167}$$

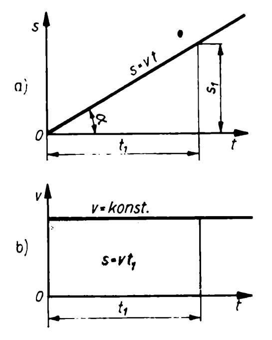
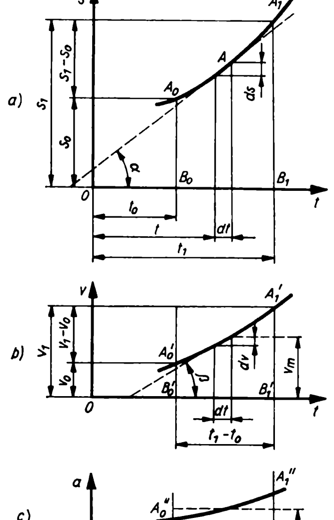


Bild 139. Gleichförmige Bewegung



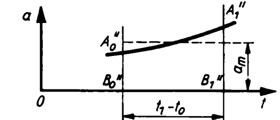


Bild 140. Ungleichförmige Bewegung

Im *Weg-Zeit-Diagramm* (Bild 139a) wird die gleichförmige Bewegung durch eine Gerade dargestellt. Man erkennt, daß $v = s_1/t_1 = s/t = \tan\alpha$.
Das *Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm* (Bild 139b) besteht aus einer zur Zeitachse parallelen Geraden. Der in der Zeit t_1 zurückgelegte Weg wird durch die graue Fläche dargestellt. Hierbei ist der Zeit- und Wegmaßstab zu berücksichtigen.

4.1.1.2. Ungleichförmige geradlinige Bewegung

Legt ein Punkt in gleichen Zeiten verschiedene Wege zurück, so ist seine Bewegung ungleichförmig; die Geschwindigkeit ändert sich mit der Zeit.
Im *Weg-Zeit-Diagramm* ist die Bewegung in einer Kurve dargestellt (Bild 140a). Als Geschwindigkeit des Punkts A zur Zeit t bezeichnet man das Verhältnis:

$$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t \tag{168}$$

Der Anstieg der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve ist gleich der Geschwindigkeit.
Das *Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm* (Bild 140b) ist im allgemeinen Fall durch eine Kurve gegeben, deren Anstieg die Zunahme der Geschwindigkeit darstellt. Als *Beschleunigung* bezeichnet man das Verhältnis:

$$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 \tag{169}$$

Aus (168) folgt $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$. Infolgedessen kann der zwischen den Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ zurückgelegte Weg $s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,\mathrm{d}t$ aus dem v,t-Diagramm als Fläche A_0', A_1', B_1', B_0' entnommen werden. Zur Bestimmung von s_1 muß s_0 bekannt sein. Als *mittlere Geschwindigkeit* bezeichnet man:

$$v_\mathrm{m} = \int_{t_0}^{t_1} v\,\mathrm{d}t/(t_1 - t_0) \tag{170}$$

Aus (169) folgt $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$. Der Verlauf der Beschleunigung als Funktion der Zeit ist aus dem *Beschleunigungs-Zeit-Diagramm* ersichtlich. Aus diesem Diagramm läßt sich die Geschwindigkeit v_1 zur Zeit t_1 durch Planimetrieren der Fläche A_0'', A_1'', B_1'', B_0'' finden, wenn man den Wert v_0 zur Zeit t_0 kennt; es ist $v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\,\mathrm{d}t$. Als *mittlere Beschleunigung* bezeichnet man:

$$a_\mathrm{m} = \int_{t_0}^{t_1} a\,\mathrm{d}t/(t_1 - t_0) \tag{171}$$

Negative Beschleunigungen bedeuten Verzögerungen, also Geschwindigkeitsabnahmen, wenn die Bewegung in der positiven Richtung erfolgt, bzw. Geschwindigkeitszunahmen, wenn sie in der negativen Richtung erfolgt.

Aus dem Geschwindigkeits-Weg-Diagramm (Bild 141a) kann die Beschleunigung a als Subnormale $\overline{BC}$ gefunden werden, da $\overline{BC} = v\tan\gamma = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s = a$.
Schreibt man:

$$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)\,(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t) = v(\mathrm{d}v/\mathrm{d}s) \tag{172}$$

so folgt:

$$v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}s \qquad \text{oder} \qquad v_1^2 - v_0^2 = 2\int_{s_0}^{s_1} a\,\mathrm{d}s \tag{173}$$

Aus dem Beschleunigungs-Weg-Diagramm (Bild 141b) kann die Geschwindigkeit v_1 zur Zeit t_1 durch Planimetrieren bestimmt werden, wenn die Geschwindigkeit v_0 zur Zeit t_0 bekannt ist.
Ist das Weg-Zeit-Diagramm gegeben, so lassen sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für die einzelnen Punkte durch *grafische Differentiation**) leicht finden.

---

*) s. Abschn. MATHEMATIK, Grafische Differentiation

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt stets in die Richtung der Bewegung. Wird eine bestimmte Bewegungsrichtung als positiv festgesetzt, so besagt ein negatives Vorzeichen von v, daß die Geschwindigkeit der positiven Richtung entgegengesetzt ist, der Körper sich also in negativer Richtung bewegt.
Die Richtung der Beschleunigung fällt stets in die Richtung der beschleunigenden Kraft bzw. ihrer Komponente in der Bewegungsrichtung, d. h. in die Richtung der Geschwindigkeit bei ihrer Zunahme oder in die entgegengesetzte Richtung bei ihrer Abnahme. Hieraus folgt:

- Die Beschleunigung ist positiv, wenn die Geschwindigkeit in der positiven Richtung zunimmt oder in der negativen Richtung abnimmt.
- Die Beschleunigung ist negativ, wenn die Geschwindigkeit in der negativen Richtung zunimmt oder in der positiven Richtung abnimmt.

An den Stellen der s,t-Kurve, die waagerechte Tangenten haben, ist die Geschwindigkeit Null. Sie erreicht ihr Maximum an den Wendepunkten, d. h. an den Punkten des größten Anstiegs, an denen wiederum die Beschleunigung gleich Null ist.

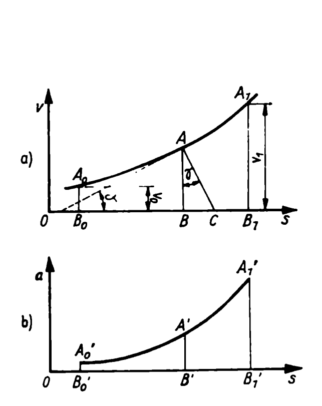


Bild 141. Geschwindigkeits- (Beschleunigungs-) Weg-Diagramm

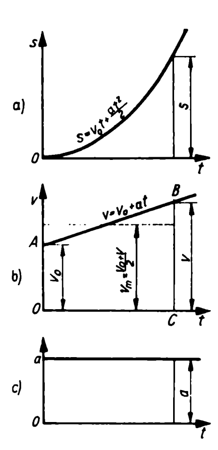


Bild 142. Weg und Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung

4.1.1.3. Sonderfälle der ungleichförmigen geradlinigen Bewegung

Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Allgemein. Bei konstanter Beschleunigung ändert sich die Geschwindigkeit proportional der Zeit, die v,t-Kurve ist eine Gerade. Mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$ gilt:

$$a = (v - v_0)/t \tag{174}$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit t beträgt (Bild 142):

$$v = v_0 + at \tag{175}$$

Der zurückgelegte Weg ist durch die Fläche $ABCO$ gegeben:

$$s = v_0 t + at^2/2 = (v_0 + v)\,t/2 = (v^2 - v_0^2)/2a = v_m t \tag{176}$$

Bei konstanter Beschleunigung ist also die Weg-Zeit-Kurve eine Parabel (Bild 142a). $v_m = (v_0 + v)/2$ ist die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit t. Ist zu Beginn der Bewegung ($t = 0$) $s_0 = 0$ und $v_0 = 0$, so gilt:

$$s = at^2/2 = vt/2 = v^2/2a \tag{177}$$

$$v = at = \sqrt{2as} \quad \text{oder} \quad t = v/a = 2s/v = \sqrt{2s/a} \tag{178}$$

Freier Fall. An die Stelle von s tritt die Fallhöhe h und an Stelle von a die ***Fallbeschleunigung*** $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$:

$$h = gt^2/2 = v^2/2g \tag{179}$$

$$v = gt = \sqrt{2gh} \qquad \text{oder} \qquad t = v/g = \sqrt{2h/g} \tag{180}$$

Harmonische Bewegung

Eine Bewegung wird als harmonisch bezeichnet, wenn die Weg-Zeit-Kurve durch eine Sinus- oder Cosinus-Funktion dargestellt werden kann: $s = r \sin \varphi$ bzw. mit $\varphi = \omega t$ auch $s = r \sin \omega t$ (Bild 143).

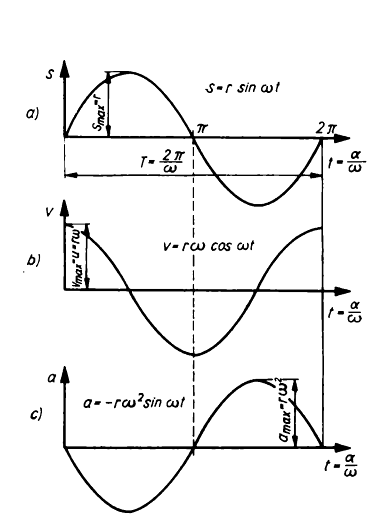


Bild 143. Grafische Darstellung der harmonischen Bewegung

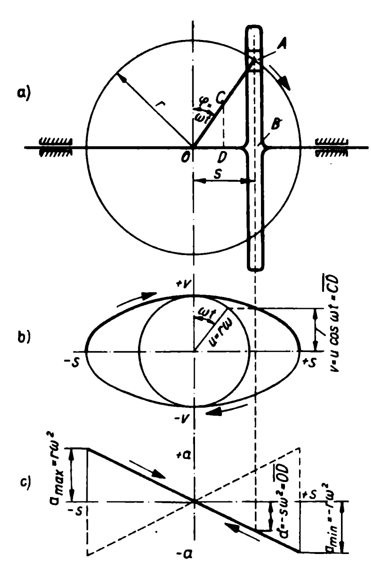


Bild 144. Kreuzschleife

Beispiel. Die Bewegung der Kreuzschleife oder Kreuzschubkurbel ist eine harmonische Bewegung (Bild 144). Ist ω die konstante ***Winkelgeschwindigkeit*** der Kurbel, so wird in der Zeit t der Winkel $\varphi = \omega t$ von der Kurbel überstrichen. Die Auslenkung eines Punkts auf dem Schieber ist:

$$s = r \sin \omega t \tag{181}$$

Die größte Auslenkung ($\varphi = 90°$, $s = r$) heißt ***Amplitude*** (Schwingungsweite). Die ***Schwingungsdauer*** oder ***Periode*** T ist die Zeit für einen vollständigen Hin- und Hergang:

$$T = 2\pi/\omega \tag{182}$$

Die Zahl der Schwingungen je Zeiteinheit bezeichnet man als ***Frequenz***:

$$f = 1/T = \omega/2\pi \tag{183}$$

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ heißt ***Kreisfrequenz***. Aus (181) folgt:

$$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = r\omega \cos \omega t \tag{184}$$

$r\omega = u$ ***Umfangsgeschwindigkeit*** des Punkts A

Differentiation von (184) ergibt:

$$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 s \tag{185}$$

$r\omega^2$ ***Normalbeschleunigung***

Die Beschleunigung ist also proportional dem Weg, ihm aber entgegengesetzt gerichtet (Bild 144c).

4.1.1.4. Zusammensetzung geradliniger Bewegungen

Ein Punkt A soll auf der Ebene E_1 in der Zeit t die gerade Strecke $\overline{A_0A_1} = s_r$ zurücklegen (Bild 145). Wird die Ebene E_1 gegen die ihr parallele feste Bezugsebene E_0 in derselben Zeit t um die Strecke $\overline{A_0'B} = s_f$ verschoben, so hat der Punkt A in bezug auf die Ebene E_0 den Weg $\overline{A_0'A_2} = s_0$ zurückgelegt und befindet sich im Punkt A_2, den man mit der Diagonalen im Parallelogramm $A_0'BA_2A_1'$ findet. Der Weg s_0 kann also durch vektorielle (geometrische) Addition der Strecken $\boldsymbol{s}_f$ und $\boldsymbol{s}_r$ gefunden werden:

$$\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}_f + \boldsymbol{s}_r \qquad (186)$$

$v_0 = s_0/t$ ist die mittlere Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung; sie ist gleich der tatsächlichen Geschwindigkeit, wenn beide Bewegungen gleichförmig sind. Für unendlich kleine Zeiten und Wegelemente gilt $d\boldsymbol{s}_0 = d\boldsymbol{s}_f + d\boldsymbol{s}_r$. Dividiert man diese Gleichungen durch dt, so folgt

$$\boldsymbol{v}_0 = d\boldsymbol{s}_0/dt = d\boldsymbol{s}_f/dt + d\boldsymbol{s}_r/dt = \boldsymbol{v}_f + \boldsymbol{v}_r \qquad (187)$$

$\boldsymbol{v}_0$ Geschwindigkeit des Punktes gegen die feste Ebene E_0 (Absolutgeschwindigkeit); $\boldsymbol{v}_f$ Geschwindigkeit der Ebene E_1 gegen die Ebene E_0 (Führungsgeschwindigkeit); $\boldsymbol{v}_r$ Geschwindigkeit des Punktes auf der Ebene E_1 (Relativgeschwindigkeit).

Die Absolutgeschwindigkeit kann also durch geometrische Addition der Relativ- und Führungsgeschwindigkeit gefunden werden. Teilt man die Gleichung $d\boldsymbol{v}_0 = d\boldsymbol{v}_f + d\boldsymbol{v}_r$ noch einmal durch dt, so folgt

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_f + \boldsymbol{a}_r, \qquad (188)$$

d. h., die Beschleunigungen lassen sich geometrisch addieren. Gilt nur bei translatorischer (drehungsfreier) Führungsbewegung, wenn also E eine Parallelverschiebung ausführt.

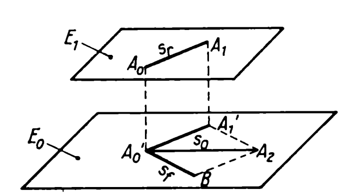


Bild 145. Addition geradliniger Bewegungen

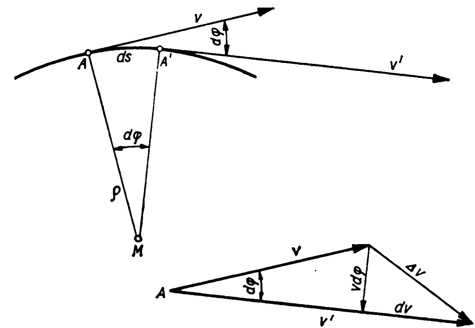


Bild 146. Beliebige krummlinige Bewegung

4.1.2. Krummlinige Bewegung

4.1.2.1. Beliebige krummlinige Bewegung

Bei der krummlinigen Bewegung liegen die Geschwindigkeiten in Richtung der Bahntangente (Bild 146). Die Geschwindigkeit in A sei $\boldsymbol{v}$, in A' sei sie $\boldsymbol{v}'$, wobei A' von A um das Bahnelement ds entfernt ist. Um von $\boldsymbol{v}$ zu $\boldsymbol{v}'$ zu gelangen, muß man zu $\boldsymbol{v}$ eine weitere Geschwindigkeit $\Delta\boldsymbol{v}$ hinzufügen, so daß $\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$. Dann läßt sich $\Delta\boldsymbol{v}$ in zwei Komponenten zerlegen:

$$\Delta\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\, d\varphi \qquad (189)$$

$d\boldsymbol{v}$ in Richtung von $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}\, d\varphi$ normal zu $\boldsymbol{v}'$



Damit die Geschwindigkeitszunahme $\Delta \boldsymbol{v}$ in der Zeit dt erfolgt, muß die Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ auf den Punkt A wirken. Es ist die *Gesamtbeschleunigung*:

$$\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n} \tag{190}$$

$\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ Tangentialbeschleunigung in Richtung von $\boldsymbol{v}'$; $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ Normalbeschleunigung normal zu $\boldsymbol{v}'$

Die Normalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ verursacht nur eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit. Ist $\varrho = \overline{AM}$ der Krümmungsradius, so ist $\mathrm{d}s = \varrho\,\mathrm{d}\varphi$ und somit:

$$a_\mathrm{n} = v\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}s/\varrho\,\mathrm{d}t = v^2/\varrho = \omega^2\varrho = v\omega \tag{191}$$

$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ ist die *Winkelgeschwindigkeit*, also die Geschwindigkeit eines Punkts im Abstand eins vom Drehpunkt. Die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit heißt *Winkelbeschleunigung*

$$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2 \tag{192}$$

Bei konstanter Winkelbeschleunigung ist $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

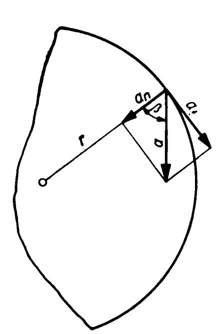


Bild 147. Kreisbewegung

4.1.2.2. Kreisbewegung

Bei der Kreisbewegung (Bild 147) gilt mit $\varrho = r =$ konst.:

$$s = r\varphi; \qquad v = r\omega = r\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t; \qquad \varphi = \int \omega\,\mathrm{d}t \tag{193}$$

Die Beschleunigung eines kreisförmig bewegten Punkts setzt sich zusammen aus der *Tangentialbeschleunigung* a_t:

$$a_\mathrm{t} = r\alpha = r\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2 \tag{194}$$

und der *Normalbeschleunigung* a_n, die rechtwinklig auf a_t steht:

$$a_\mathrm{n} = v^2/r = r\omega^2 \tag{195}$$

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Der Winkel β zwischen a und r ergibt sich aus der Beziehung:

$$\tan\beta = a_\mathrm{t}/a_\mathrm{n} = \alpha/\omega^2 \tag{196}$$

Beispiel. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist die Winkelgeschwindigkeit konstant und die Tangentialbeschleunigung Null. Ist n die Drehzahl, so gilt für die Winkelgeschwindigkeit bzw. Drehzahl: $\omega = 2\pi n$ bzw. $n = \omega/2\pi = 1/T$ (T Umlaufzeit). Die Umfangsgeschwindigkeit ist $v = r\omega = 2\pi rn = \pi Dn$.

Dreht sich eine Ebene um einen festen Punkt (Kreisbewegung), so beschreiben alle ihre Punkte konzentrische Kreise. Die Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Punkte sind den Abständen vom Drehpunkt proportional. Die Beschleunigungen schließen mit den Drehradien gleiche Winkel ein.

Bei der Kreisbewegung mit konstanter Winkelbeschleunigung (α = konst.) gelten die Gleichungen (174) bis (178), wenn man die Beschleunigung a durch die Winkelbeschleunigung α, die Geschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω und den Weg s durch den Winkelweg $\hat{\varphi}$ ersetzt.

4.2. Bewegung eines starren Körpers in der Ebene

4.2.1. Translation, Rotation

Als *Translation* (Verschiebung) bezeichnet man eine Bewegung, bei der alle Punkte eines Körpers parallele und kongruente Bahnen durchlaufen. Hierbei verschiebt sich der Körper parallel zu seiner Anfangslage. Die Form der Bahnen ist ohne Bedeutung. Eine Ebene bewegt sich gegen eine ihr parallele Ebene translatorisch, wenn eine in ihr liegende Gerade während der Bewegung ständig parallel zu ihrer Anfangslage bleibt.
Bei der *Rotation* (Drehung) eines Körpers bleiben alle auf einer bestimmten Linie (Drehachse) liegenden Punkte in Ruhe, alle anderen Punkte führen Kreisbewegungen um diese Achse aus. Eine Ebene vollzieht gegen eine andere, ihr parallele Ebene eine Drehung, wenn einer ihrer Punkte, der Drehpunkt, seine Lage ständig beibehält.
Jede ebene Bewegung eines Körpers kann durch eine Translation eines Punkts und eine Rotation um diesen Punkt dargestellt werden.

4.2.2. Allgemeine Bewegung

4.2.2.1. Ebene Bewegung zweier Punkte eines Körpers

Eine Strecke s zwischen zwei Punkten A und B kann durch Drehen um den *Momentanpol* P im Zeitelement dt in die Strecke s' zwischen den Punkten A' und B' überführt werden (Bild 148). Die Bewegung ist also als eine Elementardrehung um den Pol P aufzufassen.
Die augenblicklichen Normalen zu den Bahnen aller Punkte des Körpers schneiden sich im Momentanpol P. Die Geschwindigkeit eines Punkts ist seinem Abstand vom Pol proportional.

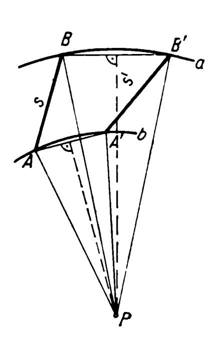


Bild 148. Beliebige ebene Bewegung eines Körpers

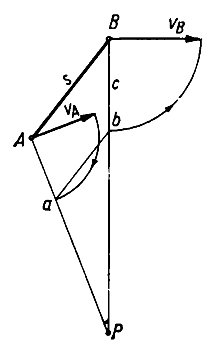


Bild 149. Konstruktive Bestimmung der Geschwindigkeit v_B

Sind der Pol P und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A$ des Punkts A nach Größe und Richtung bekannt, so kann die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ des Punkts B ermittelt werden, indem man die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A$ so dreht (um 90°), daß sie mit den Normalen zur Bahn zusammenfällt und eine Parallele zu s durch a zieht (Bild 149). Um die Richtung von $\boldsymbol{v}_B$ zu bestimmen, muß man die Strecke c um 90° um den Punkt B nach der entsprechenden Seite drehen (Gesetz der gedrehten Geschwindigkeiten).

Beispiel. Die Umfangsgeschwindigkeit einer Schubkurbel sei $v_A = 2\pi rn$. Wie groß ist die Geschwindigkeit v_B des Kreuzkopfs B in der gezeichneten Lage (Bild 150)?

Der Momentanpol der Schubstange $\overline{AB}$ ist P, da $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ senkrecht zu den Bahnen der Punkte A und B stehen. v_A wird um 90° in die Richtung der Bahnnormalen (Richtung der Kurbel) gedreht. Man zieht $\overline{A'B'} \| \overline{AB}$. Dann ist $\overline{BB'}$ der Absolutwert der gesuchten Geschwindigkeit; ihre Richtung erhält man, wenn man $\overline{BB'}$ in derselben Richtung um 90° dreht, in der man $\overline{AA'}$ drehen müßte, um die Richtung von v_A zu erhalten. Aus dem Dreieck $AA'C$, in dem $\overline{A'C} \| \overline{B'B}$ ist, findet man $v_B = v_A \sin(\alpha + \beta)/\cos\beta$. Für $\beta = 0$ (unendlich lange Schubstange) ist $v_B = v_A \sin\alpha$.

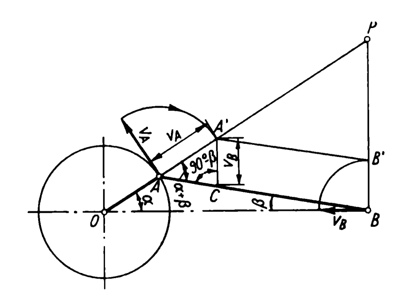


Bild 150. Schubkurbel

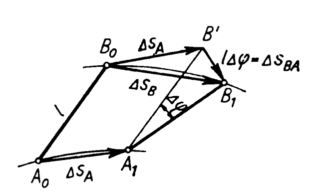


Bild 151. Zusammenwirken der Verschiebung und Drehung

Jede ebene Bewegung eines Körpers besteht aus einer Verschiebung (Translation), bei der alle Punkte parallele Bahnen beschreiben, und aus einer Drehung (Bild 151). Kommt der Körper aus der Lage $\overline{A_0B_0}$ in der Zeit Δt in die Lage $\overline{A_1B_1}$, so kann die Bewegung als Translation um die Strecke Δs_A und als Drehung um den Winkel $\Delta\varphi$ aufgefaßt werden.

Der Punkt A legt die Strecke Δs_A zurück, während der Weg Δs_B des Punkts B sich geometrisch aus dem Wege Δs_A und $l\Delta\varphi = \Delta s_{BA}$ zusammensetzt: $\Delta s_B = \Delta s_A + \Delta s_{BA}$. Hieraus folgt bei Division durch $\Delta t \to 0$ (wobei auch $\Delta s_B \to 0$, $s_A \to 0$ und $\Delta s_{BA} \to 0$):

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA} \tag{197}$$

Beispiel. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ des Punkts B einer Pleuelstange (Bild 152) setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A$ des Punkts A und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{BA}$, die sich aus der Relativdrehung von $\overline{AB}$ um den Punkt A ergibt. $\boldsymbol{v}_{BA}$ steht senkrecht zu $\overline{AB}$. Die Konstruktion ergibt gleichzeitig Größe und Richtung der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{BA}$.

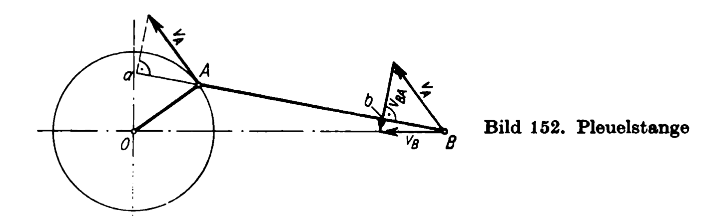


Bild 152. Pleuelstange

Die Vektoren ($\boldsymbol{v}_A$ und $\boldsymbol{v}_{BA}$) werden mit fortlaufender Pfeilrichtung aneinandergereiht, der resultierende Vektor ist $\boldsymbol{v}_B$.

Kennt man die Geschwindigkeit eines Punkts, so kann man die Geschwindigkeit jedes anderen Punkts feststellen. Es ist nicht möglich, Größe und Richtung der Geschwindigkeiten zweier Punkte eines Körpers willkürlich festzulegen. Ist die Geschwindigkeit eines Punkts in Größe und Richtung gegeben, so kann die Geschwindigkeit eines anderen Punkts nur so liegen, daß die Projektionen beider Geschwindigkeiten auf die sie verbindende Gerade gleich groß und gleich gerichtet sind.

4.2.2.2. Geschwindigkeitspläne

Der *Geschwindigkeitsplan* eines Körpers ist seinem Umriß ähnlich und um 90° im Sinne der Bewegung gedreht. Er stellt den geometrischen Ort für die Pfeile der Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte des Körpers in einer bestimmten Lage dar, wenn diese Vektoren von einem beliebigen Punkt P' abgetragen werden (Bild 153).

Zieht man vom Punkt P' die Geraden $\overline{P'a}$, $\overline{P'b}$ und $\overline{P'c}$, so entsteht ein Dreieck abc, das dem Dreieck ABC der Punkte A, B und C des Körpers ähnlich, aber um 90° in Richtung der Momentanbewegung gedreht ist. Das Dreieck abc ist der Geschwindigkeitsplan des Dreiecks ABC.

Die Momentangeschwindigkeit eines Punkts (z. B. D) des Körpers kann dem Geschwindigkeitsplan entnommen werden, wenn die Lage des Punkts auf dem Körper und somit auch auf dem Geschwindigkeitsplan bekannt ist. Die Momentangeschwindigkeit des Punkts D ist $\overline{P'd}$.

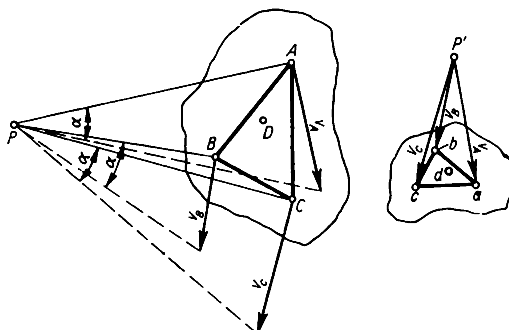


Bild 153. Konstruktion des Geschwindigkeitsplans

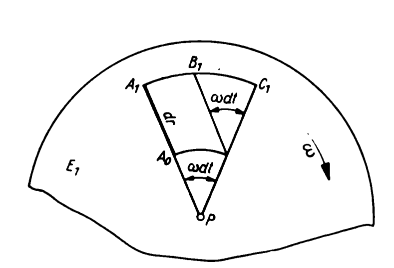


Bild 154. Zustandekommen der CORIOLIS-Beschleunigung

4.2.3. Relativbewegung

4.2.3.1. Parallelverschiebung

Für die geradlinige und die krummlinige Bewegung eines Punkts auf einer translatorisch bewegten Ebene gilt:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_f \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_f \tag{198}$$

Die absolute Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und die absolute Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ des bewegten Massenpunkts sind in jedem Augenblick gleich der geometrischen Summe aus Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_f$ (bzw. Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_f$) und Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_r$ (bzw. Relativbeschleunigung $\boldsymbol{a}_r$).

Beispiel. Die Periodendauer eines mathematischen Pendels beträgt $T = 2\pi/\sqrt{l/g}$. In einem mit der Beschleunigung a_f nach oben ($-$) bzw. unten ($+$) fahrenden Aufzug ist $T = 2\pi/\sqrt{l/(g \pm a_f)}$.

4.2.3.2. Beliebige Bewegung

Bei beliebiger Bewegung der Ebene (Drehung um den Momentanpol P) ist die Absolutgeschwindigkeit eines Punkts wie oben $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_f + \boldsymbol{v}_r$. Um die Absolutbeschleunigung zu erhalten, muß man zur Führungs- und Relativbeschleunigung noch die CORIOLIS-*Beschleunigung* $\boldsymbol{a}_c$ geometrisch addieren:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_f + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c \tag{199}$$

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung, so ist

$$a_c = 2\omega v_r = 2\omega\, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t \qquad (200)$$

Die CORIOLIS-*Beschleunigung* (Bild 154) entsteht dadurch, daß die einzelnen Punkte der Ebene E_1, die der Punkt A nacheinander durchläuft, infolge der Drehung verschieden große Geschwindigkeiten aufweisen. In der Zeit $\mathrm{d}t$ legt der Punkt A die Strecke $\mathrm{d}r$ radial nach außen zurück. In dieser Zeit hat sich die Ebene um den Winkel $\omega\, \mathrm{d}t$ gedreht. Wäre die Umfangsgeschwindigkeit in A_0 und A_1 gleich groß, so würde der Punkt A nach B_1 gelangen, in Wirklichkeit befindet er sich jedoch in C_1. Er muß deshalb eine zusätzliche Beschleunigung a_c erhalten, um den Weg $B_1C_1 = \mathrm{d}r \cdot \omega\, \mathrm{d}t$ zurückzulegen.

Die CORIOLIS-Beschleunigung steht senkrecht zur Relativgeschwindigkeit v_r, sie ist gegenüber v_f um 90° im Sinn von ω gedreht. Sie wird zu Null, wenn $\omega = 0$ (Parallelverschiebung) oder wenn $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$ (reine Drehbewegung).
Analog zu den Geschwindigkeitsplänen gibt es *Beschleunigungspläne* zur Ermittlung der Gesamtbeschleunigung unter Berücksichtigung aller auftretenden Beschleunigungen und deren Komponenten.*)

5. Kinetik starrer Körper

5.1. Kraft und Masse

Nach dem NEWTON*schen Grundgesetz* (*dynamisches Grundgesetz*) berechnet sich die Kraft aus:

$$F = ma \qquad (201)$$

Wird die Beschleunigung durch die Fallbeschleunigung der Erde hervorgerufen, so ist bei der Berechnung zu beachten, daß diese nicht an allen Stellen der Erdoberfläche gleich groß ist. Sie ist an den Polen größer und am Äquator kleiner. Als mittlere Fallbeschleunigung gilt $g = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$.

Die Gewichtskraft F_G (oder G) eines Körpers ist von seiner Lage (geografische Breite) auf der Erdoberfläche abhängig (seine Masse dagegen nicht). Auf der Erde ist es die Kraft, mit der der Körper unter der Beschleunigung g angezogen wird.

Bei der Messung von Gewicht und Masse ist zu beachten, daß Hebelwaagen *Massen vergleichen*, da sie die Masse des zu wägenden Körpers mit der Masse der Wägestücke vergleichen. Federwaagen *messen die Kraft*, mit der der entsprechende Körper von der Erde angezogen wird.**)

Ist $F = 0$, so ist auch $a = 0$, d. h., daß ein Körper, auf den keine Kräfte einwirken, entweder in Ruhe bleibt oder eine gleichförmige und geradlinige Bewegung ausführt.

5.2. Translation

Bei der Translation durchlaufen alle Punkte eines Körpers parallele und kongruente Bahnen, sie haben somit gleich große und gleich gerichtete Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die an allen Punkten angreifenden Kräfte sind deshalb parallel gerichtet und, ebenso wie die Gewichte, proportional zur Masse der einzelnen Punkte. Bei der Translation muß also die Resultierende $\boldsymbol{F}$ aller am Körper angreifenden Kräfte durch den Schwerpunkt hindurchgehen.
Der Körper bewegt sich so, als ob seine Masse im Schwerpunkt vereinigt sei und die Resultierende $\boldsymbol{F}$ im Schwerpunkt angreife. Ist die Richtung von $\boldsymbol{F}$ konstant, so bewegt sich der Körper geradlinig.
Ein Körper kann als Punktmasse betrachtet werden, wenn er eine Translation ausführt.

*) s. hierzu Fachwissen des Ingenieurs, Band 1, Abschn. GETRIEBETECHNIK
**) Zur Benutzung von Einheiten (insbesondere Umrechnung der alten Einheit kp in Newton usw.) und weitere Bemerkungen zu gewichts- und massebezogenen Größenarten s. Abschn. GRÖSSEN UND EINHEITEN

5.2.1. Prinzip von d'Alembert

Aus dem *dynamischen Grundgesetz* (201) folgt $F - ma = 0$. Die Größe $-ma$ bezeichnet man als *Trägheitskraft* (D'ALEMBERTsche Trägheitskraft). Sie ist der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet.

Prinzip von D'ALEMBERT: An jedem Körper sind die äußeren Kräfte und die Trägheitskräfte im Gleichgewicht.

Fügt man also zu einem Kräftesystem die Trägheitskräfte hinzu, so befindet es sich im Gleichgewicht und kann nach den statischen Gleichgewichtsbedingungen behandelt werden.

Beispiel. Wird ein Gewicht $F_G = mg$ (Bild 155a) durch ein Seil mit der Beschleunigung a nach oben gezogen, so beträgt die Seilkraft $F_S = mg + ma = m(g + a)$. Werden zwei miteinander verbundene Massen m_1 und m_2 (Bild 155b) mit der Beschleunigung a hochgezogen, so ist die Seilkraft $F_{S1} = (m_1 + m_2)(g + a)$ und die Seilkraft $F_{S2} = m_2(g + a)$.

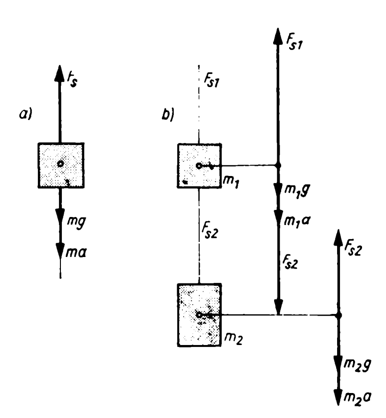


Bild 155. Zum Prinzip von D'ALEMBERT

5.2.2. Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad

Die Arbeit einer veränderlichen Kraft $\boldsymbol{F}$ längs eines Wegs $\boldsymbol{s}$ ist durch eine skalare Größe gegeben:

$$W = \int \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = \int F \cos \alpha \, ds \tag{202}$$

α ist der Winkel, den Kraft und Weg miteinander bilden. Für $\alpha = 0$ ist $W = \int F\, ds$, für $\alpha = 90°$ ist $W = 0$.

Greift die *konstante* Kraft F an einem Körper an, der sich auf der Linie A—A bewegt (Bild 156), so ist zur Berechnung der Arbeit nur die Projektion der Kurve auf die Richtung der Kraft maßgebend:

$$W = F \int \cos \alpha \, ds \tag{203}$$

Die Arbeit ist positiv, wenn Kraft und Weg (bzw. Projektion des Wegs in Richtung der Kraft oder Projektion der Kraft in Richtung des Wegs) gleich gerichtet, und negativ, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind (z. B. Reibungsarbeit).

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, der sich in einer bestimmten Richtung bewegen kann, so ist die Arbeit dieser Kräfte:

$$W = \Sigma F_i \cos \alpha_i s = F_R \cos \alpha_R s \tag{204}$$

α_i Winkel zwischen der Kraft F_i und der Bewegungsrichtung; α_R Winkel zwischen der Resultierenden F_R und der Bewegungsrichtung

Da die Summe aller Kraftkomponenten in einer bestimmten Richtung gleich der Komponente der Resultierenden in dieser Richtung ist, ist die Arbeit der Resultierenden gleich der Summe der Arbeit aller Komponenten. Bei einem Körper im Gleichgewicht ist die gesamte Arbeit aller äußeren Kräfte gleich Null.

Ist $\boldsymbol{F}_s$ die in Richtung des Wegs $\boldsymbol{s}$ fallende und längs $\boldsymbol{s}$ veränderliche Komponente der Kraft $\boldsymbol{F}$, so ist die längs dieses Wegs verrichtete Arbeit:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F}_s \, d\boldsymbol{s} \tag{205}$$

Zeichnet man F_s als Funktion von s (Bild 157), so ist die Fläche unter der Kurve ein Maß für die Arbeit W.

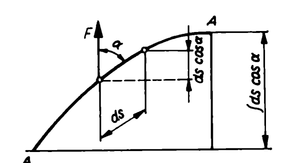


Bild 156. Konstante Kraft bei gekrümmtem Weg

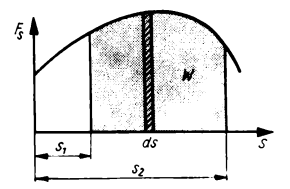


Bild 157. Kraft-Weg-Diagramm

Leistung ist die in der Zeiteinheit ausgeführte Arbeit:

$$P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = F(s)\, \mathrm{d}s/\mathrm{d}t \tag{206}$$

Sind Kraft und Geschwindigkeit gleich gerichtet, so gelten die Beziehungen:

$$P = W/t = Fv \tag{207}$$

Der Wirkungsgrad η bezeichnet das Verhältnis zwischen der (z. B. von einer Maschine) ausgeführten Nutzarbeit W_N und der zugeführten Arbeit W_A:

$$\eta = W_N/W_A = P_N/P_A < 1 \tag{208}$$

5.2.3. Antrieb und Bewegungsgröße (Kraftstoß und Impuls)

Aus der Beziehung $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ folgt:

$$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 \tag{209}$$

Das Produkt Kraft · Zeit ($\boldsymbol{F}t$) wird als *Antrieb* (*Kraftstoß*) und das Produkt Masse · Geschwindigkeit ($m\boldsymbol{v}$) als *Bewegungsgröße* (*Impuls*) bezeichnet.
Impulssatz: Antrieb = Änderung der Bewegungsgröße
Kraftstoß und Impuls sind Vektoren und können deshalb geometrisch zusammengesetzt werden. Bei der geradlinigen Bewegung ist die algebraische Addition der Projektionen der Antriebe und Bewegungsgrößen auf die Bewegungsrichtung möglich.

Beispiel. Ein Wasserstrahl trifft auf eine feststehende Schaufel einer Turbine (Bild 158) und wird im Winkel α abgelenkt. Wie groß ist die Horizontalkomponente F_x der auf die Schaufel ausgeübten Kraft F? Die Ein- und Austrittsgeschwindigkeit seien v_0 und v, die in der Zeit t ausströmende Wassermasse sei m, wobei gilt: $m/t = \dot{m}$.
Wird angenommen, daß die Richtung nach rechts positiv, die nach links negativ sei, so ist die Änderung der Bewegungsgröße in waagerechter Richtung $-mv \cos\alpha - mv_0 = F_x t$. Hieraus ergibt sich die Horizontalkomponente F_x der Kraft F: $F_x = -\dot{m}(v \cos\alpha + v_0)$. Das Vorzeichen ist negativ, weil die Kraft nach links wirkt, die waagerechte Kraft, die der Wasserstrahl auf die Schaufel ausübt, ist ebenso groß, aber nach rechts gerichtet.

Der Impulssatz wird angewendet, wenn eine Kraft durch Aktion und Reaktion gleichzeitig auf zwei Massen wirkt, da die Kraft $\boldsymbol{F}$ und somit $\int \boldsymbol{F}\,dt$ nach beiden Seiten gleich ist.

Beispiel. Ein Geschoß der Masse m_G und der Geschwindigkeit v_0 dringt in einen als Pendel aufgehängten weichen Körper (Sandkiste) der Masse m_P ein, der dabei einen Ausschlag mit der Steighöhe h ausführt (ballistisches Pendel). Wie groß ist die Geschwindigkeit v_0 des Geschosses (Bild 159)?

Die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels ist $v = \sqrt{2gh}$. Der Impuls $\int F\,dt$ wirkt sowohl auf das Geschoß, dessen Bewegungsgröße um den Betrag $m_G(v_0 - v)$ abnimmt, als auch auf die Masse m_P, deren Bewegungsgröße von Null auf $m_P v$ ansteigt. Somit ist $\int F\,dt = m_G(v_0 - v) = m_P v$ oder $v_0 = (m_G + m_P)\,v/m_G$. Aus der Beziehung $m_G v_0 = (m_G + m_P)\,v$ folgt, daß die Bewegungsgröße des Systems Geschoß—Pendel vor und nach dem Stoß gleich ist (Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße in einem abgeschlossenen System: $\Sigma mv =$ konst.)*).

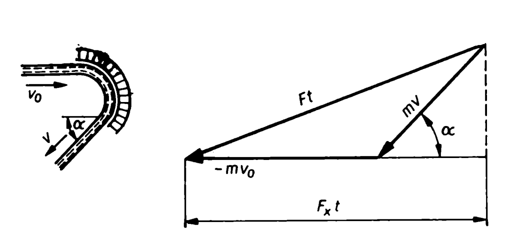


Bild 158. Umlenkung eines Wasserstrahls an einer Turbinenschaufel

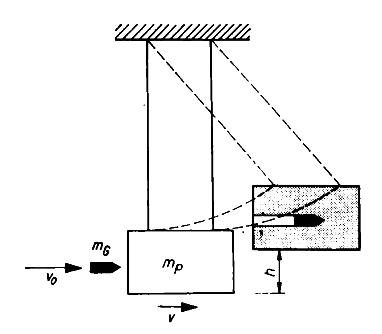


Bild 159. Ballistisches Pendel

5.2.4. Energie

Arbeit kann in Form von Energie gespeichert werden; oder: *Energie* ist die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu leisten. In der Mechanik unterscheidet man zwei Arten von Energie: die *potentielle Energie* (Energie der Lage) und die *kinetische Energie* (Bewegungsenergie). Beide Energiearten können ineinander verwandelt werden. Die Gesamtsumme der Energiebeträge bleibt konstant, wenn dem Körper von der Umgebung Energie weder zugeführt noch entnommen wird.

5.2.4.1. Potentielle Energie

Potentielle Energie ist die Arbeitsfähigkeit, die ein Körper infolge seiner Lage oder seines Zustands hat; sie ist gleich der Arbeit, die aufgewendet werden muß, um ihn in diese Lage oder in diesen Zustand zu bringen. Ein gehobener Körper, eine gespannte Feder, ein verdichtetes Gas haben potentielle Energie. Wird z. B. ein Körper der Masse m von der Höhe h_0 auf die Höhe h_1 gehoben, so muß die Arbeit $W = mg(h_1 - h_0)$ aufgewendet werden.
Der Körper hat somit in der Höhe h_1 eine um den Betrag W größere Energie als in der Höhe h_0. Der Wert

$$W_P = mgh \tag{210}$$

ist die *potentielle Energie* eines Körpers, wenn man als Bezugspunkt der potentiellen Energie die Höhe h_0 wählt und $h_1 - h_0 = h$ ist. Die Arbeit W kann in eine andere Energieform umgewandelt werden, wenn der Körper von h_1 auf h_0 herabsinkt (z. B. in kinetische Energie beim freien Fall oder in Wärme).

*) Anwendung s. auch Stoß fester Körper

5.2.4.2. Kinetische Energie

Wird die Gleichung $F = ma = m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)\,(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t) = mv\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ integriert, so folgt

$$\int_{s_0}^{s} F\,\mathrm{d}s = mv^2/2 - mv_0^2/2 \tag{211}$$

Ist die Kraft F konstant und wirkt sie in Richtung der Bewegung, so gilt:

$$W = F(s - s_0) = mv^2/2 - mv_0^2/2 = W_\mathrm{k} - W_{0\mathrm{k}} \tag{212}$$

Für die Geschwindigkeit $v_0 = 0$ ergibt sich die *kinetische Energie* oder *Wucht:*

$$W_\mathrm{k} = mv^2/2 \tag{213}$$

Der Ausdruck $F(s - s_0)$ bzw. $\int_{s_0}^{s} F\,\mathrm{d}s$ ist die von der Kraft F während der Bewegung verrichtete Arbeit $W = W_\mathrm{k} - W_{0\mathrm{k}}$, d. h.: Arbeit der beschleunigenden Kraft = Änderung der kinetischen Energie. Erfolgt neben der Änderung der kinetischen Energie noch eine Änderung der potentiellen Energie, so ist $W = (W_\mathrm{p} + W_\mathrm{k}) - (W_{0\mathrm{p}} - W_{0\mathrm{k}})$.
Die Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße; es gilt der *Energieerhaltungssatz:*

$$W = W_\mathrm{p} + W_\mathrm{k} = \text{konst.} \tag{214}$$

Beispiel. Ein Körper der Masse $m = 20\,000$ kg trifft mit der Geschwindigkeit $v = 2$ m/s auf eine elastische Feder. Die Federkonstante, d. h. die zum Zusammendrücken je Längeneinheit der Feder erforderliche Kraft, sei $c = 2 \cdot 10^3$ N/mm ($\approx$ 2 Mp/cm). Gesucht wird der Weg s, um den die Feder zusammengedrückt wird, die zwischen Körper und Feder wirkende maximale Kraft F sowie die Verzögerung des Körpers (wenn man von Reibungsverlusten absieht) (Bild 160).

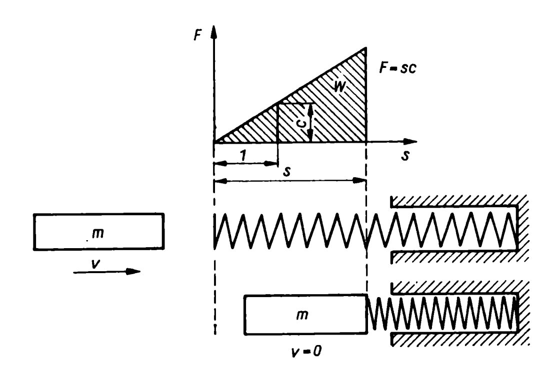


Bild 160. Umwandlung der kinetischen Energie in potentielle

Der Körper wird beim Auftreffen auf die Feder von der Geschwindigkeit v auf die Geschwindigkeit 0 abgebremst, seine kinetische Energie $mv^2/2$ wird somit vollständig auf die Feder übertragen, deren potentielle Energie beim Zusammendrücken von 0 auf $W_\mathrm{p} = Fs/2 = cs^2/2$ ansteigt. Somit ist $mv^2/2 = cs^2/2$ oder $s = \sqrt{mv^2/c} = \sqrt{(20\,000 \cdot 2^2\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2})/2 \cdot 10^6\ \mathrm{N/m}} = 0{,}2$ m. Die hierbei entstehende Federkraft ist $F = cs = \sqrt{mcv^2} = 4 \cdot 10^5$ N. Die Verzögerung ist nach Gl. (177) $a = v^2/2s = (2^2/0{,}4)\ \mathrm{m/s^2} = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

5.3. Rotation und zusammengesetzte Bewegung

5.3.1. Drehmoment und Massenträgheitsmoment

Die Kraft $d\boldsymbol{F}$ wirkt auf einen um O rotierenden Massenpunkt dm (Bild 161). Sie kann in eine Tangentialkomponente $d\boldsymbol{F}_t$ und in eine Normalkomponente $d\boldsymbol{F}_n$ zerlegt werden. Die Normalkomponente $d\boldsymbol{F}_n$ geht durch den Drehpunkt O und übt keinen Einfluß auf die Drehbewegung aus, während $d\boldsymbol{F}_t$ eine Tangentialbeschleunigung $\boldsymbol{a}_t$ bewirkt: $d\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{a}_t\, dm$.

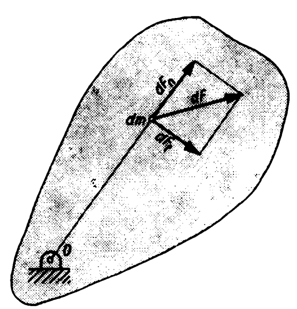


Bild 161. Komponentenzerlegung einer Kraft, die auf einen rotierenden Massenpunkt wirkt

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit r, so folgt nach der Integration:

$$\int r\, d\boldsymbol{F}_t = \int \boldsymbol{a}_t r\, dm = \int (\alpha r)\, r\, dm = \alpha \int r^2\, dm = \alpha J = M \tag{215}$$

Der Wert $\int r\, d\boldsymbol{F}_t$ stellt das resultierende, auf den Körper wirkende *Drehmoment* M und $\alpha = a_t/r$ die *Winkelbeschleunigung* dar, den Ausdruck:

$$J = \int r^2\, dm \tag{216}$$

bezeichnet man als *Massenträgheitsmoment* des Körpers in bezug auf die Drehachse O.
Das Drehmoment M ist also das Produkt aus Massenträgheitsmoment J und Winkelbeschleunigung α (dynamisches Grundgesetz der Rotation).

Die Integration der Gl. (216) läßt sich für einfache Körper leicht durchführen. Bei komplizierteren Drehkörpern (z. B. Schwungrädern) werden grafische oder instrumentelle Methoden zur Ermittlung von J angewendet.
Das Massenträgheitsmoment hängt von der Verteilung der Masse eines Körpers in bezug auf seine Drehachse ab. Der Beitrag, den ein Massenteilchen zum Trägheitsmoment des Körpers liefert, wächst mit dem Quadrat seines Abstands von der Drehachse. Je größer J, um so größer ist der Widerstand, den der Körper einer beschleunigten Bewegung entgegensetzt.
Die Winkelbeschleunigung ist die Änderung der Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit ($\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$). Hieraus folgt, wenn ω_0 die Anfangswinkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega = \omega_0 + \int_0 \alpha\, dt = \omega_0 + (1/J) \int_0 M\, dt \tag{217}$$

Der in der Zeit t zurückgelegte Winkel φ ist:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0 \omega\, dt \tag{218}$$

Für eine *gleichmäßige beschleunigte Drehbewegung* ist $\alpha =$ konst.; dementsprechend ist auch das resultierende Drehmoment $M =$ konst. Die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t beträgt:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{219}$$

und der während der Zeit t zurückgelegte Drehwinkel ist:

$$\varphi = \int_0 \omega\, dt = \int_0 (\omega_0 + \alpha t)\, dt = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \tag{220}$$

Für eine *gleichförmige Drehbewegung* ist $\alpha = 0$ und $\omega =$ konst.; dementsprechend ist das beschleunigende Drehmoment $M = 0$. Bei gleichförmiger Drehung muß das Moment der antreibenden Kräfte gleich dem Moment der Widerstandskräfte sein. Der in der Zeit t zurückgelegte Drehwinkel ist $\varphi = \omega t$.

5.3.1.1. Hauptachsen und Hauptachsen-Trägheitsmomente

Die Größe des Trägheitsmoments ist abhängig von Lage und Richtung der Achsen. Durch einen Punkt O eines Körpers können beliebig viele Achsen gezogen werden; es gibt jedoch nur eine bestimmte Achse I, für die das Trägheitsmoment am größten, und eine Achse II, für die es am kleinsten ist. Beide Achsen stehen rechtwinklig zueinander (*Hauptachsen*)*). Eine dritte Hauptachse III steht rechtwinklig zu der durch I und II gehenden Ebene. Bei symmetrischen Körpern ist jede zur Symmetrieebene senkrechte Achse eine Hauptachse. Bei Rotationskörpern sind es die Drehachse und die zu ihr senkrecht stehenden Achsen. Von besonderer Bedeutung sind die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen.
Sind die auf die drei Hauptachsen bezogenen Trägheitsmomente J_{I}, J_{II} und J_{III} eines Körpers bekannt, so kann das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch denselben Punkt O gehende Achse A bestimmt werden:

$$J = J_{\text{I}} \cos^2 \alpha + J_{\text{II}} \cos^2 \beta + J_{\text{III}} \cos^2 \gamma \tag{221}$$

α, β und γ Winkel zwischen der beliebigen Achse A und den drei Hauptachsen (Bild 162).

Wenn die Drehachse in der Ebene I, II liegt, d. h. $\gamma = 90°$ (Bild 163), dann ist:

$$J = J_{\text{I}} \cos^2 \alpha + J_{\text{II}} \cos^2 \beta = J_{\text{I}} \sin^2 \beta + J_{\text{II}} \cos^2 \beta \tag{222}$$

Für $\beta = 0$ ist dann $J = J_{\text{II}}$, und für $\beta = 90°$ ist $J = J_{\text{I}}$.
Sind die auf die Schwerpunktshauptachsen bezogenen Werte J_{I}, J_{II}, J_{III} zweier Körper gleich, so sind auch die übrigen Trägheitsmomente gleich. Jeder unregelmäßige Körper verhält sich in dynamischer Beziehung wie ein Prisma, wenn dessen Werte m, J_{I}, J_{II}, J_{III} mit denen des unregelmäßigen Körpers übereinstimmen.
Liegt die Drehachse eines Körpers um den Betrag l außerhalb seines Schwerpunkts (Bild 164), so gilt der *Satz von* STEINER**):

$$J = J_s + ml^2 \tag{223}$$

J_s auf die zur Drehachse parallele Schwerpunktachse bezogenes Trägheitsmoment; m Masse des Körpers

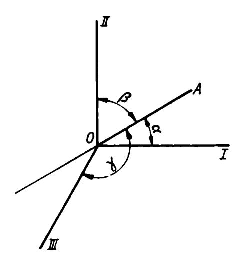


Bild 162. Beliebige Achse A im Hauptachsensystem

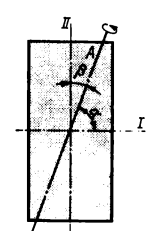


Bild 163. Beliebige Achse A in der I, II-Ebene

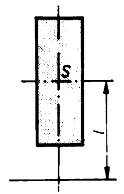


Bild 164. Satz von STEINER bei außerhalb des Schwerpunkts liegender Drehachse

5.3.1.2. Reduzierte Masse, Trägheitsradius, Schwungmoment

Als *reduzierte Masse* bezeichnet man die im Abstand r von der Drehachse punkt- oder ringförmig (also mit konstantem r) anzubringende *Ersatzmasse* m_{red}, die dasselbe Trägheitsmoment aufweist wie der ursprüngliche Körper:

$$m_{\text{red}} = J/r^2 \tag{224}$$

*) s. auch Beanspruchung fester Körper, Konjugierte Achsen
**) s. auch Satz von STEINER für Flächenträgheitsmomente, Gl. (94)

Für eine um die Längs-Mittelachse rotierende Scheibe beträgt die auf den Umfang reduzierte Masse $m_{red} = m/2$, d. h., die am Umfang angebrachte Masse $m/2$ hat dasselbe Trägheitsmoment wie die Scheibe.
Die Masse m_{red} ist abhängig vom Abstand r. Wählt man $m_{red} = m$, so ergibt sich ein Abstand $r = i$, der als *Trägheitsradius* bezeichnet wird. Der Trägheitsradius i eines Körpers ist demnach derjenige Abstand, in dem die gesamte Masse des Körpers punkt- oder ringförmig angeordnet werden muß, damit sich ein Trägheitsmoment J ergibt:

$$J = mi^2 \tag{225}$$

Für eine Scheibe mit dem Radius r und der Masse m ist $i = \sqrt{mr^2/2m} = r/\sqrt{2} = 0{,}707r$.
Der Trägheitsradius hängt von der Form des Körpers bzw. von der Lage der Drehachse ab. Sind Masse und Trägheitsradius bekannt, so kann J mit (225) leicht errechnet werden. Trägt man den Trägheitsradius für jede Achsrichtung als Strahl auf, so bilden die Endpunkte dieser Strahlen ein dreiachsiges Ellipsoid. Die drei Achsen des *Trägheitsellipsoids* sind die drei *Trägheitshauptachsen* des Körpers.
An Stelle des Trägheitsmoments wird in der Technik häufig das *Schwungmoment* mD^2 verwendet:

$$mD^2 = 4J = 4mi^2 \tag{226}$$

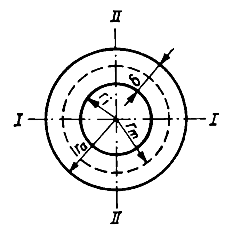
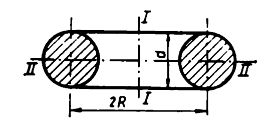
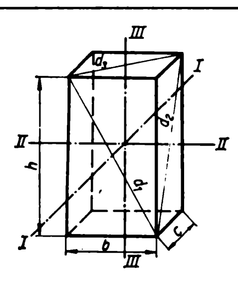
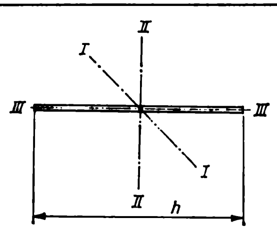
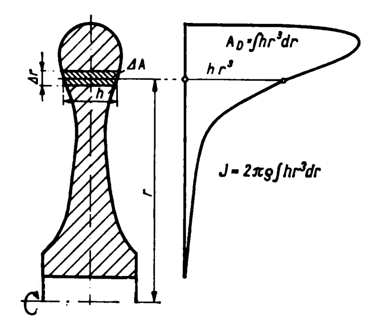
m Masse des rotierenden Körpers; $D = 2i$ Trägheitsdurchmesser

Massenträgheitsmomente technisch wichtiger Körper sind in Tafel 12 enthalten.

Tafel 12. Massenträgheitsmomente technisch wichtiger Körper

Körper		Trägheitsmoment und Masse
Hohlzylinder, Ring mit $(r_a - r_i) = \delta \ll r_m$, $r_m = (r_a + r_i)/2$		$J_I = mr_m^2$; $m = 2\pi\varrho r_m h\delta$ $J_{II} = J_{III} = \frac{m}{4}\left(2r_m^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Zylinder, Vollscheibe		$J_I = mr^2/2$; $m = \pi\varrho r^2 h$ $J_{II} = J_{III} = \frac{m}{4}\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Hohlzylinder mit beliebiger Wanddicke		$J_I = m(r_a^2 + r_i^2)/2$; $m = \pi\varrho(r_a^2 - r_i^2)\,h$ $J_{II} = J_{III} = \frac{m}{4}\left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Kugel		$J_I = J_{II} = J_{III} = 2mr^2/5$ $m = 4\pi\varrho r^3/3$

Tafel 12 (Fortsetzung)

Körper		Trägheitsmoment und Masse
Hohlkugel mit $(r_a - r_i) = \delta \ll r_m$ $r_m = (r_a - r_i)/2$	 	$J_I = J_{II} = J_{III} = m(r_a + r_i)^2/6$ $m = 4\pi\varrho r_m^2\delta$
Kreisring	 	$J_I = m\left(R^2 + \frac{3d^2}{16}\right)$; $m = \pi^2\varrho R d^2/2$ $J_{II} = J_{III} = m\left(\frac{R^2}{2} + \frac{5d^2}{32}\right)$
Rechtkant	 	$J_I = m(b^2 + h^2)/12 = md_1^2/12$ $J_{II} = m(c^2 + h^2)/12 = md_2^2/12$ $J_{III} = m(b^2 + c^2)/12 = md_3^2/12$ $m = \varrho hbc$
Stab	 	$J_I = J_{II} = mh^2/12$; $J_{III} \approx 0$ $m = \varrho hbc$
Beliebiger Drehkörper	 	Man unterteilt den Körper in eine genügend große Anzahl konzentrischer Hohlzylinder der Masse $m = 2\pi\varrho r\Delta A$ und mit dem Trägheitsmoment $2\pi\varrho r^3\Delta A$, wobei r der mittlere Abstand von der Drehachse und ΔA die halbe Querschnittsfläche ist $J = 2\pi\varrho\Sigma\Delta A r^3$ bzw. $J = 2\pi\varrho\int hr^3\,dr$ *Zeichnerische Ermittlung:* Da $\Delta A = h\cdot\Delta r$, gilt $\Sigma\Delta A r^3 = \Sigma hr^3\Delta r$. Zeichnet man hr^3 als Funktion von r, so ergibt sich eine Kurve, deren Flächeninhalt unter Berücksichtigung des Maßstabs das Trägheitsmoment darstellt.

5.3.1.3. Arbeit und Leistung

Die Arbeit der zum Drehpunkt O gerichteten Normalkomponente F_n ist gleich Null (Bild 165), die Arbeit der Tangentialkomponente F_t ist:

$$W = \int_0^s F_t \, ds = \int_0^\varphi F_t r \, d\varphi = \int_0^\varphi M \, d\varphi \tag{227}$$

Bei konstantem Drehmoment ist die Arbeit $W = M\varphi$. Die Leistung erhält man aus der Differentiation von (227):

$$P = dW/dt = M \, d\varphi/dt = M\omega \tag{228}$$

oder in Worten: *Leistung ist Drehmoment mal Winkelgeschwindigkeit.*

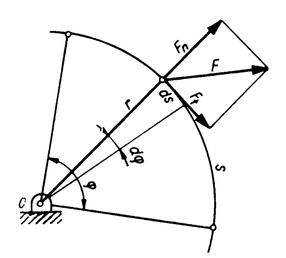


Bild 165. Zur Arbeit der Kraftkomponenten

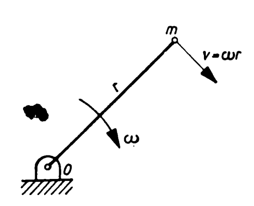


Bild 166. Drehbewegung eines Massenpunkts

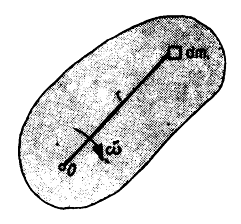


Bild 167. Drehbewegung eines starren Körpers

5.3.1.4. Energie rotierender Massen

Bewegt sich ein Punkt der Masse m im Abstand r mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Festpunkt O (Bild 166), so ist seine Energie:

$$W = mv^2/2 = m\omega^2 r^2/2 \tag{229}$$

Dreht sich ein starrer Körper um die Achse O (Bild 167), so ist die Gesamtenergie aller Masseteilchen dm:

$$W = (\omega^2/2) \int r^2 \, dm = \omega^2 J/2 \tag{230}$$

Daraus folgt mit $M = J(d\omega/dt)$: $M \, d\varphi = J(d\omega/dt) \, d\varphi = J\omega \, d\omega$ oder:

$$W = \int_0^\varphi M \, d\varphi = J\omega^2/2 - J\omega_0^2/2 = W_k - W_0 \tag{231}$$

W_k stellt die kinetische Energie des rotierenden Körpers, die *Drehwucht*, dar.

5.3.1.5. Drall und Coriolis-Kraft

Aus $M = J\alpha = J \, d\omega/dt$ folgt für den allgemeinen Fall für veränderliche J und ω:

$$\int_0^t M \, dt = \int_{J_0\omega_0}^{J\omega} d(J\omega) = J\omega - J_0\omega_0 \tag{232}$$

Für konstante J wird das Integral gleich $J(\omega - \omega_0)$. Für eine punktförmige Masse m, auf die die konstante Tangentialkraft F_t wirkt und die im Abstand r um O kreist, ist $M = F_t r$, $J = mr^2$

und $\omega = v/r$ (Bild 168). Hieraus folgt:

$$F_t rt = mr(v - v_0) \tag{233}$$

$F_t rt$ (oder allgemein $\int M\,dt$) ist der *Antrieb* des resultierenden *Drehmoments* und

$$L = mrv = mr^2\omega = J\omega \tag{234}$$

ist das *Moment der Bewegungsgröße*, der *Drall.*
Ändert sich das Trägheitsmoment während der Bewegung (z. B. wenn die Masse m ihren Abstand r vom Drehpunkt ändert, Bild 169), so gilt:

$$M = \mathrm{d}(J\omega)/\mathrm{d}t = J\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t + \omega\,\mathrm{d}J/\mathrm{d}t \tag{235}$$

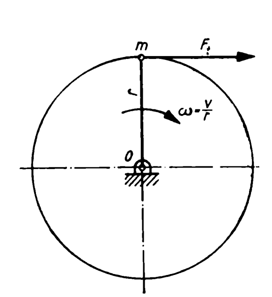




Bild 168. Drehmoment und Trägheitsmoment

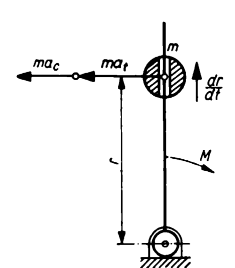


Bild 169. Bewegung einer Masse m

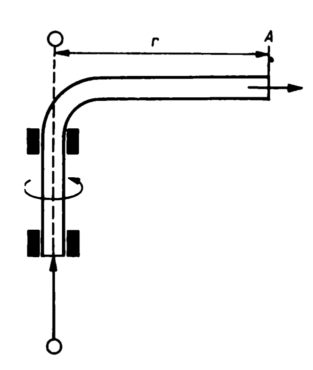


Bild 170. Wirkung der CORIOLIS-Kraft

Für eine punktförmige Masse ist $J = mr^2$ und deshalb $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t = 2rm\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$. Da ferner $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = (1/r)\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, gilt:

$$M = mr\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t + mr \cdot 2\omega\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \tag{236}$$

Hier bedeutet $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a_t$ die tangential gerichtete Beschleunigung der Masse m; mra_t ist das Moment der tangentialen Trägheitskraft. Der Ausdruck

$$2\omega\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = a_c = 2\omega v_r \tag{237}$$

wird als CORIOLIS-*Beschleunigung* bezeichnet. Somit ist mra_c das *Moment* der CORIOLIS-*Kraft*.

Sitzt die Masse m fest auf der masselosen rotierenden Stange (Bild 169), so ist $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$. Es entsteht dann keine CORIOLIS-Kraft, und das beschleunigende Drehmoment ist $M = mr\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = mra_t$. Bewegt sich jedoch die Masse m mit der Geschwindigkeit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ nach außen, so ist das bei gleicher Tangentialbeschleunigung aufzuwendende Drehmoment um den Betrag des Moments der CORIOLIS-Kraft größer: $M = mra_t + mra_c$.
a_c ist positiv (d. h. a_t gleich gerichtet), wenn sich die Masse m von innen nach außen bewegt ($\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ positiv), und negativ, wenn sie sich von außen nach innen bewegt. Außerdem wirkt auf die Masse m noch die Zentripetalbeschleunigung a_z, die das Drehmoment jedoch nicht beeinflußt, da sie radial gerichtet ist.

Beispiel. Ein Wasserstrahl strömt mit konstanter Geschwindigkeit $v_r = 2$ m/s durch ein horizontales Rohr $O-A$ (Bild 170), das sich je Sekunde einmal um die Achse $O-O$ dreht. Gesucht werden die CORIOLIS-Beschleunigung und das Moment der CORIOLIS-Kraft.
Nach (237) ist $a_c = 2\omega v_r = 2 \cdot 6{,}28 \cdot 2$ m/s² $= 25{,}1$ m/s².
Da ω und v_r auf der Strecke $\overline{OA}$ ($\triangleq r$) konstant sind, ist auch a_c für jedes Massenelement gleich. Das Moment der CORIOLIS-Kraft ist nach (236) $M = mra_c/2$, wenn m die Masse des Wassers im Rohr $O-A$ ist.

Wird auf ein rotierendes System kein Drehmoment ausgeübt, so bleibt der Drall unverändert. Mit $M = 0$ ist $J\omega = J_0\omega_0 =$ konst. Zwei punktförmige Massen, die im Abstand r_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um den Drehpunkt O kreisen, haben den Drall $2mr_1\omega_1$. Wird der Abstand r_2 vergrößert, ohne daß dabei auf die Achse O ein Moment ausgeübt wird, so ändert sich die Winkelgeschwindigkeit auf ω_2; der Drall jedoch bleibt konstant: $2mr_1^2\omega_1 = 2mr_2^2\omega_2$, also ist:

$$\omega_2 = \omega_1 r_1^2/r_2^2 \tag{238}$$

Beispiel. Ein Rädersystem (Bild 171) wird durch das Rad 1 angetrieben. Gesucht wird die kinetische Energie (Drehwucht) des Systems, wenn die Trägheitsmomente J_1, J_2 und J_3 der Räder und der mit ihnen verbundenen Massen gegeben sind. Die Winkelgeschwindigkeit des Rads 1 sei ω_1, die Übersetzungsverhältnisse sind $i_1 = R_1/r_1 = \omega_1/\omega_2$ und $i_2 = R_2/r_2 = \omega_2/\omega_3$. Die Gesamtenergie ist $W = (\omega_1^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + \omega_3^2 J_3)/2$. Da $\omega_2 = \omega_1/i_1$ und $\omega_3 = \omega_1/i_1 i_2$, folgt:

$$W = \left(J_1 + \frac{J_2}{i_1^2} + \frac{J_3}{i_1^2 i_2^2}\right)\frac{\omega_1^2}{2} = J_{\text{red}}\frac{\omega_1^2}{2} \tag{239}$$

Den Klammerausdruck bezeichnet man als das auf die Antriebswelle reduzierte Trägheitsmoment J_{red}. Das Drehmoment der Antriebswelle ist dann $M = J_{\text{red}}\alpha_1$.

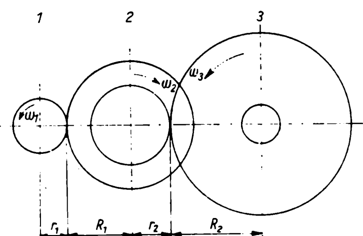
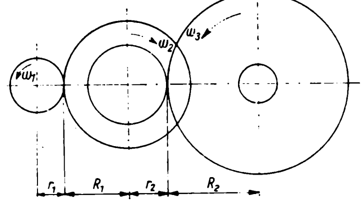



Bild 171. Rädergetriebe

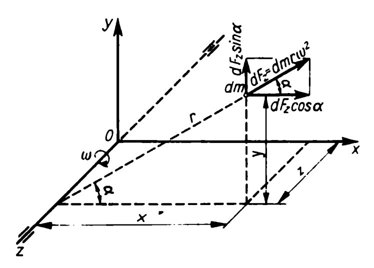


Bild 172. Rotation eines Massenelements

5.3.2. Zentrifugalkraft

Bei beliebigen oder gleichförmigen krummlinigen Bewegungen eines Punkts der Masse m wirkt auf diesen die zum Krümmungsmittelpunkt gerichtete *Zentripetalbeschleunigung* $a_z = \omega^2 r = v\omega$. Es entsteht somit die *Zentripetalkraft* $mr\omega^2$, ihr entgegengesetzt ist die gleich große, radial nach außen gerichtete *Zentrifugalkraft* (*Fliehkraft*)

$$F_z = mr\omega^2 = mv^2/r \tag{240}$$

r Krümmungsradius bei beliebiger Bewegung bzw. Abstand des Massenpunkts von der Drehachse bei gleichförmiger Bewegung (Kreisbewegung); ω Winkelgeschwindigkeit

Dreht sich ein starrer Körper um eine Achse, so ergibt sich seine resultierende Fliehkraft aus den Fliehkräften aller Massenteilchen dm:

$$F_z = \omega^2 \int r\,\mathrm{d}m = \omega^2 r_S m \tag{241}$$

m Masse des Körpers; r_S Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse

Ist $r_S = 0$, d. h., geht die Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist die resultierende Fliehkraft gleich Null. Im allgemeinen Fall, wenn die durch den Schwerpunkt gehende Drehachse beliebig gewählt wird, treten statische Momente der Fliehkräfte (M_x, M_y, M_z) auf. Wenn die Drehachse mit einer der Hauptträgheitsachsen (Symmetrieachse) des Körpers zusammenfällt, verschwindet das zugehörige Moment. Die Zentrifugalkraft des Massenelements dm eines Körpers, der sich um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, beträgt d$F_z = r\omega^2$ dm und bewirkt (Bild 172) je ein Moment um die

x-Achse: $\mathrm{d}M_x = -z \sin\alpha\, \mathrm{d}F_z = -\omega^2 zy\, \mathrm{d}m$

y-Achse: $\mathrm{d}M_y = z \cos\alpha\, \mathrm{d}F_z = \omega^2 zx\, \mathrm{d}m$ und

z-Achse: $\mathrm{d}M_z = 0$

Das Gesamtmoment, das der rotierende Körper um die x- bzw. y-Achse ausübt, ist $M_x = -\omega^2 \int zy\,dm = -\omega^2 J_{zy}$ bzw. $M_y = \omega^2 \int zx\,dm = \omega^2 J_{zx}$. Die Ausdrücke:

$$J_{zy} = \int zy\,dm \quad \text{und} \quad J_{zx} = \int zx\,dm \tag{242}$$

bezeichnet man als *Zentrifugalmomente*. M_x und M_y verschwinden, wenn $J_{zx} = J_{zy} = 0$ (dies tritt ein, wenn die Drehachse eine Hauptträgheitsachse ist).

Es gelten folgende Regeln:

1. Ist die Drehachse eine durch den Schwerpunkt gehende Hauptträgheitsachse, so entsteht weder eine resultierende Zentrifugalkraft noch ein statisches Moment der Zentrifugalkräfte.
2. Liegt die Drehachse parallel oder senkrecht zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsachse (Symmetrieachse), so entsteht nur eine *Einzelzentrifugalkraft* (keine Momente), deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt geht und senkrecht zur Drehachse gerichtet ist.

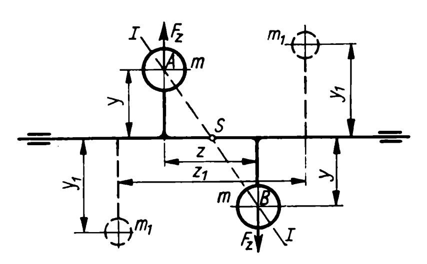


Bild 173. Welle mit zwei Massen

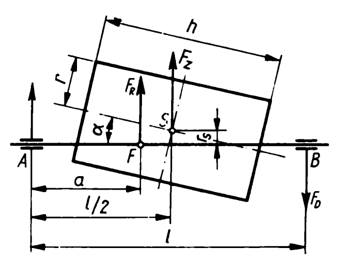


Bild 174. Zylinder mit beliebig verlaufender Drehachse

3. Wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht und mit der Hauptachse den Winkel α bildet, entsteht keine Einzelzentrifugalkraft, sondern nur ein *Kräftepaar*, das um die senkrecht zur Drehachse (Zeichenebene) stehende x-Achse dreht und von den Lagern aufgenommen werden muß.

Beispiel. An einer Welle sind zwei gleiche Körper A und B je der Masse m in gleichem Abstand y angebracht (Bild 173). Die an dem Körper angreifenden Zentrifugalkräfte sind $F_z = my\omega^2$. Diese bilden ein Kräftepaar mit dem Moment $M_x = myz\omega^2$ oder genauer $M_x = \omega^2 \int yz\,dm = J_{yz}\omega^2$, während eine resultierende Einzelkraft nicht auftritt, da der Schwerpunkt des Systems in der Drehachse liegt. Das Moment erzeugt in den Lagern die Kräfte $F = M_x/l$, wobei l den Lagerabstand bedeutet. Um die Lager zu entlasten, muß man ein gleich großes, aber entgegengesetzt gerichtetes Zentrifugalmoment $-m_1 z_1 y_1 \omega^2$ anbringen, so daß $M_x = (mzy - m_1 z_1 y_1)\,\omega^2 = 0$. In diesem Falle ist die Symmetrie des Systems hergestellt, das Zentrifugalmoment $\Sigma mzy\omega^2$ verschwindet, und die Drehachse wird zur Hauptträgheitsachse.

4. Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt und bildet sie mit der Hauptträgheitsachse den Winkel α, so entsteht eine *Einzelzentrifugalkraft*, die nicht durch den Schwerpunkt geht.

Beispiel. Für einen Zylinder, dessen Hauptträgheitsachse mit der Drehachse den Winkel α bildet (Bild 174), beträgt das Zentrifugalmoment $J_{yz} = (m/8)\,[r^2 - (h^2/3)] \sin 2\alpha$. Es entsteht ein Drehmoment $M_x = \omega^2 J_{yz}$, das um die senkrecht zur Zeichenebene stehende x-Achse dreht und von den Lagern durch das Kräftepaar $F_D l$ aufgenommen wird. Weiterhin entsteht eine Einzelkraft $F_z = \omega^2 r_S m$, die durch die Lage des Schwerpunkts außerhalb der Drehachse hervorgerufen wird und im Schwerpunkt angreift. Drehmoment und Einzelkraft lassen sich zu einer resultierenden Kraft $F_R = F_z$ zusammensetzen, deren Angriffspunkt F sich aus der Beziehung $aF_R = F_z l/2 - F_D l = F_z l/2 - M_x$ bestimmen läßt: $a = l/2 - M_x/F_z = l/2 - J_{yz}/r_S m$.

Achsen, auf die keine Zentrifugalkräfte und -momente wirken, heißen *freie Achsen*, da sie nicht in Lagern festgehalten zu werden brauchen. Die freien Achsen eines Körpers sind die Achsen seines größten und kleinsten Trägheitsmoments, die dritte Hauptachse ist keine freie Achse, da die Drehung um sie nicht stabil ist. Die größte Stabilität hat die Achse des größten Trägheitsmoments.

5.3.3. Drehimpuls (Drall)

Dreht sich ein Körper um eine feste Drehachse A--A, die durch den Schwerpunkt geht, so bestimmt sich seine Winkelgeschwindigkeit aus:

$$\omega_{A-A} = \sqrt{2W/mi^2} = \sqrt{2W/J_{A-A}} \quad (243)$$

Jeder Richtung der Drehachse entsprechen bestimmte Werte J_{A-A} und i. Trägt man den reziproken Wert $1/i$ des Trägheitsradius (bezogen auf die Achse A—A) für jede Achsenrichtung als Strahl auf, so ergibt sich im allgemeinen Fall ein dreiachsiges Ellipsoid, das *Trägheitsellipsoid* (Bild 175). Auf einem ähnlichen Ellipsoid, das um den Betrag $\sqrt{2W/m}$ vergrößert ist, liegen die Endpunkte aller Winkelgeschwindigkeiten. Den Hauptachsen I und II des Trägheitsellipsoids entsprechen das kleinste und das

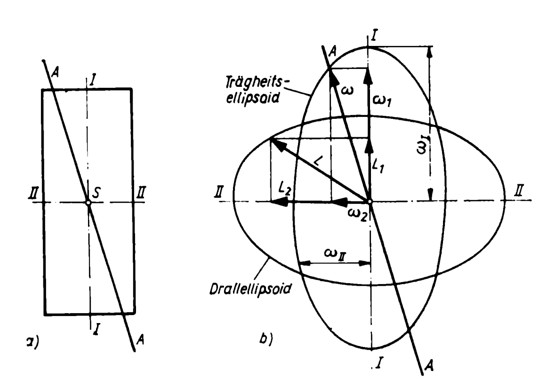


Bild 175. Trägheits- und Drallellipsoid. a) Rotation des Körpers um die Achse $A-A$; b) Darstellung der Vektoren

größte Trägheitsmoment, somit der kleinste (i_I) und der größte (i_{II}) Trägheitsradius und die kleinste (ω_{II}) und die größte (ω_I) Winkelgeschwindigkeit. Bei gleicher Energie ist die Winkelgeschwindigkeit um so größer, je kleiner der Trägheitsradius ist.

Wirkt auf den Körper während der Zeit dt ein antreibendes Moment $M = J\alpha$, so erhält man:

$$\int_{t_0}^{t} M \, dt = \int_{t_0}^{t} J(d\omega/dt) \, dt = \int_{\omega_0}^{\omega} J \, d\omega \quad (244)$$

oder: *Der Antrieb des Moments ist gleich der Änderung des Drehimpulses bzw. Dralls.*
Wirken keine Momente auf das rotierende System, so bleiben Größe und Richtung des Drehimpulses konstant.
Die Integration des Ausdrucks (244) ergibt für $t_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$ den *Drehimpuls:*

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}t = J\boldsymbol{\omega} \quad (245)$$

Auch der Drehimpuls ist (wie die Winkelgeschwindigkeit) ein Vektor, dessen Komponenten $\boldsymbol{L}_1 = J_I\omega_1$, $\boldsymbol{L}_2 = J_{II}\omega_2$, $\boldsymbol{L}_3 = J_{III}\omega_3$ sind. Sie werden nach dem Parallelogrammgesetz zusammengefaßt und bilden den *Drehimpuls- oder Drallvektor* $\boldsymbol{L}$. Die Endpunkte des Drehimpulsvektors liegen ebenfalls auf einem Ellipsoid, dem *Drehimpulsellipsoid* oder *Drallellipsoid*, das die gleichen Hauptachsenrichtungen wie das Trägheitsellipsoid hat.

Beispiel. Ein reibungsfrei kardanisch aufgehängter Körper, dessen Drehachse durch den Schwerpunkt geht, behält seine Lage im Raum unabhängig von den Drehbewegungen des Aufhängesystems bei (Anwendung z. B. im Kreiselkompaß, in Flugüberwachungsgeräten — künstlicher Horizont — oder in Trägheitsnavigationssystemen in der Raketentechnik).

5.3.4. Kreisel

Als Kreisel bezeichnet man einen schnell rotierenden starren Körper. In den meisten Fällen ist die Drehachse eine Hauptträgheitsachse (Figurenachse).

Ein Kreisel (Bild 176) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{I} um die Hauptachse A—A, sein Drall $\boldsymbol{L}$ läßt sich als Vektor auf der Kreiselachse darstellen, dessen Richtung so festgelegt wird, daß die Drehbewegung, auf die Spitze des Pfeils gesehen, entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt.

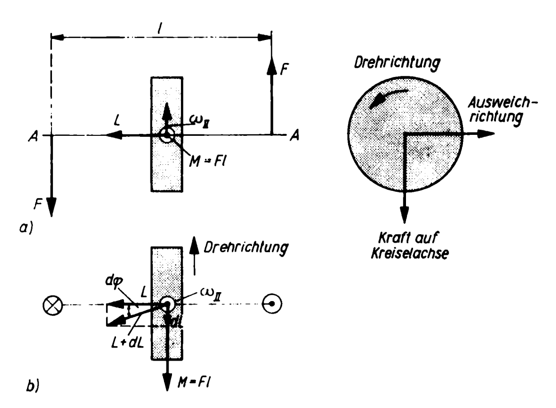


Bild 176. Dralländerung durch ein Drehmoment

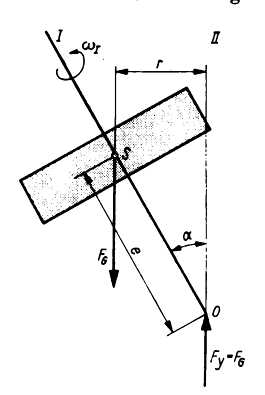


Bild 177. Kräfte am Kreisel

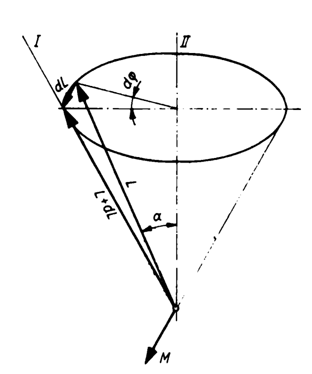


Bild 178. Momentenvektor und Drallvektor bei der Kreiselbewegung

Wirkt auf den Kreisel ein Moment (z. B. eines Kräftepaars $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{l}$), so ändert sich der Drall $\boldsymbol{L}$. Die Dralländerung d$\boldsymbol{L}$ liegt parallel und in gleicher Richtung zum Momentenvektor $\boldsymbol{M}$. Es ist $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t$; die Pfeile zeigen, entsprechend dem Drehsinn des Kräftepaars, nach vorn (Bild 176a). $\boldsymbol{L}$ und d$\boldsymbol{L}$ lassen sich zu einem resultierenden Drall zusammensetzen, dessen Richtung sich um den Winkel dφ geändert hat (Bild 176b). Es ist:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{L}(d\varphi/\mathrm{d}t) \tag{246}$$

$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \omega_{\mathrm{II}}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Achse ausweicht (*präzediert*), folglich ist:

$$M = L\omega_{\mathrm{II}} = J\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{II}} \quad \text{oder} \quad \omega_{\mathrm{II}} = M/J\omega_{\mathrm{I}} \tag{247}$$

Rotiert ein reibungsfrei auf einer Spitze O gelagerter Kreisel (Bild 177) mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{I} um die Hauptachse I, die mit der Senkrechten II den Winkel α bildet, so erzeugt seine Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ ein Moment $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{r}$ um O. Die Dralländerung d$\boldsymbol{L}$ muß parallel zum Momentenvektor $\boldsymbol{M}$ liegen (Bild 178).

Dieser steht rechtwinklig auf der Ebene des Kräftepaars, d. h. auf der durch die Achsen I und II bestimmten Ebene (in der dargestellten Lage senkrecht zur Zeichenebene, wobei der Pfeil auf den Leser gerichtet ist). Der auf der Hauptachse I liegende Drallvektor $\boldsymbol{L} = J\omega_{\mathrm{I}}$ ändert sich mit der Zeit dt um den Betrag d$\boldsymbol{L}$, bei reibungsfreier Drehung bleibt seine Größe konstant, aber der Vektor $\boldsymbol{L} + \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ nimmt gegenüber $\boldsymbol{L}$ eine neue Lage ein. Durch die Richtungsänderung dreht sich der Kreisel im Sinne des Momentenpfeils um die Achse II (Präzession), in der Zeit dt legt er den Winkel dφ zurück. Entsprechend (246) ist mit $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L} \sin\alpha \, \mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = M = L \sin\alpha(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = J\omega_{\mathrm{I}} \sin\alpha\omega_{\mathrm{II}} = J\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{II}} \sin\alpha \tag{248}$$

bzw.

$$\omega_{\mathrm{II}} = M/J\omega_{\mathrm{I}} \sin\alpha = M_{\mathrm{n}}/J\omega_{\mathrm{I}} \tag{249}$$

Der Kreisel präzediert um so langsamer, je größer ω_{I} und J sind. Die Richtung der Präzession kann aus den Richtungen des Drallvektors und Drehmoments bestimmt werden:

Dreifingerregel der rechten Hand (Daumen ≙ Drallvektor, Zeigefinger ≙ Momentenvektor, Mittelfinger ≙ Vektor der Präzessionswinkelgeschwindigkeit) oder:

Wirkt eine Kraft senkrecht auf die Kreiselachse, so weicht der Kreisel seitwärts aus; die Richtung ergibt sich, wenn man die an der Kreiselachse angreifende Kraft im Sinn der Kreiselrotation um 90° dreht (Bild 176).

5.3.5. Zusammengesetzte Bewegungen

Jede Bewegung eines starren Körpers kann in eine Translation mit der Geschwindigkeit v_{S} des Schwerpunkts S und in eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse zerlegt werden.

Es gelten folgende Gesetze:

1. Der Schwerpunkt eines Körpers oder Körpersystems bewegt sich so, als ob die ganze Masse in ihm vereinigt sei und die Resultierende aller äußeren Kräfte auf ihn wirke. Dies gilt auch, wenn der Körper während der Bewegung seine Form verändert. Die inneren Kräfte zwischen den Massenteilchen treten paarweise auf und sind im Gleichgewicht.
2. Die Bewegungsgröße eines Körpers ist gleich der Bewegungsgröße seiner im Schwerpunkt vereinigten Masse.
3. Ein Kräftepaar, dessen Resultierende gleich Null ist, ruft keine Bewegung des Schwerpunkts hervor, sondern dreht den Körper um den Schwerpunkt. Bei ebenen Bewegungen behält die Schwerpunktachse ihre Lage im Raum.
4. Die Gesamtenergie eines beliebig bewegten Körpers oder Körpersystems setzt sich aus der Translations- und der Rotationsenergie zusammen: $W = mv_{\mathrm{S}}^2/2 + J_{\mathrm{S}}\omega^2/2$.

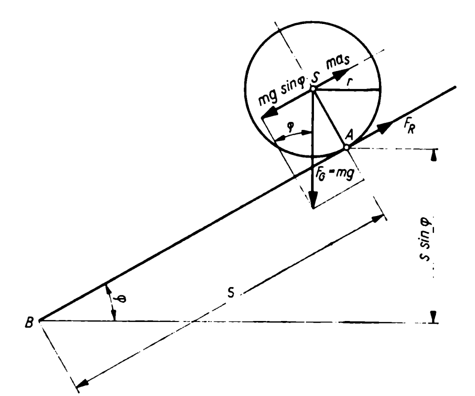


Bild 179. Bewegung auf einer geneigten Ebene

Beispiel. Eine Scheibe der Masse m und vom Radius r befindet sich im Punkt A einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel φ (Bild 179). Gesucht werden die Beschleunigung a_{S} des Schwerpunkts, die in der Zeit t zurückgelegte Strecke s und die Geschwindigkeit v_{S} an der Stelle B, wenn die Geschwindigkeit im Punkt A Null war ($v_0 = 0$).

Aus der Energiegleichung folgt: $mgs \sin\varphi = mv_S^2/2 + J\omega^2/2$, d. h., die potentielle Energie im Punkt A ist gleich der kinetischen Energie im Punkt B. Mit $\omega = v_S/r$ und $J = mr^2/2$ ergibt sich $s = 3v_S^2/4g \sin\varphi$. Für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung gilt $s = a_S t^2/2$ und $v_S = a_S t$. Nach dem Einsetzen dieser Werte in die vorstehende Gleichung folgt $a_S = (2g \sin\varphi)/3$. Würde die Scheibe nicht rollen, sondern reibungsfrei gleiten, so wäre die Beschleunigung $a_S = g \sin\varphi$. Damit ein Rollen stattfinden kann, muß das Moment $F_R r$ des Reibungswiderstands in der Lage sein, der Scheibe die erforderliche Winkelbeschleunigung zu erteilen: $F_R r = J\alpha$. Ferner ist, da A der Momentanpol der Drehung ist, $\alpha r = a_S$ und deshalb $F_R r^2 = J a_S$. Der Reibungswiderstand beträgt $F_R = \mu mg \cos\varphi$. Ferner muß die Gleichgewichtsbedingung $mg \sin\varphi = ma_S + \mu mg \cos\varphi$ erfüllt sein, d. h., $a_S = g(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)$ mit der Reibungszahl μ zwischen der Scheibe und der Fläche. Da andererseits $a_S = F_R r^2/J = F_R r^2/mi^2$, gilt $\sin\varphi - \mu\cos\varphi = (\mu r^2/i^2)\cos\varphi$ und nach einigen Umformungen: $\tan\varphi = \mu(1 + r^2/i^2)$. φ ist der größte Winkel, bei dem ein reines Abrollen auftritt. Bei $\varphi' > \varphi$ ist das Moment $F_R r$ nicht groß genug, um die Winkelbeschleunigung $\alpha = a_S/r$ zu erzeugen. In diesem Fall tritt relatives Gleiten auf der Bahn ein (mit der Gleitbeschleunigung $a_S' = a_S - \alpha r$).

5.4. Stoß fester Körper

Bei der gegenseitigen Berührung erhalten zwei Körper einen *Stoß*, wenn sie sich vorher auf einer *Stoßlinie* (die auf der gemeinsamen Berührungsebene errichtete Senkrechte) aufeinander zu bewegten. Die Geschwindigkeiten beider Körper können dabei in der gleichen Richtung oder entgegengesetzt liegen. Geht die Stoßlinie durch die Schwerpunkte der Körper, so ist der Stoß *zentrisch*, andernfalls *exzentrisch*. Bewegen sich die Körper unmittelbar vor dem Stoß in Richtung der Stoßlinie, so ist der Stoß *gerade*, sonst *schief*.

5.4.1. Gerader zentrischer Stoß

Die Massen zweier zusammenstoßender Körper seien m_1 und m_2 (Bild 180), ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß v_1 und v_2, wobei $v_1 > v_2$; die Geschwindigkeiten nach dem Stoß v_1' und v_2'. Beim Zusammenstoß treten an der Berührungsstelle zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Stoßkräfte F auf, die, bei Null beginnend, mit zunehmender Deformation der Körper anwachsen und eine Änderung der Impulse der Körper verursachen.

1. Stoßabschnitt: Beim Stoß wird die Masse m_2 beschleunigt und die Masse m_1 verzögert. Sobald die Körper eine gemeinsame Geschwindigkeit v_g erreicht haben, ist die Deformation beendet, und F hat den größten Wert angenommen.

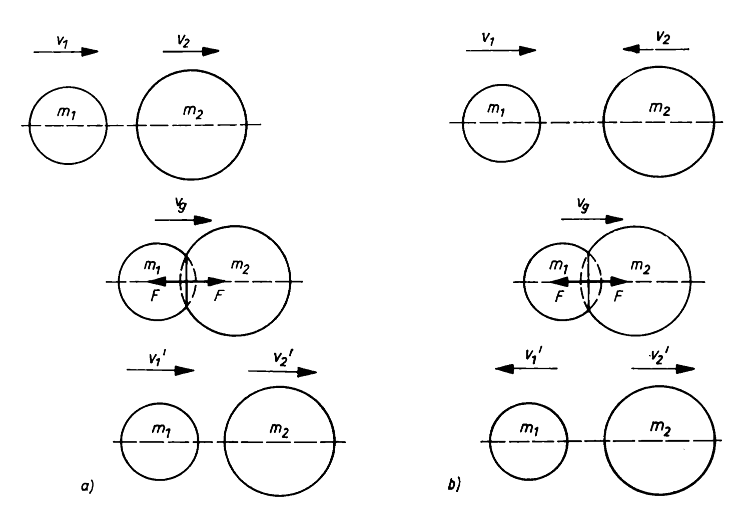


Bild 180. Gerader zentrischer Stoß. a) gleiche Bewegungsrichtung der stoßenden Körper; b) entgegengesetzte Bewegungsrichtung der stoßenden Körper

2. Stoßabschnitt: Nunmehr dehnen sich die Körper infolge ihrer Elastizität wieder aus, wobei F bis auf Null abnimmt; die Masse m_1 erfährt nochmals eine Verzögerung (von v_g auf v_1') und die Masse m_2 nochmals eine Beschleunigung (von v_g auf v_2').

Die Resultierende der Kräfte F ist in jedem Augenblick gleich Null; deshalb ist auch der Antrieb während des Stoßes gleich Null. Die Bewegungsgröße (der Impuls) des Systems vor und nach dem Stoß bleibt gleich. Somit gilt, daß die *Bewegungsgröße vor dem Stoß* ($m_1v_1 + m_2v_2$) gleich der *Bewegungsgröße nach dem ersten Stoßabschnitt* ($v_gm_1 + v_gm_2$) ist. Hieraus ergibt sich die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende des ersten Stoßabschnitts:

$$v_g = (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2) \tag{250}$$

Die *Stoßzahl k* kennzeichnet die *Elastizität* der Körper; sie liegt zwischen 1 (vollkommen elastischer Körper) und 0 (vollkommen unelastischer Körper). Sie wird eingeführt, um ein *unterschiedliches Formänderungsverhalten* der Körper zu berücksichtigen. Es gilt:

$$k = (v_2' - v_1')/(v_1 - v_2) \tag{251}$$

Mit $k = 0$ ist $v_1' = v_2' = v_g$ (*vollkommen unelastischer* oder *plastischer Stoß*; die gesamte Formänderungsarbeit wird in eine bleibende Verformung umgewandelt), mit $k = 1$ ergeben sich die Verhältnisse des *vollkommen elastischen Stoßes*.

Die Stoßzahl k kann durch einen Versuch bestimmt werden. Eine Kugel m_1 fällt aus der Höhe H auf eine (unendlich große) Platte (m_2) und springt bis zur Höhe h (Bild 181). Hierbei ist $v_2 = 0$, $v_2' = 0$ und $k = -v_1'/v_1$. Da ferner $v_1 = \sqrt{2gH}$ und $-v_1' = \sqrt{2gh}$, folgt:

$$k = \sqrt{h/H} \tag{252}$$

Die Stoßzahl k ist nicht ganz konstant. Sie hängt außer vom Werkstoff noch von der Stoßgeschwindigkeit $v_1 - v_2$, von der Form der Körper und vom Grad der Zusammendrückung ab. Als Richtwerte gelten: $k = 15/16$ für Glas, 5/9 für Stahl, 1/2 für Holz.

Der *Energieverlust* (Stoßverlust) bzw. die in bleibende Verformung umgewandelte *Formänderungsarbeit* beträgt:

$$\Delta W = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 (1 - k^2) \tag{253}$$

Für $k = 0$ ist $\Delta W = W_F$ [siehe Gl. (255)] (unelastischer Stoß), für $k = 1$ ist $\Delta W = 0$ (plastischer Stoß).

5.4.1.1. Stoß vollkommen unelastischer Körper

Für *vollkommen unelastische Körper* ist der Stoßvorgang am Ende des 1. Stoßabschnitts abgeschlossen (*plastischer Stoß*). Die Körper bleiben zusammen und bewegen sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v_g. Die Energie der Körper muß nach dem Stoß um den Betrag W_F der zur Formänderung aufgewendeten Arbeit kleiner geworden sein:

$$W_F = (m_1v_1^2/2) + (m_2v_2^2/2) - v_g^2(m_1 + m_2)/2 \tag{254}$$

oder nach Einsetzen der Gl. (250):

$$W_F = [(m_1m_2)/2(m_1 + m_2)] \cdot (v_1 - v_2)^2 \tag{255}$$

Ist die Masse m_2 (z. B. Amboß, einzurammender Pfahl) in Ruhe ($v_2 = 0$), so ist:

$$W_F = m_1m_2v_1^2/2(m_1 + m_2) = W_1/[1 + (m_1/m_2)] \tag{256}$$

W_1 Energie des Körpers der Masse m_1 vor dem Stoß

Soll W_F möglichst groß sein (Schmieden, Nieten), so muß $m_2 \gg m_1$ (schwerer Amboß, leichter Hammer), soll W_F klein sein (Rammen, Nageln), so muß $m_1 \gg m_2$ sein (schwerer Rammbär, leichter Pfahl).

5.4.1.2. Stoß vollkommen elastischer Körper

Vollkommen elastische Körper dehnen sich nach der Deformation in derselben Weise wieder aus, wie sie vorher zusammengedrückt wurden. Deshalb ist auch die Geschwindigkeitsänderung im 2. Stoßabschnitt ebenso groß wie im ersten, also für die Masse m_1: $v_g - v_1' = v_1 - v_g$ und für die Masse m_2: $v_2' - v_g = v_g - v_2$. Setzt man v_g aus Gl. (250) ein, so folgt:

$$v_1' = [v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2]/(m_1 + m_2) \tag{257}$$

$$v_2' = [v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1]/(m_1 + m_2) \tag{258}$$

Da keine bleibende Verformung eintritt, wird die gesamte Formänderungsarbeit in kinetische Energie zurückverwandelt ($k = 1$).

Sonderfälle

1. Ist $m_1 = m_2$, so wird $v_1' = v_2$ und $v_2' = v_1$, d. h., beide Körper vertauschen ihre Geschwindigkeiten.
2. Ist $m_2 = \infty$, $v_2 = 0$ (Stoß gegen eine feste Wand), so ist $v_1' = -v_1$.
3. Ist $m_1 = \infty$, $v_2 = 0$ (unendlich großer Körper stößt gegen einen ruhenden Körper), so ist $v_2' = 2v_1$.

Stoß unvollkommen elastischer Körper

Bei unvollkommen elastischen Körpern sind die Geschwindigkeitsabnahmen bzw. -zunahmen im ersten Stoßabschnitt größer als im zweiten: $v_1 - v_g > v_g - v_1'$; $v_g - v_2 > v_2' - v_g$. Dabei ist:

$$k = (v_g - v_1')/(v_1 - v_g) = (v_2' - v_g)/(v_g - v_2) \tag{259}$$

$$v_1' = v_g(1 + k) - kv_1; \qquad v_2' = v_g(1 + k) - kv_2 \tag{260}$$

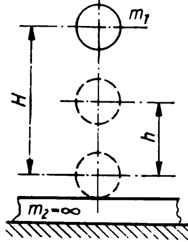
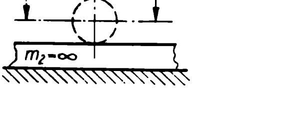



Bild 181. Bestimmung der Stoßzahl k

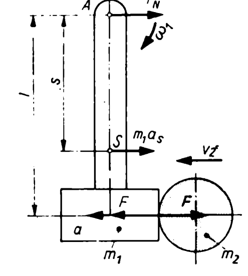


Bild 182. Gerader exzentrischer Stoß

5.4.2. Gerader exzentrischer Stoß

Der Hammer mit dem Trägheitsmoment J_A dreht sich um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1, die Kugel m_2 trifft mit der Geschwindigkeit v_2 auf den Hammer (Bild 182). Das Moment der Bewegungsgröße des Systems bleibt erhalten; deshalb gilt: $J_A\omega_1 + m_2v_2l = J_Av_g/l + m_2v_gl$ (v_g gemeinsame Geschwindigkeit von Kugel und Hammerkopf am Ende des ersten Stoßabschnitts). Die Umformung ergibt mit $\omega = v_g/l$ und $\omega_1 = v_1/l$:

$$v_g = \frac{J_A\omega_1 + m_2v_2l}{J_A/l + m_2l} = \frac{J_Av_1/l^2 + m_2v_2}{J_A/l^2 + m_2} = \frac{m_{1\text{red}}v_1 + m_2v_2}{m_{1\text{red}} + m_2} \tag{261}$$

$J_A/l^2 = m_{1\text{red}}$ ist die auf die Stoßstelle *reduzierte Masse* des Hammers. Ist $v_1 = 0$, so folgt:

$$v_g = m_2v_2/(m_{1\text{red}} + m_2) \tag{262}$$

Die Stoßkraft F bewirkt eine Beschleunigung a des Hammers, der eine Winkelbeschleunigung $\alpha = a/l$ entspricht. Die Beschleunigung des Schwerpunkts ist $a_S = \alpha s$, ihr entgegen wirkt die Trägheitskraft

$m_1a_S = m_1\alpha s$. Die Gleichgewichtsbedingung fordert $F - m_1a_S = F_N$, wobei F_N horizontale Komponente des Stützwiderstands in A ist. Hieraus und aus $Fl = J_A\alpha$ folgt $F = J_A\alpha/l$ und $F_N = (J_A\alpha/l) - (\alpha m_1 s)$. F_N wird Null, wenn $J_A/l = m_1 s$ oder $l = l_0 = J_A/m_1 s$.
Hat eine Drehachse den Abstand l_0 von der Stoßlinie, so erfährt sie keine Beanspruchung durch den Stoß. Ein Punkt in der Entfernung l_0 von der Drehachse heißt *Stoß-* oder *Schwingungsmittelpunkt*. Bei Hämmern, Hebeln oder Stangen, die Stöße aufzunehmen haben, soll der Drehpunkt im Abstand l_0 von der Stoßstelle liegen.

5.4.3. Drehstoß

Zwei Körper, die sich um die parallelen Achsen A_1 und A_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 drehen, stoßen im Punkt A zusammen (Bild 183). Setzt man anstelle von m_1 und m_2 die auf die Stoßstelle reduzierten Massen $m_{1\text{red}} = J_1/r_1^2$ und $m_{2\text{red}} = J_2/r_2^2$ sowie anstelle von v_1 und v_2 die Umfangsgeschwindigkeiten $\omega_1 r_1$ und $\omega_2 r_2$, so gelten die Gln. (250)···(260).
Für gleichachsige Drehkörper (*Kupplungsstoß*) gilt:

$$\omega = (J_1\omega_1 + J_2\omega_2)/(J_1 + J_2) \tag{263}$$

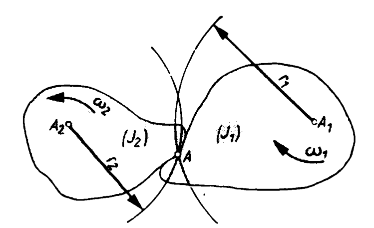


Bild 183. Drehstoß

5.5. Schwingungen

5.5.1. Freie ungedämpfte Schwingungen

Freie Schwingungen sind solche, die ein sich selbst überlassenes schwingfähiges System (z. B. eine mit einer Feder verbundene Masse) nach einmaliger Auslenkung ständig ausführt. Wirken keine Reibungskräfte auf das System ein, so bezeichnet man die Schwingungen als ungedämpft. Es wird vorausgesetzt, daß die auf den schwingenden Körper wirkende Kraft proportional zu seiner Auslenkung aus der Mittellage ist. Dann bezeichnet man die spezifische Kraft, die den Körper um den Betrag 1 m aus der Mittellage bringt, als *Federkonstante* c des betreffenden schwingenden Systems, die in der Einheit N/mm oder N/m angegeben wird. Beträgt der Ausschlag x, so ist die Kraft $F = -cx$, sie ist proportional der Auslenkung, aber ihr entgegengesetzt gerichtet. Auf den Körper wirkt ferner die gleich große Trägheitskraft $ma = m\,\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = m\ddot{x}$, die der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist: $ma = -cx$, oder:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \tag{264}$$

Setzt man $c/m = \omega_0^2$ oder $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ (ω_0 Eigen-Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung), so ist:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{265}$$

Die Integration der Differentialgleichung*) ergibt:

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t = x_\text{m} \sin (\omega_0 t + \varphi) \tag{266}$$

Für $t = 0$ ist $x = x_0 = B$ die Auslenkung (*Elongation*) zu Beginn der Schwingung.

*) s. Abschn. MATHEMATIK, Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die geometrischen Zusammenhänge zwischen den Größen A, B, $\omega_0 t$, φ und x_m sind in Bild 184 dargestellt und werden durch folgende Beziehungen ausgedrückt:

$$A = x_\text{m} \cos \varphi; \qquad B = x_\text{m} \sin \varphi \tag{267}$$

$$r = x_\text{m} = \sqrt{A^2 + B^2}; \qquad \tan \varphi = B/A \tag{268}$$

Hierbei ist x_m die *Amqlitude* der Schwingung, $\omega_0 t + \varphi$ ist der *Phasenwinkel* und φ der *Phasenverschiebungswinkel*, d. h. der Ausgangs-Phasenwinkel zur Zeit $t = 0$.

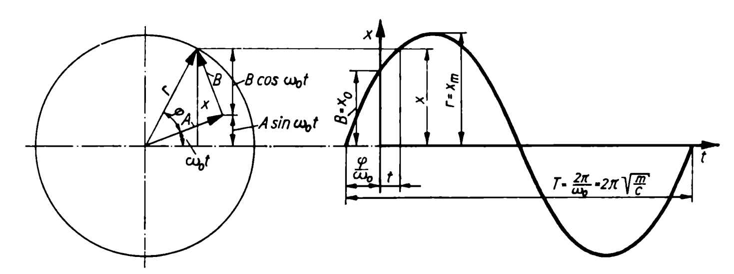


Bild 184. Sinussschwingung

Differenziert man (266) nach der Zeit, so ergibt sich die *Geschwindigkeit:*

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \dot{x} = v = A\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0 \sin \omega_0 t = \omega_0 x_\text{m} \cos (\omega_0 t + \varphi) \tag{269}$$

Für $t = 0$ ist $v = v_0 = A\omega_0$ die Geschwindigkeit zu Beginn der Schwingung. Daraus folgt $A = v_0/\omega_0$; in (266) eingesetzt:

$$x = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t \tag{270}$$

Mit $v_0 = 0$ ist $x = x_0 \cos \omega_0 t$, mit $x_0 = 0$ ist $x = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$. Die *Amplitude* gemäß (268) kann nunmehr wie folgt ausgedrückt werden:

$$x_\text{m} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(v_0/\omega_0)^2 + x_0^2} \tag{271}$$

Da die Bewegung periodisch ist, wiederholt sich ein Ausschlag x nach einer bestimmten Zeit T, der *Periodendauer* (Schwingungsdauer), die sich aus der Beziehung $\omega_0 T = 2\pi$ ergibt:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{m/c} \tag{272}$$

Die ***Eigenfrequenz*** (***Schwingungszahl***) f ist:

$$f = 1/T = \omega_0/2\pi = (1/2\pi) \sqrt{c/m} \tag{273}$$

Bezeichnet x_st den statischen Ausschlag, d. h. die Auslenkung des Systems unter der senkrecht wirkenden Last mg, so ist $c = mg/x_\text{st}$ und $T = 2\pi \sqrt{x_\text{st}/g}$.

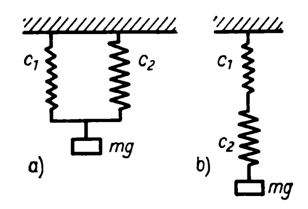


Bild 185. Zusammenwirken mehrerer Federn.
a) Parallelschaltung; b) Reihenschaltung

Parallelgeschaltete Federn (Bild 185) mit den Federkonstanten c_1 und c_2 können durch eine Einzelfeder mit der Federkonstanten c ersetzt werden: $c = c_1 + c_2$. Die Kraft der Ersatzfeder muß die Resultierende der einzelnen Federn sein. Bei ***hintereinandergeschalteten Federn*** muß die Verlängerung s der Ersatzfeder gleich der Summe der Verlängerungen der einzelnen Federn sein: $s = s_1 + s_2$ oder $1/c = 1/c_1 + 1/c_2$. Die Federn

können als Modell eines schwingenden Systems angesehen werden, dessen Kennwerte c und m mit denen der gegebenen Anordnung gleichwertig sind.

Beispiel. Der Fahrkorb eines Aufzugs ($m = 2000$ kg; das entspricht einer Gewichtskraft von etwa 20000 N) wird an einem Tragseil mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 5 m/s heruntergelassen. Plötzlich klemmt das Seil. Gesucht wird die höchste Seilbelastung bei den hierbei auftretenden Schwingungen. Die Federkonstante des Seils sei $c_1 = 4 \cdot 10^6$ N/m.
Beim Absinken befindet sich die Last im statischen Gleichgewicht. Für $t = 0$ ist $x = x_0 = 0$ und $v_0 = 5$ m/s. Mit $\omega_1 = \sqrt{c_1/m} = \sqrt{4 \cdot 10^6 \text{ N/2000 kg} \cdot \text{m}} = 44{,}7 \text{ s}^{-1}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung $x = (5 \text{ m}/44{,}7) \times \sin(44{,}7 \text{ s}^{-1} t)$; dann ist $x_{max} = 5 \text{ m}/44{,}7 = 0{,}112$ m. Die Seilbelastung beträgt dann $x_{max}c_1 + F_G = 0{,}112 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ N/m} + 20000 \text{ N} = 468$ kN. Wird zwischen das Seil und den Fahrkorb eine Feder mit der Konstanten $c_2 = 4 \cdot 10^5$ N/m eingeschaltet, so ergibt sich die Gesamtfederkonstante aus $c_{ges} = c_1c_2/(c_1 + c_2) = (4 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ N/m})/(4 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5) = 3{,}64 \cdot 10^5$ N/m. Dieser Wert führt mit $\omega = \sqrt{3{,}64 \cdot 10^5/2000} \text{ s}^{-1} \approx 13{,}6 \text{ s}^{-1}$ und $x_m = 5 \text{ m}/13{,}6 = 0{,}37$ m zu einer maximalen Seilbelastung von $0{,}37 \text{ m} \cdot 3{,}64 \cdot 10^5 \text{ N/m} + 20 \text{ kN} \approx 155$ kN. Die Belastung verringert sich also um 67%.

Drehschwingungen (Torsionsschwingungen)

Bei Torsionsschwingungen schwingt das System um die Stabachse (Bild 186). Die Torsionsfederkonstante c_t bestimmt man aus

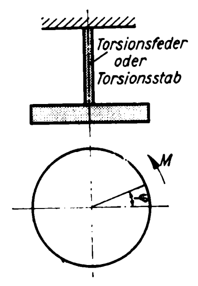
$$M = c_t\varphi \tag{274}$$

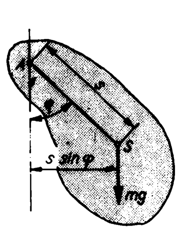
Aus der Beziehung $J\alpha = -M$ oder $J\ddot{\varphi} + c_t\varphi = 0$ folgt:

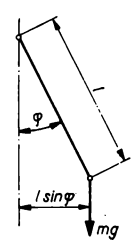
$$\ddot{\varphi} + c_t\varphi/J = 0 \tag{275}$$

Diese Gleichung ist der Gl. (265) analog. Die Periodendauer beträgt:

$$T = 2\pi\sqrt{J/c_t} \tag{276}$$







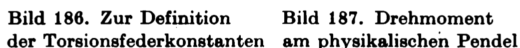


Bild 186. Zur Definition der Torsionsfederkonstanten

Bild 187. Drehmoment am physikalischen Pendel

Bild 188. Mathematisches Pendel

Pendel

Das auf die im Punkt A als *physikalisches Pendel* aufgehängte Masse m (Bild 187) wirkende Drehmoment beträgt $M = mgs \sin\varphi$, wenn s den Abstand des Schwerpunkts S vom Aufhängepunkt A bedeutet. Nach (274) ist $c_t = M/\varphi = mgs(\sin\varphi)/\varphi$. Für kleine Ausschläge kann $\sin\varphi = \varphi$ gesetzt werden; dann ist $c_t = mgs$, und entsprechend (276) ist die *Periodendauer des Pendels:*

$$T = 2\pi\sqrt{J_A/mgs} \tag{277}$$

J_A auf A bezogenes Trägheitsmoment des Körpers

Bei einem *mathematischen Pendel* (*Fadenpendel*, Bild 188) mit der punktförmigen Masse m ist $J_A = ml^2$ und $s = l$. Somit wird:

$$T = 2\pi\sqrt{ml^2/mgl} = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{278}$$

Die Periodendauer ist nur von der Fallbeschleunigung g und der Länge l abhängig.

Ist l_0 die *Länge* eines mathematischen Pendels, das die gleiche Periodendauer wie das physikalische hat, dann gilt $2\pi\sqrt{l_0/g} = 2\pi\sqrt{J_A/mgs}$. Daraus ergibt sich die *reduzierte Pendellänge*

$$l_0 = J_A/ms \tag{279}$$

Ferner ist nach dem Satz von STEINER:

$$J_A = J_S + ms^2 = m(i^2 + s^2) = ma^2$$

J_S auf den Schwerpunkt bezogenes *Trägheitsmoment*; i *Trägheitsradius*; $a = \sqrt{i^2 + s^2}$ *Trägheitsarm*, d. h. Abstand der Masse m vom Aufhängepunkt A, für den sich das Trägheitsmoment J_A ergibt.

Aus $l_0 = J_A/ms = a^2/s = (s^2 + i^2)/s$ folgt:

$$sl_0 = s^2 + i^2 \tag{280}$$

Diese Gleichung liefert zwei Wurzeln für s, also zwei Abstände s_1 und s_2 des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt, die gleiche Schwingungsdauer ergeben: $s_1 + s_2 = l_0$; $s_1 s_2 = i^2$. Sind s_1 und i gegeben, so können s_2 und l_0 durch geometrische Konstruktion gefunden werden (Bild 189).

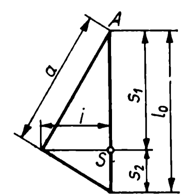


Bild 189. Geometrische Konstruktion

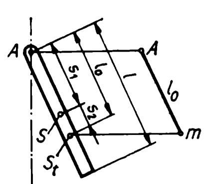


Bild 190. Schwingender Stab

Die reduzierte Pendellänge l_0 ist gleichzeitig der Abstand des Stoßmittelpunkts S_t (Bild 190) vom Aufhängepunkt und der Abstand des Angriffspunkts der Fliehkraft vom Aufhängepunkt. Die Schwingungsdauer eines Pendels bleibt unverändert, wenn man Aufhängepunkt und Stoßmittelpunkt miteinander vertauscht (*Reversionspendel*).

Beispiel. Ein dünner Stab schwingt um seinen Endpunkt A (Bild 190). Sein Trägheitsmoment ist $J_A = ml^2/3$. Somit ist $a^2 = J_A/m = l^2/3$. Da $s = s_1 = l/2$, folgt $l_0 = a^2/s_1 = 2l/3$ und $T = 2\pi\sqrt{2l/3g}$. Der Stab hat dieselbe Schwingungsdauer wie ein Fadenpendel von 2/3 der Stablänge. Es besteht noch ein zweiter Aufhängepunkt S_t im Abstand s_2 vom Schwerpunkt S, bei dem der Stab die gleiche Schwingungsdauer hat: $s_2 = l_0 - s_1 = (2/3)\,l - (1/2)\,l = (1/6)\,l$.

5.5.2. Freie gedämpfte Schwingungen

5.5.2.1. Dämpfung durch Reibung bei gleichbleibendem Reibungswiderstand (konstante Dämpfungskraft)

Ist die Reibungskraft F_R konstant, so verringert sich die Amplitude nach jeder halben Schwingung um den Betrag (Bild 191):

$$\Delta x = 2F_R/c \tag{281}$$

Ist die erste Amplitude x_0, so beträgt die Zahl der Schwingungen bis zum Erlöschen der Bewegung:

$$n = x_0/2\Delta x = x_0 c/4F_R \tag{282}$$

Die Reibung hat keinen nennenswerten Einfluß auf die Schwingungsdauer (bzw. auf die Frequenz).

Konstante Dämpfungskraft liegt z. B. bei *Lagerreibung* vor. Die Bewegungsgleichung bei F_R = konst. lautet:

$$m\ddot{x} + cx + F_R = 0 \quad \text{bzw.} \tag{283}$$

$$x = [x_0 - (F_R/c)] \cos(\omega_0 t) + F_R/c \tag{284}$$

5.5.2.2. Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

Die Bewegungsgleichung eines Systems, auf das eine der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft (hervorgerufen z. B. durch *Flüssigkeitsreibung*) $F_R = k\dot{x}$ wirkt, lautet:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \tag{285}$$

Ist k die *Dämpfungskonstante* und c die *Federkonstante*, so bezeichnet man als *Abklingkonstante:*

$$k/2m = \delta \tag{286}$$

Weiterhin sei $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ die *Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung.* Dann bestehen drei Möglichkeiten der Lösung*):

1. Ist $\omega_0 > \delta$ ($2\sqrt{mc} > k$ oder $\eta = k/2\sqrt{mc} < 1$, wobei η die *relative Dämpfung* ist), so ergibt sich als Lösung für (285):

$$x = e^{-\delta t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \tag{287}$$

und mit φ als Phasenverschiebung

$$x = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \tag{288}$$

wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{(c/m) - (k/2m)^2}$ die *Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung* ist. Man erkennt, daß es sich um eine periodische Bewegung handelt. Für $t = 0$ ist $B = x_0$ und $A = (1/\omega)(v_0 + \delta x_0)$; v_0 und x_0 sind *Geschwindigkeit* und *Elongation* zur Zeit $t = 0$. Somit ist:

$$x = e^{-\delta t}[(1/\omega)(v_0 + \delta x_0) \sin \omega t + x_0 \cos \omega t] \tag{289}$$

Die Schwingungsdauer beträgt:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{c/m - k^2/4m^2} \tag{290}$$

Sie ist gegenüber der ungedämpften Schwingung größer geworden. Da der Faktor $e^{-\delta t}$ mit zunehmendem t immer kleiner wird, nehmen die Amplituden ständig ab (Bild 192). Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden x_n (zur Zeit t) und x_{n+1} (zur Zeit $t + T$) beträgt:

$$x_n/x_{n+1} = e^{-\delta t}/e^{-\delta(t+T)} = e^{\delta T} = e^{kT/2m} \tag{291}$$

Den natürlichen Logarithmus dieses Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Amplituden bezeichnet man als *logarithmisches Dekrement* der Schwingung:

$$D = \delta T = kT/2m = 2\pi/\sqrt{(4mc/k^2) - 1} \tag{292}$$

2. Ist $\omega_0 = \delta$ (oder $k = 2\sqrt{mc}$ bzw. $k/2\sqrt{mc} = \eta = 1$, *Grenzfall*), so ist die Bewegung *aperiodisch*, es findet keine Schwingung statt, und der Weg x nähert sich dem Wert Null. Mit $\omega = 0$ wird:

$$x = [(v_0 + \delta x_0)\, t + x_0]\, e^{-\delta t} \quad \text{und} \quad T = \infty \tag{293}$$

3. Ist $\omega_0 < \delta$ (oder $k > 2\sqrt{mc}$ bzw. $\eta = k/2\sqrt{mc} > 1$), so ist die Bewegung ebenfalls aperiodisch. Setzt man $\delta^2 - \omega_0^2 = \omega'^2$, so gilt:

$$x = e^{-\delta t}[(1/\omega')(v_0 + \delta x_0) \sinh \omega' t + x_0 \cosh \omega' t] \tag{294}$$

Beispiel. Ein Körper von der Masse $m = 5$ kg hängt an einer Feder mit der Konstanten $c = 1962$ N/m. Der Widerstand des Mediums ist proportional der Geschwindigkeit. Nach acht Schwingungen hat sich die Amplitude auf 1/12 verringert. Gesucht werden Schwingungsdauer T, Dekrement D und Dämpfungs-

*) s. Abschn. MATHEMATIK, Gewöhnliche Differentialgleichungen

konstante k. — Es ist $x_n/x_{n+1} = e^{\delta T} = \sqrt[8]{12} = 1{,}365$ und somit $D = \delta T = 0{,}312$. Nach (292) ist $D = \delta T = 2\pi/\sqrt{(4mc/k^2) - 1} = 0{,}312$. Nach dem Einsetzen der Werte $m = 5$ kg und $c = 1962$ N/m erhält man $k = 9{,}81$ kg/s. Die Schwingungsdauer ist $T = D/\delta = D \cdot 2m/k = 0{,}318$ s.

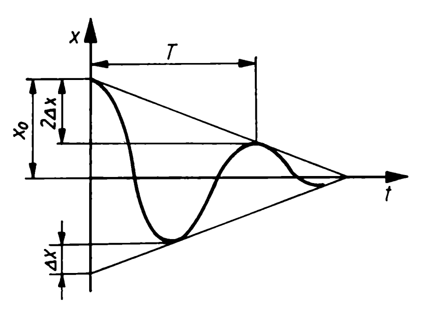


Bild 191. Gedämpfte Schwingung bei konstanter Dämpfungskraft

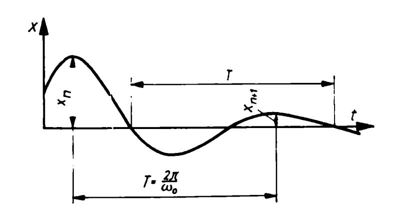


Bild 192. Gedämpfte Schwingung bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung

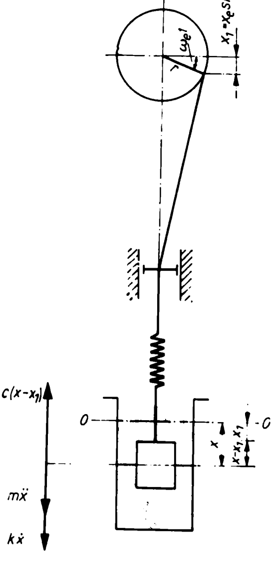


Bild 193. Gedämpfte erzwungene Schwingung an einem Kreuzkopf

5.5.3. Erzwungene Schwingungen

Schwingungen eines Körpers, der mit einem periodisch wirkenden Antrieb federnd gekuppelt ist, bezeichnet man als *erzwungene Schwingungen.*

O—O ist die statische Ruhelage des Körpers bei der Elongation $x_1 = 0$ des Kreuzkopfs (Bild 193). Die gesamte *Elongation* x des Körpers besteht aus der durch das Triebwerk hervorgerufenen Auslenkung x_1 und der durch die Längenänderung der Feder hervorgerufenen Auslenkung $(x - x_1)$. Analog zu (285) gilt:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c(x - x_1) = 0 \tag{295}$$

Da mit der Erregeramplitude x_e und der Erregerfrequenz ω_e nach Bild 193 $x_1 = x_e \sin \omega_e t$, ist:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = cx_e \sin \omega_e t \tag{296}$$

Die Lösung dieser für gedämpfte Schwingungen geltenden Differentialgleichung ergibt:

$$x = \left[cx_e/\sqrt{(c - m\omega_e^2)^2 + (k\omega_e)^2}\right] \sin (\omega_e t - \varphi) \tag{297}$$

φ ist der Nacheilwinkel infolge der Dämpfung. Die Amplitude x_m der erzwungenen Schwingung ist:

$$x_m = cx_e/\sqrt{(c - m\omega_e^2)^2 + (k\omega_e)^2} \quad \text{bzw.} \tag{298}$$

$$x_m/x_e = \omega_0^2/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\delta\omega_e)^2}$$

$$\tan \varphi = k\omega_e/(c - m\omega_e^2) = 2\delta\omega_e/(\omega_0^2 - \omega_e^2) \tag{299}$$

5.5.3.1. Ungedämpfte erzwungene Schwingungen

Ist keine Dämpfung vorhanden, so ist $k = 0$ und $\varphi = 0$; die Gl. (297) nimmt dann die Form an:

$$x = [cx_e/(c - m\omega_e^2)] \sin \omega_e t \tag{300}$$

Man erkennt folgendes:

1. Ist ω_e klein und c groß (langsamer Antrieb, harte Feder), so ist $m\omega_e^2 \lll c$ und $x \approx x_e \sin \omega_e t$, d. h., der Körper hat dieselbe Elongation wie der Antrieb.
2. Ist ω_e groß und c klein (schneller Antrieb, weiche Feder), so ist $c \lll m\omega_e^2$ und $x \approx -(cx_e/m\omega_e^2) \sin \omega_e t$, d. h., die Bewegung der Masse ist der des Antriebs entgegengesetzt gerichtet, und die Elongation nimmt mit wachsender Drehzahl immer mehr ab. Die Masse macht die Schwingungen nicht mehr mit.
3. Ist $c = m\omega_e^2$, so ist $x = \infty$, d. h., kleinste Ausschläge des Antriebs erregen sehr starke Schwingungen (*Resonanz*). Hierbei ist $\omega_e = \sqrt{c/m} = \omega$, wobei ω die Eigenfrequenz des schwingenden Systems bedeutet. *Resonanz* tritt auf, wenn die Drehzahl des Antriebs (Erregerfrequenz ω_e) gleich der Eigenfrequenz ω des Systems ist (*kritische Drehzahl*). In allen technischen Konstruktionen ist die Resonanz zu vermeiden.

Amplitudenverhältnis und Frequenzverhältnis. Setzt man $\omega_0^2 = c/m$, so folgt aus:

$$x = \omega_0^2 x_e \sin \omega_e t/(\omega_0^2 - \omega_e^2) = x_e \sin \omega_e t/[1 - (\omega_e^2/\omega_0^2)] \tag{301}$$

$$x_m = x_e/[1 - (\omega_e^2/\omega_0^2)] \tag{302}$$

Die sich daraus ergebende Abhängigkeit $x_m/x_e = 1/[1 - (\omega_e^2/\omega_0^2)]$ zeigt die mit $\eta = 0$ bezeichnete Kurve in Bild 194. x_m/x_e ist das *Amplitudenverhältnis* (relative Amplitude), ω_e/ω_0 das *Frequenzverhältnis* (relative Frequenz, Abstimmung) und η die *relative Dämpfung*.

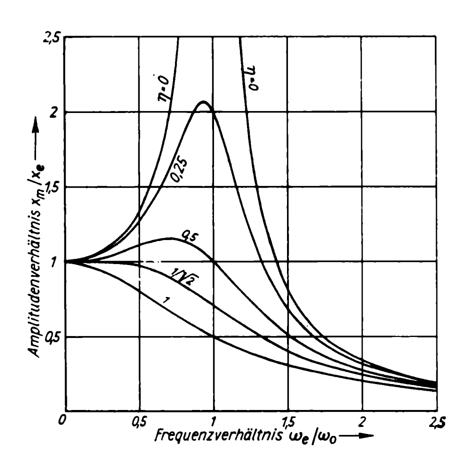


Bild 194. Amplitudenverhältnis in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis

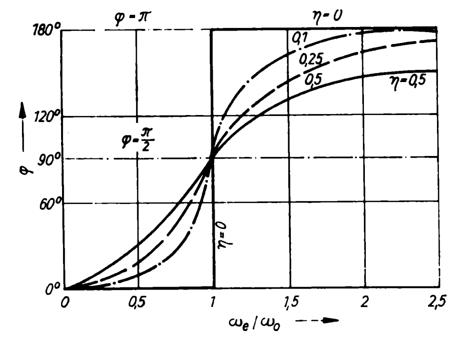


Bild 195. Phasenverschiebung in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis und von der relativen Dämpfung

5.5.3.2. Gedämpfte erzwungene Schwingungen

Die Gln. (297) und (300) für die erzwungene gedämpfte und ungedämpfte Schwingung haben dieselbe Form. Deshalb ist auch die Schwingungsdauer unabhängig von der Größe des Ausschlags und der Dämpfung; sie ist gleich der Periodendauer des Antriebs, hängt also nur von ω_e ab. Bei der gedämpften erzwungenen Schwingung bewegt sich die Masse im gleichen Takt wie der Antrieb, aber in der Phase um den Winkel φ nacheilend.

Amplitudenverhältnis, Frequenzverhältnis und relative Dämpfung. Mit $\omega_0^2 = c/m$ und $\eta = k/(2\sqrt{mc}) = k\omega_0/2c$ folgt:

$$x_m/x_e = 1/\sqrt{[1 - (\omega_e^2 m/c)]^2 + (\omega_e k/c)^2} = 1/\sqrt{[1 - (\omega_e^2/\omega_0^2)]^2 + 4\eta^2\omega_e^2/\omega_0^2} \tag{303}$$

Der Wert η ist ein Maß für die Dämpfung des Systems (*relative Dämpfung*): Mit $\eta = 0$ ist das System *ungedämpft*, mit $\eta = 1$ beginnt die *aperiodische Bewegung*. Jedem Wert η entspricht eine bestimmte Kurve für das Amplitudenverhältnis x_m/x_e in Abhängigkeit von ω_e/ω_0 (Bild 194).
Das Amplitudenverhältnis an der *Resonanzstelle* (bei $\omega_e/\omega_0 = 1$) ist $x_1/x_e = 1/2\eta$. Die Lage des Maximums der Kurven kann durch Differentiation der Gl. (303) leicht bestimmt werden. Das dem maximalen Amplitudenverhältnis entsprechende Frequenzverhältnis ω_{res}/ω_0, somit auch die ungünstigste („kritische") Erregerfrequenz ω_{res}, ergibt sich aus der Gleichung:

$$\omega_{res}/\omega_0 = \sqrt{1 - 2\eta^2} \quad \text{oder} \quad \eta^2 = [1 - (\omega_{res}/\omega_0)^2]/2 \tag{304}$$

Setzt man (304) in (303) ein und tauscht ω_e gegen ω_{res} aus, so erhält man das maximale Amplitudenverhältnis bei gegebenem Frequenzverhältnis ω_{res}/ω_0:

$$(x_m/x_e)_{max}/x_e = 1/\sqrt{1 - (\omega_{res}/\omega_0)^4} \tag{305}$$

oder mit (304) bei gegebener Dämpfung η:

$$(x_m/x_e)_{max}/x_e = 1/2\eta\,\sqrt{1 - \eta^2} \tag{306}$$

Mit zunehmender Dämpfung wird sowohl $(x_m/x_e)_{max}$ als auch ω_{res}/ω_0 kleiner, mit $\eta = 1/\sqrt{2}$ oder $k = \sqrt{2mc}$ ist $\omega_{res}/\omega_0 = 0$, d. h., eine kritische Drehzahl tritt nicht auf.

Phasenverschiebung. Gl. (299) ergibt mit $k = 2\eta c/\omega_0$ und $m = c/\omega_0^2$:

$$\tan\varphi = (2\eta\omega_e/\omega_0)/(1 - \omega_e^2\omega_0^2) \tag{307}$$

Die Abhängigkeit des *Phasenverschiebungswinkels* (Nacheilwinkels) φ vom Frequenzverhältnis ω_e/ω_0 zeigt Bild 195, aus dem folgende besondere Fälle abzulesen sind:

1. Für $\omega_e/\omega_0 = 0$ ist $\varphi = 0$ und $\omega_e = 0$; d. h., bei ganz langsamer Bewegung schwingt die Masse in gleicher Phase wie der Antrieb.
2. Für $\omega_e/\omega_0 = 1$ ist $\tan\varphi = \infty$ und $\varphi = \pi/2$; d. h., bei der Resonanz tritt eine Phasenverschiebung um 90° ein, und zwar bei allen Werten für η.
3. Bei ungedämpfter Bewegung ($\eta = 0$) schwingt ein System in gleicher Phase wie der Antrieb, da $\tan\varphi = 0$; im Augenblick der Resonanz ($\omega_{res} = \omega_e = \omega_0$) tritt eine plötzliche Phasenverschiebung, ein *Phasensprung*, ein.
4. Mit zunehmender Erregerfrequenz wächst der Phasenwinkel. Er nähert sich dem Grenzwert $\varphi = \pi$; d. h., bei hoher Erregerfrequenz ω_e schwingt die Masse entgegengesetzt zur erregenden Kraft.

Beispiel 1. Eine biegsame Welle, deren Masse vernachlässigt wird, trägt an einer Stelle eine Scheibe von der Masse m, deren Schwerpunkt um den Betrag e von der Wellenachse entfernt ist (Bild 196). Wird die Welle in Drehung versetzt, so ruft die Fliehkraft F_z eine Durchbiegung f hervor. Somit gilt $F_z = m(e + f)\,\omega_e^2 = cf$, wenn c die Federkonstante des Systems ist. Hieraus ergibt sich die Durchbiegung:

$$f = em\omega_e^2/(c - m\omega_e^2) = e(\omega_e^2/\omega_0^2)/[1 - (\omega_e^2/\omega_0^2)] \tag{308}$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ die Eigenfrequenz der Welle ist. f wird ∞, wenn $\omega_e = \omega$. Nach dem Überschreiten der kritischen Drehzahl nimmt f wieder ab und nähert sich dem Wert Null, die Welle zentriert sich selbst.

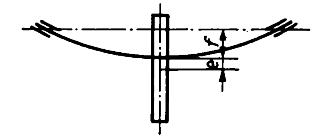


Bild 196. Schwingung einer rotierenden biegsamen Welle

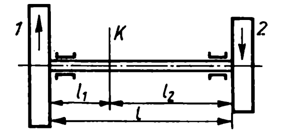


Bild 197. Torsionsschwingung einer drehfedernden Welle

Beispiel 2. Zwei Scheiben *1* und *2* sitzen auf einer federnden Welle (Drehfeder) und führen gegeneinander Schwingungen aus (Bild 197). Wenn kein äußeres Drehmoment wirkt, ist der Gesamtimpuls Null:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \quad \text{oder} \quad J_1/J_2 = d\varphi_2/d\varphi_1 = \varphi_2/\varphi_1 \tag{309}$$

Nach (274) ist $M = c_t\varphi$. Der Winkel φ, den ein Drehmoment hervorrufen kann, ist direkt proportional zur Länge der Welle:

$$\varphi = Ml/GI_p \quad \text{und} \quad c_t = GI_p/l \tag{310}$$

G Gleitmodul; I_p polares Flächenträgheitsmoment der Drehfeder

Deshalb gilt $\varphi_2/\varphi_1 = l_2/l_1 = J_1/J_2$. Da ferner $l_1 + l_2 = l$, ist $l_1 = lJ_2/(J_1 + J_2)$ und $l_2 = lJ_1/(J_1 + J_2)$. Der Querschnitt K im Abstand l_1 von der Scheibe *1* bzw. l_2 von der Scheibe *2* bleibt in Ruhe (Schwingungsknoten), während die Drehfeder auf beiden Seiten von K nach entgegengesetzten Richtungen schwingt. Die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 der Scheiben *1* und *2* sind $\omega_1 = \sqrt{c_{t1}/J_1}$ und $\omega_2 = \sqrt{c_{t2}/J_2}$. Aus (310) folgt $c_{t1} = GI_p/l_1$ und $c_{t2} = GI_p/l_2$. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{c_{t1}/J_1} = \sqrt{c_{t2}/J_2}$, d. h., beide Scheiben haben die gleiche Eigenfrequenz. Resonanz tritt ein, wenn die Welle periodisch mit gleicher Frequenz erregt wird.

5.5.3.3. Koppelschwingungen

Bei den einfachen schwingungsfähigen Systemen ist nur ein Körper vorhanden, dessen Lage, bezogen auf einen anderen, als feststehend angenommenen Körper, z. B. den Befestigungspunkt einer Feder, in jedem Augenblick durch eine einzige Koordinate x bzw. φ bestimmt wurde (Schwingungen mit einem Freiheitsgrad). Bei zwei schwingenden Massen m_1 und m_2 (Bild 198) sind zwei Koordinaten x_1 und x_2 oder φ_1 und φ_2 erforderlich, um die jeweilige Lage

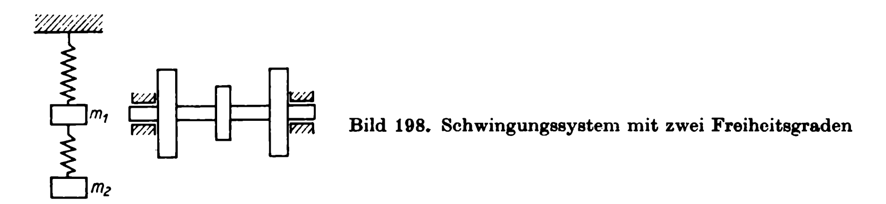


Bild 198. Schwingungssystem mit zwei Freiheitsgraden

des Systems zu beschreiben (Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden). Sind insgesamt n Körper vorhanden, von denen $(n - 1)$ Körper Schwingungen gegenüber einem als ruhend angenommenen Körper ausführen, so hat das System $(n - 1)$ Freiheitsgrade. Da die Bewegungen sich gegenseitig beeinflussen, so bezeichnet man Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden als *Koppelschwingungen.*

Ein schwingfähiges System hat so viele Eigenfrequenzen, wie es Freiheitsgrade aufweist. Bei *Mehrmassensystemen* sind daher viele verschiedene Eigenschwingungen möglich, deren Berechnung analytisch oder grafisch erfolgen kann.

Resonanz tritt ein, wenn die Frequenz einer der Eigenschwingungen des Systems mit einer der Frequenzen der periodischen Erregung übereinstimmt. In diesem Falle können kleine Erregerkräfte erhebliche Schwingungsamplituden hervorrufen, deren Größe durch die Dämpfung begrenzt wird. Um gefährliche Resonanzen zu vermeiden, müssen die Eigenschwingungen des Systems (z. B. einer Maschinenwelle) so abgestimmt werden, daß sie nicht mit der Drehzahl oder einer ihrer Oberschwingungen zusammenfallen. Die erregenden Kräfte und Momente sollen möglichst gering sein, was durch Massenausgleich und gleichförmige Drehkräfte erreicht werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] *Hänchen, R.:* Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau. 2. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1960

[2] *Herrmann, E.:* Festigkeitslehre. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1960

[3] *Kimmelmann, D. N.:* Berechnung von Maschinenteilen auf Dauer- und Schwingfestigkeit (Übersetzung a. d. Russ.). — Berlin: VEB Verlag Technik 1953

[4] *Paasch, F.:* Die Bedeutung der verschiedenen Darstellungen eines Belastungskollektivs. In: Aufsatzsammlung Betriebsfestigkeit, Band 2. Herausgeber: Institut für Leichtbau. — Dresden 1967, S. 127 bis 133

[5] *Pfeiffer, F.:* Über Klassiermethoden und Klassiergeräte. In: Aufsatzsammlung Betriebsfestigkeit, Band 2. Herausgeber: Institut für Leichtbau. — Dresden 1967, S. 139 ··· 144

[6] *Rehlich, G.:* Verfahren zur rationellen Bestimmung der Lebensdauer dynamisch beanspruchter Bauteile nach Corten-Dolan. — Maschinenbautechnik 22 (1973) 4, S. 184 ··· 188

[7] *Rötscher, F.:* Einfache Verfahren zur Ermittlung des Schwerpunktes, des Rauminhaltes und der Momente höherer Ordnung. Z. VDI 80 (1936), S. 1251···1354
[8] *Tauscher, H.:* Dauerfestigkeit von Stahl und Gußeisen. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982
[9] *Wirthgen, G.:* Vergleich einiger Berechnungsverfahren zur Bestimmung der Betriebsdauer dynamisch beanspruchter Bauteile. IfL-Mitteilungen 9 (1970) 8, S. 262···270

Weiterführende Literatur

[10] *Assmann, B.:* Technische Mechanik. 3 Bände. 4. bzw. 2. Aufl. — München: R. Oldenbourg Verlag 1977, 1977, 1975
[11] *Autorenkollektiv:* Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[12] *Autorenkollektiv:* Technische Formeln. 21. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[13] *Autorenkollektiv:* Elementare Statik — Grundlagen der Technischen Mechanik. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[14] *Autorenkollektiv:* Fachwissen des Ingenieurs, Band 1. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1985
[15] *Winkler, J.:* Statik — Grundlagen der Technischen Mechanik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981
[16] *Autorenkollektiv:* Technische Mechanik für Ingenieurschulen, Band 1: Statik, Kinematik, Kinetik. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
[17] *Autorenkollektiv:* Technische Mechanik für Ingenieurschulen, Band 2: Festigkeitslehre. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[18] *Autorenkollektiv* (Herausgeber M. Beckert): Technische Mechanik — Werkstoffe — Werkstoffprüfung. Reihe: Wissensspeicher für Technologen. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970
[19] *Bauer, R., Schneider, G.:* Hülltriebe und Reibradtriebe — Maschinenteile, Band III. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[20] *Bochmann, F.:* Statik im Bauwesen. Band 1: Einfache statische Systeme. 12. Aufl., Band 2: Festigkeitslehre. 10. Aufl., Band 3: Statisch unbestimmte Systeme. 6. Aufl. — Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1976, 1978, 1977
[21] *Böge, A.:* Formeln und Tabellen zur Mechanik und Festigkeitslehre. 8. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1979
[22] *Böge, A.:* Mechanik und Festigkeitslehre. 17. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1979
[23] *Clemens, G.:* Technische Mechanik für Bauingenieure. Band 1: Statik der starren Körper. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1976
[24] *Dreyer, G., Münder, E.:* Formelsammlung und Musterbeispiele zur Festigkeitslehre und Elastizitätslehre. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970
[25] *Falk, S.:* Lehrbuch der Technischen Mechanik. 3 Bände. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1967, 1968, 1969
[26] *Fischer, U., Stephan, W.:* Prinzipien und Methoden der Dynamik. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972
[27] *Flügge, W.:* Festigkeitslehre. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1967
[28] *Fronius, St.:* Maschinenelemente. — Berlin: VEB Verlag Technik 1971
[29] *Göldner, H.:* Übungsaufgaben aus der Technischen Mechanik. 12. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[30] *Göldner, H., Holzweißig, F.:* Leitfaden der Technischen Mechanik. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[31] *Holzmann, G., Meyer, H., Schumpich, G.:* Technische Mechanik. 3 Teile. 4. Aufl. — Stuttgart: B. G. Teubner 1977, 1979, 1979
[32] *Holzweißig, F., Meltzer, G.:* Meßtechnik der Maschinendynamik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1978
[33] *Lichtenheldt, W.:* Konstruktionslehre der Getriebe. 5. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1979
[34] *Lindner, H.:* Lehrbuch der Physik. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[35] *Magnus, K., Müller, H. H.:* Grundlagen der Technischen Mechanik. — Stuttgart: B. G. Teubner 1979
[36] *Marguerre, K.:* Technische Mechanik. 3 Teile. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1973, 1977, 1968
[37] *Mönch, E.:* Einführungsvorlesung Technische Mechanik. 3. Aufl. — München: R. Oldenbourg Verlag 1978
[38] *Naubereit, H.:* Kinematik, Kinetik — Grundlagen der Technischen Mechanik. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[39] *Neuber, H.:* Technische Mechanik. 3 Teile. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1971, 1971, 1974
[40] *Nickel, J.:* Programmstrecken zur Statik und Festigkeitslehre. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
[41] *Reckling, K.-A.:* Mechanik. 3 Bände. 2. bzw. 1. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1973, 1974, 1970

[42] *Recknagel, A.:* Physik. Mechanik. 14. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980

[43] *Rüdiger, D., Kneschke, A.:* Technische Mechanik. Band 1: Statik starrer Körper. 3. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966

[44] *Rüdiger, D., Kneschke, A.:* Technische Mechanik. Band 2: Festigkeitslehre. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1965

[45] *Rüdiger, D., Kneschke, A.:* Technische Mechanik. Band 3: Kinematik und Kinetik. 2. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966

[46] *Schlechte, E.:* Festigkeitslehre für Bauingenieure. 4. Aufl. — Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1978

[47] *Schlottmann, D.:* Maschinenelemente. — Berlin: VEB Verlag Technik 1973

[48] *Szabo, I.:* Einführung in die Technische Mechanik. 8. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1975

[49] *Volmer, J.:* Getriebetechnik. Lehrbuch. 4. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980

[50] *Volmer, J.:* Getriebetechnik. Leitfaden. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978

[51] *Volmer, J.:* Getriebetechnik. Umlaufrädergetriebe. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978

[52] *Winkler, J., Aurich, H.:* Technische Mechanik. Reihe: Nachschlagebücher für Grundlagenfächer. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[53] *Zeller, W., Franke, A.:* Das physikalische Rüstzeug des Ingenieurs. 11. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977

[54] *Zienkiewicz, O.:* Methode der finiten Elemente. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982

TS Technische Strömungslehre

Von Prof. Dr. phil. Ernst Estel†, Güstrow

Inhaltsverzeichnis

Wichtigste Formelzeichen

Statik der Flüssigkeiten und Gase

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
F	N	Kraft, Druckkraft	p_a, p_e	Pa	Anfangs- oder Enddruck bei Kompression
F_A	N	Auftrieb			
F_G, G	N	Gewichtskraft	η	Pa · s	dynamische Viskosität
g	m/s²	Fallbeschleunigung	$\varkappa$	m²/N	Kompressibilität
P	m²/s²	Druckfunktion	ν	m²/s	kinematische Viskosität
p	Pa	Druck	ϱ	kg/m³	Dichte
p	Pa, kPa	Luftdruck	σ	N/m	Oberflächenspannung

Dynamik der inkompressiblen Flüssigkeiten

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
b	m	Spannweite des Tragflügels	r	m	Rohrradius
			t	m	Tragflügeltiefe
c	—	Widerstandsbeiwert des Formwiderstands	$\dot{V}$	m³/s	Volumenstrom
			w	Pa	Winddruck
c_a	—	Auftriebsbeiwert	α	—	Kontraktionszahl
c_f	—	Widerstandsbeiwert des Flächenwiderstands	α	°, rad	Anstellwinkel
			Γ	m²/s	Zirkulation
c_m	—	Momentenbeiwert	ε	°, rad	Gleitwinkel
c_n	—	Normalkraftbeiwert	ζ	—	Stoßverlustbeiwert
c_w	—	Widerstandsbeiwert	ζ	—	Widerstandsbeiwert von Krümmern
	m	hydraulischer Durchmesser	η	Pa · s	dynamische Viskosität
d	m	Rohrdurchmesser	$\varkappa$	—	Adiabatenexponent
F_S	N	Schubkraft (der Luftschraube)	λ	—	Widerstandsbeiwert von Rohrströmungen
F_w	N	Strömungswiderstand	ν	m²/s	kinematische Viskosität
F_{wi}	N	induzierter Widerstand	τ	MPa	Schubspannung
F_{wo}	N	Profilwiderstand	Φ	m²/s	Geschwindigkeitspotential
Re	—	REYNOLDS-Zahl	ω	°/s, rad/s	Winkelgeschwindigkeit

Gasdynamik

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
A	m²	Düsenquerschnitt am Strahlaustritt	R	J/(K · kmol)	Gaskonstante
			T	K	absolute Temperatur
A'	m²	engster Düsenquerschnitt	t	°C	Temperatur
c	m/s	Schallgeschwindigkeit	v	m/s	Strömungsgeschwindigkeit
F_w	N	Strömungswiderstand			
M	—	MACH-Zahl	α	rad, °	MACH-Winkel
p	Pa	Druck im strömenden Gas	ϱ	kg/m³	Dichte im strömenden Gas
p_0	Pa	Druck im ruhenden Gas			
p'	Pa	Druck im engsten Düsenquerschnitt	ϱ_0	kg/m³	Dichte im ruhenden Gas



1. Einführung

Beim Ablauf zahlreicher Produktionsvorgänge und in vielen technischen Spezialgebieten treten Probleme auf, die mit Hilfe theoretischer und experimenteller Ergebnisse der *Aero- und Hydrodynamik* gelöst werden können. Hierher gehören u. a. Fragen nach dem Widerstand in Rohrleitungen, nach den Druckverlusten in Krümmern und Verzweigungen, nach dem Widerstand und Auftrieb von Tragflügeln, nach dem Winddruck auf Gebäude. Von besonderem Interesse für technische Konstruktionen sind z. B. die Geschwindigkeitsverteilungen über einen Rohrquerschnitt, Maßnahmen zur Verringerung des Widerstands umströmter Körper, Einflüsse der Wandrauhigkeit auf den Strömungswiderstand.
Die Erkenntnisse der Strömungslehre bleiben jedoch in ihrer Anwendung keineswegs auf wasserbauliche Anlagen oder Flugzeugkonstruktionen beschränkt, sondern spielen auch eine bedeutende Rolle bei der Konstruktion von Verbrennungsmaschinen, Turbinenanlagen, Pumpen und Verdichtern oder bei der Entwicklung von Sichtungsverfahren. Schließlich ermöglichen sie z. B. die Ermittlung der Viskosität von Flüssigkeiten aus der Fallgeschwindigkeit kleiner Kugeln.
Ein Teilgebiet der Mechanik der Flüssigkeiten und Gase ist die *Hydro- und Aerostatik*. Sie klärt z. B. Fragen nach dem Druck in ruhenden Flüssigkeiten und ermöglicht somit die richtige, den Festigkeitsansprüchen genügende Dimensionierung von Gefäßwandungen.
Ein besonders aktuelles Thema, das in der modernen Flugzeug- und Raketentechnik in wachsendem Maße eine Rolle spielt, ist die Bewegung von Körpern mit Überschallgeschwindigkeit.
Einige Teilgebiete der Physik haben in letzter Zeit so an Umfang und Bedeutung für die Technik gewonnen, daß es zweckmäßig war, sie aus dem Abschnitt PHYSIK des vorliegenden Nachschlagewerks auszugliedern. Dies trifft für die Mechanik zu. Hier wurde eine weitere Unterteilung in die Abschnitte TECHNISCHE MECHANIK und TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE vorgenommen.
Strömungen von Gasen und Dämpfen, die mit thermischen Vorgängen verbunden sind, werden im Abschnitt TECHNISCHE THERMODYNAMIK behandelt.

2. Statik der Flüssigkeiten und Gase

2.1. Stoffeigenschaften

2.1.1. Dichte und spezifisches Volumen

Die *Dichte* ϱ ist das Verhältnis von Masse und Volumen mit der SI-Einheit kg/m³. Den reziproken Wert $1/\varrho = v$ bezeichnet man als *spezifisches Volumen*. Die Dichten verschiedener Flüssigkeiten und Gase sind aus den Tabellen 1 und 2 zu ersehen. Die mit der Temperaturerhöhung verbundene Ausdehnung wirkt sich vermindernd auf die Dichte aus. Die Dichte der Gase ist hierbei auf Normaldruck (101,325 kPa) bezogen.

Im praktischen Gebrauch wird die Dichte meist in kg/dm³ eingesetzt (zahlenmäßig gleichbedeutend mit g/cm³). Hierbei hat Wasser von 4 °C die Dichte 1 kg/dm³. Die Zahlenwerte für die Einheit kg/m³ sind also 1000mal so groß.

2.1.2. Viskosität

Flüssigkeiten und Gase haben die Eigenschaft, keinen Widerstand gegen Formänderungen zu zeigen, wenn diese genügend langsam erfolgen. Für rasche Formänderungen ist dagegen eine Kraft erforderlich. Der gegen eine Formänderung auftretende Widerstand hat seine Ursache in einer Stoffeigenschaft, der *Viskosität*. Sie beruht auf der inneren Reibung der Flüssigkeitsteilchen. Flüssigkeiten ohne Reibungswiderstand bezeichnet man als *reibungslose* oder *ideale Flüssigkeiten*. Diese stellen eine Abstraktion dar, die für die Aufstellung fundamentaler

Tabelle 1. Stoffeigenschaften von Wasser bzw. Wasserdampf, Luft und Quecksilber

Temperatur in °C	Dichte ϱ in kg/m³			Dynamische Viskosität*) η in 10^{-6} Pa · s	
	Wasser bzw. Wasserdampf	Luft	Quecksilber	Wasser bzw. Wasserdampf	Luft
−20		1,40			16,2
0	999,84	1,29	13595	1788,7	17,2
10	999,70		13570	1306,1	
20	998,20	1,20	13546	1004,6	18,1
40	992,21	1,12	13497	653,3	19,1
60	983,21	1,06	13448	470,1	20,0
80	971,80	1,00	13400	355,6	20,9
100	958,35	0,95	13351	282,1	21,8
100	0,598			12,7	
150	0,524			14,6	
200	0,467	0,75	13113	16,5	26,0
250	0,421			18,4	
300	0,384		12876	20,3	
350	0,353			22,2	
400	0,326			24,2	
450	0,304			26,2	
500	0,284	0,39		28,2	37,9

*) s. auch Tabelle 26, Abschn. TECHNISCHE THERMODYNAMIK

Tabelle 2. Dichte ϱ_0, dynamische Viskosität η_0 und kinematische Viskosität ν_0 bei $T = 273$ K und $p = 101{,}325$ kPa für verschiedene Gase sowie Exponent n

	Luft	Kohlendioxid	Sauerstoff	Stickstoff	Wasserstoff	Wasserdampf
ϱ_0 in kg/m³	1,293	1,977	1,429	1,251	0,08987	0,804
η_0 in 10^{-6} Pa · s	17,2	13,8	19,2	16,5	8,3	9,0
ν_0 in 10^{-6} m²/s	13,3	6,98	13,4	13,2	92,5	11,7
n	0,76	0,87	0,70	0,69	0,67	1,09

Gesetze der Flüssigkeitsströmung von großem Nutzen sind. Die Wirkung der inneren Reibung realer Flüssigkeiten wird durch das folgende Gedankenexperiment veranschaulicht: Zwischen zwei ebenen Platten mit dem Abstand h befindet sich eine Flüssigkeit. Die eine Platte wird mit der konstanten Geschwindigkeit v in ihrer Ebene bewegt, die andere bleibt in Ruhe. Infolge ihrer Viskosität haftet die Flüssigkeit an den Platten, so daß sich übereinander weggleitende parallele Schichten mit von v bis auf Null abnehmender Geschwindigkeit bilden. Ist der Geschwindigkeitsabfall linear, die Geschwindigkeit u der Schichten also proportional zu ihrem Abstand y von der ruhenden Platte, und A die Fläche der gezogenen Platte, so ist für ihre Bewegung die Kraft:

$$F = \eta A v / h \tag{1}$$

erforderlich. η ist die *dynamische Viskosität.* Für die Geschwindigkeit der Schichten gilt:

$$u = v y / h \tag{2}$$

Das Verhältnis:

$$\eta / \varrho = \nu \tag{3}$$

heißt ***kinematische*** *Viskosität.*



Tabelle 1 enthält Viskositätswerte η für Wasser, Luft und Wasserdampf in Abhängigkeit von der Temperatur, Tabelle 2 für Gase. Die Viskosität von Gasen bei Normaldruck erhält man im Temperaturbereich von 253 ··· 773 K mit Hilfe des Exponenten n aus Tabelle 2 nach der Beziehung:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{t + 273}{273}\right)^n \qquad \left|\frac{\eta}{\mathrm{Pa \cdot s}} \quad \frac{\eta_0}{\mathrm{Pa \cdot s}} \quad \frac{t}{{}^\circ\mathrm{C}}\right| \tag{4}$$

Mit dieser empirischen Formel sind die η-Werte der Tabelle 1 berechnet.

Für ideale Gase gilt: ϱ ändert sich proportional, ν umgekehrt proportional dem Druck, während η von ihm unabhängig ist. Berechnet werden die Werte ϱ und ν für beliebigen Druck aus den für Normaldruck geltenden Werten der Tabelle 1 (für Luft und für Wasserdampf).

2.1.3. Kompressibilität

Für ideale Gase gilt das BOYLE-MARIOTTE*sche Gesetz*, nach dem zwischen Druck und Volumen eine indirekte Proportionalität besteht. Flüssigkeiten dagegen sind kaum zusammendrückbar. In mit mäßiger Geschwindigkeit strömenden Gasen sind die Volumenänderungen so gering, daß sie vernachlässigt werden können. Bei einer Geschwindigkeit des Gases bis zu etwa 50 m/s bleiben die Volumenänderungen noch unter 1%. Für Strömungsvorgänge in Gasen und Flüssigkeiten gelten dann dieselben Gesetze. Nicht mehr vernachlässigbare Abweichungen treten in Gasen bei Strömungsgeschwindigeiten von der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit (in Luft etwa 330 m/s bei 293 K*)) auf, während die Volumenänderung bei 150 m/s nur etwa 10% beträgt. Die Kompressibilität von Flüssigkeiten macht sich erst bei hohen Drücken bemerkbar, z. B. in Einspritzleitungen von Dieselmotoren. Gase und Flüssigkeiten werden als *unelastische* oder *inkompressible Flüssigkeiten* bezeichnet, wenn durch Druckänderungen hervorgerufene Volumenänderungen vernachlässigbar klein sind.

Tabelle 3. Kompressibilität des Quecksilbers bei verschiedenen Temperaturen und Drücken (p_a Anfangsdruck, p_e Enddruck)

Druck in MPa		Kompressibilität $\varkappa$ in 10^{-12} m²/N bei Temperatur T in K					
p_a	p_e	293	323	353	383	423	463
0,1	50	38	38	39	40	43	45
50	100	38	38	39	40	43	45
100	150	37	38	39	40	43	44
150	200	36	38	38	39	42	43
200	250	35	38	38	38	42	43
250	300	34	38	37	37	42	42

Unter der *Kompressibilität* $\varkappa$ versteht man das Verhältnis der relativen Volumenverminderung $\mathrm{d}V/V$ zur Druckerhöhung $\mathrm{d}p$. Das Minuszeichen wird in der Definitionsgleichung

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right) \tag{5}$$

geschrieben, damit $\varkappa$ positiv wird. Die Kompressibilität ist abhängig von der Temperatur und vom Druck; sie nimmt im allgemeinen mit steigendem Druck ab und mit steigender Temperatur zu (Tabelle 3). Bei Wasser nimmt $\varkappa$ bis zu einem Minimum bei etwa 328 K (55 °C) ab, dann erst steigt es wieder an (Tabelle 4). Die Kompressibilität einiger organischer Flüssigkeiten ist aus Tabelle 5 ersichtlich.

*) s. Abschn. PHYSIK, Schallgeschwindigkeit

Tabelle 4. Kompressibilität des Wassers in Abhängigkeit von Druck und Temperatur (p_a Anfangsdruck, p_e Enddruck)

Druck in MPa		Kompressibilität $\varkappa$ in 10^{-10} m²/N bei Temperatur T in K												
p_a	p_e	273	278	283	288	293	303	313	323	333	343	353	363	373
0,1	10	5,04	4,87	4,77	4,67	4,62	4,54	4,43	4,43	4,49	4,56	4,63	4,72	—
10	20	4,86	4,69	4,55	4,45	4,36	4,30	4,23	4,19	4,21	4,33	4,45	4,62	7,96
20	30	4,74	4,56	4,47	4,37	4,28	4,16	4,09	4,08	4,10	4,19	4,30	4,53	7,59
30	40	4,60	4,43	4,35	4,27	4,18	4,08	4,02	3,97	4,01	4,06	4,16	4,40	7,21
40	50	4,49	4,38	4,24	4,16	4,10	4,01	3,99	3,94	3,89	3,93	4,03	4,28	6,73
50	60	4,32	4,24	4,12	4,06	3,99	3,87	3,85	3,85	3,83	3,86	3,94	4,11	6,51
60	70	4,23	4,04	4,00	3,93	3,89	3,82	3,77	3,72	3,78	3,75	3,82	4,02	6,19

Tabelle 5. Kompressibilität organischer Flüssigkeiten bei 291 K

Stoff	$\varkappa$ in 10^{-9} m²/N	Stoff	$\varkappa$ in 10^{-9} m²/N	Stoff	$\varkappa$ in 10^{-9} m²/N
Äthylalkohol	1,13	Bromoform	0,40	Methylalkohol	1,18
Äthylbenzol	0,82	Butylalkohol	0,91	Nitrobenzol	0,46
Äthylbromid	1,20	i-Butylalkohol	0,99	n-Oktan	1,01
Äthylenbromid	0,58	Chlorbenzol	0,74	Pentan	2,39
Amylalkohol	0,89	Chloroform	0,99	Propylalkohol	0,99
Anilin	0,36	Diäthyläther	1,81	i-Propylalkohol	0,99
Azeton	1,24	Essigsäure-äthylester	1,03	Terpentinöl	0,78
Benzol	0,94	Glyzerin	0,22	Tetrachlor-kohlenstoff	1,10
Benzolsäure-amylester	0,60	Heptan	1,18	Toluol	0,86
Brombenzol	0,94	Hexan	1,48	Zyklohexan	1,16

2.1.4. Oberflächenspannung und Kapillarität

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirken *Kohäsionskräfte*, die einen begrenzten Wirkungsbereich haben. Im Innern der Flüssigkeit heben sich die auf ein Molekül wirkenden Kräfte gegenseitig auf, weil dieses allseitig von gleichartigen Molekülen umgeben ist. An der Oberfläche wirken auf ein Molekül starke, nach innen gerichtete Kräfte der flüssigen Phase, während nach außen nur schwache Kohäsionskräfte der gasförmigen Phase wirksam sind. Die Resultierende aller auf ein Molekül wirkenden Kräfte ist also nach innen gerichtet. Will man die Oberfläche einer Flüssigkeit vergrößern, indem man Flüssigkeitsteilchen aus dem Innern an die Oberfläche bringt, so muß man die Kohäsionskräfte überwinden und Arbeit verrichten. Das Verhältnis der aufgewendeten Arbeit zur Oberflächenvergrößerung definiert die *Oberflächenspannung* σ:

$$\sigma = \Delta W / \Delta A \qquad (6)$$

Durch den Transport von Flüssigkeitsteilchen aus dem Innern an die Oberfläche würde sich nicht nur diese, sondern auch die Oberflächenenergie vergrößern. Ein stabiles Gleichgewicht ist jedoch mit einem Minimum an potentieller Energie verbunden, so daß sich die Oberfläche einer Flüssigkeit stets so einstellt, daß sie möglichst klein ist (*Minimalfläche*, z. B. Kugelgestalt von Tropfen). Grenzt eine Flüssigkeit an eine andere, so erfährt ein in der Grenzfläche befindliches Molekül Kräfte von beiden Flüssigkeiten. Man spricht dann von der *Grenzflächenspannung*, die ihre Ursache in den zwischen Molekülen unterschiedlicher Stoffe wirkenden *Adhäsionskräften* hat (Tabelle 6).



Tabelle 6. Ober- bzw. Grenzflächenspannung einiger Flüssigkeiten bei 293 K

Flüssigkeit	Ober-	Grenz-	Grenz-
	flächenspannung in 10^{-3} N/m		
	gegen Luft	gegen Wasser	gegen Quecksilber
Äthyläther	17		379
Äthylalkohol	22		364
Azeton	24		
Benzol	29	35	
Glyzerin	66		
Olivenöl	32	18	335
Petroleum	26	48	
Quecksilber	500		—
Terpentinöl	27		
Wasser	73	—	375

Bringt man auf eine Flüssigkeit I einen Tropfen einer Flüssigkeit II, so greifen in der Berührungslinie drei verschiedene Grenzflächenspannungen an, nämlich die Grenzflächenspannungen Flüssigkeit I—Luft, Flüssigkeit II—Luft und Flüssigkeit I—Flüssigkeit II. Soll der Tropfen der Flüssigkeit II in Ruhe bleiben, so müssen sich die drei Grenzflächenspannungen das Gleichgewicht halten. Ein solcher Gleichgewichtszustand ist nur möglich, wenn jede Grenzflächenspannung entgegengesetzt gleich der Vektorsumme der beiden anderen Grenzflächenspannungen ist. Bei Öl und Wasser z. B. ist dieser Gleichgewichtszustand nicht möglich. Infolgedessen breitet sich ein Öltröpfchen auf Wasser bis zu einer monomolekularen Schicht aus.

Grenzt die Flüssigkeit an eine feste Wand, so wird sie unter dem Einfluß von Adhäsionskräften, die zwischen den Molekülen der Wand und den Molekülen der Flüssigkeit wirken, an ihr hochgezogen, wenn sie die Wand benetzt. In einem in eine benetzende Flüssigkeit (z. B. Wasser) getauchten Kapillarrohr beobachtet man als Folge der Grenzflächenspannung *Kapillaraszension* mit *konkavem* Flüssigkeitsmeniskus. Taucht man dagegen das Rohr in eine nicht benetzende Flüssigkeit (z. B. Quecksilber), so wird die Flüssigkeit unter das äußere Niveau herabgedrückt. Nichtbenetzende Flüssigkeiten zeigen *Kapillardepression*. Der Flüssigkeitsmeniskus ist *konvex* (Bild 1).

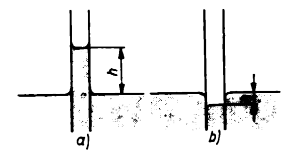


Bild 1. Kapillare Steighöhe h bei benetzender (a) und nicht benetzender (b) Flüssigkeit

Ist d der Innendurchmesser der Kapillare, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ die Fallbeschleunigung und h die kapillare Steighöhe, so kann die Oberflächen- bzw. Grenzflächenspannung σ durch die Gleichung

$$\sigma = dh\varrho g/4 \qquad (7)$$

bestimmt werden.
Oberflächenspannung und Grenzflächenspannung sind temperaturabhängig. Sie werden kleiner mit zunehmender Temperatur. An der Oberfläche von Flüssigkeiten oder festen Stoffen (z. B. Aktivkohle) können sich Gase oder andere Stoffe aufgrund zwischenmolekularer Kräfte anlagern. Diese Erscheinung heißt *Adsorption*.

2.2. Eigenschaften der Atmosphäre

2.2.1. Normaldruck

Als *Normaldruck* (physikalische Atmosphäre) ist international der Druck p derjenigen Luftsäule festgelegt, die einer Quecksilbersäule von 760 mm Länge bei 273,15 K das Gleichgewicht hält.

Es ist $p = 1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa $= 1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m² (= 1,01325 bar = 1 atm = 760 Torr = 1,033 kp/cm²).
In der Meteorologie wird noch als Druckeinheit das Millibar (mbar) verwendet*):
1 bar = 1000 mbar = 10^5 Pa = 10^5 N/m² (= 570 Torr).

2.2.2. Barometrische Höhenformel

Aus der barometrischen Höhenformel:

$$p = p_0 \exp(-\varrho_0 g h p_0) \tag{8}$$

p_0 Druck und ϱ_0 Dichte in der Höhe $h = 0$, g Fallbeschleunigung

folgt die *hypsometrische Formel*, die zur Bestimmung des Höhenunterschieds $h_2 - h_1$ (gemessen in km) zweier Orte dient:

$$h_2 - h_1 = (18{,}4 + 0{,}067 t_\mathrm{m}) \lg (p_1/p_2) \tag{9}$$

p_1, p_2 Luftdrücke an beiden Orten, t_m mittlere Temperatur

Die Bestimmung der Höhe h (in km) eines Punkts über der Erdoberfläche erfolgt mit der Formel:

$$h = (18{,}4 + 0{,}067 t_\mathrm{m}) \lg (p_0/p) \tag{10}$$

p_0 Druck an der Erdoberfläche, p Druck in der Höhe h

2.2.3. Luftfeuchtigkeit

Den Gehalt der Luft an Wasserdampf bezeichnet man als *Luftfeuchtigkeit*. Unter der *absoluten Feuchtigkeit* versteht man die in Gramm gemessene Menge Wasser, die in Dampfform in 1 m³ Luft enthalten ist. Die Menge Wasserdampf, die 1 m³ Luft maximal aufnehmen kann, heißt die *maximale Feuchtigkeit* oder *Sättigungsmenge*. Sie ist stark temperaturabhängig.**) Das Verhältnis der absoluten Feuchtigkeit zur maximalen Feuchtigkeit heißt *relative Feuchtigkeit*. Sie wird in Prozent angegeben:

$$\text{relative Feuchtigkeit} = \frac{\text{absolute Feuchtigkeit}}{\text{maximale Feuchtigkeit}} \cdot 100\%$$

Da mit abnehmender Temperatur die Luft immer weniger Feuchtigkeit aufnehmen kann, wird bei einer bestimmten Temperatur die in einer abgeschlossenen Luftmenge enthaltene Feuchtigkeit gerade zur Sättigung ausreichen. Diejenige Temperatur, für die in einem vorgegebenen Luftkörper gerade Sättigung eintritt, wird als *Taupunkt* bezeichnet.

2.2.4. Luftzusammensetzung

Die Luft ist ein Gemisch von hauptsächlich neun verschiedenen Gasen, deren Anteile bis etwa 20 km Höhe konstant sind. In Tabelle 7 sind die einzelnen Gase in Volumenprozent angegeben.

*) Das Bar ist befristet als Einheit zugelassen.
**) s. Tabelle 21, Abschn. TECHNISCHE THERMODYNAMIK

Tabelle 7. Zusammensetzung der Luft

Bestandteil	Stickstoff	Sauerstoff	Argon	Kohlendioxid	Wasserstoff	Neon	Helium	Krypton	Xenon
Vol.-%	78,10	20,93	0,9226	0,03	0,015	0,0018	0,000491	0,0001	0,000009

2.3. Grundgesetze ruhender Flüssigkeiten und Gase

2.3.1. Hydrostatischer Druck

Die Grundaufgabe der *Hydrostatik* als der Lehre vom Gleichgewicht ruhender Flüssigkeiten ist die Bestimmung der Druckverteilung (des Druckfelds) in einer der Schwerkraft (dem Gravitationsfeld) unterworfenen Flüssigkeit.

2.3.1.1. Druckanstieg mit zunehmender Tiefe in einer homogenen Flüssigkeit

Als *homogen* bezeichnet man eine Flüssigkeit, deren Dichte konstant ist oder nur vom Druck abhängt, für die also eine *Druckfunktion* existiert:

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} \tag{11}$$

Betrachtet man einen prismatischen flüssigen Körper mit horizontaler Achse, so hat die Gewichtskraft des Prismas keine Komponente in der Achsenrichtung. Daraus folgen Druckgleichheit an den Stirnflächen und durch Aneinanderreihen beliebig vieler Prismen Druckkonstanz in einer waagerechten Ebene.
Betrachtet man das Gleichgewicht eines flüssigen Körpers (Prismas oder Zylinders) mit vertikaler Achse (Grundfläche A und Höhe h) gegen Verschieben in senkrechter Richtung, so ist die Gewichtskraft des Körpers von Einfluß auf den Gleichgewichtszustand. Nach unten wirken die Gewichtskraft des Körpers $F_G = \varrho g V = \varrho g A h$ und die Druckkraft (Gewicht) der Flüssigkeit auf die obere Stirnfläche $F_1 = p_1 A$, nach oben wirkt die Druckkraft auf die untere Stirnfläche $F_2 = p_2 A$. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann $\varrho g A h + p_1 A = p_2 A$ oder:

$$p_2 - p_1 = \varrho g h \tag{12}$$

Der Druck nimmt also nach unten stetig zu, und zwar steigt er bei einer Tiefenzunahme Δh um $\varrho g \Delta h$ an.

2.3.1.2. Gleichgewichtszustand in einer inhomogenen Flüssigkeit

Betrachtet man zunächst einen flüssigen Körper mit horizontaler Achse, so erfordert der Gleichgewichtszustand gleichen Druck auf die Stirnflächen, d. h., der Druck in jeder waagerechten Ebene ist konstant.
Für zwei flüssige Körper A und B mit vertikaler Achse, der Höhe h und der mittleren Dichte ϱ_A bzw. ϱ_B lauten die Gleichgewichtsbedingungen $p_2 - p_1 = h\varrho_A g$ und $p_2 - p_1 = h\varrho_B g$, also $\varrho_A = \varrho_B$. In einer inhomogenen schweren Flüssigkeit ist Gleichgewicht nur dann möglich, wenn in jeder waagerechten Schicht die Dichte konstant ist. Hieraus folgt, daß die Trennfläche zweier nicht mischbarer Flüssigkeiten von verschiedener Dichte stets eine horizontale Fläche ist.

2.3.1.3. Pascalsches Gesetz

Wirkt auf eine Flüssigkeit in irgendeiner Richtung ein äußerer Druck, so breitet sich dieser in der Flüssigkeit allseitig in gleicher Stärke aus. Der auf die seitlichen Begrenzungsflächen eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes wirkende Druck hat in der von der Flüssigkeitsoberfläche aus gemessenen Tiefe h die Größe $p = \varrho g h$.

2.3.2. Auftrieb

2.3.2.1. Archimedisches Prinzip

Nach dem *Archimedischen Prinzip* ist der Auftrieb F_A eines Körpers vom Volumen V gleich der Gewichtskraft F_G der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge. Der Auftrieb ist eine senkrecht nach oben wirkende Kraft, die im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge angreift:

$$F_A = V \varrho_{fl} g \tag{13}$$

2.3.2.2. Tragkraft eines Ballons

Die Tragkraft F_B eines Ballons ergibt sich als Differenz aus dem Gewicht der verdrängten Luft und dem Gewicht des Füllgases:

$$F_B = V(\varrho_L - \varrho_G)\, g \tag{14}$$

ϱ_L Luftdichte, ϱ_G Dichte des Füllgases

Unter der *Gleichgewichtshöhe* eines Ballons versteht man die Höhe, in der der Auftrieb gleich dem Gesamtgewicht (einschließlich des Füllgases) geworden ist.
Eine Verminderung der Lufttemperatur um 1 K vergrößert die Gleichgewichtshöhe um etwa 30 m. Kühlt sich das Füllgas um 1 K ab, so erniedrigt sich die Gleichgewichtshöhe bei Leuchtgas um etwa 20 m und bei Wasserstoff um etwa 3 m.

2.3.2.3. Schwimmen

Das Verhalten eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers richtet sich nach der Größe des Auftriebs, den er in ihr erfährt. Ist der Auftrieb kleiner als sein Eigengewicht, so geht der Körper unter; ist der Auftrieb größer, so *schwimmt* er. Ist der Auftrieb des völlig eingetauchten Körpers gleich seinem Eigengewicht, so verbleibt er an jeder beliebigen Stelle der Flüssigkeit; er *schwebt*.
Man unterscheidet bei schwimmenden Körpern *stabile* und *labile Gleichgewichtslagen**).

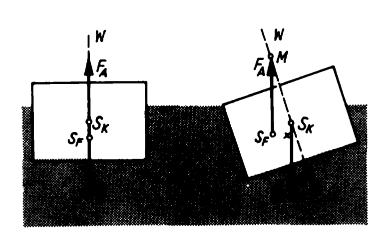


Bild 2. Stabile Schwimmlage

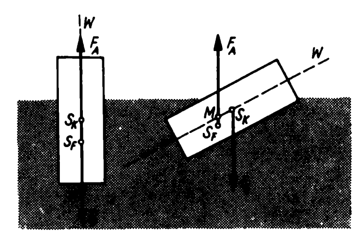


Bild 3. Labile Schwimmlage

Bild 2 stellt den Fall der *stabilen Schwimmlage* dar. Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt zwei Kraftwirkungen. Im Punkt S_K, dem Schwerpunkt des Körpers, greift eine senkrecht nach unten gerichtete Kraft, seine Gewichtskraft F_G, an. Im Punkt S_F, dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit, d. h. dem Schwerpunkt des in die Flüssigkeit tauchenden Körperstücks, greift eine nach oben gerichtete Kraft, sein Auftrieb F_A, an. Wenn der Körper in Gleichgewichtslage schwimmt, sind beide Kräfte gleich groß und wirken längs der gemeinsamen Wirkungslinie W in entgegengesetzter Richtung. Entscheidend für das Verhalten des Körpers bei einer Störung des Gleichgewichts ist die Lage des *Metazentrums* M. Eine Drehung des Körpers in der Zeichenebene bringt S_F an eine andere Stelle des Körpers. Die Auftriebskraft schneidet in dieser Lage die mit dem Körper starr verbundene Linie W oberhalb oder unterhalb von S_K im Metazentrum M. Liegt M über S_K, so ist die Schwimmlage stabil, das Drehmoment von Auftriebskraft und Gewicht wirkt der Drehung entgegen. (Im rechten Teil des Bilds 2 liegt der Schwerpunkt S_F der

*) s. auch Abschn. TECHNISCHE MECHANIK, Arten des Gleichgewichts

Flüssigkeit in Wirklichkeit bei x; aus Gründen der Übersichtlichkeit der Konstruktion wurde er etwas nach links verlegt.)
Bild 3 zeigt das Beispiel einer *labilen Schwimmlage.* Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß das Metazentrum unterhalb des Körperschwerpunkts liegt. Der gedrehte Körper kehrt nicht in seine ursprüngliche Lage zurück, sondern dreht sich weiter, bis er die in Bild 2 gezeichnete stabile Lage erreicht hat. Das Kippen wird in diesem Falle durch ein rechtsdrehendes Kräftepaar erzeugt, das ihn aus der labilen in die stabile Lage überführt.

3. Dynamik der inkompressiblen Flüssigkeiten*)

3.1. Grundbegriffe

3.1.1. Stationäre und nichtstationäre Strömung und ihre Darstellung

Zeitlich gleichbleibende Strömungen werden als *stationäre Strömungen* bezeichnet. Ändert sich an einer Stelle der Strömung die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit, so spricht man von *nichtstationären (instationären) Strömungen.* Strömungen werden durch Stromlinien beschrieben, ähnlich wie elektrische oder magnetische Felder durch Feldlinien. Als *Stromlinien* bezeichnet man Linien, deren Tangenten in jedem Punkt einer Strömung mit der Richtung des Vektors der dort bestehenden Momentangeschwindigkeit übereinstimmen. Bei instationären Strömungen verändern die Stromlinien im Laufe der Zeit ihre Form. Von ihnen zu unterscheiden sind die *Bahnlinien,* die von den einzelnen Flüssigkeitsteilchen während ihrer Bewegung beschrieben werden. Im Falle stationärer Strömungen sind die Stromlinien zeitlich unveränderlich und fallen mit den Bahnlinien zusammen.

Sichtbarmachen der Bahn- bzw. Stromlinien. Ein in die bewegte Flüssigkeit gebrachtes Schwebeteilchen (z. B. Aluminiumflitter oder Korkpulver) wird von ihr mitgenommen und beschreibt eine Bahnlinie. Diese Bahn zeigt auch die Bahn der umgebenden Flüssigkeit an.

Zeichnet man durch die senkrecht zu den Stromlinien gelegte Flächeneinheit so viele Stromlinien, wie die Maßzahl der Geschwindigkeit beträgt, so gibt die entstehende *Stromliniendichte* ein anschauliches Bild von der Geschwindigkeitsverteilung. Je enger sich die Stromlinien an einer Stelle zusammendrängen, um so größer ist dort die Geschwindigkeit. Zeichnet man durch die Umrandung einer durchströmten Fläche alle Stromlinien, so entsteht eine *Stromröhre*; ihr flüssiger Inhalt heißt *Stromfaden.*

Eine stationäre Strömung liegt z. B. vor, wenn eine Flüssigkeit unter konstantem Druckgefälle durch ein Rohr strömt. Wird ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit durch eine ruhende Flüssigkeit bewegt, so ist für einen ruhenden Beobachter die Bewegung nicht stationär, weil der Körper mit dem von ihm erzeugten Strömungsbild am Beobachter vorüberwandert. In einem Koordinatensystem, in dem der Beobachter sich mit dem Körper bewegt, wird die Bewegung zu einer stationären. Dagegen läßt sich die Bewegung zweier Körper in einer ruhenden Flüssigkeit nicht stationär machen, wenn ihre Geschwindigkeiten verschieden sind. Im allgemeinen handelt es sich jedoch im folgenden um stationäre Strömungen oder solche, die durch geeignete Wahl des Koordinatensystems stationär gemacht werden können.

3.1.2. Ein-, zwei- und dreidimensionale Strömungen

Ändert sich der Strömungszustand im wesentlichen nur längs einer Linie, während er senkrecht zu ihr praktisch unverändert bleibt, so spricht man von einer *linearen* oder *eindimensionalen Strömung* (z. B. Rohrströmung). Die Behandlung eindimensionaler Strömungsvorgänge ist Gegenstand der *Hydraulik* (Stromfadentheorie zur Berechnung von Rohrleitungen). Beim Umströmen eines unendlich langen Zylinders oder Prismas (bzw. eines seitlich von Ebenen begrenzten Zylinders oder Prismas) findet in zur Zylinder- oder Prismaachse senkrechten Ebenen zur gleichen Zeit der gleiche Bewegungsvorgang statt. Es liegt dann eine *ebene* oder *zweidimensionale Strömung* vor. Die Strömung um Widerstandskörper, wie Kraftfahrzeuge, Flugzeuge, Raketen, ist eine *räumliche* oder *dreidimensionale Strömung.*

*) Hierzu zählt man auch mit Unterschallgeschwindigkeit strömende Gase, bei denen vernachlässigbare Volumen- oder Dichteänderungen auftreten.

3.1.3. Staupunkt

Wird ein Körper in eine Strömung gebracht, so bildet sich vor ihm ein *Staugebiet*, in dem sich die Strömung nach allen Seiten zerteilt; der Körper wird umströmt. Hinter ihm laufen die Stromlinien in völliger Symmetrie wieder zusammen, wenn es sich um ideale Flüssigkeiten oder Potentialströmungen handelt. Im vorderen (A) und hinteren (B) *Staupunkt* ist die Strömungsgeschwindigkeit Null. In diesen Punkten ist nach der BERNOULLIschen Gleichung der Flüssigkeitsdruck gleich dem Gesamtdruck. Bild 4 zeigt diese Verhältnisse an einer Kugel für eine Potentialströmung. Im Gegensatz zu Strömungen idealer (reibungsloser) Medien sehen wirkliche Strömungen infolge der Reibungseinflüsse anders aus.

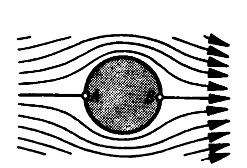


Bild 4. Umströmung eines Körpers. A vorderer Staupunkt; B hinterer Staupunkt

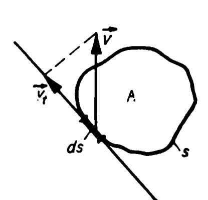


Bild 5. Zur Definition der Zirkulation

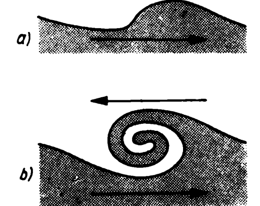


Bild 6. Einrollung einer Diskontinuitätsfläche. a) Beginn: leichte Einrollung; b) vollendete Einrollung: diskreter Wirbel

3.1.4. Wirbelbewegung

In einem bewegten starren Körper kann man die Momentangeschwindigkeit irgendeines Punkts des Körpers als Vektorsumme der Translationsgeschwindigkeit eines willkürlich gewählten Bezugspunkts im Innern des Körpers und der Bahngeschwindigkeit um eine durch den Bezugspunkt gehende Drehachse ansehen. Betrachtet man ein hinreichend kleines Flüssigkeitselement einer strömenden Flüssigkeit und einen Punkt im Innern des Elements, so setzt sich dessen momentane Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ vektoriell aus einer Translations- und einer Bahngeschwindigkeit um eine Momentanachse (z. B. durch den Mittelpunkt des Elements) und einer Formänderungs- oder Deformationsgeschwindigkeit zusammen.
Die Drehbewegung, bei der sich das ganze Flüssigkeitselement wie ein starrer Körper verhält, bezeichnet man als *Wirbelbewegung.* Ist $\boldsymbol{\omega}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der momentanen Drehung (*Wirbelvektor*), so nennt man die Größe $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ die *Rotation der Geschwindigkeit* $\boldsymbol{v}$ von der durch den Ort des Elements bestimmten Stelle. Gilt in allen Punkten der Strömung oder eines betrachteten Bereichs $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, so heißt die Strömung in diesem Bereich *drehungsfrei* (*wirbelfrei*)*).

Innerhalb der Flüssigkeit möge eine geschlossene Linie s gedacht werden, die die Fläche A umschließt. In einem Punkt von s sei die Tangente gezogen und die dort vorliegende Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ auf diese projiziert (Bild 5). Integriert man das Produkt aus der Geschwindigkeitskomponente v_t und dem Linienelement ds des Rands über die ganze geschlossene Linie s, so erhält man die *Zirkulation* längs s:

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint v_t\, \mathrm{d}s \tag{15}$$

Zwischen der Zirkulation und der Rotation besteht der Zusammenhang:

$$\Gamma = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_n\, \mathrm{d}A \tag{16}$$

$(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_n$ Komponente des Rotors in Richtung der Flächennormalen

*) s. Abschn. MATHEMATIK, Vektoranalysis



Ist auf der ganzen Fläche die Rotation konstant, so ist $\Gamma = A \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. Unter $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ versteht man also einen Vektor in Richtung der Drehachse, unter der Zirkulation das geschlossene Linienintegral über das skalare Produkt der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $d\boldsymbol{s}$. Bei starrer Drehung einer Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist längs eines Kreises mit dem Radius r_0 um die Drehachse:

$$\Gamma = 2\pi r_0^2 \omega \qquad \text{und} \qquad |\operatorname{rot} \boldsymbol{v}| = \Gamma/A = 2\pi r_0^2 \omega / \pi r_0^2 = 2\omega \tag{17}$$

Betrachtet man in einer sich drehenden Flüssigkeit die Drehachsen der rotierenden Teilchen als Tangenten von Kurven, so stellen sie *Wirbellinien* dar. Sämtliche durch eine Fläche hindurchgehenden Wirbellinien bilden einen *Wirbelfaden*. Die in einer sonst drehungsfreien Flüssigkeit befindlichen drehenden Gebiete (Wirbelfäden) bezeichnet man auch als *Wirbelkerne*, die um die Wirbelkerne befindliche drehungsfreie Strömung als *Wirbelfeld*. Der Begriff „*Wirbel*" kann sich auf Wirbellinie, Wirbelkern oder Wirbelfeld beziehen. Die *Wirbelstärke* ist die Zirkulation um einen Wirbelfaden.

Läßt man zwei Flüssigkeitsströme mit verschiedenen Geschwindigkeiten (wobei auch für die eine Strömung die Geschwindigkeit Null möglich ist) aneinander vorbeigleiten, so bildet sich eine *Trennungsfläche* (Unstetigkeitsfläche) oder *Diskontinuitätsfläche*, in der sich die Geschwindigkeiten sprunghaft ändern. Der Wirbelkern ist hierbei zu einer Diskontinuitätsfläche zusammengeschrumpft.
Trennungsflächen zwischen zwei Flüssigkeitsströmen sind labil, d. h., sie bleiben nicht lange in ihrer ursprünglichen Form bestehen. Irgendwelche zufälligen Ausbuchtungen wachsen schnell an, so daß sich die Geschwindigkeitsunterschiede an einigen Stellen verstärken, an anderen vermindern. Dadurch erhält die Trennungsfläche leichte Wellungen (Bild 6a). Im weiteren Verlauf kippen die immer mehr anwachsenden Ausbuchtungen in den beiden Strömungsrichtungen um. Es rollen sich, laufend unterstützt durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten in den beiden Strömungen, Wirbel ein (Bild 6b), die bei ihrer Entstehung eine kräftige Rotation erhalten und sich als selbständige Gebilde („diskrete" Wirbel) in Richtung der größeren Strömungsgeschwindigkeit bewegen. Einrollungen dieser Art entstehen z. B. beim Zusammenfließen zweier Flüssigkeitsströme oder beim Ablösen einer Strömung von einer Fläche, so an der Rückseite umströmter Körper bei bestimmten REYNOLDS-Zahlen.

3.1.5. Potentialströmung

Für eine drehungsfreie Flüssigkeit existiert eine Funktion $\Phi(x, y, z)$ — bei nichtstationärer Strömung $\Phi(x, y, z, t)$ —, deren partielle Ableitungen an einer Stelle die Geschwindigkeitskomponenten in den drei Achsenrichtungen eines rechtwinkligen (kartesischen) Koordinatensystems ergeben:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \qquad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{18}$$

Man bezeichnet Φ als *Geschwindigkeitspotential* oder kurz als *Potential*. Drehungsfreie Strömungen, für die also die Geschwindigkeit ein Potential besitzt, heißen *Potentialströmungen*.
In einer idealen Flüssigkeit ist die Drehung aller Teilchen konstant; ist sie Null, können nur Potentialströmungen stattfinden.
Bei einer Potentialströmung ist die Geschwindigkeit im Punkt $P(x, y, z)$ der Größe und Richtung nach gleich dem größten Anstieg des Potentials in diesem Punkt:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi \tag{19}$$

3.1.6. Laminare und turbulente Strömung

In einer *laminaren Strömung* gleiten Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten übereinander hinweg, ohne sich zu durchmischen. Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich nur in Strömungsrichtung, haben also keine Geschwindigkeitskomponente quer zur Strömungsrichtung.

Als Modell für die Bewegung der Flüssigkeitsschichten kann man sich die Bewegung einer Platte in einer ruhenden, zähen Flüssigkeit denken. Wird die Platte in einer zum Gefäßboden parallelen Ebene bewegt,

so haftet infolge der Reibung die Flüssigkeit an ihr und wird dadurch in Bewegung gesetzt. In unmittelbarer Nähe der Platte bewegt sich die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit der Platte. Am Gefäßboden haftet die Flüssigkeit ebenfalls und bleibt daher in Ruhe, während zwischen Boden und bewegter Platte die Flüssigkeitsschichten mit Geschwindigkeiten übereinander hinweggleiten, die dem Abstand vom Boden proportional sind.

In einer *turbulenten Strömung* dagegen sind der Hauptbewegung ungeordnete Mischbewegungen überlagert. Auf diese Weise gelangen Teilchen mit großer Geschwindigkeit in Gebiete mit kleiner Geschwindigkeit und umgekehrt. Die Folge dieser Durchmischung ist ein weitestgehender Geschwindigkeitsausgleich. So kann man z. B. in einer turbulenten Rohrströmung fast über den gesamten Querschnitt bis in die Nähe der Rohrwand nahezu konstante Geschwindigkeit finden.
Der Umschlag der laminaren Strömungsform in die turbulente erfolgt bei der *kritischen* REYNOLDS-*Zahl*, die für durchströmte sowie umströmte Körper charakteristisch ist.

3.1.7. Grenzschicht

An der Oberfläche eines umströmten Körpers ist die Strömungsgeschwindigkeit Null, d. h., die Flüssigkeit haftet am Körper. Der Übergang zur Geschwindigkeit der ungestörten Strömung erfolgt in einer meist sehr dünnen Flüssigkeitsschicht, der *Grenzschicht*. In ihr hat der Geschwindigkeitsgradient im allgemeinen sehr große Werte, besonders dann, wenn die dynamische Viskosität der Flüssigkeit klein und die Strömung in der Grenzschicht turbulent ist. In der Grenzschicht wird die Viskosität auf jeden Fall, auch wenn sie klein ist, wirksam, weil die Schubspannungen

$$\tau = \eta(\mathrm{d}v/\mathrm{d}y) \tag{20}$$

in diesem Gebiet wegen des großen Geschwindigkeitsgefälles beträchtlich groß werden können. Außerhalb der Grenzschicht hat die Viskosität dagegen keinen Einfluß mehr, weil das Geschwindigkeitsgefälle dort sehr klein ist. Da sich theoretisch der Geschwindigkeitsanstieg von Null auf den Betrag der ungestörten Strömung asymptotisch vollzieht, ist die *Grenzschichtdicke* δ nicht ohne Willkür definierbar. Hier sei auf die Definition gemäß Bild 7 hingewiesen. In einer laminaren Grenzschicht nimmt die Geschwindigkeit linear mit dem Wandabstand y zu, in einer turbulenten Grenzschicht proportional $y^{1/7}$.

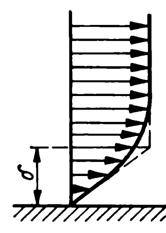


Bild 7. Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe

Die Reibungskräfte in der Grenzschicht sind auch bei Flüssigkeiten mit stark zurücktretendem Reibungseinfluß groß, und zwar von der Größenordnung der Trägheitskräfte. Für eine längs einer ebenen Platte von der Länge l laminar strömende Flüssigkeit ist die dimensionslose Grenzschichtdicke δ/l proportional $1/\sqrt{Re}$.

3.2. Grundgleichungen und Grundgesetze

3.2.1. Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung einer Flüssigkeit ist der mathematische Ausdruck dafür, daß durch die Begrenzungsflächen eines bestimmten Raumelements im Innern der Flüssigkeit zu jeder Zeit nicht mehr Flüssigkeit ein- als ausströmen kann. Unter der Voraussetzung räumlich und

zeitlich konstanter Flüssigkeitsdichte hat sie bei einer *quellen- und senkenfreien Strömung*, bei der Flüssigkeit weder hinzukommt noch verschwindet, die Form*):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{21}$$

v_x, v_y, v_z Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in den drei räumlichen Richtungen x, y, z.

Sie charakterisiert die Raumbeständigkeit der Flüssigkeit und wird auch *Inkompressibilitätsbedingung* genannt. Flüssigkeiten, die dieser Gleichung gehorchen, heißen *inkompressibel* oder nicht zusammendrückbar.
Für Potentialströmungen geht Gl. (21) unter Berücksichtigung von Gl. (18) in die LAPLACE*sche Differentialgleichung* über:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{22}$$

In jedem Querschnitt eines Stromfadens inkompressibler Medien gilt die *Kontinuitätsgleichung* in der Form:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A v = \text{konst.} \tag{23}$$

Gl. (23) drückt die *Konstanz des Volumenstroms* (Durchflußvolumens je Zeiteinheit) aus. Die Geschwindigkeit ist dem Querschnitt des Stromfadens umgekehrt proportional. Für kompressible Medien oder bei auftretenden Dichteänderungen ist die je Zeiteinheit durch einen Strömungsquerschnitt beförderte Masse (*Massestrom*) konstant:

$$A_1 v_1 \varrho_1 = A_2 v_2 \varrho_2 = A v \varrho = \dot{m} = \text{konst.} \tag{24}$$

3.2.2. Bernoullische Gleichung

Von fundamentaler Bedeutung für die Hydrodynamik, insbesondere für eindimensionale Strömungsvorgänge, ist die BERNOULLI*sche Gleichung*, die auch als *Druckgleichung* bezeichnet wird. Sie gilt für reibungslose, drehungsfreie Bewegungen und stellt (längs einer Stromlinie) eine Beziehung zwischen dem *Staudruck* oder *dynamischen Druck* $\varrho v^2/2$, dem *Schweredruck* $h\varrho g$ und dem *äußeren* (*statischen*) *Druck* p dar. Sie lautet für die nichtstationäre Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\varrho v^2/2 + h\varrho g + p + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{konst.} \tag{25}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für stationäre Bewegungen durch Wegfall des letzten Glieds:

$$\varrho v^2/2 + h\varrho g + p = \text{konst.} \tag{26}$$

Da man einen Druck auch als Energie je Volumeneinheit deuten kann, enthält die BERNOULLIsche Gleichung eine Aussage über die Konstanz der Energie, und zwar der kinetischen Energie, der potentiellen Energie und der Druckarbeit. Dividiert man die Druckgleichung (26) durch ϱg, so ergibt sich:

$$v^2/2g + h + p/\varrho g = \text{konst.} \tag{27}$$

Die Glieder dieser Gleichung stellen Höhen dar (Geschwindigkeitshöhe, Lagehöhe oder Ortshöhe und Druckhöhe). Nach der BERNOULLIschen Gleichung ist die Summe dieser drei Höhen konstant.
Dividiert man die Gl. (26) durch ϱ, so erhält man eine Aussage über die Konstanz der Energie je Masseeinheit:

$$v^2/2 + hg + p/\varrho = \text{konst.} \tag{28}$$

Für Potentialströmungen ist die BERNOULLIsche Gleichung für alle Stromlinien des Bewegungsvorgangs konstant. Liegt keine Drehungsfreiheit, also keine Potentialströmung vor, so ändert sich der Wert der

*) s. Abschn. MATHEMATIK, Vektoranalysis

Konstante von Stromlinie zu Stromlinie. Sind P_1 und P_2 zwei Punkte einer Stromlinie, so lautet die Druckgleichung:

$$\varrho v_1^2/2 + h_1 \varrho g + p_1 = \varrho v_2^2/2 + h_2 \varrho g + p_2 \tag{29}$$

bzw.

$$v_1^2/2g + h_1 + p_1/\varrho g = v_2^2/2g + h_2 + p_2/\varrho g \tag{30}$$

Anwendung: Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit. Der Querschnitt einer Gefäßöffnung P_1, die um h unter dem Flüssigkeitsspiegel P_2 liegt, soll im Vergleich zum Querschnitt des Gefäßes sehr klein sein. Beziehen wir den Index 1 in Gl. (30) auf die Gefäßöffnung, den Index 2 auf den Flüssigkeitsspiegel, so ist wegen der gestellten Querschnittsbedingung v_2 so klein, daß sein Quadrat vernachlässigt werden kann. p_1 und p_2 sind die Drücke, unter denen die Flüssigkeitsteilchen an den Stellen P_1 und P_2 stehen. Bei nicht zu großer Höhe des Gefäßes sind p_1 und p_2 gleich groß, und zwar gleich dem atmosphärischen Druck p_0. Berücksichtigen wir noch, daß $h_2 - h_1 = h$ ist, so gilt:

$$v_1^2/2g + h_1 + p_0/\varrho g = 0 + h_2 + p_0/\varrho g; \qquad v_1^2 = 2g(h_2 - h_1); \qquad v_1 = \sqrt{2gh}$$

Die erhaltene Formel für die Ausflußgeschwindigkeit bezeichnet man als TORRICELLI*sche Ausflußformel.* Die Flüssigkeitsteilchen erhalten hiernach die gleiche Geschwindigkeit wie nach Durchfallen der Höhe h. In Wirklichkeit treten Abweichungen von diesem Ergebnis auf, die durch die hier vernachlässigte Reibung und die in der Öffnung auftretende Strahlkontraktion hervorgerufen werden.

Für Strömungsvorgänge ohne freie Oberflächen (z. B. Rohrströmungen) vereinfacht sich die BERNOULLIsche Gleichung:

$$\varrho v^2/2 + p = \text{konst.} \tag{31}$$

Hierbei bedeutet p nicht den Absolutdruck, sondern den Druckunterschied zwischen einem in Ruhe befindlichen und einem bewegten Punkt einer Stromlinie.

Die aus der BERNOULLIschen Gleichung folgenden Kräfte zwischen Gebieten unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeit erklären den 1852 von MAGNUS entdeckten und nach ihm benannten Effekt.
Ein in einem strömenden Medium rotierender Körper (z. B. Zylinder, siehe Bild 8) erfährt eine senkrecht zur Strömungsrichtung wirkende Kraft. Durch Reibung des Mediums an der Oberfläche des Körpers wird dieses an Stellen übereinstimmender Geschwindigkeitsrichtungen mitgerissen und dadurch beschleunigt, an Stellen entgegengesetzter Geschwindigkeitsrichtungen abgebremst und dadurch verzögert. Die sich hieraus ergebende Kraft hat stets die Richtung vom Gebiet kleiner Geschwindigkeit zum Gebiet großer Geschwindigkeit, ihre Richtung ist folglich vom Drehsinn des rotierenden Körpers abhängig.

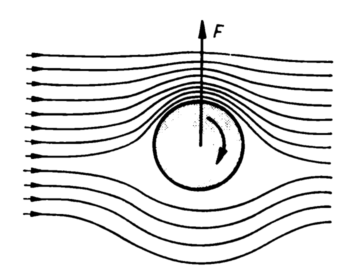




Bild 8. MAGNUS-Effekt

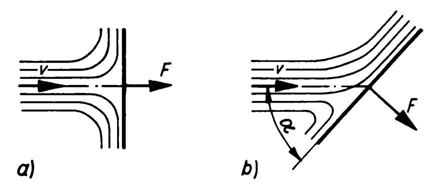


Bild 9. Anströmung einer Platte. a) senkrecht; b) schräg

Die Bahnabweichungen rotierender Geschosse oder geschnittener Tennisbälle gehen auf den MAGNUS-Effekt zurück. Eine technische Anwendung dieses Effekts ist der FLETTNER-Rotor, der durch schornsteinähnliche rotierende Zylinder unter Ausnutzung der bei Wind auftretenden Querkraft z. B. zum Antrieb von Schiffen dient. Ist v die Geschwindigkeit des ungestörten Mediums, ϱ seine Dichte ω die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers (Zylinders), r und l sein Grundkreisradius bzw. seine Länge, so ergibt sich durch Integration der KUTTA-Strömung für die senkrecht zur Strömungsrichtung wirkende Kraft:

$$F = 2\pi \varrho v l \omega r^2 \tag{32}$$



3.2.3. Impulssatz

Der Impuls ist das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines bewegten Körpers. Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der an dem Körper angreifenden Kraft. Der Impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ (Betrag: $p = mv$) ist, wie auch die Kraft, ein Vektor. Für den Impuls gilt ein Erhaltungssatz:
Der Impuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant und kann nur durch von außen erfolgende Einwirkungen geändert werden:

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \text{konst.} \tag{33}$$

Beispiel. Anwendung des Impulssatzes. Eine ruhende ebene Platte wird von einem Flüssigkeitsstrahl senkrecht ($\alpha = 90°$, Bild 9a) oder schräg ($\alpha < 90°$, Bild 9b) getroffen. Das je Zeiteinheit aufprallende Flüssigkeitsvolumen sei $\dot{V}$ (in m³/s), die Strömungsgeschwindigkeit v (in m/s). Für die zeitliche Änderung des Impulses $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = F$, also die Kraft, ergibt sich beim senkrechten Auftreffen des Strahls $F = \dot{V}v\varrho$ und beim schrägen Auftreffen $F = \dot{V}v\varrho \sin \alpha$.

3.2.4. Wirbelsätze

Die folgenden Wirbelsätze gelten für reibungsfreie Flüssigkeiten, falls die äußeren Massenkräfte ein eindeutiges Potential haben und die Dichte nur vom Druck abhängt bzw. konstant ist.

1. Die Zirkulation eines Wirbelfadens (einer Wirbelröhre) hat auf der ganzen Länge des Fadens (der Röhre) und zu allen Zeiten den gleichen Wert. Wirbel können also weder entstehen noch verschwinden.
2. Ein Wirbelfaden kann im Innern der Flüssigkeit nirgends enden. Es bilden sich entweder in der Flüssigkeit Ringwirbel, oder der Wirbelfaden endet an den Flüssigkeitsgrenzen (Wand, Oberfläche).
3. Ein Wirbelfaden besteht stets, auch wenn er sich fortbewegt, aus denselben Flüssigkeitsteilchen.

3.2.5. Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz

Damit die an Modellen im Experiment erhaltenen Ergebnisse auf technische Großausführungen übertragen werden können, müssen bestimmte *Übertragungsregeln*, die aus der Ähnlichkeitstheorie folgen, erfüllt sein. Sollen die Vorgänge am Modell und an der Großausführung einander ähnlich sein, dann muß

1. das Modell der Großausführung *geometrisch ähnlich* sein (*erste Ähnlichkeitsbedingung*).

Hieraus folgt als erste Übertragungsregel, daß alle einander entsprechenden linearen Größen sich um den gleichen konstanten Faktor unterscheiden. Diese Bedingung gilt auch für die Oberflächenbeschaffenheit.

2. Die *zweite Ähnlichkeitsbedingung* fordert *dynamische Ähnlichkeit*, d. h., zwischen allen entsprechenden Kräften sowie allen entsprechenden Zeiten müssen konstante Verhältnisse bestehen.
3. Bei thermodynamischen Problemen kommt zu der geometrischen und dynamischen Ähnlichkeit noch die *thermische Ähnlichkeit* hinzu, d. h., alle entsprechenden Temperaturen müssen in einem konstanten Zahlenverhältnis stehen.

Je nach Art des vorliegenden Naturvorgangs gibt es verschiedene Modellgesetze, die durch bestimmte dimensionslose Ausdrücke charakterisiert sind. Für Strömungsvorgänge, die maßgeblich unter dem Einfluß von Trägheits- und Reibungskräften erfolgen, gilt das REYNOLDS*sche Ähnlichkeitsgesetz*. Nach diesem ist die für diese Strömungsvorgänge charakte-

ristische REYNOLDS-*Zahl* Re das Verhältnis von Trägheitskraft und Reibungskraft:

$$Re = vd/\nu = vd\varrho/\eta \qquad (34)$$

v mittlere Strömungsgeschwindigkeit, d charakteristische Längenabmessung (z. B. bei Rohren der Durchmesser), ϱ Dichte des strömenden Mediums, ν kinematische Viskosität, η dynamische Viskosität

Bei der Strömung in Rohren von kreisförmigem Querschnitt ist von vornherein die Bedingung der geometrischen Ähnlichkeit erfüllt. Haben zwei Rohrströmungen die gleiche REYNOLDS-Zahl, so sind sie auch dynamisch ähnlich. Beide Strömungen sind dann miteinander vergleichbar, und bei der einen Strömung gefundene Ergebnisse finden sich bei der zweiten wieder bzw. lassen sich auf sie übertragen.

Beispiel. Der Widerstand eines Kraftfahrzeugs bei einer Geschwindigkeit von 30 m/s soll bestimmt werden. Für Versuche im Windkanal wird ein geometrisch ähnliches Modell angefertigt. Der Durchmesser der maximalen Querschnittsfläche ist beim Modell $d_M = 1{,}0$ m, beim Kraftfahrzeug $d_K = 1{,}5$ m. Die Strömungsgeschwindigkeit v_M im Windkanal wird folgendermaßen errechnet: Es ist $Re_K = 30\ \text{m/s} \cdot 1{,}5\ \text{m}/\nu$ und $Re_M = v_M \cdot 1{,}0\ \text{m}/\nu$. Mit $Re_K = Re_M$ wird $v_M = 45$ m/s.

3.3. Widerstand in Rohren

3.3.1. Glatte Rohre

3.3.1.1. Widerstandsbeiwert

Bei einer Rohrströmung besteht am Einlauf des Rohrs ein Überdruck, der die Flüssigkeit durch das Rohr treibt. Dieser verringert sich längs des Rohrs bis auf einen konstanten Wert am Rohrende. Der Druckabfall ist linear, wenn man von der Nähe des Einlaufs absieht.

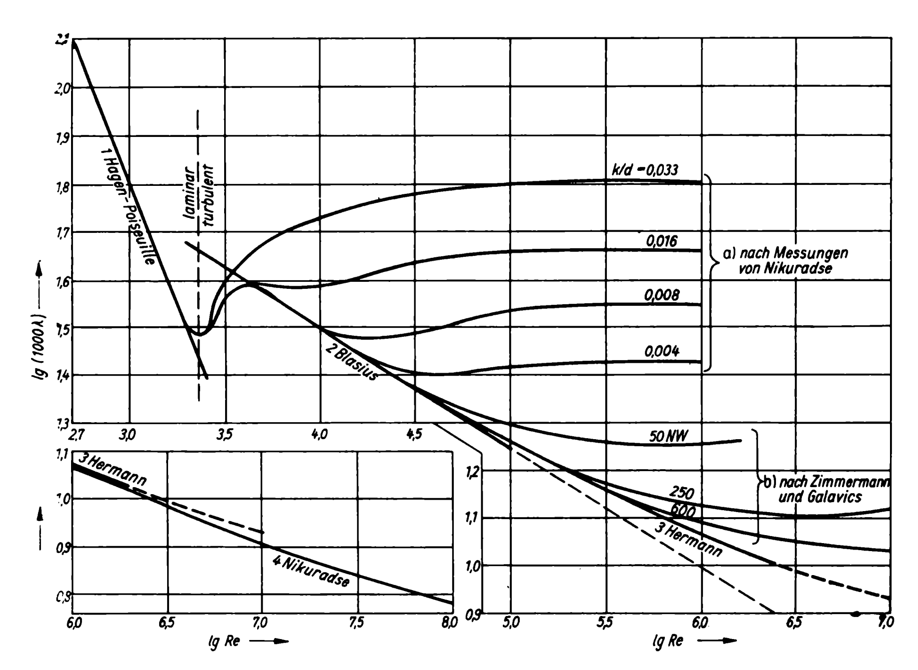


Bild 10. Widerstandsbeiwert λ für Rohrströmungen in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl Re. Darstellung der Widerstandsgesetze für glatte Rohre (*1* bis *4*) und rauhe Rohre; a) nach Gl. (40) und b) nach Gl. (41)



Ist in einem Rohr vom Durchmesser d längs der Meßstrecke l der Druckabfall Δp, so gilt:

$$\Delta p = \lambda l \varrho v^2 / 2d \tag{35}$$

Der dimensionslose Faktor λ ist der Widerstandsbeiwert. Er ist für glatte Rohre ausschließlich eine Funktion der REYNOLDS-Zahl (Kurvenzug 1—2—3—4 in Bild 10), für rauhe Rohre hängt er noch von der Größe der Rauhigkeitselemente (gekennzeichnet durch die relative Rauhigkeit) ab (Kurven a und b in Bild 10).

3.3.1.2. Widerstandsgesetze

In einem geraden Rohr mit glatten Wänden verläuft bis $Re = 2320$ die Strömung laminar. Für das laminare Gebiet gilt das HAGEN-POISEUILLE*sche Gesetz* (Gerade 1 in Bild 10):

$$\lambda = 64/Re \tag{36}$$

Soll durch ein Rohr in laminarer Strömung ein vorgegebener Volumenstrom fließen, so läßt sich aus den Gln. (34), (35) und (36) der erforderliche Druckunterschied zwischen Rohranfang und -ende berechnen:

$$\Delta p = 32 l \varrho v \nu / d^2 \tag{37}$$

Treten bei $Re < 2320$ in einer Rohrströmung Störungen auf, so klingen sie von selbst wieder ab. Treten sie dagegen bei $Re > 2320$ auf, so führen sie zu *Turbulenz*. Man bezeichnet die REYNOLDS-Zahl, bei der der Umschlag von laminarer in turbulente Strömung erfolgt, als *kritische* REYNOLDS-*Zahl*.

Das Widerstandsgesetz für *turbulente Strömung* kann nicht wie bei laminarer Strömung rein theoretisch aufgestellt werden. Man ist vielmehr auf Experimente angewiesen. Es wurden folgende, für verschiedene Meßbereiche gültige Formeln gefunden (Kurvenzug 2—3—4 in Bild 10):

— für $3 \cdot 10^3 < Re < 10^5$ das Potenzgesetz von BLASIUS:

$$\lambda = 0{,}316\, Re^{-0{,}25} \tag{38}$$

— für $2 \cdot 10^4 < Re < 1{,}9 \cdot 10^6$ das Gesetz von HERMANN:

$$\lambda = 0{,}0054 + 0{,}396\, Re^{-0{,}3} \tag{39}$$

— für $10^5 < Re < 3{,}23 \cdot 10^6$ die Formel von NIKURADSE:

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221\, Re^{-0{,}237} \tag{40}$$

3.3.2. Rauhe Rohre

Für den Rauhigkeitsgrad ist nicht die absolute Korngröße k, sondern die *relative Rauhigkeit* k/d maßgebend. Die bei rauhen Rohren zusätzlich auftretende geometrische Ähnlichkeitsbedingung bezieht sich auf die Oberflächenbeschaffenheit und ist für gleiche relative Rauhigkeiten erfüllt. Im Gebiet hoher REYNOLDS-Zahlen hat das quadratische Widerstandsgesetz Gültigkeit, d. h., der Widerstandsbeiwert ist von der REYNOLDS-Zahl unabhängig (vgl. Bild 10, Kurven a). In diesem Gebiet gilt bei körniger Rauhigkeit für den Widerstandsbeiwert nach PRANDTL-NIKURADSE:

$$\lambda = 1/[2 \lg (d/k) + 1{,}138]^2 \tag{41}$$

Die den einzelnen Kurven a) zugrunde gelegten Werte sind bei verschiedenen relativen Rauhigkeiten k/d gemessen wordon [13]. Die Abweichung vom für glatte Rohre gültigen Gesetz erfolgt bei um so kleineren REYNOLDS-Zahlen, je größer die relative Rauhigkeit ist. Auf das Widerstandsgesetz hat nicht nur die relative Größe der Rauhigkeitselomente, sondern auch ihre Form Einfluß. Man unterscheidet zwei verschiedene Rauhigkeitstypen. Zur ersten Gruppe, die man als *Wandrauhigkeit* bezeichnet, gehören z. B. Wände aus Grauguß oder verrostetem Stahl, Waffelblech oder Zement. Die Rauhigkeitserhebungen sind scharfkantig und kurzwellig, d. h. liegen eng beieinander. Bei der zweiten Gruppe spricht man von *Wandwelligkeit*. Beispiele hierfür sind Wände aus Holz oder asphaltiertem Stahlblech. Das Charakteristische dieser

Rauhigkeiten sind langwellige, flache Erhebungen. Für die erste Gruppe ergibt sich ein von Re unabhängiges Widerstandsgesetz [a) in Bild 10], während für die zweite Gruppe die λ, Re-Kurve zu der des glatten Rohrs parallel nach oben verschoben ist.
Für Stahlrohrleitungen ist nach Versuchen [7] die Formel

$$\lambda_{\text{rauh}} = \lambda_{\text{glatt}} + \frac{0,86 \cdot 10^{-3}}{d^{0,28}} \left(\lg \frac{Re}{(10^5\, d)^{1,1}} \right)^{7/4} \tag{42}$$

aufgestellt worden. Hierbei ist λ_{glatt} nach Gl. (38), (39) oder (40) zu bestimmen. In Bild 10 sind für einige Rohrdurchmesser die hiernach berechneten Widerstandskurven b) eingezeichnet.

Beispiel. Durch eine Stahlrohrleitung einer Nennweite von $d = 125$ mm ($\triangleq$ 122,7 cm² Querschnitt) und $l = 160$ m Länge soll bei 20 °C Wasser mit $\dot V = 300$ m³/h gedrückt werden. Wie groß ist der erforderliche Druckunterschied Δp (ν aus Tabelle 1)?

$$v = \frac{300\ \text{m}^3 \cdot 10^4}{3600\ \text{s} \cdot 122,7\ \text{m}^2} = 6,79\ \text{m/s}; \quad Re = \frac{6,79\ \text{m/s} \cdot 0,125\ \text{m}}{1,0 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}} = 848750: \quad \lg Re = 5,9288$$

Aus Bild 10 bzw. Gl. (42) ergibt sich $\lambda = 0,0148$. Dann ist nach Gl. (35) der Druckunterschied

$\Delta p = \lambda l \varrho v^2/2d = 435911,97$ Pa

3.3.3. Rohre verschiedener Querschnittsformen

Rohre mit nicht kreisförmigem Querschnitt

Für Rohre mit nicht kreisförmigem Querschnitt setzt man in die Formeln für die Reynolds-Zahl und den Widerstandsbeiwert als charakteristische Länge den *hydraulischen Durchmesser* D:

$$D = 4A/U \tag{43}$$

A Querschnittsfläche, U benetzter Umfang

Rohre mit quadratischem und rechteckigem Querschnitt

Für Rohre mit quadratischem Querschnitt ergibt sich nach Boussinesq (1868) als Widerstandsgesetz für *laminare Strömung* unter Verwendung des hydraulischen Durchmessers:

$$\lambda\, Re = 56,9 \tag{44}$$

Für Rohre von rechteckigem Querschnitt ist das Widerstandsgesetz für laminare Strömung vom Seitenverhältnis abhängig. In Bild 11 ist $\lambda\, Re$, also die Konstante des Widerstandsgesetzes, als Funktion des Seitenverhältnisses a/b aufgetragen. Nach diesen experimentellen Werten von Lea und Tadros [12] läßt sich nach Möller folgendes Widerstandsgesetz aufstellen:

$$\lambda\, Re = 56,9 + 39,1(1 - a/b)^3 \tag{45}$$

Für Rohre mit quadratischem und rechteckigem Querschnitt wurde als Widerstandsgesetz für *turbulente Strömung* das Blasiussche Gesetz als experimentell gültig nachgewiesen, wenn wieder als charakteristische Längenabmessung der hydraulische Durchmesser gewählt wird.

Rohre mit dreieckigem und trapezförmigem Querschnitt, Nutenrohre

Für Rohre mit dreieckiger Berandung, und zwar mit Querschnitten von gleichseitigen, gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecken, wurden sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Strömung die Widerstandsgesetze für Rohre mit kreisförmigem Querschnitt experimentell bestätigt, wobei wiederum der hydraulische Durchmesser einzusetzen ist. Die kritische Reynolds-Zahl liegt bei etwa 2400.
Für Rohre mit trapezförmiger Begrenzung sowie für Kreisquerschnitte mit ein oder zwei Längsnuten lieferte das Experiment bei Verwendung des hydraulischen Durchmessers ebenfalls das Hagen-Poiseuillesche oder das Blasiussche Widerstandsgesetz.

Rohre mit ringförmigem Querschnitt

In die Formeln für Re und λ geht wieder als charakteristische Längenabmessung der hydraulische Durchmesser D ein. Unter der Querschnittsfläche — Gl. (42) — ist der von Flüssigkeit erfüllte Querschnitt zu verstehen.

Für konzentrische Ringspaltrohre gilt nach WINKEL [19]:

$$\lg (1000\,\lambda) = 2{,}492 - 0{,}25 \lg Re \quad \text{für } 2{,}5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^4 \tag{46}$$

Bei exzentrischer Anordnung verringern sich die λ-Werte, und zwar bei völliger Exzentrizität um etwa 30% [4].

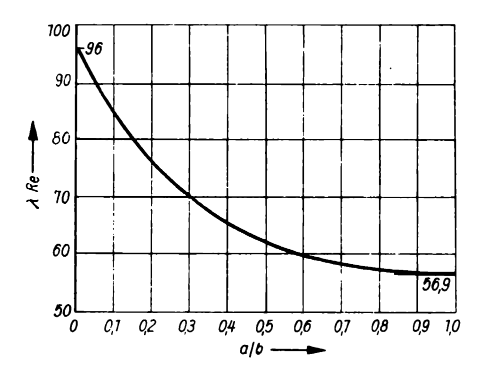


Bild 11. Widerstandsgesetz für laminare Strömung im rechteckigen Rohr mit Seitenverhältnis a/b (nach Versuchen von LEA und TADROS [12])

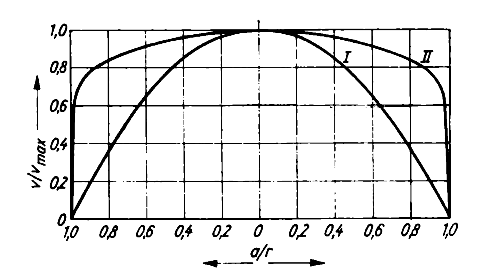


Bild 12. Laminare (*I*, nach PRANDTL und TIETJENS [16]) und turbulente (*II*, nach NIKURADSE [14]) Geschwindigkeitsverteilung in Rohren von kreisförmigem Querschnitt. v örtliche Strömungsgeschwindigkeit; a Abstand von der Rohrachse; r Rohrradius

3.3.4. Geschwindigkeitsverteilung in Rohren

Bei einem trompetenförmig abgerundeten Einlauf kann im gesamten Eintrittsquerschnitt konstante Geschwindigkeit angenommen werden. Reibungseinflüsse verringern von der Rohrwand her die Strömungsgeschwindigkeit der benachbarten Flüssigkeitsschichten, während das Druckgefälle den mittleren Teil der Strömung beschleunigt. In genügender Entfernung vom Einlauf, die man als *Anlauflänge* oder *Anlaufstrecke* bezeichnet, hat sich schließlich das endgültige Geschwindigkeitsprofil ausgebildet. Die von *Re* abhängige Anlauflänge wird als Vielfaches vom Rohrdurchmesser angegeben. Zur grafischen Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung bedient man sich der beiden folgenden Verfahren.

3.3.4.1. Geschwindigkeitsprofil

Wird die Strömungsgeschwindigkeit in Rohren von kreisförmigem Querschnitt über dem Durchmesser oder in Rechteckrohren über Parallelen zu den Seitenwänden aufgetragen, so ergeben sich die in den Bildern 12 und 13 dargestellten Geschwindigkeitsprofile.

1. Laminare und turbulente Strömung im *Kreisrohr* sind in Bild 12 gegenübergestellt. Die *voll ausgebildete laminare Strömung* und mit ihr das endgültige Geschwindigkeitsprofil stellt sich erst bei großen Anlauflängen, die größer als $80d$ sein können, ein. Nach dem HAGEN-POISEUILLEschen Gesetz ergibt sich als Geschwindigkeitsprofil eine Parabel zweiten Grades $v/v_{\max} = 1 - (a/r)^2$, Kurve I. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ ist halb so groß wie die in der Rohrachse vorliegende maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$. Die Geschwindigkeitsverteilung der *ausgebildeten turbulenten Strömung* [14] liegt bereits nach einer Anlaufstrecke von $25d$ vor. Wegen der Durchmischung infolge der Turbulenz weisen wandnahe Flüssigkeitsschichten eine noch verhältnismäßig hohe Geschwindigkeit auf (Kurve II). Näherungsweise läßt sich das experimentell gefundene turbulente Geschwindigkeitsprofil durch eine Parabel zweiten Grades $v/v_{\max} = 0{,}57 + 0{,}43\sqrt{1 - (a/r)^2}$ erfassen, wobei der Parabelscheitel bei $a/r = 1$ (Wand) und $v/v_{\max} = 0{,}57$ liegt. In Wirklichkeit ist jedoch noch die sehr dünne Grenzschicht zu berücksichtigen, was auch aus Kurve II hervorgeht. Eine bessere Näherung für die Geschwindigkeitsverteilung gibt das 1/7-Gesetz von v. KARMAN: $v/v_{\max} = 1 - (a/r)^{1/7}$.

2. Während zur Kennzeichnung des Geschwindigkeitszustands im Kreisrohr nur die Betrachtung des Achsenschnitts erforderlich ist, besteht bei nichtkreisförmigen Rohren eine Abhängigkeit des Geschwindig-

keitsprofils von der Lage des Achsenschnitts bzw. einer sonstigen achsenparallelen Bezugsebene. Man trägt dann beispielsweise im Falle rechteckiger Rohre die Geschwindigkeitsprofile für zu den Rohrseiten parallele Schnittebenen auf. In Bild 13 sind für turbulente Strömung aus zwei solchen zusammengehörenden Reihen die axialen und wandnahen Profile herausgegriffen. Die Unterschiede zwischen den Profilen der beiden Richtungen sind deutlich erkennbar (Bild 14).

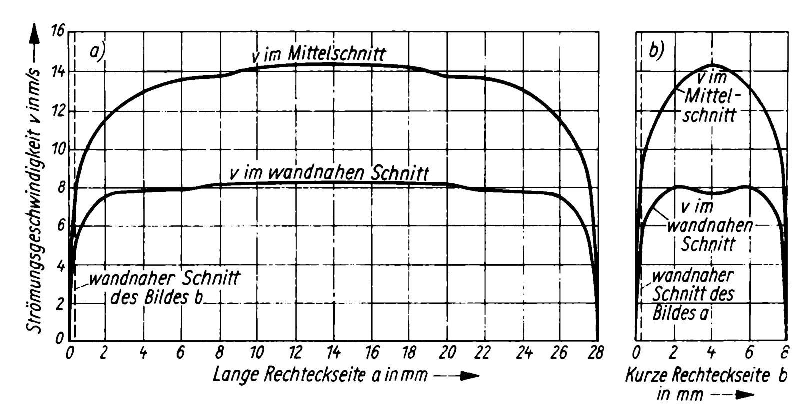


Bild 13. Geschwindigkeitsprofile in seitenparallelen Schnittebenen eines rechteckigen Rohrs ($a/b = 3{,}5/1$) für turbulente Strömung (nach SCHILLER [17])

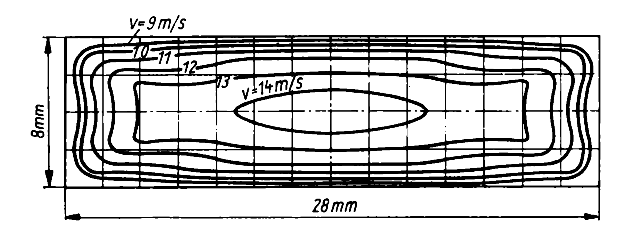


Bild 14. Isotachen zu Bild 13 (nach SCHILLER [17])

3.3.4.2. Isotachen

Für Ebenen senkrecht zur Strömungsrichtung werden die Linien gleicher Strömungsgeschwindigkeit gezeichnet. Diese Isotachen lassen sich unmittelbar aus den Geschwindigkeitsprofilen ableiten (z. B. Kreis-, Rechteckquerschnitt), oder sie werden, vor allem in komplizierteren Fällen, unmittelbar entworfen (Bilder 15 und 16).

3.3.5. Krümmer und Verzweigungen

Die in Krümmern auftretenden Druckverluste werden auf den Staudruck der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ bezogen:

$$\Delta p = \zeta \varrho \bar{v}^2/2 \qquad (47)$$

Die dimensionslose Größe ζ bezeichnet man als *Widerstandsbeiwert* des Krümmers. Die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts ζ von der REYNOLDS-Zahl ist für glattwandige Krümmer nur sehr gering (Bild 17a); für rauhwandige Krümmer ist der Widerstandsbeiwert praktisch konstant (Bild 17b). Für scharfkantige Kniestücke mit dem Ablenkungswinkel δ gelten die in Bild 18 angegebenen Werte, die von der REYNOLDS-Zahl unabhängig sind.

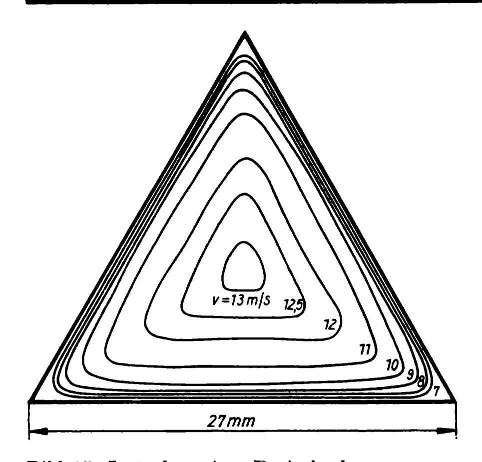


Bild 15. Isotachen eines Dreieckrohrs (nach SCHILLER [17])

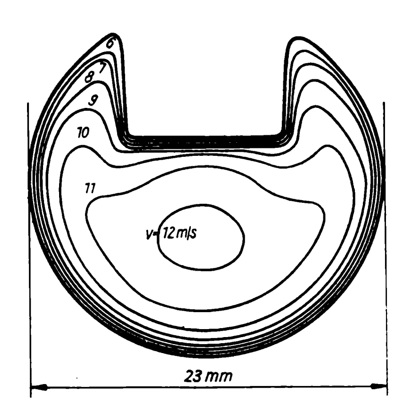


Bild 16. Isotachen eines Nutenrohrs (nach SCHILLER [17])

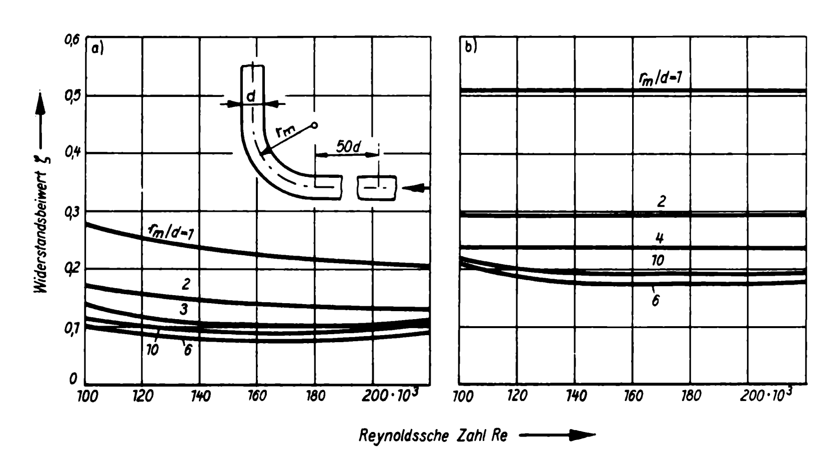


Bild 17. Widerstandsbeiwerte für 90°-Krümmer ($\delta = 90°$) mit Kreisquerschnitt in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl (nach SCHILLER [17]). a) glattwandig; b) rauhwandig

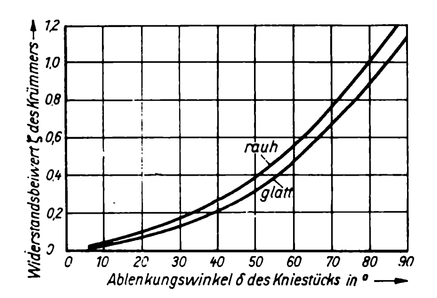


Bild 18. Widerstandsbeiwerte ζ glattwandiger und rauhwandiger Kniestücke mit Kreisquerschnitt in Abhängigkeit vom Ablenkungswinkel δ

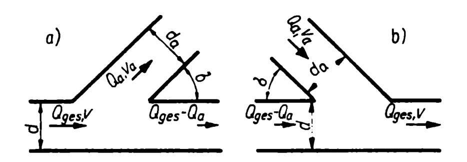


Bild 19. Rohrabzweigungen. a) Trennung von Rohren; b) Vereinigung von Rohren

Verzweigt sich ein Flüssigkeitsstrom oder werden zwei Teilströme vereinigt (Bild 19), so erleidet jeder Teilstrom einen Druckverlust, den man auf den Staudruck der vereinigten Ströme bezieht:

Verlust in der Abzweigung: $\Delta p_a = \zeta_a \varrho v^2/2$ (48a)

Verlust im Geradeausstrom nach der Abzweigung: $\Delta p_g = \zeta_g \varrho v^2/2$ (48b)

Die Verluste sind vom Verhältnis der abgezweigten Menge Q_a zur Gesamtmenge Q_{ges} abhängig, wie aus Bild 20 ersichtlich ist (nach Werten von THOMA in [11]), und verringern sich, wenn an Stelle scharfkantiger Abzweigungen abgerundete verwendet werden. Optimalwerte für Abzweigdurchmesser, Abzweigwinkel und Abzweigmengen sind in Tabelle 8 nach [11] enthalten.

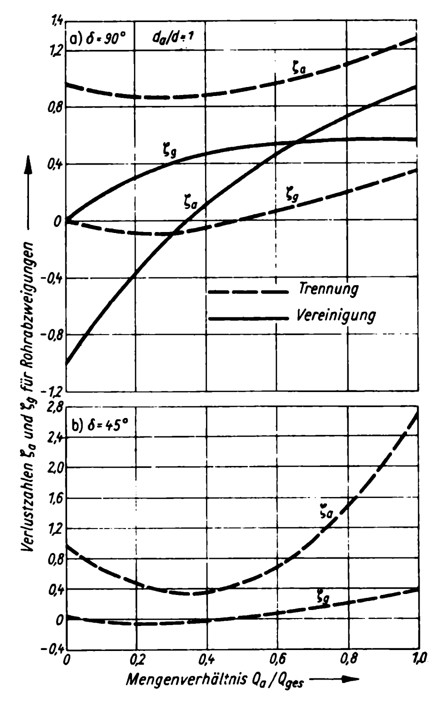


Bild 20. Verlustzahlen (ζ_a für den abgezweigten Strom und ζ_g für den Gesamtstrom) bei Trennung und Vereinigung von Strömungen in Rohren in Abhängigkeit von der abgezweigten Menge (nach THOMA in [11]). a) Trennung und Vereinigung für $\delta = 90°$ und $d_a/d = 1$; b) Trennung für $\delta = 45°$ und $d_a/d = 0{,}58$

Tabelle 8. Trennung von Strömungen in Rohren. Günstigste Abzweigdurchmesser $d_{a(opt)}$ für verschiedene Abzweigwinkel und Abzweigmengen Q_a/Q_{ges} bei Abrundung der Kanten mit $r = 0{,}1 d_a$

Q_a/Q_{ges}	0,3			0,5			0,7		
Winkel	90°	60°	45°	90°	60°	45°	90°	60°	45°
$d_{a(opt)}/d$	1	0,61	0,58	1	0,79	0,75	1	1	1
v_a/v	0,3	0,8	0,9	0,5	0,8	0,9	0,7	0,7	0,7
ζ_a	0,72	0,59	0,35	0,75	0,54	0,32	0,88	0,52	0,30

3.3.6. Querschnittsänderungen

3.3.6.1. Stetige Querschnittserweiterung

Die allmähliche Erweiterung des Strömungsquerschnitts, wie sie Bild 21 zeigt, nennt man *Diffusor*. Die vom engen zum weiten Querschnitt erfolgende Strömung erfährt hierbei eine Geschwindigkeitsverminderung und einen Druckanstieg. Aus der BERNOULLIschen Gleichung und der Kontinuitätsgleichung läßt sich der Druckanstieg für eine verlustfreie Strömung berechnen. Werden Querschnitt, Druck und Geschwindigkeit an der engsten Stelle des Diffusors durch den Index 1, an der weitesten Stelle durch den Index 2 gekennzeichnet, so ist:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \varrho v_1^2[1 - (A_1/A_2)^2]/2 \tag{49}$$

Durch Stoß und Reibung treten jedoch Verluste auf, so daß am Ende des Diffusors nicht der sich aus Gl. (49) ergebende Druck p_2 zurückgewonnen werden kann. Die Verminderung von Δp wird durch den Diffusorwirkungsgrad η_D ausgedrückt, so daß Gl. (49) übergeht in:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \eta_D \varrho v_1^2[1 - (A_1/A_2)^2]/2 \tag{50}$$

Bei allmählichen Erweiterungen liegt η_D zwischen 0,75 und 0,90, wobei der Erweiterungswinkel δ eine Funktion der REYNOLDS-Zahl ist. Für $Re = 10^5$ ist $\varrho = 8°$, für große Re darf er nur 5° betragen.
Bei zu großen Erweiterungswinkeln löst sich die Strömung unter Wirbelbildung von der Wand ab. Die Flüssigkeit strömt als freier Strahl zwischen wirbeligem Totwasser. Infolge der hierbei auftretenden großen Verluste ergibt sich nur ein sehr niedriger Diffusorwirkungsgrad. Günstigere Strömungsverhältnisse werden durch *Absaugen der Grenzschicht* erzielt.

3.3.6.2. Unstetige Querschnittserweiterung

Für den Druckverlust gilt ebenfalls Gl. (50) mit einem Wirkungsgrad η von 0,10···0,25. Für den Druckumsatz bei der unstetigen Erweiterung ergibt sich der Wirkungsgrad η aus dem Impulssatz:

$$\eta = 2(A_1/A_2)/[(A_1/A_2) + 1] \tag{51}$$

A_1 und A_2 Querschnitt im engen bzw. weiten Rohrteil

Die Strömungsverhältnisse sind in Bild 22 wiedergegeben, der Wirkungsgrad für verschiedene Querschnittsverhältnisse in Tabelle 9.

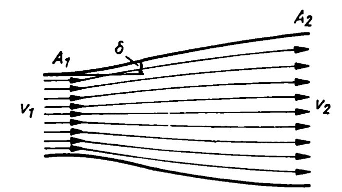


Bild 21. Strömungsverlauf bei stetiger Querschnittserweiterung

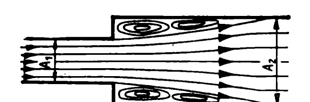


Bild 22. Strömungsverlauf bei plötzlicher Querschnittserweiterung

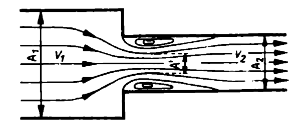


Bild 23. Strömungsverlauf bei plötzlicher Querschnittsverengung

Tabelle 9. Wirkungsgrad η der Geschwindigkeits-Druck-Umsetzung für verschiedene Querschnittsverhältnisse A_1/A_2 (bzw. Durchmesserverhältnisse d_1/d_2) für Kreisrohre

A_1/A_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
d_1/d_2	0,316	0,447	0,548	0,632	0,707	0,775	0,837	0,894	0,949	1.000
η	0,18	0,33	0,46	0,57	0,67	0,75	0,82	0,89	0,95	1,00

3.3.6.3. Unstetige Querschnittsverengung

Bei plötzlichem Übergang von weitem (A_1) auf engen Querschnitt (A_2) schnürt sich die Strömung ein (Bild 23). Bei bekannter Kontraktionszahl $\alpha = A'/A_2 = v_2/v'$ ist der Stoßverlust unter Berücksichtigung von Gl. (49):

$$\Delta p = \varrho(v' - v_2)^2/2 = \varrho v_2^2[(1/\alpha) - 1]^2/2 = \varrho v_2^2\zeta/2 \tag{52}$$

und der Wirkungsgrad:

$$\eta = 2/[1 + (A_2/A')] \tag{53}$$

v_1, v_2 und v' Strömungsgeschwindigkeit im weiten (A_1) und engen (A_2) Querschnitt bzw. im Kontraktionsquerschnitt A', $\zeta = [(1/\alpha) - 1]^2$.

Die Beziehungen zwischen ζ und α sind aus Tabelle 10 zu ersehen.

Tabelle 10. Beiwert ζ des Stoßverlusts und Kontraktionszahl α in Abhängigkeit von der Übergangsform

Übergangsform	Kante		Abrundungsradius	
	scharf	gebrochen	klein	groß
Beiwert ζ	0,41 ··· 0,31	0,22 ··· 0,06	0,012	0,0001
Kontraktionszahl α	0,61 ··· 0,64	0,68 ··· 0,80	0,90	0,99

3.3.7. Geschwindigkeit im freien Strahl

Beim Austritt aus einer Düse (z. B. aus einem Windkanal) vermischt sich ein Luftstrahl mit der umgebenden Luft. Die transportierte Luftmenge nimmt mit dem Abstand von der Düse zu, die Strömungsgeschwindigkeit wird geringer. Ist d der Durchmesser der Düse, v_0 die Kerngeschwindigkeit, so ist in einer Entfernung x von der Düse die Geschwindigkeit:

$$v_x = 8{,}4v_0/[(x/d) + 2] \tag{54}$$

3.3.8. Durchflußmessung

Zur Bestimmung des Volumenstroms $\dot{V}$ einer durch eine Rohrleitung strömenden inkompressiblen Flüssigkeit mißt man den Druckabfall, der an eingebauten Drosseln auftritt. Als solche dienen Scheiben mit einer zentralen Bohrung (*Blenden*), *Düsen* mit einer allmählichen Verengung des Rohrquerschnitts oder *Venturirohre*, die aus einer Düse mit nachfolgendem Diffusor bestehen. Ist A_0 der engste Querschnitt des Drosselgeräts, Δp die Druckdifferenz zwischen unverengtem und verengtem Rohrquerschnitt, ϱ die Dichte der Flüssigkeit und α die von der Art der Drosseln abhängige Durchflußzahl, so ist:

$$\dot{V} = \alpha A_0 \sqrt{2\Delta p/\varrho} \tag{55}$$

3.3.9. Pulsierende Strömungen

Alle an pulsierenden Rohrströmungen mit Hilfe gedämpfter Manometer durchgeführten Druckabfallmessungen unterliegen einem Fehler, weil der vom Manometer angezeigte mittlere Wert der Mittelwert des Wirkdrucks ist, dessen Wurzel aber nicht der erforderliche Mittelwert der Wurzeln aus dem Wirkdruck ist. Die Durchflußmengen pulsierender Strömungen werden deshalb zu hoch gemessen. Überlagert sich

einem konstanten Flüssigkeitsstrom Q_0 ein sinusförmig schwankender Strom von der Amplitude Q, so kann der relative Mengenfehler ε nach HAGEN [9] durch die Gleichung:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + Q^2/2(Q_0 + Q)^2} - 1 \tag{56}$$

oder nach einer Umformung durch die Beziehung:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + [1/2(s + 1)^2]} - 1 \text{ mit } Q_0/Q = s \tag{57}$$

berechnet werden. Bild 24 zeigt die Abhängigkeit des relativen Mengenfehlers vom Kehrwert Q_0/Q der relativen Schwankung.
Messungen des Durchflusses pulsierender Strömungen mit Düsen im Bereich von $s = 6$ bis $s = 20$ ergeben kleinere Durchflußzahlen als bei stationärer Strömung [6]. Die maximale Abweichung wird bei 2/3 Hz beobachtet und beträgt etwa 1%.

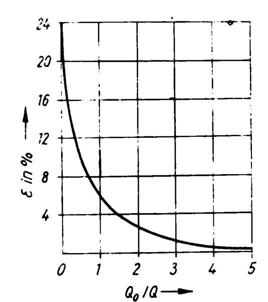


Bild 24. Mittelwertfehler bei der Messung pulsierender Strömungen nach HAGEN [9]

Bild 25. Relative Widerstandserhöhung bei pulsierender Strömung

Der Widerstandsbeiwert von Rohren mit kreisförmigem Querschnitt erhöht sich bei $s = 14$ für $N Re = 3900$ ($N = fd/\bar{v}$, f Frequenz, d Rohrdurchmesser, $\bar{v}$ mittlere Strömungsgeschwindigkeit) maximal um 6% und bei $s = 4$ ebenfalls für $N Re = 3900$ maximal um etwa 20% [6] (Bild 25). Rauhe Rohre mit rein quadratischem Widerstandsgesetz zeigen dagegen nach Messungen für $s = 6$ im Frequenzbereich bis 3 Hz keine Widerstandserhöhung [6].

3.4. Widerstand von Körpern

3.4.1. Widerstandsarten

3.4.1.1. Reibungs- oder Flächenwiderstand

Eine einen Körper umströmende Flüssigkeit wird an dessen Oberfläche durch Adhäsionskräfte festgehalten und befindet sich dort in Ruhe. Der Geschwindigkeitsanstieg erfolgt in einer dünnen Reibungsschicht, der Grenzschicht. Die Ursache des Widerstands sind bei anliegender Strömung die in der Grenzschicht wirkenden Schubspannungen. Man spricht dann von einem Flächenwiderstand oder Reibungswiderstand, der z. B. bei einer parallel zur Strömung liegenden Platte auftritt (Bild 26). Der Reibungswiderstand F_w ist zwar strenggenommen weder dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit v noch der gesamten Oberfläche A_0 proportional, kann aber durch den quadratischen Ansatz:

$$F_w = c_f A_0 \varrho v^2/2 \tag{58}$$

ausgedrückt werden. Der Widerstandsbeiwert c_f ist eine Funktion der REYNOLDS-Zahl, wobei als charakteristische Längenabmessung in die REYNOLDS-Zahl die in Strömungsrichtung gemessene Plattentiefe t eingeht ($Re = vt/\nu$).

Der Widerstandsbeiwert wird nach folgenden Gleichungen berechnet (Bild 27):

für *laminare* Grenzschicht ($Re \leqq 10^5$, Kurve *I*):

$$c_f = 1{,}327/Re^{0,5} \tag{59a}$$

für *turbulente* Grenzschicht ($Re > 10^5$, Kurve *II*):

$$c_f = 0{,}074/Re^{0,2} \tag{59b}$$

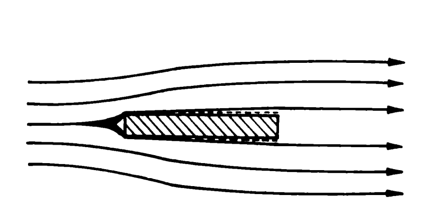


Bild 26. Zum Flächenwiderstand einer längs angeströmten Platte durch die Schubspannungen in der Grenzschicht

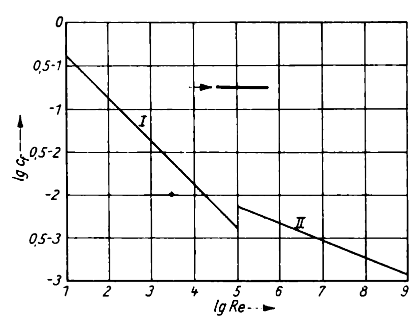


Bild 27. Widerstandsbeiwert c_f einer längs angeströmten Platte in Abhängigkeit von der REYNOLNS-Zahl *Re*. *I* laminare Grenzschicht; *II* turbulente Grenzschicht

Bei zugespitzter Vorderkante der Platte ist im vorderen Teil der Platte die Grenzschicht laminar, im hinteren Teil turbulent. Dann gilt für $Re = 3 \cdot 10^5 \cdots 5 \cdot 10^6$:

$$c_f = 0{,}074/Re^{0,2} - 1700/Re \tag{60}$$

Für den Umschlag der laminaren in turbulente Grenzschicht gilt:

$$vx/\nu \approx 5 \cdot 10^5 \tag{61}$$

Diese kritische REYNOLDS-Zahl, bei der die charakteristische Längenabmessung der Abstand x von der Vorderkante der Platte ist, ist abhängig von der Form der Vorderkante und der Turbulenz der Strömung.

Längs angeströmte rauhe Platten haben bereits konstante c_f-Werte bei um so kleineren REYNOLDS-Zahlen, je größer die Rauhigkeit ist. In Tabelle 11 ist für die reziproke relative Rauhigkeit l/k (l Plattenlänge, k Korngröße) der zugehörige c_f-Wert unter Angabe der REYNOLDS-Zahl $Re = vl/\nu$, bei der seine Konstanz erreicht wird, zusammengestellt [15].

Tabelle 11. Reziproke relative Rauhigkeit, Widerstandsbeiwert und REYNOLDS-Zahl längs angeströmter rauher Platten

l/k	c_f	Re	l/k	c_f	Re
$1 \cdot 10^6$	0,00214	$1{,}6 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^4$	0,00490	$2{,}5 \cdot 10^7$
$5 \cdot 10^5$	0,00235	$1{,}0 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^3$	0,00570	$1{,}6 \cdot 10^7$
$2 \cdot 10^5$	0,00282	$4{,}0 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^3$	0,00692	$4{,}0 \cdot 10^6$
$1 \cdot 10^5$	0,00317	$2{,}5 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^3$	0,00852	$3{,}2 \cdot 10^6$
$5 \cdot 10^4$	0,00355	$1{,}0 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^2$	0,01024	$6{,}3 \cdot 10^5$
$2 \cdot 10^4$	0,00425	$6{,}3 \cdot 10^7$			

3.4.1.2. Druck- oder Formwiderstand

Löst sich die Strömung von der Oberfläche eines Körpers ab, so tritt hinter ihm Unterdruck mit einem Totwassergebiet (Bild 28) auf, durch das ein großer zusätzlicher Widerstand entsteht. Dieser wird als *Druck-*, *Form-* oder *Profilwiderstand* bezeichnet.

Bei der in Bild 28 dargestellten Umströmung einer senkrecht zur Strömungsrichtung stehenden Platte ist sowohl Flächenwiderstand als auch Formwiderstand vorhanden, wobei der Formwiderstand stark überwiegt. Dieses Bild entspricht Strömungsaufnahmen von WALTER [18] bei $Re = vd/\nu \approx 100$.
Für den Formwiderstand umströmter Körper gilt nach dem NEWTONschen quadratischen Ansatz:

$$F_W = cA\varrho v^2/2 \qquad (62)$$

A größte Querschnittsfläche des Körpers

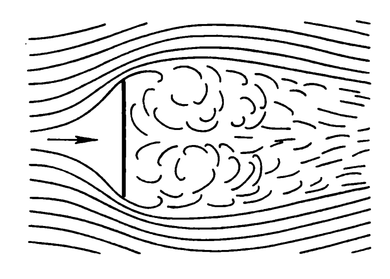


Bild 28. Turbulente Strömung um eine senkrecht angeströmte Platte

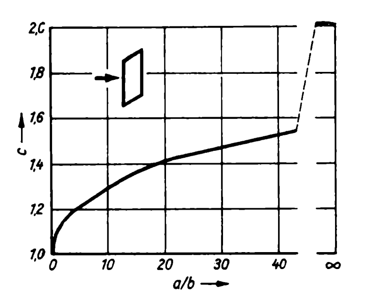


Bild 29. Widerstandsbeiwert c senkrecht angeströmter rechteckiger Platten in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis a/b

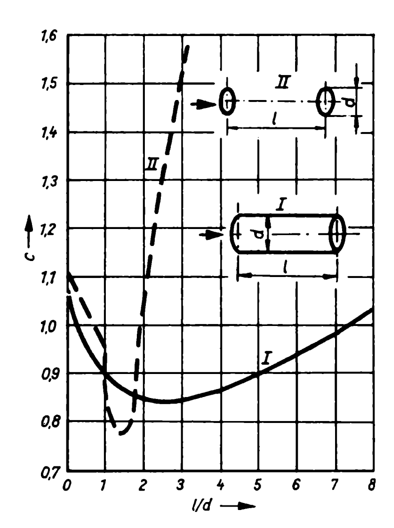


Bild 30. Widerstandsbeiwert c eines in Achsenrichtung angeströmten Kreiszylinders (I) und zweier Scheiben (II) in Abhängigkeit vom Verhältnis l/d

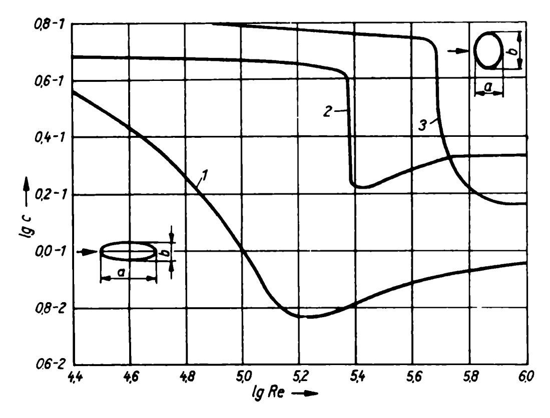


Bild 31. Widerstandsbeiwert c umströmter Körper in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl Re. *1* Ellipsoid $a/b = 1/0{,}55$; *2* Kugel; *3* Ellipsoid $a/b = 1/1{,}3$ (Anströmung in Richtung a)

Der Widerstandsbeiwert c ist von der REYNOLDS-Zahl *unabhängig*, wenn infolge besonderer Körperform, z. B. scharfer Kanten bei Platten, die Ablösungsstelle der Strömung festliegt. Dagegen ist c abhängig von der Form der Platte (Bild 29). Bei ebenfalls senkrechter Anströmung gelten folgende Werte:

kreisförmige Platte	$c = 1{,}11$
Kreisring (Durchmesser-Verhältnis 1:2)	$c = 1{,}22$

Für einen in Achsenrichtung angeströmten Zylinder und für zwei Kreisscheiben (Zylinder ohne Mantelfläche) sind die c-Werte aus Bild 30 zu ersehen. Weitere c-Werte für symmetrische Anströmung aus Tabelle 12.

Tabelle 12. Widerstandsbeiwerte bei symmetrischer Anströmung

Körper		c
Volle Halbkugel,	gewölbte Seite angeströmt	0,40
	ebene Seite angeströmt	1,17
Hohle Halbkugel,	gewölbte Seite angeströmt	0,34
	hohle Seite angeströmt	1,33
Vollkegel, Spitze angeströmt,	Spitzenwinkel 30°	0,34
	Spitzenwinkel 60°	0,51

Abgerundete Körper — z. B. Kugel und Ellipsoid (Bild 31), Zylinder (Bild 32), Streben (Bild 33) —, bei denen sich die Ablösungsstelle verschiebt, haben einen von der REYNOLDS-Zahl abhängigen Widerstandsbeiwert. Dieser wird durch die Art der Grenzschicht entscheidend bestimmt. Ist sie turbulent, so ist infolge der anliegenden Strömung der Widerstandsbeiwert kleiner als bei laminarer Grenzschicht. Ein instruktives Beispiel hierfür ist die Kugel, bei der im überkritischen Gebiet der Widerstandsbeiwert auf den dritten Teil absinkt (Bild 31).
Aus diesem Grunde können rauhe Oberflächen widerstandsvermindernd wirken. Außerdem läßt sich die Wirbelbildung durch Absaugen der in der Grenzschicht verzögerten Strömung (dort, wo sich gerade eine Rückströmung ausbilden will) oder durch Anbringen eines „Stolperdrahts", durch den der Grenzschicht Energie zugeführt wird, vermeiden.

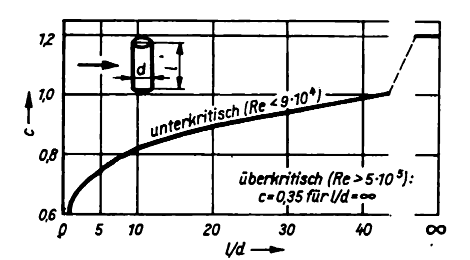


Bild 32. Widerstandsbeiwert c senkrecht zur Achsenrichtung angeströmter Kreiszylinder in Abhängigkeit vom Verhältnis l/d für den unterkritischen Bereich

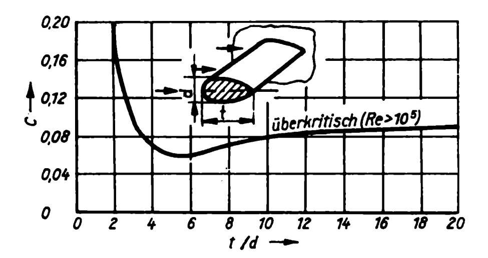


Bild 33. Widerstandsbeiwert c von Streben in Abhängigkeit vom Verhältnis t/d für den überkritischen Bereich

3.4.2. Widerstand von Kraftfahrzeugen

Bei Geschwindigkeiten über 15 m/s nimmt der Luftwiderstand erheblich zu. Hohe Geschwindigkeiten lassen sich unter Berücksichtigung ökonomischer Aspekte nur durch geeignete Formgebung der Karosserie erreichen. Der zur Überwindung des Luftwiderstands erforderliche Leistungsaufwand P wächst mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit:

$$P = c_w \varrho A_w v^3/2 \tag{63}$$

Hierbei ist A_w die Spantfläche des Wagens, die Fläche, die sich bei Projektion des Wagens in Fahrtrichtung als Schattenprofil ergibt. Für den Luftwiderstand gilt:

$$F_w = c_w \varrho A_w v^2/2 = P/v \tag{64}$$

Die Widerstandswerte c_w für Kraftwagen liegen etwa zwischen 1,0 und 0,2, wobei der Wert 1,0 für offene Wagen in alter Form und 0,2 für vollendete Stromlinienform gilt. Geschlossene Wagen mit leicht gerundeter Form, aber ohne Heckzuspitzung, haben einen Widerstandsbeiwert von etwa 0,5; die Heckzuspitzung bewirkt je nach der sonstigen Form ein Absinken unter 0,4, in günstigen Fällen bis etwa 0,23.
Eine Scheibe in der Form der Spantfläche eines Kraftfahrzeugs hat in Bodennähe $c_w \approx 1,3$, was in Übereinstimmung mit Bild 29 steht (der Bodeneinfluß wirkt widerstandserhöhend).

Beispiel. Wie groß ist die zur Überwindung des Luftwiderstands eines offenen Kraftfahrzeugs erforderliche Motorleistung P bei der Geschwindigkeit $v = 100$ km/h, wenn die Spantfläche $A = 2$ m² ist, die Dichte der Luft $\varrho = 1{,}20$ kg/m³ beträgt und der Widerstandsbeiwert mit $c_w = 0{,}9$ angenommen wird?

$P = 0{,}9 \cdot 1{,}20 \text{ kg/m}^3 \cdot 2 \text{ m}^2 \cdot (27{,}8 \text{ m/s})^3/2 \approx 23\,203 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 23{,}2 \text{ kW}$

Bei einem Kfz mit idealer Stromlinienform ($c_w = 0{,}2$) wäre dagegen die bei gleicher Geschwindigkeit für die Überwindung des Luftwiderstands erforderliche Motorleistung nur noch 5,2 kW.
Für *Krafträder* (ohne Fahrer) kann man mit einem Widerstandsbeiwert $c_w = 0{,}7$ rechnen. Dieser erhöht sich durch einen aufrecht (bzw. gebeugt) sitzenden Fahrer auf $c_w = 1{,}9$ (bzw. 1,7) und durch einen aufrecht sitzenden Fahrer bei Verkleidung von Fahrer und Maschine auf $c_w = 1{,}5$.

3.4.3. Winddruck auf Bauwerke

Zuverlässige Angaben des Winddrucks auf Gebäude sind nur durch Modellversuche im Windkanal möglich. Der Druck auf Gebäude oder einzelne Bauteile wird nicht nur durch das Bauwerk selbst, sondern auch durch seine Umgebung bestimmt. Die auftretenden Kräfte entstehen entweder durch Druck oder Sog oder durch Zusammenwirken beider. Die Ursache für das Abdecken von Dächern ist der Sog, der dadurch entsteht, daß bei Wind der Luftdruck im Innern von Gebäuden größer ist als über den Dächern (vgl. BERNOULLIsche Gleichung).
Für ebene Wände nimmt der Winddruck w mit dem Quadrat der Windgeschwindigkeit v zu:

$$w = cv^2 \tag{65}$$

Der Proportionalitätsfaktor c kann überschlagsweise mit 1,0 kg/m³ angenommen werden (w ergibt sich in Pa, wenn v in m/s gemessen wird).

3.4.4. Stokessches Gesetz

3.4.4.1. Bestimmung der Viskosität

Ein Körper (Dichte ϱ_K, Gewichtskraft $Vg\varrho_K$) erfährt in einem Medium (Dichte ϱ_M) den statischen Auftrieb $Vg\varrho_M$. Unter dem Einfluß der Kraft $Vg(\varrho_K - \varrho_M)$ beginnt er, eine Fallbewegung auszuführen, der das Medium den Widerstand F_w entgegensetzt. Auf den fallenden Körper wirkt nunmehr die Kraft:

$$F = Vg(\varrho_K - \varrho_M) - F_w \tag{66}$$

Für Kugeln gilt bei laminarer Strömung das STOKESsche Widerstandsgesetz:

$$F_w = 6\pi\eta r v \tag{67}$$

nach dem der Widerstand linear mit der Geschwindigkeit zunimmt. Die den Körper beschleunigende Kraft F wird mit zunehmender Geschwindigkeit immer kleiner und schließlich Null. Von nun an bewegt sich die Kugel kräftefrei und fällt nach dem Trägheitsgesetz mit der konstanten Endgeschwindigkeit v_0:

$$v_0 = 2r^2 g(\varrho_K - \varrho_M)/9\eta \tag{68}$$

Im *Fallrohrviskosimeter* wird v_0 in einem hinreichend weiten, senkrecht stehenden und mit dem zu untersuchenden Medium gefüllten Rohr gemessen. Daraus wird mit Hilfe der Gl. (68) die *dynamische Viskosität* berechnet.

3.4.4.2. Windsichtverfahren

Werden fallende Teilchen von etwa gleicher Größe, z. B. Staub oder Ruß, mit einer ihrer Sinkgeschwindigkeit entsprechenden konstanten Geschwindigkeit von unten angeblasen, so werden sie in der Schwebe gehalten. Diese Schwebegeschwindigkeit spielt bei der Entstaubung, Sichtung, pneumatischen Förderung usw. eine große Rolle.

Windsichtungen dienen zur Trennung eines körnigen oder pulverförmigen Materials nach unterschiedlichen Korngrößen. Das Verfahren findet besonders dann Anwendung, wenn Siebungen nicht mehr möglich sind.
Zur Ermittlung der Zusammensetzung eines Staubgemisches verwendet man nach GONELL [8] ein senkrecht stehendes, röhrenartiges Gefäß, auf dessen Boden die Staubprobe eingebracht wird. Ein von oben auf den Gefäßboden gerichteter Luftstrahl wirbelt den Staub auf und trägt je nach der Schwebegeschwindigkeit der einzelnen Teilchen diese in verschiedene Höhen. Die Geschwindigkeit des Luftstrahls wird so eingestellt, daß die leichtesten Teilchen eben gerade aus dem oberen Teil des Rohrs in ein Auffanggefäß eindringen können. Durch Erhöhung der Strahlgeschwindigkeit können weitere Teilchen von größerer Abmessung aussortiert werden.
Ein anderes Gerät zur Trennung körnigen Materials ist der *Zentrifugalsichter*, bei dem die Windsichtung mit Zentrifugalkräften kombiniert wird.
Von ECK [24] wurden neue Verfahren, der *Laminarsaugwindkanal*, der *Steigsichter* und der *ballistische Sichter*, entwickelt, bei denen die verschiedenen Schwebegeschwindigkeiten und kinetischen Energien verschieden großer Teilchen in Luftströmungen oder bei Wurfvorgängen zur Trennung ausgenützt werden.

3.5. Tragflügel

3.5.1. Widerstand und Auftrieb

Wird ein symmetrischer Körper in Richtung seiner Symmetrieachse umströmt, so wirkt in Strömungsrichtung auf ihn eine Kraft, die man als seinen *Widerstand* bezeichnet. Fällt die Symmetrieachse nicht mit der Strömungsrichtung zusammen, oder handelt es sich um einen unsymmetrischen Körper, so wirkt eine Kraft, die mit der Strömungsrichtung einen Winkel bildet. Ist Luft das strömende Medium, so spricht man von der *Luftkraft* F_R, ihre in Strömungsrichtung liegende Komponente ist der *Widerstand* F_W und die hierzu senkrechte Komponente der *dynamische Auftrieb* F_A des umströmten Körpers. Im Bild 34 sind diese drei an einer ebenen Platte bei dem Anstellwinkel α auftretenden Kräfte dargestellt.
Körper, die infolge ihrer besonderen Form bei kleinem Widerstand einen großen Auftrieb haben, nennt man *Tragflügel*. Das Verhältnis von Widerstand und Auftrieb heißt *Gleitzahl:*

$$F_W/F_A = \tan \varepsilon \tag{69}$$

Die Gleitzahl gibt das Verhältnis von Höhenverlust zu zurückgelegter Strecke im Gleitflug an. Durch sie ist der *Gleitwinkel* ε bestimmt, unter dem der *Gleitflug* möglich ist.
Der Anstellwinkel wird von der Strömungsrichtung und einer Bezugslinie des Körpers gebildet. Bei Tragflügeln mit konvexer Oberseite und konkaver oder ebener Unterseite wird als Bezugslinie die *Flügelsehne* gewählt, ihre Länge bezeichnet man als *Flügeltiefe* t (Bild 35).

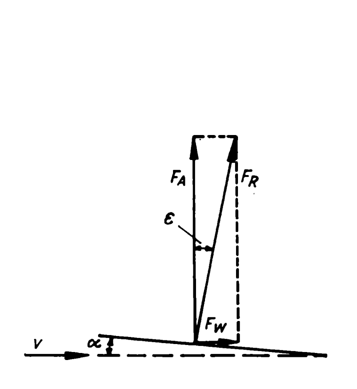


Bild 34. Kräfte an der unter dem Anstellwinkel α angeströmten Platte

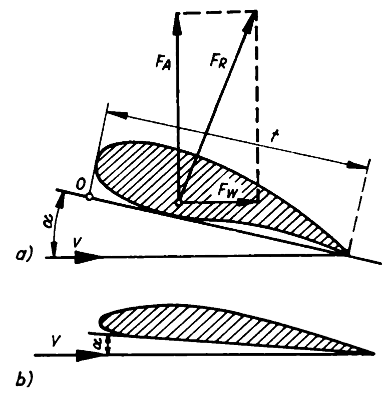


Bild 35. Anstellwinkel α eines Tragflügels bei verschiedener Wölbung der Unterseite. a) konkave Unterseite; b) ebene Unterseite

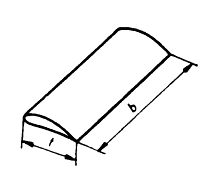


Bild 36. Tragflügeltiefe t und Spannweite b

Bild 36 zeigt an einem Tragflügel die Flügeltiefe t und die Flügelbreite oder *Spannweite* b. Die *Flügelfläche* A berechnet sich aus:

$$A = \begin{cases} tb & \text{für rechteckige Flügel} \\ \int_0^b t\,db & \text{für sich verjüngende Flügel} \end{cases} \tag{70}$$

Die am Tragflügel angreifenden Kräfte und Momente werden durch dimensionslose Koeffizienten (*Auftriebsbeiwert* c_a, *Widerstandsbeiwert* c_w, und *Momentenbeiwert* c_m) beschrieben:

$$F_a = c_a A \varrho v^2/2 \tag{71}$$

$$F_w = c_w A \varrho v^2/2 \tag{72}$$

$$M = c_m A \varrho v^2 t/2 \tag{73}$$

Im allgemeinen fällt die resultierende Luftkraft F_R nicht mit der *Normalkraft* F_N zusammen, die auf der durch den Momentenpunkt O gehenden Bezugslinie (Flügelsehne) senkrecht steht. Ist die Normalkraft F_N die eine Komponente von F_R, so liegt die andere Komponente in Richtung der Bezugslinie und heißt *Tangentialkraft* F_T (Bild 37). Hat der Angriffspunkt D der Normalkraft F_N vom Momentenpunkt O den Abstand s, so ist $M = F_N s$, wobei die Normalkraft in der Form:

$$F_N = c_n A v^2/2 \tag{74}$$

geschrieben werden kann. Dann ist:

$$s = M/F_N = t c_m/c_n \quad \text{oder} \quad s/t = c_m/c_n \tag{74a}$$

Durch das auf einen Tragflügel ausgeübte Moment versucht die Luftkraft, den Flügel zu drehen. Der Angriffspunkt D der Luftkräfte heißt auch *Druckpunkt*. Bei den meisten Profilen ist die Lage des Druckpunkts vom Anstellwinkel abhängig, und zwar wandert D mit zunehmendem Anstellwinkel α nach vorn. Durch diese Verlagerung des Druckpunkts werden die Profile instabil. Bei negativen Anstellwinkeln verschiebt sich der Druckpunkt immer mehr ins Unendliche, wobei die Normalkraft auf Null absinkt (Bild 38).

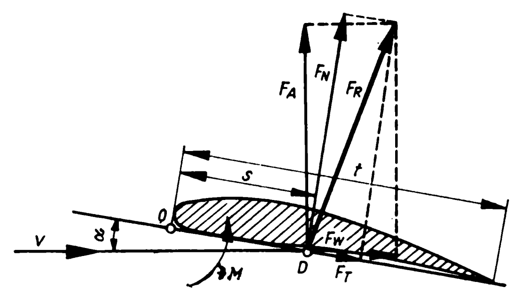


Bild 37. Kräfte am Tragflügel (nach [16])

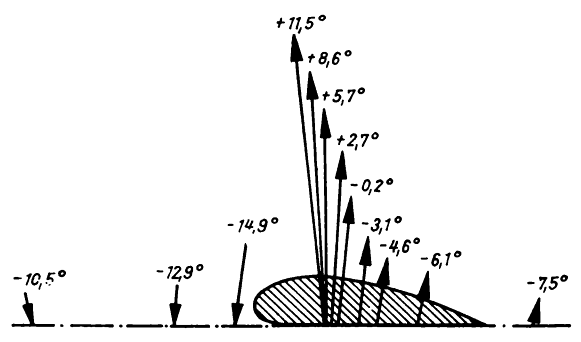


Bild 38. Größe, Lage und Richtung der Luftkraftresultierenden für das Göttinger Profil Nr. 386 bei Anstellwinkel im Bereich von $\alpha = -14{,}9°$ bis $\alpha = +14{,}5°$ (nach [5])

3.5.2. Strömungen um Tragflügel

3.5.2.1. Potentialströmung mit Zirkulation

Die sich um einen Tragflügel ausbildende Strömung (Bild 39) kann nach der Tragflügeltheorie als Überlagerung einer *Potentialströmung* (Bild 40) mit einer *Zirkulationsströmung* (Bild 41) aufgefaßt werden. Die in der Tragflügelströmung enthaltene Zirkulation ist entscheidend für die Entstehung des Auftriebs, da sie an der Oberseite des Tragflügels zu großen und an der Unterseite zu kleinen Strömungsgeschwindigkeiten führt. Dadurch entstehen nach der

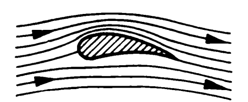


Bild 39. Tragflügelströmung

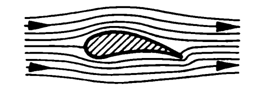


Bild 40. Potentialströmung um einen Tragflügel

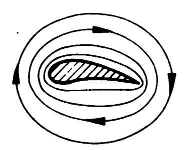


Bild 41. Zirkulationsströmung um einen Tragflügel

BERNOULLIschen Gleichung große statische Drücke unter dem Tragflügel und kleine Drücke darüber. Die den Tragflügel umströmende Luft erzeugt infolgedessen einen Auftrieb durch die Sog- bzw. Druckwirkungen, die von den Luftschichten ober- bzw. unterhalb des Flügels ausgeübt werden. Nach der KUTTA-JOUKOWSKIschen Theorie ist der entstehende Auftrieb proportional der Zirkulation Γ:

$$F_{\text{A}} = \varrho v b \Gamma \tag{75}$$

v Relativgeschwindigkeit des Tragflügels gegenüber der Luft (Anströmgeschwindigkeit), b Tragflügelbreite

Die Sogwirkung ist wesentlich größer als die Druckwirkung (s. auch Bild 43).

3.5.2.2. Abgerissene Flügelströmung

Die Strömungsformen am Tragflügel sind in hohem Maße vom Anstellwinkel α abhängig. Für kleine Anstellwinkel liegt die Strömung überall gut am Tragflügel an. Man spricht dann von einer *anliegenden* oder *gesunden Strömung* (s. Bild 39). Der Widerstand ist gering, der Auftrieb groß. Bei einem bestimmten Anstellwinkel, dessen Größe vom Profil abhängt, reißt die Strömung ab (Bild 42). An der Oberseite des Tragflügels entsteht eine kräftige Wirbelbildung, die zu einer beträchtlichen Widerstandsvergrößerung und Auftriebsverminderung führt (z. B. im überzogenen Flugzustand).

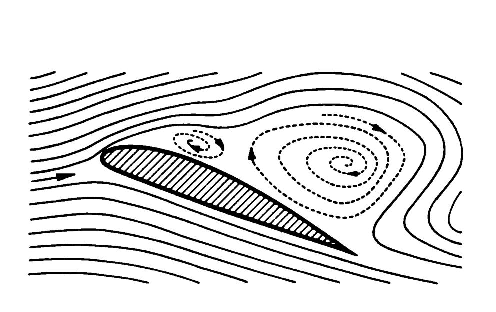


Bild 42. Abgerissene Flügelströmung

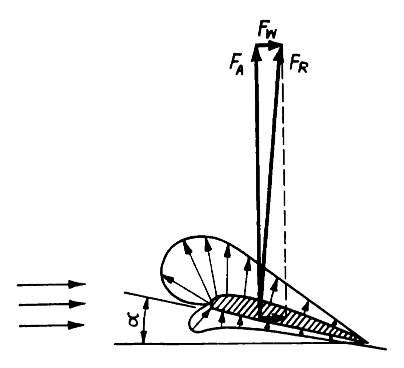


Bild 43. Druckverteilung am Tragflügel (nach [3])

3.5.3. Druckverteilung am Tragflügel

In Bild 43 ist die Druckverteilung an einem Tragflügel für einen Anstellwinkel $\alpha = 11°$ dargestellt. *Unterdruckgebiete* gegenüber dem ungestörten Atmosphärendruck sind durch vom Tragflügel abgewandte Pfeile kenntlich gemacht. Auf den Tragflügel hin gerichtete Pfeile geben das *Überdruckgebiet* an. Auf der Oberseite entsteht also eine erhebliche Druckverminderung, durch die der Sog hervorgerufen wird. Die Druckerhöhung an der Unterseite beträgt etwa 40% der Druckverminderung an der Oberseite.

3.5.4. Anfahrwirbel am Tragflügel

Das Tragflügelprofil (Bild 44) stellt den Schnitt eines unendlich langen Tragflügels dar. Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, daß die Strömungsverhältnisse in allen parallelen Schnittebenen die gleichen sind. Wird dieser Flügel aus der Ruhe heraus in Bewegung gesetzt, so teilt sich die Stromlinie am *vorderen Staupunkt A*, die Luft umströmt die Ober- und Unterseite und vereinigt sich wieder am *hinteren Staupunkt B*. Bei Abwesenheit von Reibung hätten

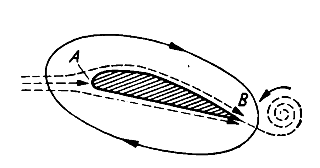


Bild 44. Anfahrwirbel am Tragflügel

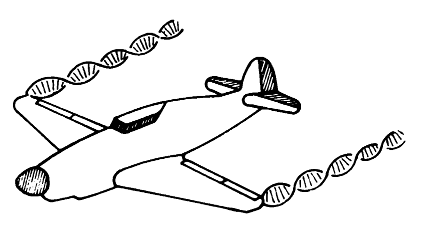


Bild 45. Wirbelzöpfe an den Tragflügelenden

beide Strömungen in B die gleiche Geschwindigkeit. Wegen der besonders in der Grenzschicht wirksamen Reibung ist die Geschwindigkeit der oberen Strömung in B aber kleiner als die der unteren, weil die Oberseite länger als die Unterseite ist. In B bildet sich infolgedessen im Augenblick des Anfahrens eine *Diskontinuitätsfläche* aus. Solche Unstetigkeitsflächen zerfallen jedoch wegen ihrer Labilität sehr leicht in Einzelwirbel, vgl. Bild 6. Auf diese Weise entsteht hinter dem Tragflügel ein Wirbel, der *Anfahrwirbel*, mit einem aus Bild 44 ersichtlichen Umlaufsinn.

Der Anfahrwirbel erzeugt um sich herum eine Zirkulationsströmung mit gleichem Drehsinn. Legt man um den Tragflügel eine geschlossene Kurve, die auch den Anfahrwirbel umschließt, so war auf ihr vor der Bewegung des Tragflügels die Zirkulation Null. Nach dem THOMSONschen Satz muß die Zirkulation auch nach Beginn der Bewegung Null bleiben. Infolgedessen bildet sich um den Tragflügel eine Zirkulationsströmung aus, die dieselbe Stärke, aber umgekehrten Drehsinn wie im Anfahrwirbel hat und sich genau so allmählich ausbildet wie dieser (Bild 44, die Zirkulation erfolgt im Uhrzeigersinn). Sie führt zu einer Geschwindigkeitssteigerung an der Oberseite und zu einer Geschwindigkeitsverminderung an der Unterseite des Tragflügels. Dieser Vorgang hält so lange an, bis der Geschwindigkeitssprung in B ausgeglichen ist. Wirbel und Zirkulationsströmung um den Tragflügel sind nunmehr voll ausgebildet. Der Anfahrwirbel wird von der Strömung mitgeführt, die Zirkulation um den Tragflügel bleibt erhalten.

Im stationären Zustand fließt die Strömung an der Hinterkante glatt ab. Hieraus folgt, daß für den unendlich langen Tragflügel kein Druckwiderstand, sondern nur der von der Viskosität der Luft herrührende Reibungswiderstand existiert. Für den endlichen Tragflügel ist infolge der dauernden Wirbelablösung an seinen Enden auch ein Druckwiderstand vorhanden.
Dieser *Randwiderstand* eines endlichen Tragflügels kommt dadurch zustande, daß der Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite sich über den Rand auszugleichen sucht. Dadurch entstehen dort Wirbel, die von der Strömung mitgenommen werden. Man bezeichnet diese in der Bahn der Tragflügelenden liegenden Wirbellinien als *Wirbelzöpfe* (Bild 45).

3.5.5. Polardiagramm eines Tragflügels

Die Abhängigkeit der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte c_a und c_w vom Anstellwinkel α zeigt Bild 46*). Der Winkelbereich zwischen A und B gibt den Bereich der anliegenden (gesunden) Tragflügelströmung wieder. Jenseits der Grenze A ist die Strömung an der Unterseite und jenseits B an der Oberseite des Tragflügels abgerissen.
Häufig angewandt wird die Darstellung von c_a als Funktion von c_w im *Polardiagramm* nach LILIENTHAL. Bild 47 zeigt den Vorteil des Polardiagramms am Beispiel eines Tragflügelprofils [5]. Da Auftrieb und Widerstand die rechtwinkligen Komponenten der am Tragflügel angreifenden Luftkraft sind, ist ein Maß für ihre Größe und Richtung der vom Koordinatenursprung nach einem Punkt der c_a,c_w-Kurve gezeichnete Vektor. Die Kurve, bei der die resultierende Kraft von einem Pol (hier dem Koordinatenursprung)

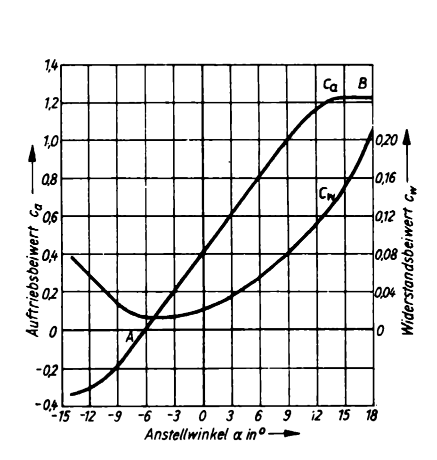


Bild 46. Auftriebsbeiwert c_a und Widerstandsbeiwert c_w des Göttingers Profils Nr. 593 als Funktion des Anstellwinkels (nach [31])

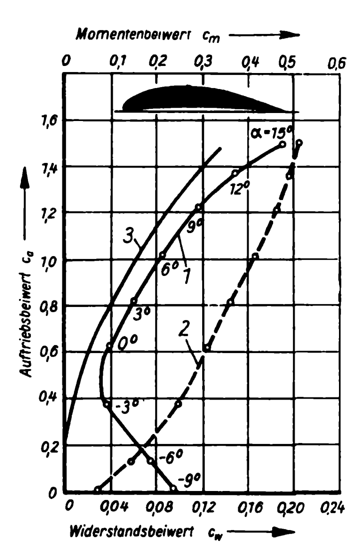


Bild 47. Polardiagramm eines Tragflügels (Göttinger Profil Nr. 447).
1 Polare $c_a = f(c_w)$; *2* $c_m = f(c_a)$;
3 induzierter Widerstand $c_{wi} = f(c_a)$

ausgeht, nennt man *Polarkurve* (*Polare*), die Anstellwinkel sind als Parameter angegeben. Der Winkel zwischen dem Luftkraftvektor und der c_a-Achse ist der *Gleitwinkel*. Er kann bei der hier wiedergegebenen Polarkurve wegen der Maßstabsverzerrung nicht direkt abgelesen werden, sondern muß nach der Formel $\tan \varepsilon = c_w/c_a$ berechnet werden. Den kleinsten Gleitwinkel findet man durch die Tangente an die Polare. Im Bild 47 sind noch die Momentenbeiwerte c_m in Abhängigkeit von den Auftriebsbeiwerten c_a als gestrichelte Kurve und der induzierte Widerstand (Parabel) eingetragen.
Durch Rauhigkeiten der Tragflügeloberfläche wird der Auftrieb herabgesetzt. Nach JONES und WILLIAMS [10] kann die Verminderung bis zu 20% betragen, wenn die relative Rauhigkeit (Verhältnis zwischen Korngröße und Flügeltiefe) $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ beträgt.

3.5.6. Induzierter Widerstand

Beim unendlich langen Tragflügel erfährt der Luftstrom praktisch keine Ablenkung, während beim endlich langen Tragflügel Abwärtsgeschwindigkeiten entstehen, durch die die Anströmrichtung geändert wird. Bei endlich langen Tragflügeln (ohne seitliche Begrenzungsflächen) kommt zum sogenannten *Profilwiderstand* F_{wo}, dem Widerstand des unendlich langen Tragflügels (bzw. des Tragflügels mit seitlicher Begrenzung etwa durch die Wände des Wind-

*) für das Göttinger Profil Nr. 593

kanals), ein Widerstand F_{wi} hinzu. Dieser entsteht infolge der Beziehungen zwischen Strömungsgeschwindigkeiten und Wirbelflächen, die ähnlich denjenigen zwischen elektrischen Strömen und ihren Magnetfeldern sind. Aus diesem Grunde wird F_{wi} *induzierter Widerstand* genannt. Dieser ist bei *elliptischer Auftriebsverteilung**):

$$F_{wi} = 2F_A^2/\pi b^2 \varrho v^2, \qquad F_w = F_{wo} + F_{wi} \tag{76}$$

b Spannweite des Tragflügels, F_A Auftrieb, F_w Gesamtwiderstand des endlichen Tragflügels

Aus den quadratischen Ansätzen für die Kräfte:

$$F_A = c_a \varrho v^2 A/2 \quad \text{und} \quad F_{wi} = c_{wi} \varrho v^2 A/2 \tag{77, 78}$$

folgt für die Beiwerte des induzierten Widerstands c_{wi}, des Gesamtwiderstands c_w und des Profilwiderstands c_{wo}:

$$c_{wi} = c_a^2 A/\pi b^2 \quad \text{oder} \quad c_w = c_{wo} + c_{wi} \tag{79, 80}$$

Zeichnet man in ein Polardiagramm (Bild 47) die Parabel des induzierten Widerstands ein (Kurve 3), so erhält man aus dem horizontalen Abstand zwischen der Parabel und der Polarkurve (Polare) den Profilwiderstand.

Bei rechteckigen Flügeln ist das Seitenverhältnis Flügeltiefe zu Flügelbreite gleich t/b, bei nichtrechteckigen Flügeln wird hierfür Flügelfläche zum Quadrat der Flügelbreite gleich A/b^2 gesetzt. Das reziproke Verhältnis $b^2/A = \Lambda$ wird *Flügelstreckung* genannt. Soll beim Übergang vom unendlich langen Tragflügel (ebenes Problem) zum endlichen Tragflügel (räumliches Problem) ein gleich großer Auftrieb erzielt werden, so muß der Anstellwinkel um $\Delta\alpha$ vergrößert werden, wobei $\Delta\alpha = 57{,}3° \cdot c_a A/\pi b^2$ ist. Sind von einem Tragflügelprofil mit dem Seitenverhältnis A_1/b_1^2 Auftrieb, Widerstand und Anstellwinkel bekannt, so kann man die entsprechenden Werte für einen anderen Flügel von gleichem Profil, also gleichem c_a-Wert, mit dem Seitenverhältnis A_2/b_2^2 durch die folgenden Gleichungen berechnen:

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{A_2}{b_2^2} - \frac{A_1}{b_1^2}\right); \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + 57{,}3° \cdot \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{A_2}{b_2^2} - \frac{A_1}{b_1^2}\right) \tag{81, 82}$$

3.5.7. Kräfte am Tragflügel

Bei horizontalem Flug wirkt am Tragflügel eines Flugzeugs in Flugrichtung die *Zugkraft* F_Z des Propellers (Bild 48) bzw. die Schubkraft der Strahltriebwerke, unter einem gewissen Winkel die *Luftkraft* F_R, deren senkrechte Komponenten der *Auftrieb* F_A und der in der

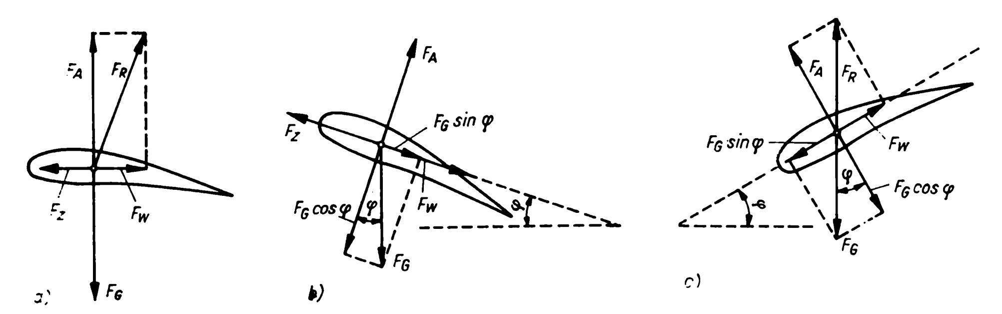


Bild 48. Kräfteverteilung am Tragflügel (nach [3]). a) Horizontalflug; b) Steigflug; c) Gleitflug

Fluglinie nach hinten weisende *Widerstand* F_w sind, sowie senkrecht nach unten die im Schwerpunkt angreifende *Gewichtskraft* $F_G = G$ des Flugzeugs. Gleichgewicht kann nur dann bestehen, wenn die Summe sämtlicher Kräfte sowie das resultierende Drehmoment in bezug

*) elliptische Auftriebsverteilung: $\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - 4y^2/b^2}$, y in Richtung der Spannweite von der Mitte des Tragflügels an gerechnet

auf den Schwerpunkt Null sind, d. h., wenn Zugkraft, Luftkraft und Gewichtskraft durch denselben Punkt gehen. Hieraus folgt, daß der Auftrieb gleich der Gewichtskraft ($F_A = F_G$) und der Widerstand gleich der Zugkraft ($F_w = F_Z$) ist. Dann ist $F_w/F_A = F_Z/F_G = \tan \varepsilon$ oder $F_Z = F_G \tan \varepsilon$. Je kleiner die Gleitzahl $\tan \varepsilon$ ist, um so wirtschaftlich günstiger ist das betreffende Flugzeug.

Wenn ein Flugzeug unter dem Winkel φ steigt, wirkt der Zugkraft außer dem Widerstand noch die Komponente $F_G \sin \varphi$ der Gewichtskraft entgegen. Es gilt also $F_A = F_G \cos \varphi$ und $F_Z = F_w + F_G \sin \varphi$ (Bild 48b).
Bei abgestelltem Triebwerk ($F_Z = 0$) führt das Flugzeug einen Gleitflug aus, wobei $F_A = F_G \cos \varphi$ und (aus $F_Z = F_w + F_G \sin \varphi$) $F_w = -F_G \sin \varphi$, also $F_w/F_A = -\tan \varepsilon$ oder $\varphi = -\varepsilon$ sind (Bild 48c). Das trifft auch für Segelflugzeuge zu. Je kleiner der Gleitwinkel ist, um so größere Strecken kann das Flugzeug bis zur Landung zurücklegen.

3.5.8. Spaltflügel

Beim Überziehen des Flugzeugs löst sich infolge des zu großen Anstellwinkels die Strömung von der Oberseite des Tragflügels ab. Diese den *aerodynamischen Gütegrad* F_A/F_w des Tragflügels stark vermindernde, abgerissene Strömung läßt sich weitgehend vermeiden, wenn man einen sogenannten *Spaltflügel* (nach LACHMANN) verwendet (Bild 49). Der Spalt hat eine ähnliche Wirkung für die Ausbildung einer anliegenden Strömung wie die Absaugung der Grenzschicht in einem sich erweiternden Rohr, indem er der Strömung an der Oberseite des Tragflügels genügend Energie zuführt, um sie wieder zum Anliegen zu bringen. Während der LACHMANNsche Spaltflügel nur einen Spalt aufweist, besteht der HANDLEY-PAGE-Spaltflügel aus acht Einzelteilen mit sieben Spalten, verteilt über die gesamte Tragflügeltiefe.

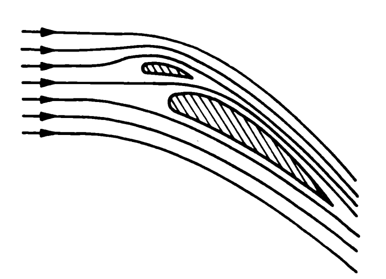


Bild 49. Stromlinienbild eines Spaltflügels (nach LACHMANN in [3])

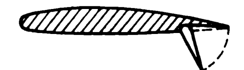


Bild 50. Tragflügel mit Spreizklappe (nach PRANDTL [31])

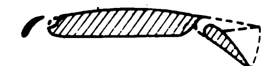


Bild 51. Tragflügel mit Spaltklappe und Vorflügel (nach PRANDTL [31])

Um die Start- und Landegeschwindigkeit möglichst klein zu halten, werden verschiedene Arten von *Auftriebshilfen* eingesetzt. Bewährt hat sich die *Spreizklappe*, bei der die Flügeloberseite unverändert bleibt (Bild 50). In dem zwischen Spreizklappe und Tragflügel gebildeten Raum entsteht ein starker Unterdruck, der auf die Sogseite übergreift und dadurch eine Auftriebserhöhung herbeiführt. Bei der *Spaltklappe* wird eine auftriebserhöhende Wirkung in ähnlicher Weise wie beim LACHMANNschen oder HANDLEY-PAGE-Spaltflügel erzielt. Schließlich kombiniert man Landeklappe (Spaltklappe) mit *Vorflügel* (Bild 51).

3.5.9. Propeller

Die Querschnittsflächen der Luftschraube (Bild 52a) und der Schiffspropeller (Bilder 52b und c) lassen eine gewisse Ähnlichkeit mit Tragflügelprofilen erkennen. Allerdings können die Ergebnisse der Tragflügeltheorie nur auf langsam laufende, d. h. schwach belastete Propeller übertragen werden.
Eine Luftschraube möge sich mit der Geschwindigkeit v von rechts nach links bewegen (Bild 53). Die Strömungsverhältnisse sind die gleichen, wenn man sich die Luftschraube feststehend und dafür das umgebende unbegrenzte Medium mit der gleichen Geschwindigkeit v von links nach rechts bewegt denkt.

Führt die Schraube nicht nur eine Translation, sondern auch eine Rotation aus, so wird der von ihr erfaßte Teil des Mediums beschleunigt und erhält die Geschwindigkeit $v + w$. Gleichzeitig tritt eine (in der Zeichnung angedeutete) Strahlkontraktion auf.
Ist p' der Druck unmittelbar vor, p'' der Druck unmittelbar hinter der Schraube, wobei p' kleiner und p'' größer als der Druck p_0 des ungestörten Mediums ist, so gilt:

$$p_0 + (\varrho v^2/2) = p' + (\varrho v'^2/2) \tag{83}$$

$$p_0 + [\varrho(v + w)^2/2] = p'' + (\varrho v'^2/2) \tag{84}$$

wobei v' die Geschwindigkeit vor und hinter der Schraube ist, die wegen der Kontinuität gleich sein muß. Dann ergibt sich für den Drucksprung an der Schraube

$$\Delta p = p'' - p' = \varrho w[v + (w/2)] \tag{85}$$

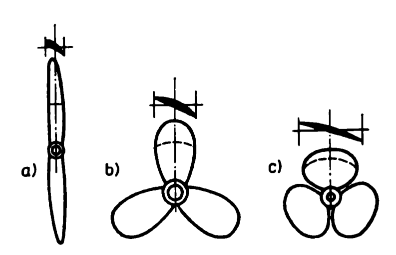


Bild 52. Propeller für verschiedene Zwecke (nach PRANDTL [31]). a) Luftschraube; b) langsam laufender Schiffspropeller; c) schnell laufender Schiffspropeller

Bild 53. Beschleunigung eines Luftstrahls durch einen Propeller

Ist A_S die Schraubenkreisfläche und $v + (w/2) = v'$ die mittlere Geschwindigkeit in der Schraubenebene, so ist der Schraubenschub F_S:

$$F_S = A_S \Delta p = A_S \varrho w[v + (w/2)] = A_S \varrho w v' \tag{86}$$

Mit $P = F_S v'$ als Pumpleistung und $P_0 = F_S v$ als Nutzleistung ergibt sich der Wirkungsgrad der Schraube:

$$\eta_S = P_0/P = F_S v/F_S v' = v/[v + (w/2)] = v/v' \tag{87}$$

3.5.10. Kavitation

Hinter schnell laufenden hydraulischen Maschinen (KAPLAN-Turbine Schiffspropeller usw.) können Unterdruckgebiete auftreten, in denen das Wasser verdampft, wenn der Druck in diesen Gebieten kleiner als der Dampfdruck ist. Die Folge davon ist ein mit Wasserdampf gefüllter Hohlraum. Man bezeichnet diese Erscheinung als *Kavitation.*
Gelangen die Hohlraumzonen infolge der Strömung wieder in Gebiete höheren statischen Drucks, so kondensiert der Wasserdampf unter starker Verringerung seines Volumens. Die plötzliche Volumenänderung ist mit so großen Druckstößen verbunden, daß durch das in den Hohlraum einstürzende Wasser „*Anfressungen*“ (Kavitationskorrosion, Erosion) des Materials der Turbinenschaufeln oder Schiffsschrauben bis zur völligen Zerstörung im Laufe der Zeit eintreten können. Durch günstige Formgebung der Schaufeln oder Schrauben können große Unterdrücke in der Strömung vermieden und der Zerstörungsprozeß verzögert werden.

3.5.11. Thermischer Auftrieb

Aufwinde treten besonders an Berghängen (*Hangaufwind*) oder über Feldern und Städten durch die Sonneneinstrahlung (*Thermik*) auf. Sie sind oft an der Kumulusbildung zu erkennen.
Durch Fliegen auf kreisförmigen Bahnen in einem solchen thermischen Aufwindschlauch gelingt es dem

Segelflieger, beträchtliche Höhen zu gewinnen (Bild 54). Nach Erreichen der maximalen Höhe muß er versuchen, im Gleitflug die nächste Thermik zu erreichen. Die im Segelflug erreichten Leistungen liegen sehr hoch. Es sind schon Flugzeiten von 50 Stunden, Höhen von 14000 m und Entfernungen von 1600 km erreicht worden.

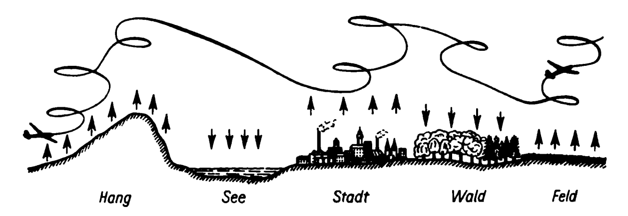


Bild 54. Segelflug unter Ausnutzung der Thermik

4. Gasdynamik

4.1. Bernoullische Gleichung für kompressible Medien

In strömenden Gasen und Dämpfen können erhebliche Volumenänderungen eintreten, wenn in ihnen große Druckunterschiede bestehen oder die Strömungsgeschwindigkeit von der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit ist. Das tritt auf bei Strömungen in Dampfturbinen, bei der Ausbreitung von Explosionen, beim Flug von Geschossen oder Überschallflugzeugen. Die Lehre von Bewegungsvorgängen mit veränderlicher Dichte, also von Strömungen kompressibler Medien, heißt *Gasdynamik*. Von Bedeutung für die Erforschung von Strömungsverhältnissen ist die Ausbreitung von Druckänderungen.
Für reibungsfreie, stationäre Strömungen folgt aus Gl. (26) durch Division mit ϱ die BERNOULLIsche Gleichung kompressibler Medien:

$$\frac{v}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} = \text{konst.} \tag{88}$$

Der Index 0 kennzeichnet Größen des ruhenden Mediums. Unter Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderungen ergibt sich aus (88):

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\varrho} = \frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \text{konst.} \tag{89}$$

$\varkappa = c_p/c_v$, Adiabatenexponent

Steht ein Gas in einem abgeschlossenen Volumen (Kessel) unter dem Druck p_0 und hat es die Dichte ϱ_0, so ist beim Außendruck p die Ausströmungsgeschwindigkeit:

$$v^2 = \frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] \tag{90}$$

wenn im Kessel das Gas als ruhend ($v_0 = 0$) angenommen werden kann, was für großes Kesselvolumen und kleine Austrittsöffnung zutrifft. Beim Ausströmen ins Vakuum ($p = 0$) ergibt sich das Maximum der Geschwindigkeit:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varrho_0}} \tag{91}$$

Beispiel. Für Kesseldruck $p_0 = 0{,}1$ MPa, Temperatur $t = 15\,°\mathrm{C}$, Dichte $\varrho_0 = 1{,}22\ \mathrm{kg/m^3}$, Adiabatenexponent $\varkappa = 1{,}4$ ist $v_{\max} = 757$ m/s. Die Gln. (89), (90) und (91) gelten für Strömungen ohne oder nur mit sehr kleinen Querschnittsänderungen. Beim Anströmen von Schaufelgittern oder Tragflügeln gelten andere Gesetzmäßigkeiten, die später dargelegt werden.

4.2. Schallgeschwindigkeit

Die Theorie zur mathematischen Darstellung der Schallgeschwindigkeit geht von der *Kontinuitätsgleichung der Gasdynamik* aus. Diese gibt in allgemeiner Form den konstanten *Massendurchsatz* einer instationären Strömung an:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{92}$$

Wählt man ein Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit der Strömung bewegt, so ergibt sich in diesem ein stationärer Vorgang (Wegfall des 1. Glieds). Wenn eine Strömung lediglich in Richtung der x-Achse erfolgt, reduziert sich die Kontinuitätsgleichung auf ein einziges Glied:

$$\mathrm{d}(\varrho v)/\mathrm{d}x = 0 \tag{93}$$

Eine infinitesimale Druckänderung dp möge sich ebenfalls in x-Richtung ausbreiten. Hierfür gilt die EULERsche Gleichung:

$$c\,\mathrm{d}c = -\mathrm{d}p/\varrho \tag{94}$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung ist, sie ist identisch mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls. Für diese erhält man durch Einsetzen in Gl. (93) die NEWTONsche Formel:

$$c^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho \tag{95}$$

Bei von Schallwellen in Gasen hervorgerufenen Druckänderungen handelt es sich im allgemeinen um adiabatische (isentrope) Zustandsänderungen. Für die Schallgeschwindigkeit gilt dann die LAPLACEsche Formel:

$$c^2 = \varkappa p/\varrho \tag{96}$$

Durch Einsetzen der Gasgleichung $p/\varrho = RT$ in Gl. (96) erhalten wir:

$$c^2 = \varkappa RT = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} RT_0 = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{p_0}{\varrho_0} = \varkappa\frac{p_0}{\varrho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \varkappa\frac{p_0}{\varrho_0}\frac{T}{T_0} \tag{97}$$

Mit Hilfe einiger Umformungen gelangt man durch Einsetzen von Gl. (97) in Gl. (90) zu einem Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der Strömungsgeschwindigkeit:

$$c^2 = (\varkappa p_0/\varrho_0) - (\varkappa - 1)\, v^2/2 = c_0{}^2 - (\varkappa - 1)\, v^2/2 \tag{98}$$

c_0 Maximalwert der Schallgeschwindigkeit

In einem mit der Geschwindigkeit v strömenden Gas stellen sich unter der Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderungen verschiedene örtliche Schallgeschwindigkeiten ein. Man kann die folgenden drei *Spezialfälle* unterscheiden:

1. In einem ruhenden Gas ($v = 0$) hat die Schallgeschwindigkeit den Maximalwert c_0.
2. Strömt das Gas ins Vakuum, so erreicht es die Maximalgeschwindigkeit v_{max}, Gl. (91), und für die Schallgeschwindigkeit ergibt sich (wie man leicht zeigen kann) $c = 0$.
3. Wichtig ist die Frage nach der Bedingung, unter der die Strömungsgeschwindigkeit des Gases gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Zur Lösung des Problems werden die für die beiden Geschwindigkeiten c und v gefundenen Gln. (97) und (90) gleichgesetzt:

$$\varkappa\frac{p_0}{\varrho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$

Hieraus erhält man das *kritische Druckverhältnis* und in analoger Weise das *kritische Temperaturverhältnis*:

$$p/p_0 = [2/(\varkappa+1)]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \qquad T/T_0 = 2/(\varkappa+1) \tag{99, 100}$$

Das kritische Druckverhältnis ist für Luft 0,528, für gesättigten Wasserdampf 0,577, für überhitzten Wasserdampf 0,546.
Die sich durch Einsetzen des kritischen Druckverhältnisses in Gl. (90) ergebende Schallgeschwindigkeit c' heißt *kritische Schallgeschwindigkeit* oder *Lavalgeschwindigkeit:*

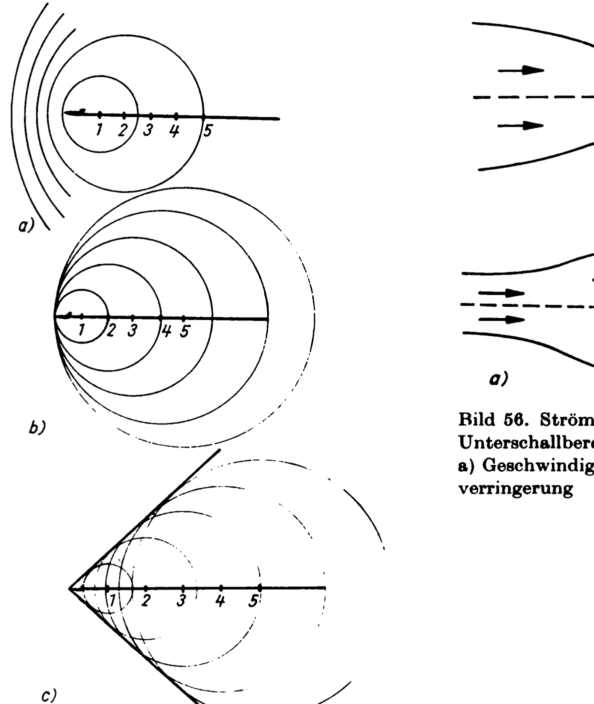
$$c'^2 = (\varkappa - 1)\, v_{max}^2 / (\varkappa + 1) \tag{101}$$

4.3. Überschallgeschwindigkeit

Wenn sich ein Körper durch ein ruhendes Medium bewegt oder ein ruhender Körper von einem Medium angeströmt wird, ist für das Verhalten der Strömung das Verhältnis der Relativgeschwindigkeit v zwischen Körper und Medium zur Schallgeschwindigkeit c entscheidend. Man bezeichnet dieses Verhältnis als MACH-*Zahl* M:

$$M = v/c \tag{102}$$

Bei der Bewegung eines Körpers (z. B. Flugzeugs) im Unterschallbereich ($M < 1$) gehen von ihm Druckstörungen aus, die sich mit Schallgeschwindigkeit nach allen Seiten ausbreiten. Diese Druckstörungen (Schallwellen) überholen den Körper, so daß ein Beobachter auf der Erde von ihnen eher erreicht wird als von dem Körper (Bild 55a). Für die Strömungsvorgänge gelten die Gesetze der Hydro- bzw. Aerodynamik.
Beim Flug mit Schallgeschwindigkeit ($M = 1$) gelangen die Schallwellen nicht in das vor dem Flugzeug liegende Gebiet. Ein Beobachter auf der Erde hört den Flugkörper erst im Augenblick seines Vorbeiflugs



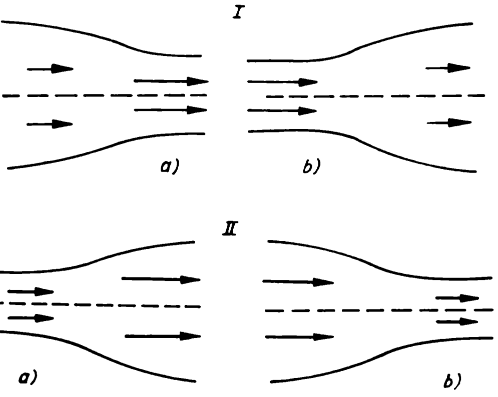


Bild 56. Strömungen mit Querschnittsänderungen im Unterschallbereich (*I*) und im Überschallbereich (*II*). a) Geschwindigkeitserhöhung; b) Geschwindigkeitsverringerung

Bild 55. Entstehung des MACHschen Kegels. a) Ausbreitung der Schallwellen beim Flug mit Unterschallgeschwindigkeit (Flugrichtung von rechts nach links); b) Die Schallwellen treffen sich am Kopf des mit Schallgeschwindigkeit fliegenden Körpers. c) MACHscher Kegel. Die Schallwellen bleiben hinter dem Flugkörper zurück

(Bild 55b). Beim Flug mit Überschallgeschwindigkeit $M > 1$) eilt der Körper den Druckstörungen voraus (Bild 55c). Der Schall wird erst nach dem Vorbeiflug wahrgenommen.
Die Einhüllende aller kugelförmigen Störungen ist der *Machsche Kegel*. Er trennt den von Störungen freien Luftbereich vom Gebiet der Störungen. Für den halben Öffnungswinkel des Kegels gilt:

$$\sin \alpha = c/v = 1/M \qquad (103)$$

Das aus einem Druckkessel durch eine Öffnung ausströmende Gas kann maximal den Wert der Schallgeschwindigkeit erreichen. Die theoretische Grundlage für die Erzeugung von Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit liefert die aus der Kontinuitätsgleichung der Gasdynamik gewonnene Gleichung von HUGONIOT:

$$dA = (M^2 - 1)\, dv \qquad (104)$$

Man erkennt aus ihr, daß Querschnittsänderungen von Strömungen im Unter- und Überschallbereich sich unterschiedlich auf die Änderung der Geschwindigkeit auswirken. Eine Querschnittsverengung ($dA < 0$) führt bei Unterschallströmungen ($M < 1$) zur Geschwindigkeitserhöhung ($dv > 0$), eine Querschnitterweiterung zu einer Geschwindigkeitsabnahme. Im Überschallbereich ($M > 1$) erhöht sich dagegen die Geschwindigkeit bei Querschnittsvergrößerung und verringert sich bei Querschnittsverengung (Bild 56).
Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit erzeugt man in Anwendung dieser Erkenntnisse, indem man eine Unterschallströmung durch Querschnittsverengung zunächst auf Schallgeschwindigkeit bringt und anschließend durch Querschnitterweiterung auf Überschallgeschwindigkeit steigert. Rohre mit diesen Querschnittsformen bezeichnet man als *Lavaldüsen* (Bild 57).
Für eine solche Düse sind im Bild 58 für zweiatomige Gase ($\varkappa = 1{,}4$) und überhitzten Wasserdampf ($\varkappa = 1{,}3$) das Verhältnis des Austrittsquerschnitts A zum engsten Querschnitt A' und das Verhältnis der Austrittsgeschwindigkeit v zur Geschwindigkeit c im engsten Querschnitt (Schallgeschwindigkeit) über dem Druckverhältnis p_0/p aufgetragen.

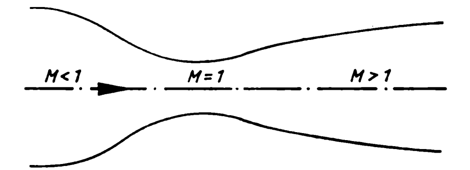


Bild 57. Lavaldüse zur Erzeugung von Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit

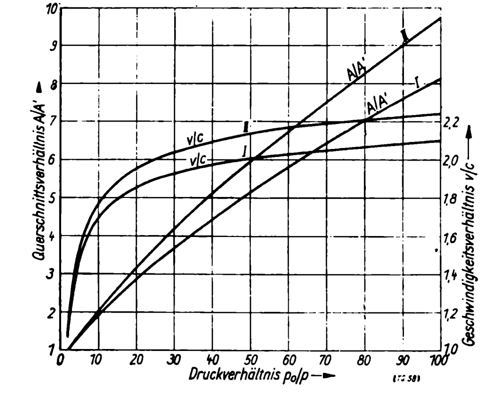


Bild 58. Querschnitts- und Geschwindigkeitsverhältnisse in einer Lavaldüse für Luft (*I*) und überhitzten Wasserdampf (*II*)

4.3.1. Verdichtungsstoß

Strömt ein Gas mit Überschallgeschwindigkeit, so kann plötzlich ein Umschlag in Unterschallgeschwindigkeit erfolgen, wobei die Kontinuität bewahrt wird. Dieser Vorgang tritt z. B. vor einem Staupunkt ein und wird durch einen *Verdichtungsstoß* hervorgerufen. Dieser breitet sich von seiner Entstehungsstelle auf einer parabolischen Wellenfront aus. Er ist begleitet von einer Erhöhung der Dichte und Temperatur. Ist v_1 die Geschwindigkeit vor dem Einsetzen des Verdichtungsstoßes, v_2 die danach, so besteht zwischen ihnen bei Annahme adiabatischer Zustandsänderungen die Beziehung $v_1 v_2 = c'^2$ (Bild 59), wobei c' nach Gl. (101) die kritische Schallgeschwindigkeit ist.

An allen Stellen einer Strömung (bis auf den engsten Querschnitt) sind bei konstanter Durchflußmenge zwei Strömungen möglich, von denen die eine Überschall-, die andere Unterschallgeschwindigkeit hat.
Für kompressible Flüssigkeiten ist am Staupunkt eines Körpers der Staudruck größer als für inkompressible Flüssigkeiten, und zwar auch für Geschwindigkeiten, die unter der Schallgeschwindigkeit liegen. Man erhält an Stelle des Staudrucks $\varrho v^2/2$ dann $\delta \varrho v^2/2$, wobei $\delta = 1{,}04$ für $v = 130$ m/s und $\delta = 1{,}28$ für Schallgeschwindigkeit ist.

Mit dem Verdichtungsstoß ist ein *Energieverlust* (Stoßverlust) verbunden. Der Energiebetrag je Masseeinheit wird in Wärme umgewandelt, wobei nur ein Teil durch Expansion wieder als kinematische Energie zurückgewonnen wird.
Wie im Bild 59 dargestellt, werden am vorderen Teil eines Flugzeugs die Luftteilchen abgebremst, da sie ihm nicht ausweichen können. Es entsteht ein *Verdichtungsstoß*, d. h., die Luft wird komprimiert und strömt danach mit Unterschallgeschwindigkeit um das Flugzeug. An seinem hinteren Teil entsteht ein *Verdünnungsstoß*. Die Flächen des Verdichtungs- und Verdünnungsstoßes bewegen sich mit der Geschwindigkeit des Flugzeugs, gelangen auf die Erde und sind als *Überschallknall* zu hören.

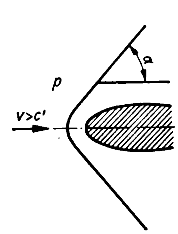


Bild 59. Zur Entstehung des Verdichtungsstoßes. Die Relativgeschwindigkeit v zwischen dem Medium (Luft) und dem Widerstandskörper (z. B. Rakete) ist innerhalb der Kurve kleiner und außerhalb größer als die Schallgeschwindigkeit c

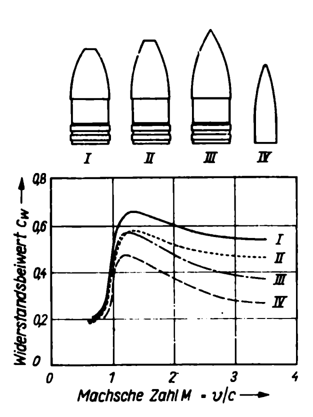


Bild 60. Widerstand von Geschossen (nach PRANDTL [33])

4.3.2. Widerstand bei Überschallgeschwindigkeit

Bei der Bewegung von Körpern mit Überschallgeschwindigkeit kommt zum Flächenwiderstand und Profilwiderstand noch der vom Verdichtungsstoß hervorgerufene *Wellenwiderstand* hinzu. Dieser hängt maßgeblich von der Form der Profilnase (Umgebung des vorderen Staupunkts) ab. Durch Zuspitzung wird der Wellenwiderstand verkleinert. Für alle Formen liegt das Widerstandsmaximum bei $M \approx 1$, d. h. bei Schallgeschwindigkeit.

Dieser nach der Theorie über alle Maßen große Maximalwiderstand ließ eine Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit noch vor wenigen Jahrzehnten als Utopie erscheinen. Die im vorderen Staupunkt eines Flugzeugs entstehende Verdichtung der Luft hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Mauer, woraus sich die falsche Vorstellung von einem explosionsartigen Durchbruch der „Schallmauer" erklärt.
Der Widerstand von Geschossen wurde von v. EBERHARD, BECKER und CRANZ ermittelt und von PRANDTL zusammengestellt. Bild 60 zeigt den Widerstandsbeiwert c_W [siehe Gl. (72), A Geschoßquerschnitt] als Funktion der MACH-Zahl M.

Literaturverzeichnis

[1] *Ackeret, J.:* Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kavitation. Technische Mechanik und Thermodynamik (1930), S. 1 und 63
[2] *Ackeret, J.:* Kavitation und Korrosion, Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebs. — Hamburg: 1932, S. 227···342
[3] *Bergmann, L., Schaefer, Cl.:* Lehrbuch der Experimentalphysik zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. Band I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre. 7. Aufl. — Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1965
[4] *Cornish, R. I.:* Phil. Mag. **16** (1933) 7, S. 897
[5] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. Hrsg. von *L. Prandtl* und *A. Betz.* — München: R. Oldenbourg ab 1921
[6] *Estel, E.:* Z. Physik **88** (1937) 19, S. 748
[7] *Galavics, F.:* Die Methode der Rauhigkeits-Charakteristik zur Ermittlung der Rohrreibung in geraden Stahlrohr-Fernleitungen. Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik **5** (1932) 12



[8] *Gonell, H. W.:* Ein Windsichtverfahren zur Bestimmung der Kornzusammensetzung staubförmiger Stoffe. — Z. VDI **72** (1928) 27, S. 945···950
[9] *Hagen, H. F.:* Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. **55** (1933), S. 105
[10] *Jones, R., Williams, D. H.:* ARC-Report Nr. 1708 (1936)
[11] *Kinne, E.:* Beiträge zur Kenntnis der hydraulischen Verluste in Abzweigstücken. Mitt. hydraul. Inst. TH München, Heft 4, S. 70···93. — München: R. Oldenbourg 1931
[12] *Lea, F. C., Tadros, A. G.:* Flow of water through a circular tube with a central core and rectangular tubes. — Phil. Mag. **11** (1931) 7, S. 1235···1247
[13] *Nikuradse, J.:* Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft 361. — Berlin: VDI-Verlag 1933
[14] *Nikuradse, J.:* Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. VDI-Forschungsheft 281. — Berlin: VDI-Verlag 1926
[15] *Prandtl, L., Schlichting, H.:* Werft, Reederei und Hafen **15** (1934) 1
[16] *Prandtl, L., Tietjens, O.:* Hydro- und Aerodynamik. 2 Bände. — Berlin: Springer-Verlag 1929 und 1931
[17] *Schiller, L.:* Strömung in Rohren. Handbuch der Experimentalphysik, Band IV, 4
[18] *Walter, F.:* Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Strömungsformen hinter scharfkantigen Widerstandskörpern sowie Beziehungen zum Widerstandsproblem. Ber. d. math.-phys. Klasse der Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Band **92** (1940), S. 139···234
[19] *Winkel, R.:* Z. angew. Math. Mech. **3** (1923), S. 251

Weiterführende Literatur

[20] *Albring, W.:* Angewandte Strömungslehre. 5. Aufl. — Dresden: Verlag Theodor Steinkopff 1977
[21] *Autorenkollektiv:* Technische Strömungsmechanik. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979, 1978
[22] *Becker, E.:* Technische Strömungslehre. 4. Aufl. — Stuttgart: B. G. Teubner 1977
[23] *Bohl, W.:* Technische Strömungslehre kurz und bündig. 2. Aufl. — Würzburg: Vogel-Verlag 1975
[24] *Eck, B.:* Technische Strömungslehre. 9. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1978
[25] *Gersten, K.:* Einführung in die Strömungsmechanik. — Braunschweig: Vieweg 1974
[26] *Herning, F.:* Stoffströme in Rohrleitungen. 4. Aufl. — Düsseldorf: VDI-Verlag 1966
[27] *Kalide, W.:* Einführung in die technische Strömungslehre. 4. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1976
[28] *Leiter, E.:* Strömungsmechanik. — Braunschweig: Vieweg 1978
[29] *Lindner, H.:* Lehrbuch der Physik für Ingenieure. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[30] *Neunaß, E.:* Praktische Strömungslehre. — Berlin: VEB Verlag Technik 1967
[31] *Prandtl, L., Oswatitsch, K., Wieghardt, K.:* Führer durch die Strömungslehre. 7. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1969
[32] *Richter, H.:* Rohrhydraulik. 5. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1971
[33] *Rödel, H.:* Hydromechanik. 8. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1978
[34] *Tietjens, O.:* Strömungslehre. 2 Bände. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1960, 1970
[35] *Truckenbrodt, E.:* Strömungsmechanik. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1968
[36] *Wuest, W.:* Strömungsmeßtechnik. — Braunschweig: Vieweg 1969
[37] *Zeller, W., Franke, A.:* Das physikalische Rüstzeug des Ingenieurs. 11. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977



TT Technische Thermodynamik

Von Prof. (em.) Dipl.-Ing. Werner Pohlenz †, Dresden

Inhaltsverzeichnis

Wichtigste Formelzeichen[1][2][3]

Formelzeichen	Einheit	Größe
A	m²	Fläche, Querschnitt
a	m²/s	Temperaturleitfähigkeit
b	J/kg	spezifische Anergie
c, c_S	m/s	Schallgeschwindigkeit
c_p	J/(kg · K)	spezifische Wärmekapazität bei p = konst.
c_v	J/(kg · K)	spezifische Wärmekapazität bei V = konst.
$\bar{c}_p$	J/(mol · K)	molare Wärmekapazität bei p = konst.
$\bar{c}_v$	J/(mol · K)	molare Wärmekapazität bei V = konst.
E	J	Exergie
e	J/kg	spezifische Exergie
F	J	freie Energie
f	J/kg	spezifische freie Energie
G	J	freie Enthalpie
g	J/kg	spezifische freie Enthalpie
Gr	—	GRASHOF-Zahl
H	J	Enthalpie
h	J/kg	spezifische Enthalpie
k	W/(m²·K)	Wärmedurchgangskoeffizient
l	m	Länge
M	kg/mol	molare Masse
m	kg	Masse
$\dot{m}$	kg/s	Massestrom
Nu	—	NUSSELT-Zahl
n	—	Polytropenexponent
n	mol	Stoffmenge
P	W = J/s	Leistung
Pe	—	PÉCLET-Zahl
Pr	—	PRANDTL-Zahl
PV	—	Kompressibilitätszahl
p	Pa	absoluter Druck
p_B	Pa	atmosphärischer (barometrischer) Druck
p_s	Pa	Sättigungsdruck des Wasserdampfs
Q	J	Wärme(menge)
$\dot{Q}$, Φ	J/s = W	Wärmestrom
q	J/kg	spezifische Wärmemenge
q, φ	W/m²	Wärmestromdichte
R	J/(kg · K)	spezielle oder spezifische Gaskonstante
$\bar{R}$	J/(kmol · K)	allgemeine oder molare Gaskonstante
Re	—	REYNOLDS-Zahl
r	J/kg	spezifische Verdampfungswärme
S	J/K	Entropie
s	J/(kg · K)	spezifische Entropie
T	K	thermodynamische Temperatur, KELVIN-Temperatur
t	°C	CELSIUS-Temperatur

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
t, τ	s	Zeit	γ	m³/(m³ · K)	Temperaturkoeffizient für das Volumen, mittlerer Raumausdehnungskoeffizient
U	J	innere Energie	ε	—	Leistungszahl
u	J/kg	spezifische innere Energie	η	Pa · s	dynamische Viskosität
V	m³	Volumen	η	—	Wirkungsgrad
$\dot{V}$	m³/s	Volumenstrom	$\varkappa$	—	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten
v	m³/kg	spezifisches Volumen	λ	W/(m · K)	Wärmeleitfähigkeit
v, c	m/s	Strömungsgeschwindigkeit	ν	m²/s	kinematische Viskosität
$\bar{v}_0$	m³/kmol	molares Volumen im physikalischen Normzustand	ν_{ex}	—	exergetischer Gütegrad
W	J	Arbeit	ϱ	kg/m³	Dichte
w	J/kg	spezifische Arbeit	ϱ_0	kg/m³	Dichte im physikalischen Normzustand
Z	—	Realgasfaktor	φ_f	—	relative Feuchte ungesättigter Luft
z	m	Höhe über einem vereinbartem Bezugsniveau	χ	—	Sättigungsgrad feuchter Luft
α	m/(m · K)	Temperaturkoeffizient für die Länge, mittlerer Längenausdehnungskoeffizient			
α	W/(m²·K)	Wärmeübergangskoeffizient			

1. Einführung

Die Thermodynamik ist das Gebiet der Physik, das alle Erscheinungen behandelt, für die die *Wärme* maßgebend ist. Außer den drei Basisgrößen *Länge*, *Masse* und *Zeit*, mit denen die Mechanik auskommt, benötigt sie die *Temperatur* als vierte Basisgröße. Die Mehrzahl aller physikalischen und chemischen Eigenschaften eines Stoffes hängt von der Temperatur ab. Unabhängig von Theorien über den inneren Aufbau der Stoffe werden nur makroskopische Erfahrungsergebnisse verwendet. Die durchzuführenden Experimente und ihre Auswertung sind allerdings schwieriger als auf anderen physikalischen Gebieten, weil es für die Wärme keine vollkommenen Isolatoren gibt.
Einfache mathematische Beziehungen lassen sich oft nur durch *Idealisierungen* erreichen, z. B. dadurch, daß man Gase als „*ideal*" oder Prozesse als „*reversibel*" betrachtet. Die Gültigkeit solcher Beziehungen ist dann stets begrenzt. Viele Stoffeigenschaften sind mathematisch so schwer zu fassen, daß sie in Form von Tabellen niedergelegt werden.
Nahezu alle Gebiete der Technik benötigen das Erfahrungsgut der Thermodynamik. Für Energieumwandlung und -wirtschaft, Verfahrenstechnik, chemische Industrie, Heizungs- und Kältetechnik sind ihre Erkenntnisse ebenso unentbehrlich wie bei der Konstruktion von Wärmekraftmaschinen, Wärmeübertragern, Verdichtern und Transformatoren. Bei der Bemessung einer Vielzahl von Bauteilen müssen *Wärmedehnungen* berücksichtigt werden, um die Wärmespannungen in zulässigen Grenzen zu halten.
Aufgabe der *Technischen Thermodynamik* ist die experimentelle Untersuchung des Verhaltens der für die Technik besonders wichtigen Stoffe (z. B. Wasserdampf) und die Darstellung der Ergebnisse in einer für die praktischen Bedürfnisse zweckmäßigen Form, z. B. in Tabellen, Diagrammen oder als dimensionslose Größen.

Die *Grundbegriffe*, die ersten beiden *Hauptsätze* und die Theorie der *Wärmeübertragung* sind für die gesamte Technik von großer Bedeutung. Die *Thermodynamik der Gase und Dämpfe* untersucht nur Vorgänge, bei denen keine Änderungen im molekularen Aufbau der Stoffe eintreten, Wärmevorgänge *mit chemischen Reaktionen* werden nicht behandelt*). Der Teil „Stationäre Strömungen kompressibler Stoffe und thermische Vorgänge" enthält ausschließlich Strömungsvorgänge, die *mit thermischen Vorgängen* gekoppelt sind**).

*) s. Abschn. CHEMIE
**) Strömungen ohne thermische Vorgänge s. Abschn. TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

2. Grundbegriffe

2.1. Allgemeines

Ein durch ausgeführte oder gedachte Wände abgegrenztes Volumen V, in dem sich die makroskopische Masse m in beliebigem Zustand befindet, wird einschließlich der Wände als *thermodynamisches System*, der gesamte übrige Raum, der u. U. in Teilräume aufgeteilt sein kann, als *Umgebung* bezeichnet. Ein *offenes System* kann mit der Umgebung Stoff und Energie austauschen, dagegen ist beim *geschlossenen System*, z. B. einem Gas in einem geschlossenen Behälter, kein Stoff-, sondern nur *Energietransport* über die Systemgrenzen in Form von Arbeit und/oder Wärme möglich. Prozesse, die in einem offenen oder geschlossenen System mit wärmedichten Wänden, durch die die Wärmeübertragung mit der Umgebung vollkommen unterbunden ist (tatsächlich nur näherungsweise zu realisieren), durchgeführt werden, bezeichnet man als *adiabate Prozesse*. Werden in ein geschlossenes adiabatisches System mehrere Stoffe mit verschiedenen Temperaturen gebracht, so treten auch ohne Arbeitszufuhr oder -abgabe *Zustandsänderungen* so lange ein, bis alle Stoffe die gleiche Temperatur haben. Dann ist das Gesamtsystem im *thermischen Gleichgewicht*. Der Ausgleichvorgang ist *irreversibel* (nichtumkehrbar), d. h., von selbst erreichen die einzelnen Stoffe nie mehr ihre ursprüngliche Temperatur. Die Erfahrungstatsache, daß Körper gleicher Temperatur im thermischen Gleichgewicht sind, wird als *nullter Hauptsatz der Thermodynamik* bezeichnet.
Energie, die ein nichtadiabatisches System infolge von Temperaturunterschieden an die Umgebung abgibt oder von ihr erhält, wird als *Wärme*(menge) Q oder, auf die Masseeinheit bezogen, als *spezifische Wärmemenge* $q = Q/m$ bezeichnet. Vereinbarungsgemäß wird Wärme, die bei höherer Umgebungstemperatur T_u in das System mit niedrigerer Temperatur T gelangt, *positiv* und Wärme, die bei $T > T_u$ vom System in die Umgebung strömt, *negativ* eingeführt. Einem System zugeführte oder entzogene Arbeit und Wärme werden als *Prozeßgrößen* bezeichnet. Beim *homogenen System* sind im thermischen Gleichgewicht die makroskopischen Eigenschaften (z. B. die *Dichte* $\varrho = m/V$ oder das *spezifische Volumen* $v = V/m$) in allen Teilen gleich, während das *heterogene System* aus einer Anzahl verschiedener homogener Teilsysteme (*Phasen*) besteht.
Um den Zustand eines Systems zahlenmäßig angeben zu können, werden Eigenschaften benutzt, die makroskopisch meßbar und unabhängig von der Gestalt und der Art und Weise sind, durch die das System in den vorhandenen Zustand gelangte. Absolute Temperatur T, Absolutdruck p und spezifisches Volumen v sind mengenunabhängige *thermische Zustandsgrößen*.

2.2. Einheiten der Thermodynamik*)

2.2.1. Temperatureinheiten

Als Basiseinheit für die Temperatur und die Angabe von Temperaturdifferenzen ist das *Kelvin* (K) festgelegt. Das Kelvin ist der 273,16te Teil der (thermodynamischen) Temperatur des Tripelpunkts von Wasser. Die *thermodynamische Temperatur* ergibt sich unabhängig von Art und Eigenschaften der Meßmittel aus dem für das Umwandeln von Wärme in mechanische Arbeit maßgebenden ersten und zweiten Hauptsatz. Sie läßt sich mit Thermometern messen, die mit idealen Gasen arbeiten. Die nicht unterschreitbare untere Grenztemperatur von 0 K ist der *absolute Temperaturnullpunkt*, und die von 0 K gezählte Temperatur wird als *absolute Temperatur T* bezeichnet.

Temperaturskale. Für die Internationale Praktische Temperaturskale (IPTS) von 1968 werden elf verschiedene Gleichgewichtstemperaturen chemisch reiner Stoffe als Festpunkte verwendet (Tabelle 1). Außer bei drei Tripelpunkten und einem Siedepunkt des Wasserstoffs ist ein Druck von 101,325 kPa vorgeschrieben. In Tabelle 1 sind die geschätzte Unsicherheit und für Temperaturen über 1337,58 K vier sekundäre Bezugspunkte mit angegeben.

---

*) s. auch Abschn. Größen und Einheiten



Tabelle 1. Festpunkte der Internationalen Praktischen Temperaturskale (IPTS) von 1968. Ep. Erstarrungspunkt; Sdp. Siedepunkt; Smp. Schmelzpunkt; Tp. Tripelpunkt

Punkt		T in K	t in °C	Unsicherheit in K
Tp.	Wasserstoff	13,81	−259,34	0,01
Sdp.	Wasserstoff bei 33,330 60 kPa	17,042	−256,108	0,01
Sdp.	Wasserstoff	20,28	−252,87	0,01
Sdp.	Neon	27,102	−246,048	0,01
Tp.	Sauerstoff	54,361	−218,789	0,01
Sdp.	Sauerstoff	90,188	−182,962	0,01
Tp.	Wasser	273,16	0,01	nach Definition
Sdp.	Wasser	373,15	100	0,005
Ep.	Zink	692,73	419,58	0,03
Ep.	Silber	1 235,08	961,93	0,2
Ep.	Gold	1 337,58	1 064,43	0,2
Ep.	Nickel	1 728	1 455	
Ep.	Platin	2 045	1 772	
Ep.	Rhodium	2 720	2 447	
Smp.	Wolfram	3 660	3 387	

Außer der absoluten Temperatur T ist die CELSIUS-Temperatur t (°C) gesetzlich zugelassen (mit 100 °C beim Siedepunkt von reinem Wasser bei 101,325 kPa — Wasserdampfpunkt — und mit 0 °C beim Schmelzpunkt des Eises bei 101,325 kPa). Der Tripelpunkt von reinem Wasser bei 611 Pa ist dabei +0,01 °C und die absolute Temperatur des Eispunkts 273,15 K. Die Temperaturdifferenzen von 1 °C und 1 K sind gleich, *sollen jedoch in Kelvin angegeben werden.*

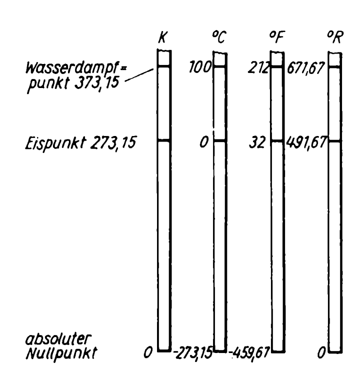


Bild 1. Werte für den absoluten Nullpunkt, Eispunkt und Wasserdampfpunkt in den verschiedenen Temperaturskalen

Im Ausland verwendete man früher die Temperaturskale nach FAHRENHEIT, bei der die absolute Temperatur F in Grad Rankine (°R) angegeben wird und der absolute Nullpunkt bei −459,67 °F liegt. Für die Umrechnung gelten die Zahlenwertgleichungen:

$$
\begin{aligned}
F &= f + 459{,}67 = 9T/5 = (9t/5) + 491{,}67 \\
T &= t + 273{,}15 = 5F/9 = (5f/9) + 255{,}37 \\
f &= F - 459{,}67 = (9T/5) - 459{,}67 = (9t/5) + 32 \\
t &= T - 273{,}15 = (5F/9) - 273{,}15 = (5f/9) - 17{,}78
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{|cccc|}
F & f & T & t \\
\hline
°R & °F & K & °C
\end{array}
\qquad (1)
$$

Die Werte für den *absoluten Nullpunkt*, den *Eispunkt* und den *Wasserdampfpunkt* dieser Temperaturskalen sind Bild 1 zu entnehmen.

2.2.2. Masse-, Mengen- und Druckeinheiten

Die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps ist die Basiseinheit der Masse (*Kilogramm*). Außerdem ist als Basiseinheit für die Stoffmenge das *Mol* bei Stoffen mit bekannter chemischer Zusammensetzung oder chemisch einheitlichem Aufbau zweckmäßig. In der Technischen Thermodynamik verwendet man meist den 1000fachen Wert, das Kilomol (kmol). Bei der Molzahl n einer beliebigen Stoffmenge wird ihre Masse (M molare Masse):

$$m = nM \tag{2}$$

Flüssigkeits- und Gasmengen lassen sich anschaulich durch ihr Volumen bei vereinbarten Werten von Temperatur und Druck angeben, z. B. als V_0 beim *physikalischen Normzustand* ($p_0 = 101{,}325$ kPa; $T_0 = 273{,}15$ K). Mit der Dichte ϱ_0 oder dem spezifischen Volumen v_0 wird die Masse:

$$m = V_0\varrho_0 = V_0/v_0 \tag{3}$$

Die von der Krafteinheit *Newton* (N) abgeleitete kohärente Druckeinheit, das *Pascal* (Pa), ergibt sich als Druck der gleichmäßig verteilten Normalkraft von 1 N auf die Fläche von 1 m² [1 Pa = 1 N/m² = 1 kg/(m · s²)]. Da die Zahlenwerte in dieser Einheit meist unbequem groß werden, sind das Kilopascal (kPa), das Megapascal (MPa) oder z. Z. noch das Bar*) (= 10^5 Pa) zu bevorzugen. Das Bar unterscheidet sich nur wenig von der in der Technik früher verwendeten technischen Atmosphäre (1 at = 1 kp/cm² = 0,980665 bar ≈ 98,1 kPa).

In der Thermodynamik wird stets mit dem *Absolutdruck* p und nicht mit dem Druckunterschied gegenüber dem äußeren Luftdruck p_B (Überdruck $\Delta p_ü = p - p_B$; Unterdruck $\Delta p_u = p_B - p$) gerechnet. Wird ein Gasdruck p oder Druckunterschied Δp als vertikale Höhendifferenz l der Flüssigkeitsspiegel mit einer Meßflüssigkeit der Dichte ϱ bei der Temperatur T gemessen, so ist die Länge l der Flüssigkeitssäule auf eine Bezugstemperatur (meist 273 K, nur bei Wasser 277 K) umzurechnen, bei der die Länge l_0 und die Dichte der Meßflüssigkeit ϱ_0 ist. Mit der Fallbeschleunigung g am Meßort gilt:

$$p = g\varrho_0 l_0 \tag{4}$$

Der Druck von 1 mm Quecksilbersäule bei 0 °C ($\varrho_0 = 13\,595$ kg/m³) und $g = 9{,}80665$ m/s² wurde früher als Druckeinheit (1 Torr) verwendet (1 Torr = 133,32 Pa).

2.2.3. Wärmeeinheiten

Als abgeleitete kohärente Wärmeeinheit ist die mechanische Energieeinheit *Joule* (J) festgelegt (1 J = 1 W · s = 1 N · m = 1 kg · m²/s²). In der Technik verwendet man als nichtkohärente größere Wärmeeinheiten das Kilojoule (kJ) und die Kilowattstunde (kWh, 1 kWh = 3,6 MJ).

Früher wurde die bei 101,325 kPa Druck zum Erwärmen von 1 kg Wasser von 14,5 °C auf 15,5 °C benötigte Wärme als Einheit mit *Kilokalorie* ($\text{kcal}_{15°}$) bezeichnet. Bei den international abgestimmten Wasserdampftabellen benutzte man den 1,00035fachen Wert (kcal_{IT}):

$$1\ \text{kcal}_{15°} = 4{,}1855\ \text{kJ}, \qquad 1\ \text{kcal}_{IT} = 4{,}1868\ \text{kJ}$$

2.3. Ausdehnung von festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen

Das Volumen V einer bestimmten Stoffmasse m hängt stets von der Temperatur, bei Gasen auch vom Druck ab. Bei festen und flüssigen Körpern ist der Druckeinfluß meist vernachlässigbar gering, z. B. verkleinert sich das spezifische Volumen von Wasser bei 10 MPa Druckzunahme nur um 0,5%. Man spricht daher von der *Inkompressibilität* der Flüssigkeiten und festen Körper.

*) Befristet gültig. Befristung wird nach Vorliegen internationaler Beschlüsse festgelegt.

Feste Körper

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

dl/dT wahre Längenzunahme dl bei Temperaturerhöhung um dT,
l Länge bei beliebiger Temperatur T,
l_0 Länge bei $T = 273$ K,
$\alpha\Big|_{T_0}^{T}$ mittlerer thermischer *Längenausdehnungskoeffizient* zwischen T_0 und T, zur Vereinfachung wird im folgenden dafür meist α geschrieben,
$\gamma\Big|_{T_0}^{T}$ mittlerer thermischer *Raumausdehnungskoeffizient* zwischen T_0 und T, zur Vereinfachung wird im folgenden dafür meist γ geschrieben,
$T - T_0$ Temperaturdifferenz, im folgenden wird dafür meist ΔT geschrieben.

Da der *wahre thermische Längenausdehnungskoeffizient* (linearer Ausdehnungskoeffizient) $\alpha_w = (dl/l)\, dT$ eine temperaturabhängige Stoffeigenschaft ist, muß die Längenzunahme bei der Temperaturerhöhung von $T_0 = 273$ K auf T mit dem Mittelwert $\alpha\Big|_{T_0}^{T} \cdot (T - T_0) = \alpha\, \Delta T$ (Tabelle 2) berechnet werden:

$$l - l_0 = l_0 \alpha\Big|_{T_0}^{T} \cdot (T - T_0) = l_0 \alpha\, \Delta T \tag{5}$$

Bei einer Temperaturänderung von T_1 auf T_2 ändert sich die Länge von l_1 auf l_2:

$$l_2 - l_1 = l_0 \left[\alpha\Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - \alpha\Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0)\right] \tag{6}$$

Entsprechend gilt mit dem *mittleren thermischen Raumausdehnungskoeffizienten* (kubischer Ausdehnungskoeffizient) für die Änderung des spezifischen Volumens ($v = 1/\varrho$):

$$v - v_0 = v_0 \gamma\Big|_{T_0}^{T} \cdot (T - T_0) = v_0 \gamma\, \Delta T \tag{7}$$

$$v_2 - v_1 = v_0 \left[\gamma\Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - \gamma\Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0)\right] \tag{8}$$

Bei *homogenen festen Körpern* wird

$$\gamma \approx 3\alpha \tag{9}$$

weil die quadratischen und kubischen Glieder von α vernachlässigbar klein sind.

Flüssigkeiten

Bei Flüssigkeiten sind die thermischen Raumausdehnungskoeffizienten meist größer als bei festen Körpern (Tabelle 3). Der geringe Einfluß des Drucks ist aus den Werten für 573 K in der Tabelle zu erkennen.
Bei *Flüssigkeitsbarometern* und *-manometern* (mittlerer Raumausdehnungskoeffizient der Meßflüssigkeit γ_f), bei denen am Maßstab (mittlerer Längenausdehnungskoeffizient α_M) die Länge l bei der Temperatur T abgelesen wird, ist vor dem Berechnen des Drucks p zunächst die Länge l_0 zu ermitteln:

$$l_0 = l(1 + \alpha_M\, \Delta T - \gamma_f\, \Delta T) \tag{10}$$

Beispiel. An einem Barometer wird bei 40 °C eine Länge der Quecksilbersäule von $l = 750{,}0$ mm abgelesen. Die Längenskale ist in Jenaer Glas 16^{III} eingeritzt. Die Fallbeschleunigung am Meßort ist gleich dem Normwert von 9,806 65 m/s². Wie groß ist der Luftdruck p? (Quecksilber: $\varrho_0 = 13\,595$ kg/m³).

Aus Tabelle 2: $\alpha_M\, \Delta T = 0{,}81 \cdot 10^{-3}$ m/m $\cdot$ (40/100) $= 0{,}324 \cdot 10^{-3}$ m/m
Aus Tabelle 3: $\gamma\, \Delta T = 7{,}285 \cdot 10^{-3}$ m³/m³
Nach Gl. (10) berechnet sich die Länge l_0 aus:

$l_0 = 0{,}7500(1 + 0{,}324 \cdot 10^{-3} - 7{,}285 \cdot 10^{-3})$ m $= 744{,}8$ mm; es ergibt sich ein Luftdruck von:

$p = g\varrho_0 l_0 = 9{,}806\,65 \cdot 13\,595 \cdot 0{,}7448$ kg/(m · s²) $= 99{,}3$ kPa

Tabelle 2. Thermische Längenänderung fester Körper $\alpha\,\Delta T$ bei Temperaturänderung von $T_0 = 273$ K auf T

Stoff	$\alpha\,\Delta T$ in 10^{-3} m/m bei Temperaturänderung auf Temperatur T in K										
	20	83	173	373	473	573	673	773	873	1073	1273	1773
Aluminium	−3,72	−3,43	−2,20	2,38	4,90	7,65	10,60	13,70	17,00	—	—	—
Blei	−6,21	−5,08	—	2,90	5,93	9,33	—	—	—	—	—	—
Bronze (0,85 Cu, 0,09 Mn, 0,06 Sn)	—	−2,84	—	1,75	3,58	5,50	7,51	9,61	—	—	—	—
Gold	−2,97	−2,48	—	1,42	2,92	4,44	6,01	7,62	9,35	13,00	—	—
Grauguß	—	−1,59	—	1,04	2,21	3,49	4,90	6,44	8,09	11,76	—	—
Iridium	—	−1,07	−0,60	0,66	—	—	—	—	—	—	7,90	12,70
Jenaer Glas 16III	−1,22	−1,13	—	0,81	1,67	2,60	3,59	4,63	—	—	—	—
Jenaer Glas 59III	−0,90	−0,82	—	0,59	1,20	1,83	2,47	3,12	—	—	—	—
Kupfer	−2,97	−2,65	−1,55	1,65	3,38	5,15	7,07	9,04	11,09	—	—	—
Magnesia, gesintert	—	—	—	—	2,45	3,60	4,90	6,30	7,75	10,80	13,90	22,60
Magnesium	—	−4,01	—	2,60	5,41	8,36	11,53	14,88	—	—	—	—
Manganin (0,86 Cu, 0,12 Mn, 0,02 Ni)	—	—	—	1,75	3,65	5,60	7,55	9,70	11,90	16,80	—	—
Messing (0,62 Cu, 0,38 Zn)	−3,55	−3,11	—	1,84	3,85	6,03	8,39	—	—	—	—	—
Molybdän	—	−0,79	—	0,52	1,07	1,64	2,24	—	—	—	—	—
Nickel	—	−1,89	—	1,30	2,75	4,30	5,95	7,60	9,27	12,89	16,80	—
Palladium	—	−1,93	−1,07	1,19	2,42	3,70	5,02	6,38	7,79	10,74	13,86	—
Platin	—	−1,51	−0,84	0,90	1,83	2,78	3,76	4,77	5,80	7,94	10,19	—
Platin-Iridium-Legierung (0,8 Pt, 0,2 Ir)	—	−1,43	—	0,83	1,70	2,59	3,51	4,45	5,43	7,47	9,62	15,49
Porzellan	—	−0,32	—	0,30	0,66	1,03	1,41	1,82	2,24	3,10	4,31	—
Quarzglas	+0,08	+0,02	−0,015	0,051	0,117	0,188	0,254	0,306	0,36	0,45	0,54	—
Silber	−3,74	−3,22	—	1,95	4,00	6,08	8,23	10,43	12,70	17,65	—	—
Sinterkorund	—	—	—	—	1,30	2,00	2,75	3,60	4,45	6,25	8,15	13,15
Stahl (hart)	−1,80	−1,64	—	1,17	2,45	3,83	5,31	6,91	8,60	—	—	—
Wolfram	—	−0,73	—	0,45	0,90	1,40	1,90	2,25	2,70	3,60	4,60	7,45
Zink	—	−1,85	—	1,65	—	—	—	—	—	—	—	—
Zinn	—	−4,24	—	2,67	—	—	—	—	—	—	—	—

Die an einem Längenmaßstab abgelesenen Längen stimmen nur bei einer Temperatur, die auf genauen Maßstäben angegeben wird (übliche Bezugstemperatur bei Längenmessungen 293 K).

Tabelle 3. Raumausdehnung von Flüssigkeiten $\gamma \Delta T$ bei 101,325 kPa bei Temperaturänderung von $T_0 = 273$ K auf T

Stoff	$\gamma \Delta T$ in 10^{-3} m³/m³ bei Temperaturänderung auf Temperatur T in K													
	293	313	333	353	373	423	473	523	573	593	623	673	723	773
Äthylalkohol	21,7	44	67	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Azeton	27,5	58,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Benzol	24	50	77,5	107	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Quecksilber	3,64	7,285	10,937	14,596	18,26	27,48	36,81	46,28	55,90	55,91**)	65,76**)	75,85**)	86,24**)	96,96**)
Toluol	21,5	44	68	93,5	120,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Wasser*)	1,8	7,9	17,1	29,0	43,5	90,6	156,5	251,2	403,6	—	—	—	—	—

*) Werte gelten im flüssigen Sättigungszustand für Erwärmen von $T_0 = 277$ K auf T nach Wasserdampftafel [19]
**) Werte gelten bei 1,961 MPa

Fadenkorrektur bei Flüssigkeitsthermometern. Die Thermometeranzeige stimmt, wenn die gesamte *Flüssigkeit* (mittlerer Raumausdehnungskoeffizient γ_f), das *Glas* (mittlerer Längenausdehnungskoeffizient α_G) und der *Maßstab*, der beim Einschlußthermometer auf einem besonderen Milchglas (mittlerer Längenausdehnungskoeffizient α_M) angebracht ist, die zu messende Temperatur t haben. Ragt jedoch ein Teil des Flüssigkeitsfadens ($\triangle$ n Kelvin) mit einer geringeren mittleren Temperatur t_F aus dem Meßraum heraus, so ist die angezeigte Temperatur t' zu niedrig:

$$t = t' + n\gamma_{sch}(t' - t_F) \tag{11}$$

Der scheinbare Raumausdehnungskoeffizient der Meßflüssigkeit im Glas γ_{sch} ist beim *Stabthermometer*, bei dem die Skale unmittelbar am Glasrohr angebracht ist:

$$\gamma_{sch} = \gamma_f - 3\alpha_G \tag{12}$$

und beim *Einschlußthermometer:*

$$\gamma_{sch} = \gamma_f - 2\alpha_G - \alpha_M \tag{13}$$

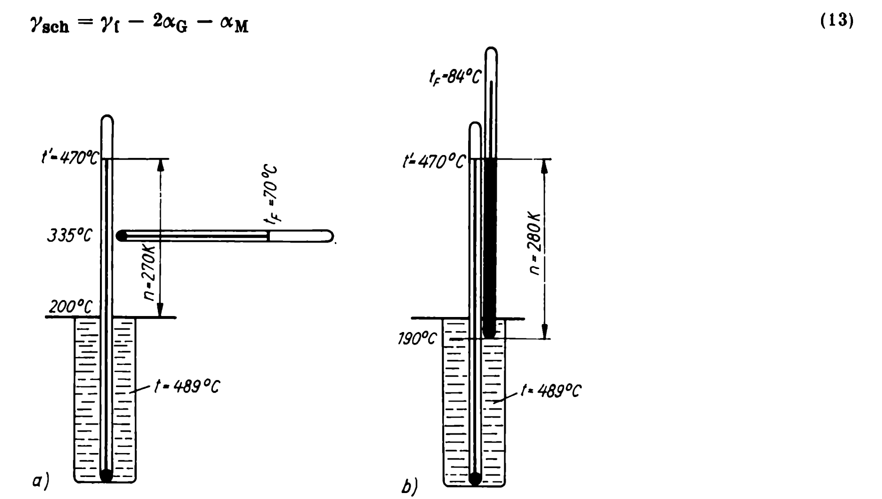


Bild 2. Anordnung eines zweiten Thermometers zum Messen der mittleren Fadentemperatur des Hauptthermometers. a) normales Thermometer; b) Fadenthermometer nach MAHLKE

Beispiel. An einem Quecksilberstabthermometer mit 1,96 MPa Druck aus Jenaer Glas 59III, das bei 200 °C (T = 473 K) aus der Thermometertasche der Dampfleitung tritt, wird t' = 470 °C (T' = 743 K) abgelesen. Ein zweites Thermometer (Bild 2a), dessen Kugel sich in halber Höhe des herausragenden Fadens befindet, zeigt die Temperatur t_F = 70 °C (T_F = 343 K) an. Wie hoch ist die wahre Dampftemperatur?

Aus Tabelle 2 sind die Werte $\alpha_G\Big|_{273\,K}^{673\,K} \cdot (673\,K - 273\,K) = 2{,}47 \cdot 10^{-3}$ m/m und $\alpha_G\Big|_{273\,K}^{773\,K} \cdot (773\,K - 273\,K) = 3{,}12 \cdot 10^{-3}$ m/m zu entnehmen und für T' = 743 K zu interpolieren:

$$\alpha_G\Big|_{273\,K}^{743\,K} \cdot (743\,K - 273\,K) = 2{,}47 \cdot 10^{-3}\,m/m + (3{,}12 - 2{,}47) \cdot 10^{-3} \cdot (70/100)\,m/m = 2{,}925 \cdot 10^{-3}\,m/m$$

$$\alpha_G\Big|_{273\,K}^{743\,K} = (2{,}925 \cdot 10^{-3}/470)\,m/(m \cdot K) = 6{,}22 \cdot 10^{-6}\,m/(m \cdot K)$$

Aus Tabelle 3 ergeben die Werte $\gamma_f\Big|_{273\,K}^{723\,K} \cdot (723\,K - 273\,K) = 86{,}24 \cdot 10^{-3}\,m^3/m^3$ und $\gamma_f\Big|_{273\,K}^{773\,K} \cdot (773\,K - 273\,K) = 96{,}96 \cdot 10^{-3}\,m^3/m^3$ in entsprechender Weise für T' = 743 K:

$$\gamma_f\Big|_{273\,K}^{743\,K} \cdot (743\,K - 273\,K) = 86{,}24 \cdot 10^{-3}\,m^3/m^3 + (96{,}96 - 86{,}24) \cdot 10^{-3}\,m^3/m^3 \cdot (20/50) = 90{,}53 \cdot 10^{-3}\,m^3/m^3$$

$$\gamma_f\Big|_{273\,K}^{743\,K} = (90{,}53 \cdot 10^{-3}/470)\,m^3/(m^3 \cdot K) = 192{,}6 \cdot 10^{-6}\,m^3/(m^3 \cdot K)$$

Der scheinbare Raumausdehnungskoeffizient ist:

$$\gamma_{sch} = (192{,}6 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 6{,}22 \cdot 10^{-6})\,m^3/(m^3 \cdot K) = 174{,}0 \cdot 10^{-6}\,m^3/(m^3 \cdot K)$$

und nach Gl. (11) mit $n = 270$ K die wahre Dampftemperatur $t = (470 + 270 \cdot 174{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 400)$ °C $= 489$ °C.
Die Temperatur t_F läßt sich auch mit einem *Fadenthermometer nach* MAHLKE, das ein röhrenförmiges Quecksilbergefäß mit einer Länge hat, die mindestens gleich der Länge des herausragenden Flüssigkeitsfadens des Hauptthermometers ist, und an das eine enge Kapillare mit der Skale anschließt, ermitteln. Das Fadenthermometer wird in der aus Bild 2b ersichtlichen Weise neben das Hauptthermometer gehalten und zeigt $t_F = 84$ °C an, wobei in Gl. (11) $n = 280$ K einzusetzen ist.

Gase

Bei Gasen läßt sich der wahre thermische Ausdehnungskoeffizient nur für jeweils *gleichbleibenden* Druck angeben. Man schreibt als partiellen Differentialquotienten $(\partial V/\partial T)_p = V_0\gamma$. Bei sehr kleinem Absolutdruck ($p \approx 0$) haben alle Gase bei 273,15 K den gleichen Raumausdehnungskoeffizienten $\gamma = (1/273{,}15)$ m³/(m³ · K). Trifft dies auch bei höherem Druck hinreichend genau zu, z. B. für Temperaturen über 273,15 K und Drücke unter etwa 2 MPa bei Luft, Sauerstoff, Stickstoff und Helium, so spricht man von Gasen im Idealzustand (vollkommenen Gasen), für die bei konstantem Druck das Gasgesetz von GAY-LUSSAC gilt ($T_0 = 273{,}15$ K):

$$v = v_0 T/T_0 \tag{14}$$

2.4. Wahre und mittlere spezifische und molare Wärmekapazität

Die *wahre spezifische Wärmekapazität* c_{pw} ist die zum Erwärmen einer Stoffmasse von 1 kg um 1 K bei konstantem Druck erforderliche Wärme. Dabei dürfen im Stoff keine mit Wärmetönung verbundenen physikalischen oder chemischen Vorgänge erfolgen:

$$c_{pw} = (\partial q/\partial T)_p \tag{15}$$

Die *wahre molare Wärmekapazität* $\bar{c}_{pw}$ wird auf eine Stoffmenge von 1 kmol bezogen. Bei festen Stoffen, Flüssigkeiten und Gasen im Idealzustand sind die wahren Wärmekapazitäten nicht oder sehr wenig vom Druck beeinflußt, jedoch außer bei einatomigen Gasen abhängig von der Temperatur. Bei allen festen Körpern werden sie in der Nähe des absoluten Nullpunkts sehr klein und erreichen bei allen Metallen fast denselben Höchstwert von 25,1 kJ/(kmol · K) (DULONG-PETITsches Gesetz). Die *Temperaturabhängigkeit* läßt sich aus den c_{pw}-Werten verschiedener Flüssigkeiten in Tabelle 4 und den $\bar{c}_{pw}$-Werten verschiedener Gase im Idealzustand in Tabelle 5 erkennen. Bei realen Gasen hängt c_{pw} von Temperatur und Druck ab.

Tabelle 4. Wahre spezifische Wärmekapazität c_{pw} von Flüssigkeiten bei 101,325 kPa in Abhängigkeit von der Temperatur T

Stoff	c_{pw} in kJ/(kg · K) bei Temperatur T in K				
	173	223	273	323	373
Äthylalkohol	1,88	2,01	2,30	2,80	—
Benzol	0,96*)	—	—	1,79	—
Heptan	—	2,045	2,185	—	—
Methylalkohol	—	2,30	2,43	2,55	—
Quecksilber	0,1256*)	—	0,1402	—	0,1373
Schwefelkohlenstoff	0,811	—	0,996	—	—
Wasser	—	—	4,20	4,18**)	4,22

*) fest; **) Minimum bei 307 K mit $c_p = 4{,}17$ kJ/(kg · K)

Tabelle 5. Wahre molare Wärmekapazität $\bar{c}_{pw}$ von Gasen im Idealzustand ($p \approx 0$) nach [12] ohne Dissoziation

Temperatur T in K	$\bar{c}_{pw}$ in kJ/(kmol · K)											
	H_2	N_2	O_2	trockene Luft	CO	CO_2	SO_2	H_2O	HN_3	C_2H_4	CH_4	C_2H_4
273	28,72	29,14	29,34	29,08	29,14	36,03	38,95	33,43	34,98	42,40	34,50	41,90
373	29,14	29,21	29,88	29,28	29,30	40,58	42,59	33,91	37,58	49,22	39,37	52,00
473	29,28	29,50	30,88	29,68	29,68	43,82	45,80	34,82	40,68	54,34	44,81	61,73
573	29,35	29,98	31,84	30,27	30,27	47,02	48,28	35,83	43,80	57,40	50,86	70,08
673	29,42	30,60	32,82	30,97	30,98	49,33	50,18	37,01	46,60	60,24	55,88	77,05
773	29,54	31,28	33,57	31,68	31,70	51,28	51,82	38,18	49,92	62,84	61,15	83,35
873	29,80	31,92	34,23	32,32	32,43	52,87	52,96	39,40	52,80	65,14	65,53	88,60
973	30,14	32,58	34,79	32,82	33,08	54,20	53,85	40,69	55,42	67,13	69,50	93,35
1073	30,48	33,11	35,20	33,43	33,60	55,33	54,56	41,92	57,88	69,05	72,85	97,55
1173	30,90	33,61	35,61	33,91	34,10	56,20	55,06	43,12	60,20	70,77	76,35	101,2
1273	31,38	34,08	35,96	34,38	34,52	56,94	55,48	44,30	62,24	72,0	79,2	104,4
1373	31,78	34,50	36,26	34,70	34,88	57,50	55,85	45,36	64,15	—	—	—
1473	32,20	34,83	36,53	35,04	35,20	58,07	56,15	46,40	65,80	—	—	—
1573	32,64	35,10	36,80	35,31	35,47	58,51	56,38	47,28	67,28	—	—	—
1673	33,04	35,33	37,04	35,57	35,72	58,92	56,59	48,23	68,60	—	—	—
1773	33,40	35,58	37,28	35,74	35,88	59,27	56,79	49,00	69,8	—	—	—
2023	34,32	36,08	37,82	36,27	36,31	59,97	57,05	50,75	72,3	—	—	—
2273	35,1	36,4	38,5	36,7	36,6	60,4	57,3	52,1	74,2	—	—	—
2523	35,8	36,7	39,0	37,1	36,9	60,7	57,5	53,3	75,6	—	—	—
2773	36,3	37,0	39,5	37,4	37,1	61,0	57,6	54,2	76,8	—	—	—
3023	36,8	37,2	39,9	37,6	37,3	61,2	57,7	54,9	77,9	—	—	—
3273	37,4	37,3	40,3	37,8	37,4	61,4	57,8	55,4	78,4	—	—	—

Tabelle 6. Mittlere spezifische Wärmekapazität $c_p\Big|_{T_0}^{T}$ fester Stoffe zwischen $T_0 = 273$ K und T bei 101,325 kPa

Stoff	$c_p\Big|_{T_0}^{T}$ in kJ/(kg · K) zwischen $T_0 = 273$ K und Temperatur T in K									
	73	173	373	473	573	673	773	873	1073	1273
Aluminium	0,687	0,812	0,908	0,934	0,955	0,971	0,993	—	—	—
Blei	0,120	0,124	0,131	0,134	0,136	—	—	—	—	—
Chrom	0,297	0,377	0,452	—	0,486	—	—	0,524	—	0,565
Eisen (rein)	0,335	0,402	0,464	0,486	0,511	0,532	0,557	0,582	0,670	0,704
Gold	0,117	0,126	0,130	—	0,132	—	—	0,136	—	0,141
Iridium	0,109	0,126	0,134	—	—	—	—	—	—	—
Kupfer	0,327	0,364	0,388	—	—	0,406	—	—	0,427	—
Magnesium	0,837	0,942	1,034	—	1,088	—	1,13	—	—	—
Mangan	—	0,44	0,498	—	0,532	—	—	—	—	—
Messing (0,6 Cu; 0,4 Zn)	—	0,356	0,383	0,394	—	0,414	—	—	—	—
Molybdän	0,197	0,230	0,255	—	—	0,264	—	—	—	0,280
Nickel	0,347	0,414	0,452	0,469	0,494	0,515	0,519	0,524	0,531	0,544
Platin	0,1047	0,1282	0,1344	—	—	—	0,1394	—	—	—
Quarzglas	0,469	0,599	0,766	—	0,858	—	0,954	—	—	1,051
Silber	0,2114	0,2258	0,2352	—	0,2394	—	—	0,249	—	—
Stahl (1,3% C, 0,1% Mn, 0,1% Si)	—	—	0,494	—	—	0,574	—	—	0,657	—
Wismut	0,113	0,1197	0,1247	0,1272	—	—	—	—	—	—
Wolfram	0,1088	0,1256	0,1352	—	—	—	0,1380	—	—	0,1436
Zink	0,343	0,368	0,389	0,398	0,410	0,419	—	—	—	—
Zinn	—	0,218	0,230	0,234	—	—	—	—	—	—

Tabelle 7. Mittlere molare Wärmekapazität $\bar{c}_p\Big|_{T_0}^{T}$ von Gasen im Idealzustand ($p \approx 0$) zwischen $T_0 = 273$ K und T

Temperatur T in K	$\bar{c}_p\Big|_{T_0}^{T}$ in kJ/(kmol · K)											
	H_2	N_2	O_2	trockene Luft	CO	CO_2	SO_2	H_2O	NH_3	C_2H_2	CH_4	C_2H_4
273	28,72	29,14	29,34	29,08	29,14	36,03	38,95	33,43	34,98	42,40	34,50	41,90
373	28,97	29,20	29,52	29,14	29,20	38,38	40,78	33,63	36,30	46,08	36,24	47,20
473	29,10	29,31	29,92	29,33	29,31	40,42	42,50	34,00	37,68	48,78	39,34	52,20
573	29,18	29,49	30,40	29,53	29,56	42,10	44,08	34,42	39,68	51,30	42,30	56,75
673	29,23	29,68	30,87	29,80	29,82	43,58	45,40	34,93	41,15	53,18	45,10	61,0
773	29,28	29,92	31,37	30,08	30,10	45,03	46,54	35,47	42,61	54,85	47,78	64,9
873	29,36	30,18	31,80	30,40	30,42	46,20	47,53	36,02	44,05	56,45	50,40	68,4
973	29,44	30,48	32,17	30,70	30,76	47,22	48,38	36,60	45,50	57,80	52,92	71,8
1073	29,57	30,78	32,52	31,06	31,10	48,17	49,10	37,20	46,9	59,13	55,2	74,9
1173	29,70	31,08	32,87	31,33	31,42	49,02	49,80	37,81	48,3	60,3	57,3	77,4
1273	29,83	31,36	33,17	31,60	31,72	49,74	50,30	38,41	49,7	61,45	59,3	79,9
1373	29,98	31,62	33,42	31,88	31,98	50,45	50,75	39,01	–	–	–	–
1473	30,12	31,86	33,67	32,15	32,25	51,05	51,20	39,60	–	–	–	–
1573	30,28	32,12	33,88	32,37	32,50	51,60	51,65	40,15	–	–	–	–
1673	30,46	32,37	34,09	32,62	32,70	52,11	51,95	40,70	–	–	–	–
1773	30,64	32,54	34,30	32,82	32,88	52,62	52,25	41,20	–	–	–	–
2023	31,07	32,98	34,80	33,26	33,32	53,55	52,90	42,52	–	–	–	–
2273	31,5	33,4	35,2	33,6	33,7	54,4	53,45	43,6	–	–	–	–
2523	32,0	33,8	35,6	34,0	34,1	55,1	53,9	44,7	–	–	–	–
2773	32,3	34,1	36,0	34,3	34,4	55,7	54,3	45,5	–	–	–	–
3023	32,8	34,3	36,3	34,5	34,6	56,15	54,6	46,3	–	–	–	–
3273	33,2	34,6	36,7	34,7	34,8	56,6	54,8	47,0	–	–	–	–

Bei Prozessen mit konstantem Druck, bei denen sich die absolute Temperatur ändert, ist die erforderliche spezifische oder molare Wärme q_p oder $\bar{q}_p$ mit den mittleren Wärmekapazitäten zu berechnen, die in Tabellen meist zwischen $T_0 = 273$ K und T angegeben werden ($c_p\Big|_{T_0}^{T} = c_p$ für feste Stoffe Tabelle 6; $\bar{c}_p\Big|_{T_0}^{T} = \bar{c}_p$ für Gase im Idealzustand Tabelle 7):

$$q_p = c_p\Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - c_p\Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0) = c_p\Big|_{T_1}^{T_2} \cdot (T_2 - T_1) \tag{16}$$

oder für 1 kmol:

$$\bar{q}_p = \bar{c}_p\Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - \bar{c}_p\Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0) = \bar{c}_p\Big|_{T_1}^{T_2} \cdot (T_2 - T_1) \tag{17}$$

Während bei festen Stoffen und Flüssigkeiten infolge der sehr kleinen Raumausdehnungskoeffizienten die Wärmekapazitäten c_v bei Prozessen *mit konstantem Volumen* sich meist vernachlässigbar wenig von den Werten bei konstantem Druck unterscheiden, muß bei Gasen der Unterschied stets berücksichtigt werden, $c_v = (\partial q/\partial T)_v$. Es gelten für 1 kg:

$$q_v = c_v\Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - c_v\Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0) \tag{18}$$

oder für 1 kmol:

$$\bar{q}_v = \bar{c}_v\Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - \bar{c}_v\Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0) \tag{19}$$

Im *idealen Gaszustand* ist $\bar{c}_v$ um die *molare Gaskonstante* $\bar{R}$ kleiner als $\bar{c}_p$:

$$\bar{c}_v = \bar{c}_p - \bar{R} \tag{20}$$

und das *Verhältnis* $\varkappa$ der *spezifischen oder molaren Wärmekapazitäten* wird:

$$\varkappa = c_p/c_v = \bar{c}_p/\bar{c}_v = 1 + \bar{R}/\bar{c}_v = 1 + [\bar{R}/(\bar{c}_p - \bar{R})] \tag{21}$$

Bei *einatomigen Gasen*, bei denen c_p nicht von der Temperatur abhängt, ist $\varkappa$ konstant 5/3. Für verschiedene *mehratomige Gase* ist das Verhältnis der mittleren Wärmekapazitäten für Temperaturen zwischen 273 K und 3273 K Tabelle 8 zu entnehmen.

Tabelle 8. Verhältnis $\varkappa = \bar{c}_p/\bar{c}_v$ der mittleren molaren Wärmekapazitäten im Idealzustand ($p \approx 0$) zwischen $T_0 = 273$ K und T

Temperatur T in K	$\varkappa = \bar{c}_p/\bar{c}_v$ für											
	H_2	N_2	O_2	trockene Luft	CO	CO_2	SO_2	H_2O	NH_3	C_2H_2	CH_4	C_2H_4
273	1,407	1,399	1,395	1,400	1,399	1,300	1,271	1,331	1,312	1,244	1,318	1,247
373	1,402	1,398	1,392	1,399	1,398	1,276	1,256	1,329	1,297	1,220	1,298	1,214
473	1,400	1,396	1,385	1,395	1,396	1,259	1,243	1,324	1,284	1,205	1,268	1,190
573	1,398	1,393	1,377	1,392	1,391	1,246	1,233	1,319	1,265	1,193	1,245	1,172
673	1,398	1,389	1,368	1,387	1,387	1,236	1,224	1,313	1,253	1,185	1,226	1,158
873	1,395	1,380	1,354	1,376	1,376	1,220	1,212	1,300	1,233	1,173	1,198	1,138
1 073	1,391	1,370	1,343	1,365	1,365	1,209	1,204	1,288	1,216	1,164	1,177	1,125
1 273	1,387	1,361	1,339	1,357	1,356	1,201	1,198	1,277	1,201	1,157	1,163	1,116
1 473	1,382	1,353	1,328	1,349	1,348	1,195	1,194	1,266	–	–	–	–
1 673	1,375	1,346	1,323	1,342	1,341	1,190	1,191	1,257	–	–	–	–
1 773	1,372	1,343	1,320	1,339	1,339	1,188	1,189	1,253	–	–	–	–
2 273	1,358	1,331	1,309	1,329	1,327	1,180	1,184	1,236	–	–	–	–
2 773	1,345	1,322	1,301	1,321	1,319	1,176	1,181	1,224	–	–	–	–
3273	1,335	1,317	1,294	1,315	1,314	1,172	1,179	1,215	–	–	–	–

2.5. Thermische Vorgänge bei Wechsel des Aggregatzustands

Aggregatzustände oder Phasen

Je nach Höhe des Drucks und der Temperatur ist jeder Stoff *fest*, *flüssig* oder *gasförmig*, sofern er nicht bei bestimmten Drücken und Temperaturen chemisch verändert wird.

Äußere Kennzeichen des festen Zustands sind eine bestimmte *Gestalt*, die nur durch äußere Kräfte geändert werden kann, und unverändertes *Volumen* bei gleichbleibender Temperatur. In der flüssigen Phase ist nur das Volumen bestimmt, aber die Viskosität so gering, daß die Gestalt durch die Form der Behälterwände bedingt wird. Ein Gas verteilt sich gleichmäßig in jedem ihm zugewiesenen Behälter, selbst wenn sich in diesem schon andere Gase befinden.

Bei gleichbleibender Temperatur gilt für den Gasdruck p auf die Behälterwand für ein ideales Gas, das verschiedene Volumen V allein ausfüllt, das Gesetz von BOYLE:

$$pV = \text{konst.}; \qquad [\partial(pV)/\partial p]_T = 0 \tag{22}$$

Übergang von der festen in die flüssige oder gasförmige Phase bei p = konst.

Damit sich bei gleichbleibendem Druck ein kristalliner fester Körper verflüssigt oder verdampft, muß er die entsprechende *Schmelztemperatur* oder *Sublimationstemperatur* haben (für 101,325 kPa Druck als *Schmelz-* oder *Sublimationspunkt* bezeichnet), und es muß ihm die *Schmelzwärme* oder *Sublimationswärme* zugeführt werden. Bei Stoffen, die sich beim Schmelzen zusammenziehen, sinkt die Schmelztemperatur mit wachsendem Druck, z. B. schmilzt Eis bei 187 MPa bereits bei −20 °C.

Übergang von der flüssigen in die gasförmige Phase bei p = konst.

Dieser Übergang erfolgt verschieden. Ist der Gasdruck höher als der kritische Druck p_k, so ändern bei Wärmezufuhr alle Stoffteilchen ihren Zustand einheitlich, die Temperatur und das Volumen nehmen dauernd zu, und der Übergang zwischen den zwei Phasen läßt sich nicht erkennen. Ist dagegen der Gasdruck niedriger als der kritische Druck p_k, so wird während der Wärmezufuhr bei einer bestimmten Temperatur, der zu dem Druck gehörenden *Sättigungstemperatur* (für 101,325 kPa Druck als *normaler Siedepunkt* bezeichnet), der Stoff inhomogen, d. h., nur einzelne Stoffteilchen verdampfen. Der dampfförmige Masseanteil in 1 kg Naßdampf ist der *spezifische Dampfgehalt x*. Trotz weiterer Wärmezufuhr und Volumenzunahme ändert sich dann die Temperatur so lange nicht mehr, bis alle Stoffteilchen verdampft sind ($x = 1$). Die während des Verdampfens von 1 kg des Stoffs bei gleichbleibendem Druck und gleichbleibender Temperatur zuzuführende Wärme ist die *spezifische Verdampfungswärme r*. Beim kritischen Punkt K sind die spezifische Verdampfungswärme und die Oberflächenspannung Null und das spezifische Volumen v_k der gasförmigen und flüssigen Phase gleich. Für 101,325 kPa Druck ist die spezifische Verdampfungswärme r für feste Stoffe in Tabelle 9*) zusammengestellt. Tabelle 10 enthält Werte für Flüssigkeiten, Tabelle 11 Werte für Gase.

Tabelle 9. Spezifische Verdampfungswärme r fester Stoffe bei 101,325 kPa

Metall	Al	Pb	Cr	Fe	Au	Ir	Cu	Mg	Mn
r in MJ/kg	11,72	0,92	6,16	6,36	1,76	3,89	4,65	5,66	4,19

Metall	Mo	Ni	Pt	Ag	Bi	W	Zn	Sn
r in MJ/kg	7,12	6,20	2,51	2,175	0,837	4,82	1,79	2,595

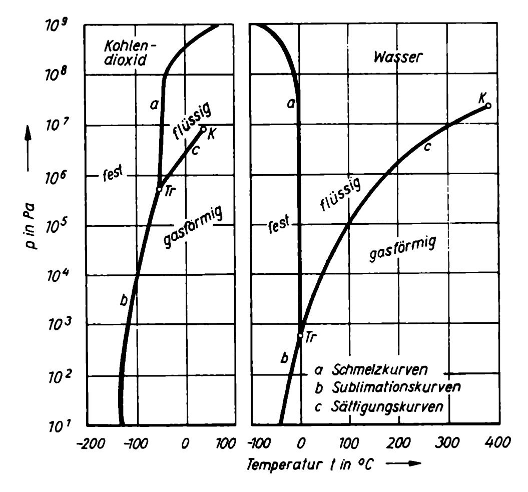


Bild 3. Temperaturabhängigkeit der Schmelz-, Sublimations- und Sättigungsdrücke von Kohlendioxid und Wasser

Die Abhängigkeit der Schmelz-, der Sublimations- und der Sättigungstemperatur vom Druck läßt sich nicht durch einfache Gleichungen ausdrücken, sondern wird am besten in *Tabellen* angegeben. Eine anschauliche Darstellung für Wasser und Kohlendioxid gibt Bild 3, wobei der Druck über den Temperaturen logarithmisch aufgetragen ist.

*) Schmelzpunkt, Siedepunkt, Schmelzwärme, Längenausdehnungskoeffizient und spezifische Wärmekapazität s. Tabelle 3, Abschn. WERKSTOFFE

Tabelle 10. Wärmeeigenschaften von Flüssigkeiten. Alle Werte (ausgenommen die kritischen) bei

Flüssigkeit	Molare Masse M in kg/kmol	Raumausdehnungskoeffizient γ in 10^{-3} m³/(m³ · K)	c_p in kJ/(kg · K)	Schmelzpunkt in °C
Äthylalkohol	46,07	1,10	2,47	−114,1
Azeton	58,08	1,43	2,16	−94,3
Benzol	78,11	1,06	1,738	+5,5
Heptan	100,20	1,24	2,22	−90,6
Methylalkohol	32,04	1,19	2,47	−97,7
Normalpentan	72,14	1,60	2,18	−92,7
Quecksilber	200,59	0,181	0,1394	−38,86
Schwefelkohlenstoff	76,14	1,19	1,017	−112,1
Wasser	18,016	0,18	4,18	0,000

Tabelle 11. Wärmeeigenschaften von Gasen. Alle Werte (ausgenommen die kritischen) bei 101,325 kPa

Gas	Molare Masse M in kg/kmol	Spezielle Gaskonstante R in J/(kg · K)	Dichte ϱ_0 in kg/m³	Molares Volumen $\bar{v}_0$ in m³/kmol	c_p bei 0 °C in kJ/(kg · K)
Äthan	30,07	276,8	1,356	22,16	1,666
Äthylen	28,05	296,6	1,2604	22,24	1,465
Ammoniak	17,03	488,2	0,7714	22,08	2,176
Argon	39,948	208,2	1,7839	22,39	0,523
Azetylen	26,04	319,5	1,1747	22,22	1,641
Chlor	70,91	117,2	3,214	22,02	0,502
Chlorwasserstoff	36,46	228,0	1,6392	22,25	0,812
Difluordichlormethan (R 12)	120,92	68,76	5,083	—	—
Helium	4,003	2077,5	0,1785	22,42	5,234
Kohlendioxid	44,01	188,95	1,9769	22,26	0,829
Kohlenmonoxid	28,01	296,9	1,2500	22,401	1,042
Luft (CO_2-frei)***)	28,96	287,1	1,2928	22,40	1,006
Methan	16,04	518,7	0,7168	22,36	2,177
Neon	20,183	411,8	0,8999	22,43	1,030
Normalbutan	58,12	143,2	2,703	21,49	—
Propan	44,10	188,7	2,0096	21,82	—
Propylen	42,08	197,7	1,915	21,96	1,547
Sauerstoff	32,00	259,8	1,429	22,39	0,912
Schwefeldioxid	64,07	129,8	2,926	21,89	0,632
Schwefelwasserstoff	34,08	244,0	1,536	22,14	1,009
Stickoxid	30,008	277,0	1,3402	22,39	1,008
Stickoxydul	44,016	188,9	1,9780	22,25	0,858
Stickstoff	28,016	296,8	1,2505	22,40	1,042
Wasserstoff	2,016	4124	0,0899	22,43	14,187

*) Werte bei 20 °C; **) Sublimationspunkt bei 101,325 kPa; ***) Zusammensetzung trockener Luft in

101,325 kPa (Raumausdehnungskoeffizient γ und spezifische Wärmekapazität c_p bei 293 K)

Schmelzwärme in kJ/kg	Siedepunkt in °C	Spezifische Verdampfungswärme r in kJ/kg	Kritische Werte		
			Druck p_k in MPa	Temperatur t_K in °C	Dichte ϱ_k in kg/m³
104,8	78,3	842	6,38	243	276
96,4	56,1	523	6,08	236	252
127,2	80,1	396	4,92	289	300
141,5	98,4	318	2,74	267	235
100,5	64,5	1 092	7,97	240	272
116	36,1	356	3,34	197	232
11,7	356,85	301	≈ 102	1 450	—
74,2	46,3	373	7,9	279	440
332	100,000	2 257	22,13	374,2	317,8

$\varkappa = c_p/c_v$ bei 0 °C	Schmelzpunkt in °C	Schmelzwärme in kJ/kg	Siedepunkt in °C	Spezifische Verdampfungswärme r in kJ/kg	Kritische Werte		
					Druck p_k in MPa	Temperatur t_k in °C	Dichte ϱ_k in kg/m³
1,20	−183,6	92,9	−88,6	540	4,90	32,2	206
1,24	−169,4	104,7	−103,5	523	5,07	9,3	227
1,328	−77,7	339	−33,4	1 354	11,30	132,4	235
1,67	−189,3	29,3	−185,9	157,3	4,86	−122,4	531
1,23	−81	—	−83,6**)	829	6,25	35,9	230
1,34	−103	188,3	−35,0	259	7,70	144	567
1,40	−112	56,1	−85,0	444	8,31	51,5	411
1,14	−155	—	−30,0	167,5	4,12	112,0	558
1,66	—	—	−268,9	20,4	0,229	−267,9	69,45
1,31	−56	184,2	−78,48	574	7,38	31,0	468
1,40	−205	30,1	−191,5	216	3,50	−140,2	301
1,40	—	—	−194,0	196,7	3,77	−140,7	328
1,30	−182,5	58,6	−161,7	549	4,63	−82,5	138
1,67	−248,6	16,7	−246,1	104,7	2,73	−228,7	484
—	−135	75,4	+0,5	403	3,65	153,2	—
1,14	−189,9	—	−42,6	448	4,26	96,8	226
—	−185,2	69,9	−47,0	456	4,62	91,8	247
1,395	−218,8	13,8	−183,0	213,5	5,08	−118,4	430
1,282*)	−75,3	116,8	−10,0	402	7,88	157,5	525
1,33*)	−85,6	69,5	−60,4	549	9,01	100,4	349
1,39*)	−163,5	77,1	−152	460	6,47	−94	520
1,31	−90,8	148,6	−88,7	377	7,26	−36,5	460
1,399	−210,0	25,07	−195,8	199	3,38	−146,9	311
1,407	−259,2	58,6	−252,8	460	1,296	−239,9	30,1

Raumteilen: N_2 0,7803; O_2 0,2099; Ar 0,0093; in Masseteilen: N_2 0,7547; O_2 0,2320; Ar 0,0128

Beispiel. In einem geschlossenen System ($V = 10^{-3}$ m³) befindet sich Kohlendioxid im kritischen Zustand. Durch Wärmeabgabe an die Umgebung nimmt die Temperatur a) um 1 K und b) um 31 K ab. Zu berechnen sind die dampfförmigen Masseanteile x im entstehenden Naßdampf!
Bei dem Prozeß bleibt das spezifische Volumen v_k konstant. Es ergibt sich aus Tabelle 11 für Kohlendioxid im kritischen Zustand $p_k = 7{,}38$ MPa, $t_k = 31\,°C$, $v_k = 1/\varrho_k = 1/468$ m³/kg $= 0{,}002\,137$ m³/kg und aus einer Dampftabelle für das spezifische Volumen der Flüssigkeit bei 30 °C: $v' = 0{,}001\,680$ m³/kg und bei 0 °C: $v' = 0{,}001\,081$ m³/kg. Für trockenen Sattdampf ($x = 1$) ist bei 30 °C: $v'' = 0{,}002\,979$ m³/kg und bei 0 °C: $v'' = 0{,}010\,383$ m³/kg. Zu den Temperaturen gehören die Sättigungsdrücke von 7,18 MPa bei 30 °C und 3,485 MPa bei 0 °C:

a) $x = (v_k - v')/(v'' - v') = (0{,}002\,137 - 0{,}001\,680)/(0{,}002\,979 - 0{,}001\,680) = 0{,}35$

b) $x = (0{,}002\,137 - 0{,}001\,081)/(0{,}010\,383 - 0{,}001\,081) = 0{,}114$

Tripelpunkt

Nur im Tripelpunkt *Tr* (Bild 3) können die drei Phasen *fest, flüssig* und *dampfförmig* nebeneinander bestehen (für Wasser bei 273,16 K und 611 Pa, für Kohlendioxid bei 216,55 K und 0,518 MPa).

Unterkühlung und Überhitzung

Beim vorsichtigen Abkühlen einer Flüssigkeit kann die Schmelzlinie unterschritten werden, ohne daß die Flüssigkeit erstarrt (*Unterkühlung*). Unterkühlung ist auch beim Abkühlen eines Gases, dessen Druck niedriger als der kritische Druck p_k ist, möglich, wenn keine Kondensationskeime vorhanden sind. Die Sättigungstemperatur wird unterschritten, ohne daß einzelne Stoffteilchen kondensieren, weil die Sättigungstemperatur sehr kleiner Tropfen (bei Wasser Durchmesser 0,001···0,01 µm) besonders niedrig ist. Ebenso läßt sich beim Erwärmen von Flüssigkeiten, insbesondere wenn diese keine gelösten Gase enthalten und mit einer Ölschicht bedeckt sind (z. B. im Verdampfer von Kälteanlagen), die Sättigungslinie überschreiten (*Überhitzung*).

Die *unterkühlte Flüssigkeit* ist im labilen Gleichgewicht. Bei 100 kPa Druck kann mit einer Ölhaut bedecktes Wasser bis etwa −20 °C unterkühlt werden. Überhitzung einer Flüssigkeit bezeichnet man auch als *Siedeverzug*. Unter günstigen Voraussetzungen gelingt es, bei atmosphärischem Druck Wasser bis auf 200 °C zu erwärmen, ehe die Verdampfung beginnt. Diese erfolgt dann allerdings sehr stürmisch (oft explosionsartig), und die Temperatur nimmt dabei bis auf die Sättigungstemperatur ab.

Verdunstung

Ist ein abgegrenzter Raum nur teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt, während sich im übrigen Raum ein gasförmiger anderer Stoff befindet, so verdunstet so lange Flüssigkeit an der Oberfläche, bis der flüssigkeitsfreie Raum mit Dampf der Flüssigkeit gesättigt ist, d. h., der *Teildruck* (*Partialdruck*) dieses Dampfes erreicht den durch die Temperatur der Flüssigkeit bedingten Sättigungsdruck.

3. Die Hauptsätze

3.1. Erster Hauptsatz

3.1.1. Wärme als Energieform und innere Energie

Die Hauptsätze sind Erfahrungsgesetze, die sich auf Naturbeobachtungen gründen. Der erste Hauptsatz ist die Anwendung des *Gesetzes von der Erhaltung der Energie* auf thermodynamische Systeme. Mechanische Arbeit läßt sich, z. B. mit einem Kältemittelverdichter oder durch Reibung, in Wärme umwandeln (Mayer 1840). Umgekehrt entspricht der von der Wärmekraftmaschine abgegebenen Arbeit eine bestimmte verschwundene Wärme.

Erster Hauptsatz:
Es läßt sich keine Maschine bauen, die dauernd Arbeit erzeugt, ohne daß ein entsprechender Energiebetrag verschwindet, d. h., es gibt kein „Perpetuum mobile erster Art".

Die einem geschlossenen thermodynamischen System mit konstanter Lage im Schwerefeld der Erde (Fallbeschleunigung g, Höhe z über einem Bezugsniveau) und konstanter äußerer Strömungsgeschwindigkeit c zugeführte Arbeit W oder w (spezifische Arbeit) wird als *positiv* festgelegt, während früher bei Wärmekraftmaschinen die entgegengesetzte Vereinbarung üblich war.
Die elementare spezifische Wärmezufuhr $\mathrm{d}q$ und die Arbeitszufuhr $\mathrm{d}w$ als Prozeßgrößen sind dabei durch die Bedingungen, die den Energietransport über die Systemgrenze festlegen, bestimmt (unvollständige Differentiale). Ihre Summe erhöht aber eine Zustandsgröße des Systems, die als *innere Energie* U oder *spezifische innere Energie* u (vollständiges Differential $\mathrm{d}u$) bezeichnet wird:

$$\mathrm{d}q + \mathrm{d}w = \mathrm{d}u \tag{23}$$

Um vom Ausgangszustand 1 eines geschlossenen Systems in einen bestimmten, nach dem zweiten Hauptsatz möglichen Endzustand 2 zu gelangen, können die Werte Q_{12} (oder q_{12}) und W_{12} (oder w_{12}) sehr verschieden sein, ihre Summe ergibt die *Änderung der inneren Energie:*

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1 \tag{24}$$

$$q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1 \tag{25}$$

Die innere Energie ist durch die *kinetische* und *potentielle Energie* der Systembausteine bedingt. Bei einfachen Systemen hängt u nur von zwei thermischen Zustandsgrößen ab, z. B. $u = f(T, v)$. Damit wird:

$$\mathrm{d}u = (\partial u/\partial T)_v\,\mathrm{d}T + (\partial u/\partial v)_T\,\mathrm{d}v \tag{26}$$

und für Zustandsänderungen mit konstantem Druck:

$$(\partial u/\partial T)_p = (\partial u/\partial T)_v + (\partial u/\partial v)_T \cdot (\partial v/\partial T)_p \tag{27}$$

Die Technische Thermodynamik benötigt nur Änderungen der *inneren* Energie. Für einen zweckmäßig festgelegten Bezugszustand (T_0, p_0, v_0) wird $u_0 = 0$ vereinbart. Alle Zustandsgrößen, die die Einheit der Wärme enthalten, werden in Anlehnung an die früher verwendete Kalorie als *kalorische Zustandsgrößen* bezeichnet.

3.1.2. Raumänderungsarbeit, p,v-Diagramm und Formeln für geschlossene Systeme

Beispiel für die Arbeitszufuhr $W_{12\mathrm{ad}}$ an ein geschlossenes adiabates System: Gasverdichtung vom spezifischen Volumen v_1 auf v_2 im Arbeitszylinder eines Verdichters durch die Kolbenbewegung (Kolbenfläche A).
Der Kolben kann sich erst bewegen, wenn die äußere Kraft F_u gleich der Summe der durch den Systemdruck p_1 und die Kolbenreibung F_R bedingten Kräfte ist: $F_\mathrm{u} = p_1 A + F_\mathrm{R}$. Dann verkleinert sich im System zunächst nur in Kolbennähe das spezifische Volumen, während Druck und Temperatur steigen. Die Abweichungen vom Gleichgewichtszustand sind meist sehr klein und gleichen sich mit einer Geschwindigkeit aus, die viel größer als die Kolbengeschwindigkeit ist, d. h., für das Gesamtsystem können überall gleiche Zustandsgrößen vorausgesetzt werden.
Für die meisten thermischen Vorgänge trifft diese Voraussetzung zu, man bezeichnet sie dann als *quasistatische Vorgänge.* Während des Kolbenwegs ($-\mathrm{d}s$) wird die dem System zugeführte *elementare Raumänderungsarbeit:*

$$\mathrm{d}W_\mathrm{ad} = F_\mathrm{u}\,\mathrm{d}s = -pA\,\mathrm{d}s + F_\mathrm{R}\,\mathrm{d}s = -p\,\mathrm{d}V + \mathrm{d}W_\mathrm{R} \tag{28}$$

oder, auf die Masse 1 kg bezogen (mit $\mathrm{d}q = 0$):

$$\mathrm{d}w_\mathrm{ad} = -p\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}w_\mathrm{R} = \mathrm{d}u \tag{29}$$

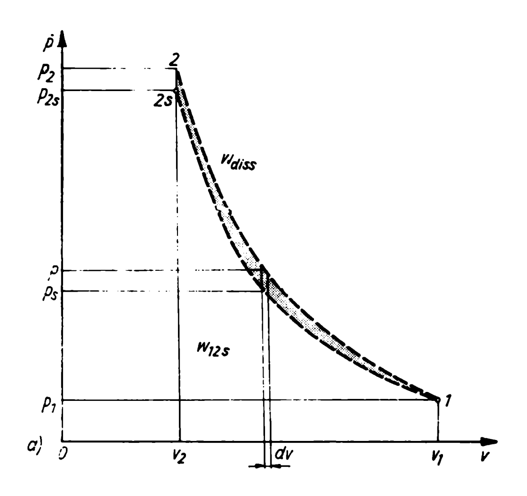
Da sich das spezifische Volumen verkleinert, ist ($-p\,\mathrm{d}v$) positiv und läßt sich anschaulich im *p,v-Diagramm* (im Bild 4a grau) darstellen. Durch die Reibungsarbeit erhöhen sich die innere Energie, der Druck und die Temperatur zusätzlich. Nur in einem System, bei dem keine Reibung oder andere nichtumkehrbare (irreversible) Vorgänge erfolgen, wird bei Vergrößerung des spezifischen Volumens die *elementare spezifische reversible Raumänderungsarbeit:*

$$\mathrm{d}w_\mathrm{rev} = -p\,\mathrm{d}v \tag{30}$$

an die Umgebung abgegeben. Durch Einsetzen in Gl. (23) ergibt sich:

$$dq = du - dw_{rev} = du + p\,dv \tag{31}$$

Nur bei *reversiblen* (umkehrbaren) *Zustandsänderungen* kann das System beliebig oft vom erreichten Endzustand 2 wieder in den Anfangszustand 1 gebracht werden, ohne daß Änderungen im System oder in der Umgebung feststellbar sind. Im adiabaten System wird die reversible Adiabate als *Isentrope* bezeichnet, und es ist unmöglich, die Kurve 1 – 2s im Bild 4a zu unterschreiten (zweiter Hauptsatz). Die Isentrope



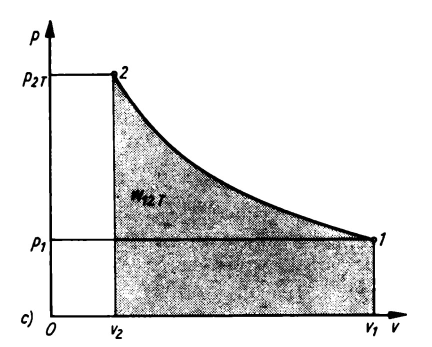


Bild 4. Darstellung der Raumänderungsarbeit w als Fläche im p,v-Diagramm. a) Isentrope und irreversible Adiabate; b) Isobare; c) Isotherme

ergibt für das geschlossene adiabate System den *Kleinstwert* der zuzuführenden Arbeit und den *Größtwert* der nach außen abgegebenen Arbeit beim Vergrößern des spezifischen Volumens von v_2 auf v_1:

$$w_{12s} = -\int_1^{2s} p\,dv = u_2 - u_1 \tag{32}$$

Für den reversiblen Prozeß bei konstantem spezifischem Volumen (*Isochore, Isoplere, Isovolume*) wird nach Gl. (30) $w_{12} = 0$. Mit der spezifischen Wärmekapazität c_v, Gln. (23) und (26), ergibt sich:

$$dq_v = du(\partial u/\partial T)_v\,dt = (\partial q_v/\partial T)_v\,dT = c_v\,dT \tag{33}$$

Die Änderung der spezifischen inneren Energie bei konstantem spezifischem Volumen, dessen Wert anzugeben ist, läßt sich mit Hilfe der mittleren spezifischen Wärmekapazitäten berechnen:

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 c_v\,dT = c_v\Big|_{T_0}^{T_2}\cdot(T_2 - T_0) - c_v\Big|_{T_0}^{T_1}\cdot(T_1 - T_0) \tag{34}$$

Für den reversiblen Prozeß bei konstantem Druck (*Isobare*) gilt nach Bild 4b oder Gl. (30):

$$w_{12p} = -p(v_2 - v_1) \tag{35}$$

und aus Gl. (31) ergibt sich:

$$q_{12p} = u_2 - u_1 - w_{12p} = u_2 - u_1 + p(v_2 - v_1) \tag{36}$$

Dieser Wert ist negativ, d. h., durch Wärmeabfuhr muß die Temperatur von T_1 aus ständig abnehmen. Nach dem zweiten Hauptsatz ist Wärmeabfuhr über die Systemgrenze nur möglich, wenn T_2 nicht kleiner als die Umgebungstemperatur T_u wird. Bei Luftverdichtern, die aus der Umgebung ansaugen ($T_1 = T_u$), ergibt daher der reversible Prozeß mit konstanter Temperatur (*Isotherme*) die kleinstmögliche Raum-

änderungsarbeit, bei der $p_1 < p_{2T} < p_{2s}$ ist. Im Bild 4c ist die spezifische Raumänderungsarbeit nach Gl. (30) als Fläche dargestellt:

$$w_{12T} = -\int_1^{2T} p\,\mathrm{d}v \tag{37}$$

Da die spezifische innere Energie u_2 durch v_2 und $T_1 = T_2$ bestimmt ist, läßt sich mit Gl. (25) die reversibel an die Umgebung abzuführende Wärme q_{12T} ermitteln. *Reversible Wärmeabfuhr* bedeutet, daß die Temperaturunterschiede zwischen System und Umgebung vernachlässigbar klein sind. Tatsächlich bedingt die Rücksicht auf den Bauaufwand für das System, daß die Temperaturen stets größer als T_u sind und damit auch die Raumänderungsarbeit größer als w_{12T} wird. Ebenso erfolgt die Wärmezufuhr an ein System *irreversibel*, d. h. mit endlichen Temperaturunterschieden. Die übertragene Wärme Q_{zu} hat im Wärmebehälter eine höhere Temperatur T_{zu} als im System. Dadurch verkleinert sich ihr in mechanische Arbeit umwandelbarer Teil (siehe CARNOT-Prozeß).
Statt Gl. (29), bei der nur die Kolbenreibung als irreversibler Vorgang berücksichtigt wurde, wird die gesamte, durch irreversible Vorgänge bedingte Mehrarbeit als *dissipative Arbeit* $\mathrm{d}w_{\mathrm{diss}}$ bezeichnet und für die *elementare spezifische Arbeit* geschrieben:

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}w_{\mathrm{rev}} + \mathrm{d}w_{\mathrm{diss}} = -p\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}w_{\mathrm{diss}} \tag{38}$$

3.1.3. Verdrängungsarbeit, Enthalpie und Formeln für offene Systeme

Betrachtet wird ein System, bei dem ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) durch eine Rohrleitung oder Maschine strömt, wobei die Eintrittsstelle mit dem Querschnitt A_1 um z_1 über einem vereinbarten Bezugsniveau und die Austrittsstelle mit dem Querschnitt A_2 um z_2 über dem Bezugsniveau liegt. In beiden Querschnitten soll die Strömung *stationär*, d. h. zeitlich unveränderlich, und die äußeren Strömungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 sollen konstant sein. Für die Zustandsgrößen am Ein- und Austritt werden die Zeiger 1 und 2 verwendet, während im dazwischenliegenden Teil die *zugeführte spezifische Wärmemenge q* und die *zugeführte spezifische technische Arbeit* w_t positiv angesetzt werden. Das Produkt aus spezifischer technischer Arbeit w_t und durchströmendem Massestrom $\dot{m}$ ergibt die Maschinenleistung $P = w_t\dot{m}$.

Verdrängungs- oder Verschiebearbeit

An der Eintrittsstelle gibt das System ohne Änderung der Zustandsgrößen p_1, v_1, T_1 an die Umgebung die *spezifische Verdrängungs-* oder *Füllarbeit* $(-p_1v_1)$ ab, damit eine Masseeinheit des Stoffs in das System einströmt. An der Austrittsstelle wird dem System ohne Änderung der Zustandsgrößen p_2, v_2, T_2 aus der Umgebung die *spezifische Verdrängungs-* oder *Ausschubarbeit* (p_2v_2) zugeführt, damit eine Masseeinheit des Stoffs in die Umgebung abströmt. Im Gegensatz zur Raumänderungsarbeit ist die Verdrängungsarbeit eine *Zustandsgröße*.

Enthalpie

Da bei allen Maschinen und Wärmeübertragern offene Systeme verwendet werden, ist es zweckmäßig, die spezifische innere Energie u und die Verdrängungsarbeit (pv) zu einer kalorischen Zustandsgröße, der *spezifischen Enthalpie h*, zusammenzufassen. Eine Linie konstanter Enthalpie wird als *Isenthalpe* bezeichnet:

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}u + \mathrm{d}(pv) = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}p \tag{39}$$

oder

$$h_2 - h_1 = u_2 + p_2v_2 - (u_1 + p_1v_1) \tag{40}$$

Wird für den Bezugszustand (p_0, v_0) die innere Energie $u_0 = 0$ gesetzt, z. B. in den Wasserdampftabellen für Flüssigkeit beim Tripelpunkt, so gilt:

$$h - h_0 = u + pv - p_0v_0 \tag{41}$$

Bei einfachen Systemen hängt h nur von zwei thermischen Zustandsgrößen ab, z. B. $h = f(T, p)$. Entsprechend Gl. (26) ist das vollständige Differential:

$$\mathrm{d}h = (\partial h/\partial T)_p\,\mathrm{d}T + (\partial h/\partial p)_T\,\mathrm{d}p \tag{42}$$

Die große Bedeutung der spezifischen Enthalpie für technische Vorgänge hat zuerst MOLLIER erkannt. Er führte für Wasserdampf 1904 das MOLLIER-*h,s-Diagramm* mit Linien konstanten Drucks und konstanten

spezifischen Volumens ein. Darin werden das Gesetz von der Erhaltung der Masse und der erste und zweite Hauptsatz durch additive Beziehungen ausgedrückt; sie erscheinen als gerade Linienzüge im Diagramm. Besonders zweckmäßig ist das Diagramm für die Prozesse, bei denen die Grenzkurve zwischen nassem und überhitztem Dampf überschritten wird. Bei isentropen Prozessen läßt sich die technische Arbeit und bei isobaren die übertragene Wärme als Strecke abgreifen. Bei *Kältemaschinenprozessen* wird das MOLLIER-log p,h-Diagramm mit Linien konstanter spezifischer Entropie verwendet und in der *Klima-* und *Trocknungstechnik* das 1923 angegebene MOLLIER-h,x_f-Diagramm.

In *offenen Systemen* gelten bei reversiblen und irreversiblen Prozessen folgende Beziehungen für den ersten Hauptsatz, wobei die durch das Gravitationsfeld der Erde (Fallbeschleunigung g) bedingte potentielle Energie berücksichtigt wird, obgleich sie keine Zustandseigenschaft des Systems ist:

$$dq + dw_t = dh + c\,dc + g\,dz \quad (43)$$

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + c_2^2/2 - c_1^2/2 + g(z_2 - z_1) \quad (44)$$

Bei *Gasen* ist meist die Änderung der äußeren potentiellen Energie sehr klein, d. h.:

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + c_2^2/2 - c_1^2/2 \quad (45)$$

Wird zwischen Ein- und Austrittsstelle keine technische Arbeit zugeführt oder entnommen, z. B. in Düsen von Turbinen oder in Rohrleitungen, so gilt:

$$c_2^2/2 - c_1^2/2 = q_{12} + h_1 - h_2 \quad (46)$$

und bei *adiabaten Systemen:*

$$c_2^2/2 - c_1^2/2 = h_1 - h_2 \quad (47)$$

Bei *Kraft- und Arbeitsmaschinen* sind häufig die äußeren Strömungsgeschwindigkeiten nahezu gleich oder sehr klein, und Gl. (44) vereinfacht sich:

$$w_{t12} = h_2 - h_1 - q_{12} + g(z_2 - z_1) \quad (48)$$

Liegen außerdem Ein- und Austrittsstutzen in gleicher Höhe oder handelt es sich um *Gase*, so ist:

$$w_{t12} = h_2 - h_1 - q_{12} \quad (49)$$

und bei *adiabaten Systemen:*

$$w_{t12} = h_2 - h_1 \quad (50)$$

Bei der reibungsfreien stationären Strömung eines inkompressiblen Stoffes ($v_1 = v_2$) in einer Rohrleitung ohne Wärmezufuhr oder -abfuhr ($u_1 = u_2$) ergibt sich aus den Gln. (40) und (44) mit der Dichte $\varrho = 1/v$ die BERNOULLI*sche Gleichung der Hydrodynamik**):

$$p_1 + \varrho c_1^2/2 + g\varrho z_1 = p_2 + \varrho c_2^2/2 + g\varrho z_2 \quad (51)$$

3.1.4. Technische Arbeit für reversible Prozesse

Für gleiche Höhenlage der Ein- und Austrittsstelle ($z_1 = z_2$) und gleiche äußere Strömungsgeschwindigkeit ($c_1 = c_2$) ergibt sich aus den Gln. (23), (38), (39) und (43):

$$dw_{t\,rev} = v\,dp \quad (52)$$

oder

$$w_{t12\,rev} = \int_1^2 v\,dp = p_2v_2 - \int_1^2 p\,dv - p_1v_1 = p_2v_2 + w_{12\,rev} - p_1v_1 \quad (53)$$

Die dem offenen System zugeführte spezifische technische Arbeit $w_{t12\,rev}$ ergibt sich als Summe von Ausschub- und Raumänderungsarbeit, von der die Füllarbeit abzuziehen ist. Sie läßt sich im p,v-Diagramm

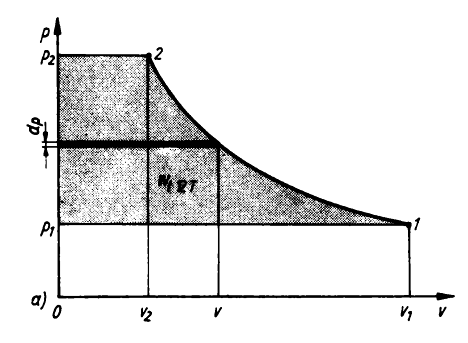
*) s. Abschn. TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

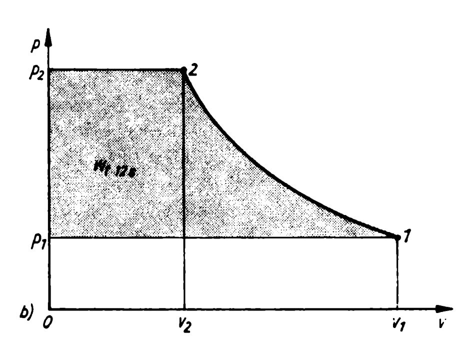
anschaulich darstellen. Für vorgeschriebene Werte von p_1, p_2 und v_1 wird bei *isothermer* Raumänderung (Bild 5a) w_{t12T} am kleinsten, für die *Isentrope* (Bild 5b) w_{t12s} größer und für die *Isochore* (Bild 5c) $w_{t12v} = v(p_2 - p_1)$ am größten. Für die *Isobare* gilt nach Gl. (52) $w_{tp} = 0$ und nach Gln. (42) und (49):

$$\mathrm{d}h = (\partial h/\partial T)_p\,\mathrm{d}T = (\partial q/\partial T)_p\,\mathrm{d}T = c_p\,\mathrm{d}T \tag{54}$$

Die wahre spezifische Wärmekapazität c_{pw} ist gleich dem partiellen Differentialquotienten der spezifischen Enthalpie nach der Temperatur bei konstantem Druck, dessen Wert angegeben werden muß. Die Änderung der spezifischen Enthalpie bei konstantem Druck p_2 läßt sich mit den mittleren spezifischen Wärmekapazitäten c_p berechnen:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p\,\mathrm{d}T = c_p\Big|_{T_0}^{T_2}\cdot(T_2 - T_0) - c_p\Big|_{T_0}^{T_1}\cdot(T_1 - T_0) \tag{55}$$





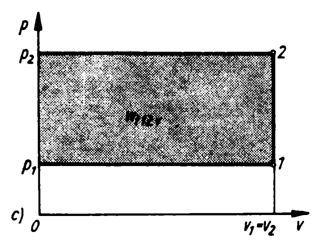


Bild 5. Darstellung der reversiblen spezifischen technischen Arbeit $w_{t\,rev}$ als Fläche im p,v-Diagramm.
a) Isotherme; b) Isentrope; c) Isochore

Für Äthylen, Kohlendioxid, Kohlenmonoxid, trockene Luft, Methan, Sauerstoff, Schwefeldioxid, Stickstoff, Wasserstoff, Wasserdampf und Rauchgase von Erdgas, Heizöl und Mittelbenzin, die mit dem Mindest-Luftbedarf vollständig verbrannt werden, hat FISCHER [4] für den idealen Gaszustand im Temperaturbereich 200 ··· 1495 K für je 5 K Temperaturunterschied die Enthalpiewerte berechnet, wobei für 200 K $h = 0$ gesetzt wurde (auszugsweise Werte s. Tab. 12).
Allgemein gilt für den beliebigen Zustand (p, v, T):

$$h - h_0 = \left[\int_{T_0}^{T} c_p\,\mathrm{d}T\right]_{p_0} - T^2\left[\int_{p_0}^{p}\left(\frac{\partial(v/T)}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p\right]_T$$

$$= \left[\int_{T_0}^{T} c_p\,\mathrm{d}T\right]_{p} - T_0^2\left[\int_{p_0}^{p}\left(\frac{\partial(v/T)}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p\right]_{T_0} \tag{56}$$

Die Größen an den eckigen Klammern geben an, mit welchem gleichbleibenden Druck und mit welcher gleichbleibenden Temperatur die Integrale zu ermitteln sind.
Bei *reversiblen Zustandsänderungen* ergibt sich für den ersten Hauptsatz aus den Gln. (49) und (53):

$$q_{12\,\mathrm{rev}} = h_2 - h_1 - w_{t12\,\mathrm{rev}} = h_2 - h_1 - \int_1^2 v\,\mathrm{d}p \tag{57}$$

oder

$$\mathrm{d}q_{\mathrm{rev}} = \mathrm{d}h - v\,\mathrm{d}p \tag{58}$$

Für die technische Arbeit bei *irreversiblen Prozessen* gelten die Gln. (43) bis (50) ebenfalls.

3.1.5. Drosselung

Ein irreversibler Prozeß in einem offenen adiabaten System, in dem der Druck durch Einbauten (Blenden, Ventile, Filtereinsätze usw.) ohne Abfuhr technischer Arbeit abnimmt und der nicht quasistatisch verläuft, ist die *Drosselung*. Örtlich verschiedene Zwischenzustände lassen sich nicht angeben. Nur in hinreichend großer Entfernung von der Drosselstelle können im Ein- und Austrittsquerschnitt konstante Zustandsgrößen und stationäre Strömung (konstanter Massestrom $\dot{m}$) vorausgesetzt werden. Die Änderung der potentiellen Energie wird stets vernachlässigt. Mit $q_{12} = 0$ und $w_{t12} = 0$ ergibt Gl. (45):

$$h_1 + c_1^2/2 = h_2 + c_2^2/2 \tag{59}$$

Der Unterschied der äußeren Strömungsgeschwindigkeiten ist meist so gering, daß $(c_2^2/2 - c_1^2/2) \ll h$ wird, d. h. $h_1 = h_2$.
Beim Drosseln bleibt die spezifische Enthalpie konstant. Der Endzustand läßt sich daher mit MOLLIER-Diagrammen einfach ermitteln. Mit $dh = 0$ ergibt Gl. (42) die beim Drosseln auftretende Temperaturänderung für eine bestimmte Druckänderung:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = -\frac{(\partial h/\partial p)_T}{(\partial h/\partial T)_p} \tag{60}$$

Mit $(\partial h/\partial p)_T = v - T(\partial v/\partial T)_p$ und Gl. (54) wird:

$$(\partial T/\partial p)_h = -[v - T(\partial v/\partial T)_p]/c_p \tag{61}$$

Der Wert $(\partial T/\partial p)_h$ wird als *differentieller* JOULE-THOMSON-*Effekt* interpretiert. Bei hohen Drücken steigt beim Drosseln von (trockener) Luft die Temperatur, d. h., $(\partial T/\partial p)_h$ ist negativ. Beim *differentiellen Inversionspunkt* $(\partial T/\partial p)_h = 0$ wird für eine bestimmte Enthalpie die Höchsttemperatur erreicht. Liegt der Eintrittszustand auf der differentiellen Inversionskurve, so nimmt schon bei kleinem Druckabfall die Temperatur ab, $(\partial T/\partial p)_h$ wird positiv. Durch entsprechenden Druckabfall läßt sich die maximale Temperaturabnahme $(T_1 - T_2)$ erreichen. Bei niedrigem Luftdruck p_1 wird der differentielle JOULE-THOMSON-Effekt wieder nahezu Null. Dann bleibt trotz Druckabnahme die Temperatur konstant (*idealer Gaszustand*).
Für die *Gasverflüssigung* geht man von Temperaturen und Drücken in der Nähe oder oberhalb des kritischen Punkts (p_k, t_k, Tabelle 11) aus und verwendet große Druckdifferenzen $(p_1 - p_2) = \Delta p$, um eine beträchtliche Temperaturabnahme zu erreichen. Der Wert:

$$(\Delta T/\Delta p)_h = (T_1 - T_2)/(p_1 - p_2) \tag{62}$$

ist der *integrale* JOULE-THOMSON-*Kühleffekt*. Dieser wird jedoch Null oder negativ, wenn bei sehr hohem Druck p_1 die Temperatur des idealen Gaszustands erreicht oder unterschritten ist.

3.2. Zweiter Hauptsatz

Durch den zweiten Hauptsatz werden Erfahrungstatsachen ausgedrückt, die für die Wärmeübertragung und die Gewinnung von Arbeit aus Wärme maßgebend sind. Dieser Hauptsatz gilt nicht für Systeme mit kleinen Molekülzahlen.

Die wichtigsten, gleichwertigen Fassungen lauten:

1. *Wärme geht nie von selbst von einem Körper mit tieferer Temperatur T_0 auf einen Körper mit höherer Temperatur T über* (CLAUSIUS 1850).
2. *Es ist unmöglich, die einem Wärmebehälter durch einen Arbeitsstoff als Wärmeträger entnommene Wärme vollständig in Arbeit umzuwandeln, ohne daß sich dabei andere Veränderungen in der Natur nachweisen lassen* (THOMSON 1851).
3. *Es gibt kein Perpetuum mobile zweiter Art, d. h. eine periodisch arbeitende Maschine, die nichts weiter bewirkt, als mechanische Arbeit aus Wärme* (z. B. der atmosphärischen Luft) *zu erzeugen* (PLANCK 1905 und OSTWALD).

3.2.1. Kreisprozesse

Um laufend Arbeit aus Wärme zu gewinnen oder Temperaturen zu erreichen, die kleiner als die Umgebungstemperatur T_u sind, muß mit einem Arbeitsstoff eine *geschlossene Folge* verschiedener Zustandsänderungen ständig wiederholt werden. Wird der Kreisprozeß im p,v-



Diagramm im Uhrzeigersinn durchlaufen (*Rechtsprozeß*), so wird die spezifische Kreisprozeßarbeit ($-w_{Kr}$) vom System an die Umgebung abgeführt (negativ). Die bei hoher Temperatur T_{zu} dem System zugeführte spezifische Wärmemenge q_{zu} (positiv) ist größer als der Absolutwert der bei niedriger Temperatur T_{ab} abgeführten Wärme $|q_{ab}|$ (negativ). Bei einem *Linksprozeß* wird dem System die Kreisprozeßarbeit w_{Kr} zugeführt (positiv). Die Wärmezufuhr q_{zu} erfolgt bei niedrigerer Temperatur T_{zu} und ist kleiner als der Absolutwert der bei höherer Temperatur abgeführten Wärme $|q_{ab}|$. Es gilt nach dem ersten Hauptsatz:

$$-w_{Kr} = q_{zu} + q_{ab} \tag{63}$$

Der Energiefluß ist für den Rechtsprozeß (*Wärmekraftmaschine*) im Bild 6a und für den Linksprozeß (*Wärmepumpe*) im Bild 6b dargestellt.

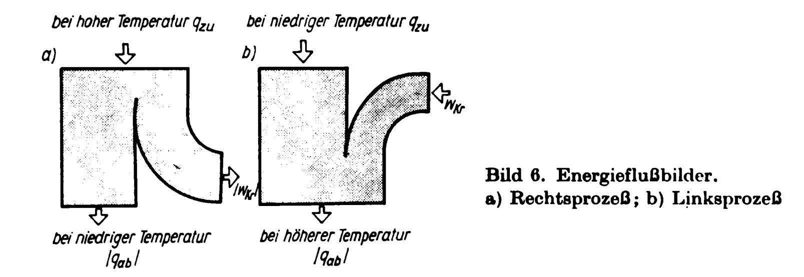


Bild 6. Energieflußbilder.
a) Rechtsprozeß; b) Linksprozeß

3.2.2. Wärmekraftmaschine

Die thermodynamische Güte der Energieumwandlung beim Rechtsprozeß gibt der *thermische Wirkungsgrad* η_{th} an, der stets kleiner als Eins ist:

$$\eta_{th} = |w_{Kr}|/q_{zu} = (q_{zu} - |q_{ab}|)/q_{zu} = 1 - |q_{ab}|/q_{zu} \tag{64}$$

Der Kehrwert des thermischen Wirkungsgrads wird als *spezifischer Wärmeverbrauch* bezeichnet. Es ergibt sich als Quotient aus dem zugeführten Wärmestrom $\dot{Q}$ und dem Teil, der in Leistung P umgewandelt wird:

$$q_{zu}/|w_{Kr}| = \dot{Q}/P = 1/\eta_{th} \tag{65}$$

Beispiel. Kondensations-Dampfkraftanlage im Beharrungszustand. Im Dampferzeuger wird durch Verbrennung von Brennstoff bei hoher Temperatur Wärme frei und an Wasser hohen Drucks (Arbeitsstoff) übertragen, das dadurch verdampft. Der Wasserdampf gibt in der Dampfturbine die spezifische technische Arbeit w_{tT} nach außen ab, strömt mit niedrigem Druck in den Kondensator und wird dort durch Wärmeabgabe an Kühlwasser (mit möglichst niedriger Temperatur) verflüssigt. Kondensat- und Kesselspeisepumpe, bei denen die zuzuführende spezifische technische Arbeit w_{tP} viel kleiner als $|w_{tT}|$ ist, fördern das Wasser mit hohem Druck in den Dampferzeuger zurück. Die beim Kreisprozeß aus Wärme gewonnene *Arbeit* ist:

$$|w_{Kr}| = |w_{tT}| - w_{tP} \tag{66}$$

Obgleich alle Prozesse beim Kreislauf des Arbeitsstoffs durch die Anlage irreversibel sind, hat der Arbeitsstoff an jeder Stelle der Anlage stets dieselben Zustandsgrößen.

Bei einem Kreisprozeß mit ausschließlich reversiblen Prozessen (*vollkommene Anlage*) läßt sich bei gleichen mittleren Temperaturen $T_{m\,zu}$ und $T_{m\,ab}$ der nach dem zweiten Hauptsatz nicht unterschreitbare Kleinstwert für $|q_{ab\,rev}|$ erreichen. Die Kreisprozeßarbeit $|w_{Kr\,rev}|$ und der thermische Wirkungsgrad $\eta_{th\,rev}$ erreichen ihre Größtwerte, trotzdem muß ein Teil der bei hohen Temperaturen vom Arbeitsstoff aufgenommenen Wärme q_{zu} bei niedrigen Temperaturen abgegeben werden:

$$\eta_{th\,rev} = |w_{Kr\,rev}|/q_{zu} = 1 - (|q_{ab\,rev}|/q_{zu}) \tag{67}$$

Carnot gab 1824 einen Kreisprozeß mit ausschließlich reversiblen Vorgängen an. Wärmezu- und Wärmeabfuhr erfolgen isotherm bei T_{zu} und T_{ab}, dazwischen werden zwei isentrope Zustandsänderungen durchgeführt. Der thermische Wirkungsgrad $\eta_{th\,C}$ ist dann, unabhängig von der Art des Arbeitsstoffes, stets:

$$\eta_{th\,C} = 1 - (|q_{ab\,rev}|/q_{zu}) = 1 - (T_{ab}/T_{zu}) \tag{68}$$

Die Wärme ist für die Arbeitserzeugung um so wertvoller, bei je höherer Temperatur sie verfügbar ist und bei je niedrigerer Temperatur sie abgeführt werden kann. Der Wert $[1 - (T_{ab}/T_{zu})]$ wird als CARNOT-*Faktor* bezeichnet, weil er den Teil der zugeführten Wärme angibt, der sich bei vorgeschriebenen Temperaturen mit dem CARNOT-Prozeß in mechanische Arbeit umwandeln läßt.
Bei *vollkommener Reversibilität* läßt sich jeder Kreisprozeß durch eine hinreichend große Zahl nebeneinanderliegender Isentropen in einzelne CARNOT-Prozesse zerlegen, wobei die nur für den Elementarprozeß konstanten Temperaturen T_{zu} und T_{ab} bei Wärmezu- und Wärmeabfuhr bei jedem Teilprozeß verschieden sein können. Daher ändert sich der thermische Wirkungsgrad $\eta_{th\,rev}$, jedoch ergibt sich aus Gl. (68) für jeden *Elementarprozeß:*

$$dq_{zu}/T_{zu} = |dq_{ab\,rev}|/T_{ab} \tag{69}$$

Die mittleren thermodynamischen Temperaturen $T_{m\,zu}$ und $T_{m\,ab}$ der Wärmezufuhr und -abfuhr q_{zu} und $|q_{ab}|$ während des reversiblen Kreisprozesses lassen sich berechnen aus

$$\int (dq/T)_{zu} = q_{zu}/T_{m\,zu} \tag{70}$$

$$\int (dq/T)_{ab} = -|q_{ab}|/T_{m\,ab} \tag{71}$$

Damit ergibt sich für alle reversiblen Rechtsprozesse der *thermische Wirkungsgrad:*

$$\eta_{th\,rev} = 1 - (T_{m\,ab}/T_{m\,zu}) \tag{72}$$

3.2.3. Wärmepumpe

Bei dem in der Wärmepumpe durchgeführten Kreisprozeß wird die aus der Umgebung verfügbare Wärme bei der Temperatur T_u dem Arbeitsstoff zugeführt und durch die Zufuhr der Kreisprozeßarbeit w_{Kr} die für Heizzwecke erforderliche Temperatur T_{ab} erreicht.
Zur dimensionslosen Bewertung wird als *Leistungszahl* ε_W das Verhältnis der abgeführten Heizwärme $|q_{ab}|$ zur Kreisprozeßarbeit w_{Kr} angegeben, das nach Gl. (63) stets größer als Eins ist und mit abnehmendem Temperaturunterschied steigt:

$$\varepsilon_W = |q_{ab}|/w_{Kr} = |q_{ab}|/(|q_{ab}| - q_{zu}) \tag{73}$$

Für den CARNOT-Prozeß wird:

$$\varepsilon_{WC} = T_{ab}/(T_{ab} - T_{zu}) \tag{74}$$

3.2.4. Kältemittelverdichter

Im Kältemittelverdichter erfolgt die Wärmezufuhr q_{zu} bei Temperaturen T_{zu}, die kleiner als die Umgebungstemperatur T_u sind. Die Zufuhr der Kreisprozeßarbeit w_{Kr} soll die Wärmeabfuhr an die Umgebung ermöglichen. Als *Leistungszahl* ε_K des Kältemittelverdichters bezeichnet man das Verhältnis der zugeführten Wärme q_{zu} zur Kreisprozeßarbeit w_{Kr}:

$$\varepsilon_K = q_{zu}/w_{Kr} = q_{zu}/(|q_{ab}| - q_{zu}) \tag{75}$$

Für den CARNOT-Prozeß gilt hier:

$$\varepsilon_{KC} = T_{zu}/(T_{ab} - T_{zu}) \tag{76}$$

Für $T_{zu} < 0{,}5T_{ab}$ wird $\varepsilon_{KC} < 1$.

3.3. Entropie, T,s-Diagramm, dritter Hauptsatz

Nach Gl. (68) läßt sich jeder Isentrope eine von CLAUSIUS eingeführte Zustandsgröße, die *spezifische Entropie s*, zuordnen. Sie ist dadurch bestimmt, daß sie sich durch reversible Wärmezufuhr dq_T bei konstanter Temperatur beim Übergang zur benachbarten Isentrope erhöht um:

$$ds_T = dq_T/T \tag{77}$$

Mit den Gln. (31) und (58) wird:

$$ds = (du + p\,dv)/T = (dh - v\,dp)/T \tag{78}$$

In der Technischen Thermodynamik sind nur Entropieunterschiede gegenüber einem zweckmäßig festgelegten Bezugszustand erforderlich, für den ein Entropiewert vereinbart wird. In den Wasserdampftabellen ist für Flüssigkeit beim Tripelpunkt $s_0 = 0$ gesetzt, bei den in der Kältetechnik verwendeten Stoffen wird für Flüssigkeit (bei 273,15 K und zugehörigem Siededruck) $s_0 = 1$ kJ/(kg · K) gewählt.

Die Entropie ist nicht unmittelbar meßbar, sondern nur aus anderen Zustandsgrößen zu berechnen, z. B. für *isotherme Zustandsänderungen* mit Gl. (77), für *isochore Zustandsänderungen* mit Gln. (33) und (78):

$$\mathrm{d}s_v = \mathrm{d}u/T = c_v\,\mathrm{d}T/T \tag{79}$$

und für *isobare Zustandsänderungen* mit Gln. (54) und (78):

$$\mathrm{d}s_p = \mathrm{d}h/T = c_p\,\mathrm{d}T/T \tag{80}$$

Zu beachten ist der Unterschied zwischen der spezifischen Entropie als kalorischer Zustandsgröße und den spezifischen Wärmekapazitäten, die trotz gleicher Dimension temperaturabhängige Stoffeigenschaften sind.
Bei einfachen Systemen hängt die spezifische Entropie nur von zwei thermischen Zustandsgrößen ab, z. B. $s = f(T, v)$. Entsprechend Gl. (26) wird das vollständige Differential:

$$\mathrm{d}s = (\partial s/\partial T)_v\,\mathrm{d}T + (\partial s/\partial v)_T\,\mathrm{d}v = c_v\,\mathrm{d}T/T + (\partial s/\partial v)_T\,\mathrm{d}v \tag{81}$$

Für den beliebigen Zustand (p, v, T) wird:

$$\begin{aligned} s - s_0 &= \left[\int_{T_0}^{T} \frac{c_p}{T}\,\mathrm{d}T\right]_{p_0} - \left[\int_{p_0}^{p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p\right]_T \\ &= \left[\int_{T_0}^{T} \frac{c_p}{T}\,\mathrm{d}T\right]_{p} - \left[\int_{p_0}^{p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p\right]_{T_0} \end{aligned} \tag{82}$$

Die Zeiger an den eckigen Klammern geben an, mit welchem gleichbleibenden Druck und mit welcher gleichbleibenden Temperatur die Integrale zu ermitteln sind, weil c_p vom Druck und $(\partial v/\partial T)_p$ von der Temperatur abhängen kann.

Die *Gesamtentropie* eines geschlossenen Systems mit der Masse m wird $S = ms$. Die dem System reversibel zu- oder abgeführte Wärme q_{rev} läßt sich anschaulich als Fläche im T,s- oder Wärmediagramm (1874 von Belpaire eingeführt) darstellen. Es ergeben sich für die isotherm zugeführte spezifische Wärmemenge q_{12T} nach Gl. (77) im Bild 7a ein Rechteck, für die isochor zugeführte spezifische Wärmemenge q_{12v} nach Gl. (79) der Verlauf nach Bild 7b, wobei die Fläche zugleich die Zunahme der spezifischen inneren Energie $(u_2 - u_1)$ darstellt, und für die isobar zugeführte spezifische Wärmemenge q_{12p} nach Gl. (80) der Verlauf

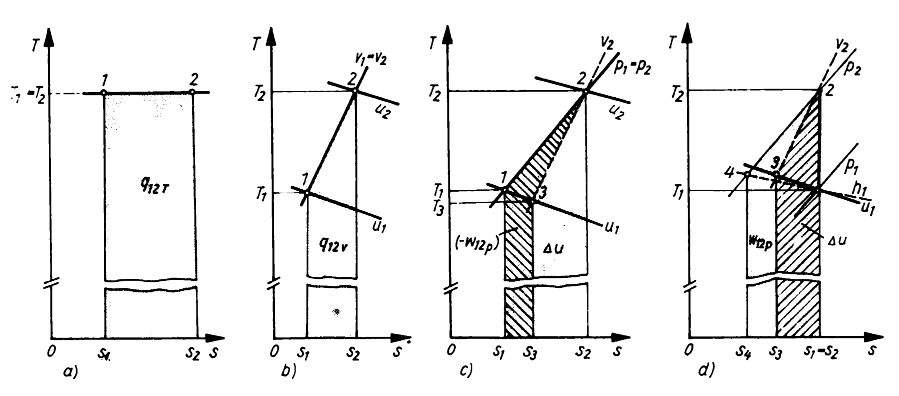


Bild 7. Darstellung der reversibel zugeführten spezifischen Wärme q als Fläche im T,s-Diagramm.
a) Isotherme; b) Isochore; c) Isobare; d) Isentrope

nach Bild 7c. Die Fläche gibt nach Gl. (58) auch die Erhöhung der spezifischen Enthalpie $(h_2 - h_1)$ an. Wird außerdem die Isochore durch Punkt 2 bis zum Schnittpunkt 3 und der Kurve $u_1 =$ konst. eingetragen, um $(u_2 - u_1)$ zu erhalten, so stellt die Differenzfläche nach Gl. (36) die vom geschlossenen System *abgegebene spezifische Raumänderungsarbeit* $(-w_{12p})$ dar. Für die Isentrope 1—2 im Bild 7d ist die Entropie konstant $(q_{12} = 0)$. Die Fläche unter der Isochore durch Punkt 2 bis zum Schnittpunkt 3 mit der Kurve $u_1 =$ konst. stellt nach Gl. (25) die *spezifische Raumänderungsarbeit* als Fläche dar und die Fläche unter der Isobare durch Punkt 2 bis zum Schnittpunkt 4 mit der Kurve $h_1 =$ konst. nach Gl. (50) die *spezifische technische Arbeit*. Die Kurven in den Bildern 7b bis 7d gelten für trockene Luft im Temperaturbereich von 0···40°C bei Drücken von 12 MPa bis 16 MPa.

Die spezifische Entropie eines nichtadiabaten Systems nimmt bei Wärmeabgabe an die Umgebung ab. Durch Wärmetransport über die Systemgrenze kann die Entropieänderung $ds_a \gtrless 0$ sein. Dabei ändert sich auch die Entropie der Umgebung. Reversible Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß die *Gesamtentropie* aller am Vorgang beteiligten Systeme *konstant* bleibt (Konstanz der Gesamtentropie).

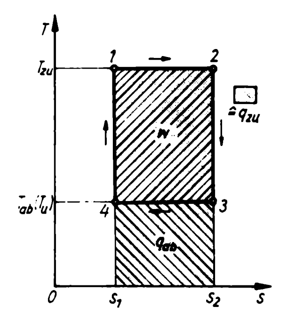


Bild 8. Rechtsläufiger CARNOT-Prozeß im T,s-Diagramm

Beispiel. Beim rechtsläufigen CARNOT-Prozeß (Bild 8) erhöht sich bei der isothermen Wärmezufuhr $q_{12} = q_{zu}$ bei hoher Temperatur T_{zu} die Gesamtentropie des Systems um Q_{zu}/T_{zu}, und um den gleichen Betrag nimmt die Entropie des Wärmebehälters ab. Bei der isothermen Wärmeabfuhr $q_{34} = q_{ab}$ im Kondensator bei niedriger Temperatur vermindert sich die Gesamtentropie des Systems um $|Q_{ab}|/T_{ab}$. Um den gleichen Betrag steigt die Entropie im Kondensator. Nach Gl. (68) nimmt die Entropie des Wärmebehälters um den gleichen Betrag ab, um den die Entropie im Kondensator wächst.

Bei irreversiblen Prozessen vergrößert sich die Gesamtentropie aller am Vorgang beteiligten Systeme.

Die Entropie ermöglicht eine *quantitative Analyse irreversibler Prozesse*. Aus diesem Grund ist in einem geschlossenen adiabaten System (Bild 4a) durch irreversible Prozesse jeder Punkt mit größerer Entropie oberhalb der Isentrope 1—2s erreichbar, jedoch kein Punkt mit kleinerer Entropie.

Beispiel. Irreversible Wärmeübertragung der Wärme dQ mit der Temperatur T_{zu} von einem Wärmebehälter an ein System mit der Temperaturabnahme $(T_{zu} - T)$. Die Entropie des Systems wächst um dQ/T, während die Entropie des Wärmebehälters nur um dQ/T_{zu} abnimmt. Die Gesamtentropie beider Systeme erhöht sich um:

$$dS_{irrev} = dQ/T - dQ/T_{zu} = [1 - (T/T_{zu})]\, dQ/T \tag{83}$$

Der Klammerwert ist nach Gl. (68) der CARNOT-Faktor $\eta_{th\,C}$ und gibt den Teil der Wärme dQ an, der sich zwischen den Temperaturen T_{zu} und T mit einem CARNOT-Prozeß in mechanische Arbeit $W_{Kr\,C}$ umwandeln läßt. Die *irreversible Entropieerhöhung* wird:

$$dS_{irrev} = W_{Kr\,C}/T \tag{84}$$

Die einem System zugeführte *dissipative Arbeit* dw_{diss} (Gl. (38)) erhöht die Entropie um:

$$ds_{irrev} = dw_{diss}/T \tag{85}$$

Bei der adiabaten Drosselung hätte durch die Druckabnahme $(p_1 - p_2)$ ohne irreversible Vorgänge und Wärmezufuhr bei Umgebungstemperatur T_u das System die spezifische technische isotherme Arbeit w_{t12T} nach außen abgeben können. Die *Entropieerhöhung*, für die keine Zwischenwerte angegeben werden können, ist:

$$s_{12\,irrev} = |w_{t12T}|/T_u \tag{86}$$

Im geschlossenen System erhöht sich die spezifische Entropie bei der Wärmezufuhr q_{12} für irreversible Prozesse (*Entropiebilanz*):

$$s_2 = s_1 + \int_1^2 \mathrm{d}q/T + s_{12\,\mathrm{irrev}} \tag{87}$$

Beim offenen System mit stationärer Strömung ist mit dem Massestrom $\dot{m}$ ein entsprechender *Entropietransport* über die Systemgrenzen verbunden. Beim adiabaten System mit irreversiblen Prozessen gilt:

$$\dot{m}(s_2 - s_1) = \dot{S}_2 - \dot{S}_1 = \dot{S}_{12\,\mathrm{irrev}} \tag{88}$$

Für ein System, dem der Wärmestrom $\dot{Q}$ zugeführt wird, ergibt sich die Entropiebilanz:

$$\dot{m}s_2 = \dot{m}s_1 + \int_1^2 d\dot{Q}/T + S_{12\,\mathrm{irrev}} \tag{89}$$

Wird diese Gleichung durch $\dot{m}$ geteilt, ergibt sich Gl. (87).

Nur für *chemische Vorgänge* ist der dritte Hauptsatz wichtig, der von PLANCK wie folgt ausgesprochen wurde:

Die Entropie ist für alle chemisch homogenen Körper von endlicher Dichte beim absoluten Nullpunkt gleich Null.

3.4. Gesamtformeln aus erstem und zweitem Hauptsatz

Änderungen von potentieller und kinetischer Energie bleiben unberücksichtigt. Für *geschlossene Systeme* läßt sich Gl. (25) schreiben:

$$\int_1^2 \mathrm{d}q + w_{12} = u_2 - u_1 \tag{90}$$

Wird Gl. (87) mit der Umgebungstemperatur T_u multipliziert, ergibt sich:

$$-T_u \int_1^2 \mathrm{d}q/T = T_u s_{12\,\mathrm{irrev}} - T_u(s_2 - s_1) \tag{91}$$

Durch Addition beider Gleichungen wird:

$$\int_1^2 [1 - (T_u/T)]\,\mathrm{d}q + w_{12} = u_2 - u_1 - T_u(s_2 - s_1) + T_u s_{12\,\mathrm{irrev}} \tag{92}$$

Für *offene Systeme* ergibt sich aus Gl. (49):

$$\int_1^2 \mathrm{d}q + w_{t12} = h_2 - h_1 \tag{93}$$

und mit der mit T_u multiplizierten Gl. (87):

$$\int_1^2 [1 - (T_u/T)]\,\mathrm{d}q + w_{t12} = h_2 - h_1 - T_u(s_2 - s_1) + T_u s_{12\,\mathrm{irrev}} \tag{94}$$

In beiden Gleichungen [(92) und (94)] tritt der CARNOT-Faktor $\eta_{\mathrm{th\,C}}$ auf (Gl. (68)).

3.5. Spezifische Exergie, spezifische Anergie, exergetischer Wirkungsgrad, exergetischer Gütegrad

Die *spezifische Exergie* e_1 eines Systems (Zustandsgrößen T_1, p_1, v_1, u_1, h_1, s_1) ist seine Arbeitsfähigkeit, wenn es durch reversible Prozesse, z. B. isentrope und isotherme Zustandsänderungen, auf die Temperatur T_u und durch Wärmezufuhr aus der Umgebung ohne Änderung

der potentiellen und kinetischen Energie und ohne Mischungsvorgänge mit der Umgebung auf den Druck p_u der Umgebung gebracht wird. Im *thermodynamischen Gleichgewicht* erreicht das System die Zustandsgrößen v_0, u_0, h_0 und s_0.

Die *spezifische Exergie* e_1 ist der Teil jeder Energieform, der sich bei festgelegtem Umgebungszustand mit reversiblen Prozessen in beliebige andere Energieformen oder mechanische Arbeit umwandeln läßt. Der nichtumwandelbare Teil wird als *spezifische Anergie* mit b_1 bezeichnet.

Der Anergieanteil potentieller, kinetischer und elektrischer Energie ist Null. Dagegen enthalten die Umgebung und alle Systeme, die mit ihr im thermodynamischen Gleichgewicht stehen, nur Anergie.

Für *geschlossene Systeme* wird nach Gl. (92):

$$e_1 = -w_{1\,u\,rev} = u_1 - u_0 - T_u(s_1 - s_0) + \int_1^2 [1 - (T_u/T)]\,dq \tag{95}$$

Bei isentroper Expansion ist $dq = 0$ und bei isothermer Wärmezufuhr aus der Umgebung der CARNOT-Faktor Null. Damit wird:

$$e_1 = -w_{1\,u\,rev} = u_1 - u_0 - T_u(s_1 - s_0) \tag{96}$$

und die spezifische Anergie:

$$b_1 = u_1 - e_1 = u_0 + T_u(s_1 - s_0) \tag{97}$$

Für *offene Systeme* gilt Gl. (94) mit $\int_1^2 [1 - (T_u/T)]\,dq = 0$:

$$e_{t1} = -w_{t1\,u\,rev} = h_1 - h_0 - T_u(s_1 - s_0) \tag{98}$$

und die spezifische Anergie:

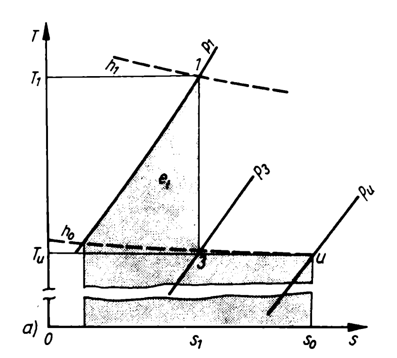
$$b_{t1} = h_1 - e_{t1} = h_0 + T_u(s_1 - s_0) \tag{99}$$

Für einen zweckmäßig vereinbarten Umgebungszustand können die spezifische Exergie und die spezifische Anergie als *kalorische Zustandsgrößen* betrachtet werden. Im T,s-Diagramm mit Linien konstanten Drucks und konstanter Enthalpie ist die spezifische Exergie e_t als Fläche dargestellt (Bild 9a). Der isentropen Expansion bis zur Temperatur T_u beim Druck p_3 folgt die isotherme Expansion bis zum Druck p_u. Auch im p,v-Diagramm ergibt sich die spezifische Exergie e_t als Fläche (Bild 9b).

Für irreversible Prozesse wird der Wert aus Gl. (98) in Gl. (94) eingesetzt:

$$\int_1^2 [1 - (T_u/T)]\,dq = e_{t2} - e_{t1} + T_u s_{12\,irrev} - w_{t12} \tag{100}$$

Der Integralausdruck auf der linken Seite der Gleichung ist die spezifische Exergie e_{q12} der dem Stoffstrom zugeführten spezifischen Wärmemenge q_{12}, die vom Integrationsweg abhängt. Mit steigender Heiztemperatur wächst der Exergieanteil der Heizwärme q_{12}.



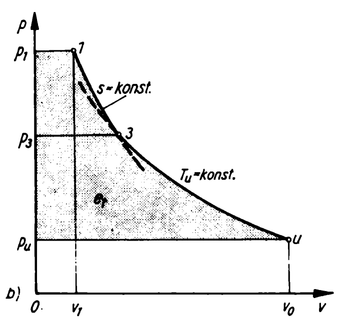


Bild 9. Darstellung der spezifischen Exergie e_t offener Systeme als Fläche.
a) im T,s-Diagramm; b) im p,v-Diagramm

Die nichtumkehrbar verrichtete spezifische technische Arbeit $(-w_{t12})$ ergibt sich aus Gl. (100):

$$-w_{t12} = e_{t1} - e_{t2} + \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq - T_u s_{12\,irrev} \tag{101}$$

Sie ist stets kleiner als der Betrag der reversibel gewonnenen Arbeit bei gleicher spezifischer Exergie e_{q12} der zugeführten spezifischen Wärmemenge q_{12} reversibel gewonnener Arbeit:

$$-w_{t12\,rev} = e_{t1} - e_{t2} + \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq \tag{102}$$

Die Exergieabnahme durch irreversible Prozesse ist gleich der Anergiezunahme. Es gilt:

$$|e_{t12\,irrev}| = |w_{t12\,rev}| - |w_{t12}| = T_u s_{12\,irrev} \tag{103}$$

Als quantitatives Maß für den Grad der Nichtumkehrbarkeit sind Exergieabnahme oder Entropiezunahme geeignet. Bei der *Drosselung* ist $w_{t12} = 0$ und die irreversible Exergieabnahme gleich der isothermen spezifischen technischen Arbeit w_{t12T}, die sich mit dem Druckabfall $(p_1 - p_2)$ durch Wärmezufuhr aus der Umgebung erreichen läßt. Es ist unmöglich, Anergie in Exergie zu verwandeln. Wird in Gl. (102) für den Zustand 2 der Umgebungszustand angenommen $(e_{t2} = 0)$, so ergibt sich:

$$_t e_{t1} = w_{t1u\,rev} - \int_1^u [1 - (T_u/T)] \, dq \tag{104}$$

Für einen festgelegten Umgebungszustand hängt e_{t1} nicht vom Weg zu diesem Zustand ab, solange ausschließlich reversible Prozesse verwendet werden. Bei der Darstellung im T,s- oder p,v-Diagramm können sich die Werte zwischen den Zuständen 1 und u ändern, der graue Flächeninhalt bleibt konstant. Werden nur die Exergieanteile der zu- und abgeführten Wärme berücksichtigt, ergibt sich der *exergetische Wirkungsgrad* η_{ex}. Er ist bei offenen stationären Prozessen nach den Gln. (100)···(102) für *Kraftmaschinen:*

$$\eta_{ex12} = -w_{t12}/-w_{t12\,rev} = -w_{t12}\bigg/\left\{e_{t1} - e_{t2} + \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq\right\}$$

$$= 1 - T_u s_{12\,irrev}\bigg/\left\{e_{t1} - e_{t2} + \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq\right\} \tag{105}$$

und für *Pumpen* bei Flüssigkeiten und Gasen mit Wärmeabfuhr:

$$\eta_{ex12} = e_{t2}\bigg/\left\{e_{t1} - \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq + w_{t12}\right\}$$

$$= 1 - T_u s_{12\,irrev}\bigg/\left\{e_{t1} + w_{t12} - \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq\right\} \tag{106}$$

Bei *Kreisprozessen* läßt sich Gl. (100) schreiben:

$$\oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu} - \oint [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}| - T_u \oint ds_{irrev} = |w_{Kr}| \tag{107}$$

Der Wert $\oint ds_{irrev}$ berücksichtigt alle durch irreversible Vorgänge bedingten Entropieerhöhungen. Der *exergetische Wirkungsgrad eines Rechtsprozesses* wird:

$$\overrightarrow{\eta}_{ex} = |w_{Kr}|\Big/\left\{\oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu} - \oint [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}|\right\} \tag{108}$$

$$\overrightarrow{\eta}_{ex} = 1 - T_u \oint ds_{irrev}\Big/\left\{\oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu} - \oint [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}|\right\} \tag{109}$$

Bei ausschließlich reversiblen Vorgängen ergeben die Gln. (105) bis (109) $\eta_{ex\,rev} = 1$.
Werden bei offenen stationären Prozessen für Kraftmaschinen außer der vom System abgegebenen spezifischen technischen Arbeit $|w_{t12}|$ auch die spezifische Exergie e_{t2} des austretenden Massestroms als *Nutzen* und die spezifische Exergie e_{t1} des eintretenden Massestroms und der Exergieanteil der zugeführten Wärme als *Aufwand* angesehen, bezeichnet man ihr Verhältnis als *exergetischen Gütegrad* ν_{ex}. Mit Gl. (100) wird:

$$\nu_{ex12} = \frac{e_{t2} - w_{t12}}{e_{t1} + \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq} = 1 - \frac{T_u s_{12\,irrev}}{e_{t1} + \int_1^2 [1 - (T_u/T)] \, dq} \tag{110}$$

Beim Gütegrad $\overset{\frown}{\nu}_{ex}$ der *Kreisprozesse* für Kraftmaschinen ist als Aufwand nicht die Differenz der Exergieanteile von zu- und abgeführter Wärme, sondern nur der Exergieanteil der zugeführten Wärme einzusetzen:

$$\overset{\frown}{\nu}_{ex} = |w_{Kr}| / \oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu} \tag{111}$$

$$\overset{\frown}{\nu}_{ex} = 1 - \frac{\oint [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}|}{\oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu}} - \frac{T_u \oint ds_{irrev}}{\oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu}} \tag{112}$$

Bei der thermodynamischen Bewertung der *Wärmepumpe* durch den *exergetischen Gütegrad* $\overset{\frown}{\nu}_{ex\,W}$ gilt als *Nutzen* die Differenz der Exergieanteile von ab- und zugeführter Wärme und als *Aufwand* die Summe der zugeführten Kreisprozeßarbeit w_{Kr} und des Exergieanteils der zugeführten Wärme [5]:

$$\overset{\frown}{\nu}_{ex\,W} = \frac{\oint [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}| - \oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu}}{w_{Kr} + \oint [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu}} \tag{113}$$

Für den Kältemittelverdichter wird unter der Voraussetzung, daß die beim Kreisprozeß abgegebene Wärme die Kreisprozeßarbeit teilweise deckt, nach [5] der *exergetische Gütegrad:*

$$\overset{\frown}{\nu}_{ex\,K} = \frac{\int [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}| - \int [1 - (T_u/T_{zu})] \, dq_{zu}}{w_{Kr} - \int [1 - (T_u/T_{ab})] \, |dq_{ab}|} \tag{114}$$

Weil $(T_u/T_{zu}) > 1$ ist, wird das zweite Glied im Zähler positiv, während sich bei $T_{ab} = T_u$ für das erste im Zähler und das zweite im Nenner Null ergibt.

3.6. Freie Energie und freie Enthalpie

Die als *thermodynamische Potentiale* bezeichneten Zustandsgrößen sind zur Ermittlung des thermodynamischen und chemischen Gleichgewichts zweckmäßig. Für die *spezifische freie Energie f* (HELMHOLTZ-*Funktion*) gilt:

$$f = u - Ts \tag{115}$$

oder mit den Gln. (78) und (30):

$$df = du - T\,ds - s\,dT = -p\,dv - s\,dT = dw_{rev} - s\,dT \tag{116}$$

Für isotherme Prozesse wird $df = dw_{rev}$. Bei allen anderen Prozessen muß mit dem Absolutwert der Entropie gerechnet werden. Das Produkt Ts ist die gebundene Energie.
Für die *spezifische freie Enthalpie g* (GIBBS-*Funktion*) gilt:

$$g = h - Ts \tag{117}$$

oder mit den Gln. (78) und (52):

$$dg = dh - T\,ds - s\,dT = v\,dp - s\,dT = dw_{t\,rev} - s\,dT \tag{118}$$

Für isotherme Prozesse ist $dg = dw_t$. Das stabile Gleichgewicht kommt stets der Phase zu, für die g den kleineren Wert hat.

4. Thermodynamik idealer Gase

Alle Gase nähern sich bei hinreichend kleinem Druck ($p \to 0$) dem *idealen* (vollkommenen) *Gaszustand*, bei dem die Anziehungskräfte der Moleküle untereinander und ihr Eigenvolumen vernachlässigbar klein werden.

4.1. Thermische Zustandsgleichung

Für *geschlossene Systeme* gilt (ausgenommen bei Temperaturen in der Nähe des absoluten Nullpunkts):

$$pV = mRT \tag{119}$$

und für *offene Systeme* (Massestrom $\dot{m}$, Volumenstrom $\dot{V}$):

$$p\dot{V} = \dot{m}RT \tag{120}$$

Auf die Masse oder beliebige Stoffmenge bezogen:

$$pv = p/\varrho = RT; \qquad p\bar{v} = \bar{R}T; \qquad pV = n\bar{R}T \tag{121}$$

Die *allgemeine oder molare Gaskonstante* $\bar{R}$ ist für alle idealen Gase

$$\bar{R} = 8{,}3142 \text{ kJ/(kmol} \cdot \text{K)}$$

Dieser Wert ist gleich der von einem Kilomol bei isobarer Erwärmung um ein Kelvin an die Umgebung abgegebenen *Raumänderungsarbeit.* Die *spezielle oder spezifische Gaskonstante* $R = \bar{R}/M$ (für verschiedene Gase) ist Tabelle 11 zu entnehmen, in der auch das *molare Volumen* $\bar{v}_0$ im *physikalischen Normzustand* ($p_0 = 101{,}325$ kPa; $T_0 = 273{,}15$ K) angegeben ist. Da dieser Wert für alle idealen Gase $\bar{v}_0 = 22{,}41$ m³/kmol ist, läßt sich erkennen, wie groß bei diesem Zustand die Abweichungen der verschiedenen Gase vom idealen Gas sind.
Aus Gl. (121) ergibt sich für *ideale Gase:*

$$(\partial p/\partial T)_v = R\varrho = R/v \quad \text{und} \quad (\partial v/\partial T)_p = R/p \tag{122}$$

4.2. Spezifische und molare Wärmekapazitäten, innere Energie, Enthalpie und Entropie

Gesetz von JOULE:

Die Wärmekapazitäten, die spezifische innere Energie und die Enthalpie hängen bei idealen Gasen nicht vom Druck oder spezifischen Volumen, sondern nur von der Temperatur ab.

Bei der Drosselung bleibt daher die Temperatur konstant. Im T,s-Diagramm sind die Linien konstanter spezifischer innerer Energie u und spezifischer Enthalpie h im Gegensatz zu den Bildern 7c, d parallel zur Abszissenachse. Aus den Gln. (20) und (21) ergibt sich für die *molaren Wärmekapazitäten:*

$$\bar{c}_v = \bar{R}/(\varkappa - 1) \quad \text{und} \quad \bar{c}_p = \varkappa\bar{c}_v = \varkappa\bar{R}/(\varkappa - 1) \tag{123}$$

Die $\varkappa$-Werte für 273,15 K sind in Tabelle 11 angegeben. Für Prozesse in einem hinreichend kleinen Temperaturbereich benutzt man häufig die Mittelwerte nach den Gln. (16) bis (19), wobei zum Vereinfachen der Schreibweise die Temperaturgrenzen nicht angegeben werden.

Die spezifische innere Energie läßt sich nach Gl. (34) und die spezifische Enthalpie nach Gl. (55) ohne Angabe des spezifischen Volumens oder Drucks ermitteln. Für die *spezifische Entropie* ergibt sich aus den Gln. (82), (121) und (122):

$$s - s_0 = \int_{T_0}^{T} c_p \,\mathrm{d}T/T - R \ln (p/p_0) = \int_{T_0}^{T} c_p \,\mathrm{d}T/T + R \ln (vT_0/v_0T) \tag{124}$$

oder

$$s - s_0 = \int_{T_0}^{T} c_p \,\mathrm{d}T/T - R \ln (T/T_0) + R \ln (v/v_0) \tag{125}$$

Tabelle 12. $h(T)$- und $j(T)$-Werte von Gasen im Idealzustand

Temperatur T in K	Wasserstoff $h(T)$ in kJ/kg	$j(T)$	Stickstoff $h(T)$ in kJ/kg	$j(T)$	Sauerstoff $h(T)$ in kJ/kg	$j(T)$	Trockene Luft $h(T)$ in kJ/kg	$j(T)$	Wasserdampf $h(T)$ in kJ/kg	$j(T)$	Äthylen $h(T)$ in kJ/kg	$j(T)$
200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
250	684,7	0,3216	51,9	0,3388	45,5	0,3391	50,1	0,3380	92,5	0,3885	66,3	0,4325
273,15	1008,6	0,4520	75,9	0,4731	66,6	0,4741	73.3	0,4721	135,5	0,5430	99,7	0,6196
300	1388,5	0,5918	103,7	0,6155	91,2	0,6177	100,2	0,6144	185,4	0,7073	140,7	0,8294
350	2104,8	0,8243	155;7	0,8499	137,3	0,8554	150,5	0,8489	279,0	0,9789	223,9	1,2046
400	2828,4	1,0278	207,8	1,0536	184,0	1,0640	201,0	1,0531	373,6	1,2164	316,0	1,5647
450	3555,8	1,2082	260,2	1,2342	231,4	1,2507	251,9	1,2344	469,2	1,4284	417.0	1,9129
500	4284,6	1,3699	312,9	1,3967	279,6	1,4203	303,2	1,3980	566,1	1,6206	526,4	2,2507
550	5013,5	1,5163	366,0	1,5447	328,5	1,5762	355,0	1,5473	664,5	1,7970	643,9	2,5785
600	5741,7	1,6497	419,5	1,6811	378,2	1,7207	407,3	1,6850	764,4	1,9606	768,7	2,8966
650	6469,4	1,7724	473,6	1,8076	428,7	1,8557	460,2	1,8129	865,9	2,1135	900,2	3,205
700	7197,0	1,8860	528,1	1,9260	479,9	1,9825	513,6	1,9327	969,1	2,2574	1037,9	3,504
750	7925,2	1,9918	583,3	2,0373	531,7	2,1021	567,6	2,0455	1074,0	2,3937	1181,3	3,794
800	8655,0	2,0910	639,0	2,1426	584,2	2,2153	622,2	2,1521	1180,8	2,5233	1329,9	4,075
900	10124	2,2731	752,3	2,3378	690,7	2,4251	733,2	2,3497	1399,5	2,7657	1641,4	4,612
1000	11610	2,4380	868,0	2,5161	799,1	2,6159	846,3	2,5301	1625,5	2,990	1971,0	5,121
1100	13119	2,5895	985,8	2,6805	908,9	2,7908	961,5	2,6961	1858,6	3,199	2317,9	5,605
1200	14652	2,730	1105,7	2,833	1019,8	2,952	1078,4	2,850	2098,5	3,395	2681,1	6,068
1300	16208	2,861	1227,1	2,975	1131,7	3,102	1196,8	2,993	2345,2	3,581	3056,8	6,508
1400	17780	2,984	1349,9	3,108	1244,6	3,242	1316,4	3,127	2598,1	3,757	3435,9	6,920
1495	19285	3,093	1467,4	3,227	1352,8	3,367	1430,9	3,247	2844,0	3,917	—	—

Mit der von HEINRICH [11] eingeführten *Hilfsfunktion:*

$$j(T) = (\lg e/R) \int_{T_0}^{T} c_p \, dT/T \qquad (\lg e = 0{,}43429) \tag{126}$$

die die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmekapazität c_p im Idealgasgebiet berücksichtigt und für die auszugsweise Werte aus [4] von verschiedenen Gasen in Tabelle 12 angegeben sind, wird:

$$s - s_0 = (R/\lg e)\,[j(T) - \lg (p/p_0)] \tag{127}$$

oder

$$s - s_0 = (R/\lg e)\,[j(T) - \lg (T/T_0) + \lg (v/v_0)] \tag{128}$$

Nur für konstante spezifische Wärmekapazität (bei einatomigen Gasen oder mehratomigen Gasen im hinreichend kleinen Temperaturbereich) und damit konstante $\varkappa$-Werte gilt:

$$s - s_0 = c_p \ln (T/T_0) - R \ln (p/p_0) = R \left[\frac{\varkappa \ln (T/T_0) - (\varkappa - 1) \ln (p/p_0)}{\varkappa - 1}\right] \tag{129}$$

$$s - s_0 = c_v \ln (T/T_0) + R \ln (v/v_0) \tag{130}$$

$$s - s_0 = \frac{R}{\varkappa - 1} \ln \left[\frac{(T/T_0)^{\varkappa}}{(p/p_0)^{\varkappa - 1}}\right] \tag{131}$$

4.3. Reversible Zustandsänderungen

Die spezifische Raumänderungsarbeit $w_{12\,\mathrm{rev}}$ und die spezifische technische Arbeit $w_{t12\,\mathrm{rev}}$ lassen sich nach Gln. (30) und (53) berechnen.



4.3.1. Isochore

Das spezifische Volumen v ist konstant:

$$p_2/p_1 = T_2/T_1; \quad w_{12v} = 0; \quad w_{t12v} = v(p_2 - p_1); \quad q_{12v} = u_2 - u_1$$

Nur bei konstanter spezifischer Wärmekapazität c_v gilt:

$$q_{12v} = c_v(T_2 - T_1) = R(T_2 - T_1)/(\varkappa - 1) = v(p_2 - p_1)/(\varkappa - 1)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln (T_2/T_1) = c_v \ln (p_2/p_1)$$

Im T,s-Diagramm (Bild 10) sind die Isochoren Exponentialfunktionen mit der Subtangente c_v. Die Fläche $s_1 - 1 - 2 - s_2$ stellt die zugeführte spezifische Wärmemenge q_{12v} und die Zunahme der spezifischen inneren Energie $(u_2 - u_1)$ dar. Für zwei spezifische Volumina v' und v ergeben sich äquidistante Kurven mit dem Abstand $R \ln (v'/v)$ bei gleicher Temperatur.

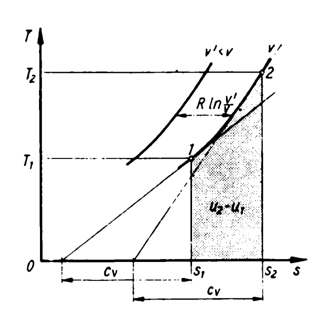


Bild 10. Isochoren im T,s-Diagramm bei konstanter spezifischer Wärmekapazität c_v

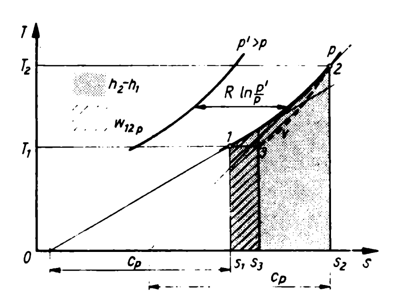


Bild 11. Isobaren im T,s-Diagramm bei konstanter spezifischer Wärmekapazität c_p

4.3.2. Isobare

Der Druck p ist konstant:

$$v_2/v_1 = T_2/T_1; \quad w_{12p} = -p(v_2 - v_1) = -R(T_2 - T_1); \quad w_{t12p} = 0$$

$$q_{12p} = h_2 - h_1 = u_2 - u_1 - w_{12p} = u_2 - u_1 + p(v_2 - v_1)$$

$$s_2 - s_1 = (R/\lg e)\,[j(T_2) - j(T_1)]$$

Nur bei konstanter spezifischer Wärmekapazität c_p gilt:

$$q_{12p} = c_p(T_2 - T_1) = \varkappa R(T_2 - T_1)/(\varkappa - 1) = -\varkappa w_{12p}/(\varkappa - 1)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln (T_2/T_1) = c_p \ln (v_2/v_1)$$

Im T,s-Diagramm (Bild 11) sind die Isobaren Exponentialfunktionen mit der Subtangente c_p. Die Fläche $s_1 - 1 - 2 - s_2$ stellt die zugeführte spezifische Wärmemenge q_{12p} und die Zunahme der spezifischen Enthalpie $(h_2 - h_1)$ dar. Entsprechend Bild 7c ergibt die Isochore durch Punkt 2 die Fläche $s_3 - 3 - 2 - s_2$ (Zunahme der spezifischen inneren Energie) und die Fläche $s_1 - 1 - 2 - 3 - s_3$ die spezifische Raumänderungsarbeit $-w_{12p}$. Für zwei Drücke p' und p ergeben sich äquidistante Kurven mit dem Abstand $-R \ln (p'/p)$.

4.3.3. Isotherme

Die Temperatur T, die spezifische innere Energie u und die spezifische Enthalpie h sind konstant:

$$p_1v_1 = p_2v_2 = RT; \quad w_{12T} = w_{t12T} = -RT \ln (v_2/v_1) = RT \ln (p_2/p_1) = p_1v_1 \ln (p_2/p_1)$$

$$q_{12T} = w_{t12T}; \quad s_2 - s_1 = q_{12T}/T = -R \ln (v_2/v_1) = R \ln (p_2/p_1)$$

Trotz Wärmezufuhr ändert sich die Gastemperatur nicht, die spezifische Wärmekapazität ist unendlich groß. Die gesamte zugeführte Wärme gibt das System als Raumänderungsarbeit an die Umgebung ab,

dabei sinkt der Druck, die Entropie wächst. Im p,v-Diagramm sind die Isothermen idealer Gase gleichseitige Hyperbeln, im T,s-Diagramm Parallelen zur Abszissenachse.
Da beim Ansaugen eines Gases mit Umgebungstemperatur T_u die Isotherme die kleinstmögliche spezifische Raumänderungsarbeit (Bild 4c) w_{12T} im *Verdichter* erfordert, dient sie als Vergleich zur Beurteilung der *Güte* ausgeführter Verdichter. Nur bei idealen Gasen ist die während der Verdichtung an die Umgebung abzuführende Wärme nach Gl. (49) gleich der spezifischen Arbeit w_{t12T}. Der *Leistungsbedarf* des vollkommenen Verdichters mit idealem Gas und isothermer Verdichtung wird mit Gl. (120):

$$P_T = \dot{m} w_{t12T} = p_1 \dot{V}_1 \ln (p_2/p_1) \tag{132}$$

Für die Volumeneinheit des angesaugten Gases ergibt sich der *Arbeitsbedarf:*

$$P_T/\dot{V}_1 = p_1 \ln (p_2/p_1) \tag{133}$$

Für $p_1 = 100$ kPa und Druckverhältnisse von 1,1 ··· 10 sind in Tabelle 13 die Werte bei $n = 1$ angegeben. Allerdings kann man sich bei größeren Druckverhältnissen nur durch Zwischenkühlen des Gases der Isotherme nähern.

Tabelle 13. Arbeitsbedarf des vollkommenen Verdichters vom Ansaugzustand bei 100 kPa und polytroper Verdichtung

Druckverhältnis p_2/p_1	Arbeitsbedarf in kJ/m³ bei Polytropenexponent n =				
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
1,1	9,53	9,57	9,61	9,64	9,66
1,2	18,23	18,38	18,51	18,62	18,71
1,3	26,24	26,55	26,82	27,05	27,24
1,4	33,65	34,17	34,61	34,99	35,32
1,5	40,55	41,31	41,95	42,51	42,99
1,6	47,00	48,02	48,88	49,58	50,30
1,7	53,06	54,36	55,48	56,45	57,30
1,8	58,78	60,38	61,76	62,95	64,00
1,9	64,19	66,10	68,35	69,18	70,45
2,0	69,30	71,54	73,48	75,17	76,65
2,5	91,65	95,70	99,00	101,83	104,65
3,0	109,90	115,50	120,60	125,23	129,15
3,5	125,30	133,10	139,20	145,60	150,85
4,0	138,65	147,40	156,00	163,80	170,45
4,5	150,40	161,70	171,00	179,83	187,95
5,0	161,00	173,30	184,60	194,90	204,34
5,5	170,50	183,70	196,80	208,87	219,45
6,0	179,20	194,70	208,80	221,86	233,80
6,5	187,20	204,60	219,60	234,00	247,45
7,0	194,60	212,87	228,54	245,63	260,27
7,5	201,50	221,10	239,40	256,10	272,30
8,0	208,00	228,80	248,40	266,90	284,00
8,5	214,05	236,50	257,40	276,90	295,00
9,0	219,80	243,10	265,20	286,00	305,55
9,5	225,20	249,70	273,00	295,10	316,05
10,0	230,30	256,30	280,80	303,80	325,90

Die im ausgeführten Verdichter an das Gas übertragene Innenleistung P_i ist infolge der Abweichungen von der Isotherme und irreversibler Vorgänge größer als P_T. Das Verhältnis P_T/P_i wird als *isothermer Innenwirkungsgrad* η_{Ti} des Verdichters bezeichnet. Infolge der mechanischen Reibungsverluste und der für den Betrieb erforderlichen Hilfseinrichtungen wird die dem Verdichter zuzuführende Leistung P_K größer als P_i. Der *mechanische Wirkungsgrad* ist $\eta_m = P_i/P_K$.



4.3.4. Isentrope (reversible Adiabate)

Die Entropie ist konstant.

$$s_1 = s_2; \quad q_{12s} = 0; \quad w_{12s} = u_2 - u_1; \quad w_{t12s} = h_2 - h_1$$

Mit Gl. (127) läßt sich bei vorgeschriebenem Enddruck p_2 die Hilfsfunktion $j(T_2)$ berechnen:

$$j(T_2) = j(T_1) + \lg (p_2/p_1) \tag{134}$$

Aus der Tabelle 12 ergibt sich T_2 und mit Gl. (121) $v_2 = RT_2/p_2$. Bei vorgeschriebener Endtemperatur T_2 ist $j(T_2)$ aus der Tabelle 12 zu entnehmen, und mit $\lg (p_2/p_1) = j(T_2) - j(T_1)$ läßt sich p_2 berechnen. Bei vorgeschriebenem spezifischem Volumen v_2 ergibt sich aus Gl. (128):

$$j(T_2) - \lg (T_2/T_0) = j(T_1) - \lg (T_1/T_0) + \lg (v_1/v_2) \tag{135}$$

Von den $j(T)$-Werten muß $\lg (T/T_0)$ subtrahiert werden, um die Temperatur T_2 zu erhalten, und mit Gl. (121) ergibt sich $p_2 = RT_2/v_2$. Nur bei konstanter spezifischer Wärmekapazität c_p ergibt sich aus Gl. (131):

$$(T_2/T_1)^{\varkappa} = (p_2/p_1)^{\varkappa-1} \tag{136}$$

Mit (121) werden:

$$T_2/T_1 = (v_1/v_2)^{\varkappa-1} \tag{137}$$

und

$$p_2/p_1 = (v_1/v_2)^{\varkappa} \tag{138}$$

Wenn beim Normzustand ideale Gase (z. B. Luft, Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff) bei Drücken über etwa 2 MPa reales Gasverhalten ergeben, sind die Gln. (137) und (138) zu ungenau. Ist jedoch die kritische Temperatur T_K (Tabelle 11) wesentlich kleiner als die niedrigste Prozeßtemperatur, ergibt Gl. (136) bis etwa 30 MPa brauchbare Näherungswerte.
Mit Gl. (138) wird die spezifische Raumänderungsarbeit:

$$w_{12s} = -\int_{v_1}^{v_2} p \, dv = -p_1 v_1^{\varkappa} \int_{v_1}^{v_2} v^{-\varkappa} \, dv = [p_1 v_1/(\varkappa - 1)] \cdot [(v_1/v_2)^{\varkappa-1} - 1] \tag{139}$$

$$w_{12s} = [p_1 v_1/(\varkappa - 1)] \cdot [(p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1] = [RT_1/(\varkappa - 1)] \cdot [(T_2/T_1) - 1] \tag{140}$$

$$w_{12s} = R(T_2 - T_1)/(\varkappa - 1) = (p_2 v_2 - p_1 v_1)/(\varkappa - 1) \tag{141}$$

$$w_{12s} = c_p(T_2 - T_1)/\varkappa \tag{142}$$

Die spezifische technische Arbeit ist:

$$w_{t12s} = h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = \varkappa w_{12s} \tag{143}$$

Im vollkommenen Kältemittelverdichter muß der angesaugte Volumenstrom $\dot{V}$ von der niedrigen Temperatur T_1 isentrop auf die Temperatur $T_2 = T_u$ verdichtet werden. Der *Leistungsbedarf* des vollkommenen *Kältemittelverdichters* mit idealem Gas konstanter Wärmekapazität c_p wird nach den Gln. (140) und (143):

$$P_s = \dot{m} w_{t12s} = \frac{\varkappa p_1 \dot{V}_1}{\varkappa - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1 \right] = \frac{\varkappa \dot{m} R T_1}{\varkappa - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1 \right] \tag{144}$$

Für die Volumeneinheit des angesaugten Gases ergibt sich der *Arbeitsbedarf:*

$$P_s/\dot{V}_1 = \frac{\varkappa p_1}{\varkappa - 1} [(p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1] \tag{145}$$

Bei ungekühlten Kreiselverdichtern verwendet man z. T. als Vergleich den Leistungsbedarf nach Gl. (144), der größer als bei isothermer Verdichtung ist. Für Luft, Sauerstoff usw. (Isentropenexponent $\varkappa = 1{,}4$) sind Werte für den Arbeitsbedarf nach Gl. (145) in Tab. 13 angegeben. Das Verhältnis P_s/P_T nimmt mit steigendem Druckverhältnis und Isentropenexponent $\varkappa$ zu.
Der *isentrope Innenwirkungsgrad:*

$$\eta_{si} = P_s/P_i = (h_{2s} - h_1)\,(h_2 - h_1) \tag{146}$$

läßt sich aus dem MOLLIER-h,s-Diagramm ermitteln. Bei mehrstufigen Verdichtern mit Zwischenkühlung auf Anfangstemperatur T_1 werden bei gleichem Druckverhältnis je Stufe die Endtemperatur und die Leistung für alle Stufen gleich, solange die spezifische Wärmekapazität c_p des idealen Gases konstant bleibt.

4.3.5. Polytrope

Eine Zustandsänderung mit konstanter spezifischer Wärmekapazität c_n wird als *Polytrope* bezeichnet. Durch Anfangs- und Endzustand sind nach den Gln. (25), (30), (49), (53) die spezifische Raumänderungsarbeit w_{12P}, die technische Arbeit w_{t12P} und die übertragene Wärme q_{12P} eindeutig bestimmt. Es gelten die Gln. (136) bis (141) u. (143) mit dem Polytropenexponent n statt $\varkappa$. Allgemein ist:

$$c_n = (n - \varkappa)\, c_v/(n - 1) \quad \text{oder} \quad n = (c_p - c_n)/(c_v - c_n) \tag{147}$$

Isochore: $c_n = c_v$, $n = \pm\infty$ *Isentrope:* $c_n = 0$, $n = \varkappa$

Isobare: $c_n = c_p$, $n = 0$ *Isotherme:* $c_n = \pm\infty$, $n = 1$

Für $1 < n < \varkappa$ steigt bei der Verdichtung trotz Wärmeabfuhr die Temperatur, d. h., c_n wird negativ, weil ein Teil der zugeführten Arbeit als innere Energie im Gas gespeichert und der Rest als Wärme abgeführt wird. Für $n < 1$ und $n > \varkappa$ ist c_n stets positiv. Statt Gl. (142) gilt:

$$w_{12P} = (c_v - c_n)\,(T_2 - T_1) \tag{148}$$

$$q_{12P} = c_n(T_2 - T_1) = (n - \varkappa)\, w_{12P}/(\varkappa - 1) \tag{149}$$

und mit Gl. (77):

$$s_2 - s_1 = c_n \ln (T_2/T_1) = c_n \ln (p_2v_2/p_1v_1) \tag{150}$$

Eine *polytrope Expansion* mit $1 < n < \varkappa$ ist im T,s-Diagramm (Bild 12) dargestellt. Die Fläche $s_1 - 1 - 2 - s_2$ gibt die zugeführte Wärme q_{12P}, die Fläche $s_1 - 1 - 3 - s_3$ die Abnahme der spezifischen inneren Energie $(u_1 - u_2)$, die Fläche $s_3 - 3 - 1 - 2 - s_2$ die spezifische Raumänderungsarbeit $|w_{12P}|$ und die Fläche $s_4 - 4 - 1 - 2 - s_2$ die spezifische technische Arbeit $|w_{t12P}|$ an. Bild 13 zeigt verschiedene Polytropen mit positiven Exponenten im p,v- und T,s-Diagramm.

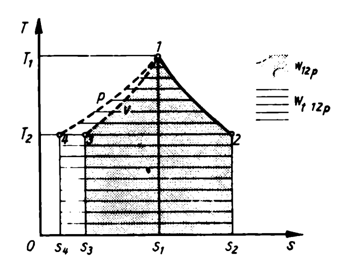
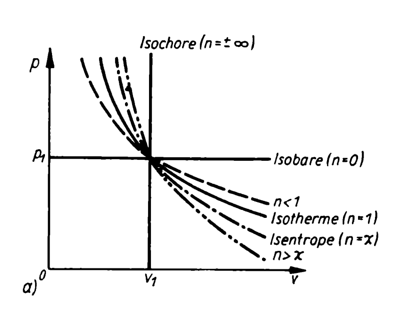


Bild 12. Polytrope mit $1 < n < \varkappa$ im T,s-Diagramm



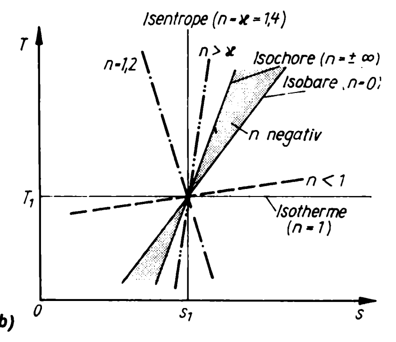


Bild 13. Polytropen. a) im p,v-Diagramm; b) im T,s-Diagramm

Der Bereich mit negativen Exponenten zwischen Isochore (n ändert sich sprunghaft von $+\infty$ auf $-\infty$) und Isobare ist technisch bedeutungslos. Die Polytrope mit $n = 1,2$ gilt für zweiatomige ideale Gase ($\varkappa = 1,4$).

Der Arbeitsbedarf je Volumeneinheit angesaugten Gases $P_p/\dot{V}_1$ ist für $p_1 = 100$ kPa, Druckverhältnisse von 1,1 ··· 10 und Polytropenexponenten zwischen 1,0 und 1,4 sind in Tab. 13 zusammengestellt.

Irreversible Kompressions- und Expansionsvorgänge lassen sich oft durch Polytropen hinreichend gut annähern. Aus p,V-Diagrammen ausgeführter Kolbenmaschinen werden für eine hinreichende Zahl von Punkten zwischen Beginn und Ende der Zustandsänderung zusammengehörende Werte p und V entnommen und in einem rechtwinkligen Koordinatensystem lg p über lg v aufgetragen (Bild 14). Aus der *Polytropengleichung* (138) ergibt sich: $\lg p + n \lg V = \lg p_1 + n \lg V_1$ oder:

$$n = -(\lg p_1 - \lg p)/(\lg V_1 - \lg V) \tag{151}$$

Läßt sich durch alle Punkte im Bild 14 genau genug eine Gerade legen, so ist die Expansions- oder Kompressionslinie eine Polytrope mit dem Exponent $n = \tan \varphi$.

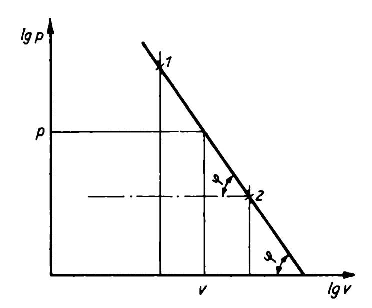


Bild 14. Polytrope im lg p,lg v-Diagramm

Bild 15. Rechtsläufiger Carnot-Prozeß im p,v-Diagramm

4.4. Reversible Kreisprozesse

Als Beispiele sind vier *Rechtsprozesse* gewählt. Zur Vereinfachung ist stets ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität c_p vorausgesetzt.

4.4.1. Carnot-Prozeß

Bei allen Arbeitsstoffen ergibt sich als T,s-Diagramm das Bild 8, bei vollkommenem Gas wird im p,v-Diagramm die die spezifische Kreisprozeßarbeit $|w_{\mathrm{Kr\,C}}|$ darstellende Fläche sehr schmal (Bild 15). Außer dem für den *thermischen Wirkungsgrad* $\eta_{\mathrm{th\,C}}$ nach Gl. (68) maßgebenden *maximalen Temperaturverhältnis* $\tau = T_{\max}/T_{\min}$ sind das *maximale Druckverhältnis* $\pi = p_{\max}/p_{\min}$ und insbesondere bei Kolbenmaschinen das *maximale Verhältnis der spezifischen Volumina* $\varepsilon = v_{\max}/v_{\min}$ für den Bauaufwand der Kraftmaschine ausschlaggebend. Bei Kolbenmaschinen wird deshalb die Kreisprozeßarbeit je Masseeinheit auf die erforderliche Änderung des Zylinderinhalts (Hubraums) bezogen und als *mittlerer Kolbendruck* p_{m} bezeichnet. Der Wert $p_{\mathrm{m\,C}} = |w_{\mathrm{Kr\,C}}|/[v_{\min}(\varepsilon - 1)]$ für den Carnot-Prozeß mit idealem Gas ist so klein, daß bei der ausgeführten Maschine die unvermeidlichen Irreversibilitäten größer werden. Außerdem läßt sich die isotherme Wärmezufuhr im Zylinder nicht realisieren.

Für die *Zustandsänderungen* gilt:

1. *Isotherme Expansion* 1—2: Wärmezufuhr $q_{\mathrm{zu}} = q_{12T} = T_{\mathrm{zu}}(s_2 - s_1)$; $w_{12T} = -q_{12T}$; $w_{12T} = -RT_{\mathrm{zu}} \ln (v_2/v_1) = -RT_{\mathrm{zu}} \ln (p_1/p_2)$
2. *Isentrope Expansion* 2—3 von der Temperatur T_{zu} bis T_{ab} (am vorteilhaftesten Umgebungstemperatur T_{u}); $p_2/p_3 = (T_{\mathrm{zu}}/T_{\mathrm{ab}})^{\varkappa/(\varkappa-1)}$; $v_3/v_2 = (T_{\mathrm{zu}}/T_{\mathrm{ab}})^{1/(\varkappa-1)}$; $w_{23s} = R(T_{\mathrm{ab}} - T_{\mathrm{zu}})/(\varkappa - 1)$
3. *Isotherme Kompression* 3—4: $q_{\mathrm{ab}} = T_{\mathrm{ab}}(s_4 - s_3) = T_{\mathrm{ab}}(s_1 - s_2)$; $w_{34T} = -q_{\mathrm{ab}}$; $w_{34T} = RT_{\mathrm{ab}} \ln (v_3/v_4) = RT_{\mathrm{ab}} \ln (p_4/p_3)$
4. *Isentrope Kompression* 4—1 bis zur Temperatur T_{zu}, wobei wieder der Zustand 1 erreicht werden muß: $p_1/p_4 = (T_{\mathrm{zu}}/T_{\mathrm{ab}})^{\varkappa/(\varkappa-1)} = p_2/p_3$; $v_4/v_1 = (T_{\mathrm{zu}}/T_{\mathrm{ab}})^{1/(\varkappa-1)} = v_3/v_2$; $w_{41s} = R(T_{\mathrm{zu}} - T_{\mathrm{ab}})/(\varkappa - 1) = -w_{23s}$; aus $p_2/p_3 = p_1/p_4$ folgt $p_1/p_2 = p_4/p_3$

Da $w_{41s} = -w_{23s}$ ist, wird die *Kreisprozeßarbeit:*

$$w_{\mathrm{KrC}} = w_{12T} + w_{34T} = -RT_{\mathrm{zu}} \ln (p_1/p_2) + RT_{\mathrm{ab}} \ln (p_1/p_4) \tag{152}$$

$$w_{\mathrm{KrC}} = -R(T_{\mathrm{zu}} - T_{\mathrm{ab}}) \ln (p_1/p_2) \tag{153}$$

Die Kreisprozeßarbeit ist negativ, d. h., die Kraftmaschine gibt sie an die Umgebung ab. Nach Gl. (63) wird mit Gl. (67):

$$-w_{\mathrm{KrC}} = q_{\mathrm{zu}} + q_{\mathrm{ab}} = T_{\mathrm{zu}}(s_2 - s_1) - T_{\mathrm{ab}}(s_2 - s_1) = q_{\mathrm{zu}}(T_{\mathrm{zu}} - T_{\mathrm{ab}})/T_{\mathrm{zu}} \tag{154}$$

$$-w_{\mathrm{KrC}} = q_{\mathrm{zu}}[1 - (T_{\mathrm{ab}}/T_{\mathrm{zu}})] = q_{\mathrm{zu}}\eta_{\mathrm{th\,C}} \tag{155}$$

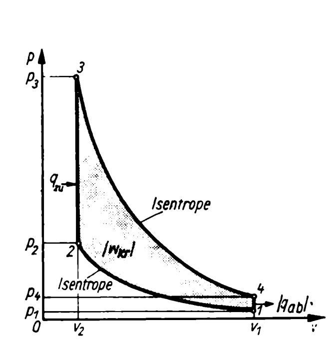


Bild 16. Gleichraumprozeß im p,v-Diagramm

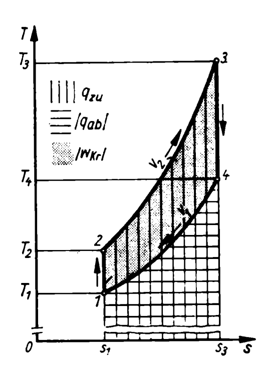


Bild 17. Gleichraumprozeß im T,s-Diagramm

4.4.2. Gleichraum- oder Otto-Prozeß

Dieser Prozeß ist der Idealprozeß für den ersten 1876 von Otto gebauten Motor mit *isentroper Vorverdichtung* von Anfangszustand 1 (bei Motoren ohne Aufladung Zustand der Umgebungsluft), isochorer Wärmezufuhr, isentroper Expansion und isochorer Wärmeabfuhr. Er ist in den Bildern 16 und 17 im p,v- und T,s-Diagramm dargestellt und wird als *offener Kreisprozeß* bezeichnet, weil im Punkt 1 der Arbeitsstoff nach jedem Kreisprozeß ausgewechselt wird.

Obwohl im Zylinder ein brennbares Gas-Luft-Gemisch komprimiert wird und Verbrennungsgase expandiert werden und die Temperaturbereiche dabei verschieden sind, wird gleiche und konstante spezifische Wärmekapazität vorausgesetzt. Das *Verdichtungsverhältnis* $\varepsilon = v_1/v_2$ ist mit Rücksicht auf die Gefahr der Selbstzündung begrenzt ($\varepsilon = 4 \cdots 10$) und gleich dem Ausdehnungsverhältnis v_4/v_3. Für die isentropen Zustandsänderungen gilt nach den Gln. (137) bis (139):

$$T_2/T_1 = T_3/T_4 = \varepsilon^{\varkappa-1}; \qquad p_2/p_1 = p_3/p_4 = \varepsilon^{\varkappa} \tag{156}$$

$w_{12s} = p_1v_1(\varepsilon^{\varkappa-1} - 1)/(\varkappa - 1)$; aus $T_2/T_1 = T_3/T_4$ folgt:

$$T_3/T_2 = T_4/T_1; \qquad (T_3 - T_2)/(T_4 - T_1) = T_2/T_1 = \varepsilon^{\varkappa-1} \tag{157}$$

Für die isochor zugeführte spezifische Wärmemenge q_{zu} gilt:

$$q_{\mathrm{zu}} = c_v(T_3 - T_2) = v_2(p_3 - p_2)/(\varkappa - 1) = v_1(p_3 - p_2)/\varepsilon(\varkappa - 1) \tag{158}$$

$$T_3 = (q_{\mathrm{zu}}/c_v) + T_1\varepsilon^{\varkappa-1} \tag{159}$$

Das *maximale Temperaturverhältnis* wird:

$$\tau = T_3/T_1 = (q_{\mathrm{zu}}/c_vT_1) + \varepsilon^{\varkappa-1} \tag{160}$$

$$p_3 = [(\varkappa - 1)\, q_{\mathrm{zu}}/v_2] + p_2; \qquad \pi_{23} = p_3/p_2 = [(\varkappa - 1)\, q_{\mathrm{zu}}/p_2v_2] + 1 \tag{161}$$

$$p_3 = [\varepsilon(\varkappa - 1)\, q_{\mathrm{zu}}/v_1] + p_1\varepsilon^{\varkappa} \tag{162}$$

Das *maximale Druckverhältnis* wird:

$$\pi = p_3/p_1 = [\varepsilon(\varkappa - 1)\, q_{zu}/p_1 v_1] + \varepsilon^{\varkappa} \tag{163}$$

Das Verhältnis des Absolutbetrags der isochor abgeführten zur zugeführten spezifischen Wärmemenge ergibt sich aus:

$$|q_{ab}|/q_{zu} = (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2) = T_1/T_2 = 1/\varepsilon^{\varkappa-1} \tag{164}$$

und nach Gl. (65) der *thermische Wirkungsgrad:*

$$\eta_{th\,rev} = 1 - (|q_{ab}|/q_{zu}) = 1 - (1/\varepsilon^{\varkappa-1}) \tag{165}$$

Dieser Wirkungsgrad ist unabhängig von der zugeführten Wärme und steigt mit wachsendem Verdichtungsverhältnis und Isentropenexponenten $\varkappa$. In Tabelle 14 sind Werte für $\eta_{th\,rev}$ zusammengestellt.

Tabelle 14. Thermischer Wirkungsgrad η_{th} für den Gleichraumprozeß

$c_p/c_v = \varkappa$	Wirkungsgrad η_{th} bei Verdichtungsverhältnis $\varepsilon =$									
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1,30	0,188	0,340	0,416	0,464	0,499	0,525	0,547	0,565	0,580	0,593
1,35	0,215	0,384	0,466	0,517	0,553	0,581	0,603	0,621	0,636	0,650
1,40	0,242	0,426	0,512	0,565	0,602	0,630	0,652	0,670	0,685	0,698

Die Kreisprozeßarbeit wird nach Gl. (65): $|w_{Kr\,rev}| = q_{zu}\eta_{th\,rev}$, wobei das Verhältnis $q_{zu}/|w_{Kr\,rev}| = 1/\eta_{th\,rev} = \dot{Q}_{zu}/P_{rev}$ der *spezifische Wärmeverbrauch* je Einheit der abgegebenen spezifischen Arbeit oder das Verhältnis des zugeführten Wärmestroms zur abgegebenen Leistung P_{rev} ist. Für den *mittleren Kolbendruck* $p_{m\,rev}$ ergibt sich:

$$p_{m\,rev} = \frac{q_{zu}\eta_{th\,rev}}{(v_1 - v_2)} = \frac{\varepsilon q_{zu}\eta_{th\,rev}}{v_1(\varepsilon - 1)} \tag{166}$$

Da der mittlere Kolbendruck mit wachsendem Druck p_1 (aufgeladener Motor) steigt, wird die dimensionslose *Kreisprozeßarbeit* eingeführt:

$$\pi_{m\,rev} = p_{m\,rev}/p_1 = \frac{\varepsilon q_{zu}\eta_{th\,rev}}{p_1 v_1(\varepsilon - 1)} \tag{167}$$

Werden statt q_{zu} und $\eta_{th\,rev}$ das Verdichtungsverhältnis ε und das maximale Druckverhältnis π eingeführt, ergibt sich:

$$\pi_{m\,rev} = \frac{\varepsilon\left(\dfrac{\pi}{\varepsilon^{\varkappa}} - 1\right)(\varepsilon^{\varkappa-1} - 1)}{(\varepsilon - 1)(\varkappa - 1)} \tag{168}$$

Bei der Kreisprozeßcharakteristik nach JANTE [12] wird der thermische Wirkungsgrad $\eta_{th\,rev}$ über der dimensionslosen Kreisprozeßarbeit $\pi_{m\,rev}$ des OTTO-Prozesses für zweiatomige Gase ($\varkappa = 1{,}4$) mit Linien für konstantes Verdichtungsverhältnis ε, maximales Druckverhältnis π und maximales Temperaturverhältnis τ aufgetragen, wobei $\tau = T_3/T_1 = p_3v_3/p_1v_1 = \pi/\varepsilon$ ist. Für zugelassene Höchstwerte von ε und π (oder τ) ergeben sich die entsprechenden $\pi_{m\,rev}$- und τ- (oder π-) Werte.

Der Kreisprozeß, der im ausgeführten *Ottomotor* tatsächlich durchgeführt wird, enthält nur irreversible Zustandsänderungen, so daß bei gleicher zugeführter spezifischer Wärmemenge q die in der Maschine an den Kolben abgegebene spezifische Innenarbeit $|w_i|$ (indizierte Arbeit) kleiner als die Arbeit $w_{Kr\,rev}$ ist. Damit werden der thermische Innenwirkungsgrad $\eta_{th\,i}$ und der mittlere innere Kolbendruck $p_{m\,i}$ stets kleiner als beim Gleichraumprozeß. Infolge des Arbeitsbedarfs der für den Betrieb erforderlichen Hilfseinrichtungen und der mechanischen Reibungsverluste wird die nach außen abgegebene *spezifische*

Nutzarbeit $|w_e|$ kleiner als die *spezifische Innenarbeit* $|w_i|$. Wird der Idealprozeß als Vergleichsprozeß benutzt, so bezeichnet man als *Gütegrad* η_g das Verhältnis $w_i/w_{Kr\,rev}$ und als *mechanischen Wirkungsgrad* η_m das Verhältnis w_e/w_i. Der *thermische Innenwirkungsgrad* $\eta_{th\,i}$ ist beim ausgeführten Ottomotor:

$$\eta_{th\,i} = \frac{|w_i|}{q_{zu}} = \frac{|w_{Kr\,rev}|}{q_{zu}} \cdot \frac{w_i}{w_{Kr\,rev}} = \eta_{th\,rev}\eta_g \tag{169}$$

und der *thermische Nutzwirkungsgrad*:

$$\eta_{th\,e} = |w_e|/q_{zu} = \eta_{th\,rev}\eta_g\eta_m \tag{170}$$

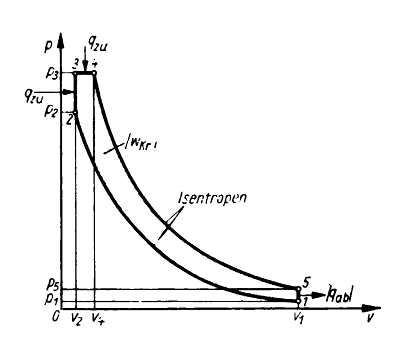


Bild 18. Gleichraum-Gleichdruck-Prozeß im p,v-Diagramm

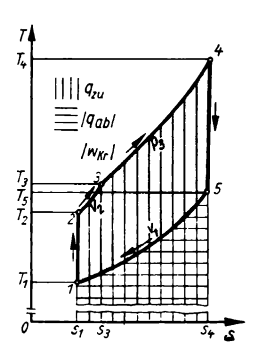


Bild 19. Gleichraum-Gleichdruck-Prozeß im T,s-Diagramm

4.4.3. Gleichraum-Gleichdruck- oder Seiliger-Prozeß

Um den thermischen Wirkungsgrad $\eta_{th\,rev}$ des Ottomotors durch Verwendung höherer Verdichtungsverhältnisse ($\varepsilon = 12\cdots 22$) wesentlich zu verbessern, verdichtete DIESEL bereits in seinem ersten Motor (1897) reine Luft auf so hohe Temperaturen, daß sich der erst kurz vor bis nach der Kolbentotlage 2 (Bild 18) eingespritzte Kraftstoff von selbst entzündet und nahezu isobar verbrennt. Als *thermodynamischer Idealprozeß* für *Dieselmotoren* eignet sich der 1911 von SEILIGER angegebene Prozeß mit isochorer und isobarer Wärmezufuhr:

$$q_{zu} = q_{zu\,v} + q_{zu\,p} \tag{171}$$

der im p,v- und T,s-Diagramm (Bilder 18, 19) darstellbar ist. Durch die isochore Wärmezufuhr $q_{zu\,v}$ ist die Drucksteigerung π_{23} bedingt. Für die isobare Wärmezufuhr $q_{zu\,p}$ wird $q_{zu\,p} = \varkappa R(T_4 - T_3)/(\varkappa - 1)$; $v_4/v_3 = T_4/T_3 = \varphi$ (*Volldruckverhältnis*); $\pi = p_3/p_1 = \pi_{23}\varepsilon^\varkappa$; $\tau = T_4/T_1 = \varphi\pi/\varepsilon$. Das Ausdehnungsverhältnis v_5/v_4 ist kleiner als das Verdichtungsverhältnis ε.
Der *thermische Wirkungsgrad* wird:

$$\eta_{th\,rev} = 1 - \frac{|q_{ab}|}{q_{zu}} = 1 - \frac{\pi_{23}\varphi^\varkappa - 1}{\varepsilon^{\varkappa-1}[\pi_{23} - 1 + \varkappa\pi_{23}(\varphi - 1)]} \tag{172}$$

Bei gleichem maximalem Druck- und Temperaturverhältnis π und τ kann das Verdichtungsverhältnis größer als beim Ottomotor sein, dadurch verbessert sich der thermische Wirkungsgrad. Für $\varphi = 1$ ergibt sich die Gleichung für den *Gleichraumprozeß* und für $\pi_{23} = 1$ die Gleichung für den *Gleichdruckprozeß*:

$$\eta_{th\,rev} = 1 - \frac{\varphi^{\varkappa-1}}{\varkappa\varepsilon^{\varkappa-1}(\varphi - 1)} \tag{173}$$

Die dimensionslose Kreisprozeßarbeit läßt sich mit Gl. (167) ermitteln. Für den Kreisprozeß im ausgeführten Dieselmotor gelten die Ausführungen über den Gleichraumprozeß sinngemäß.

4.4.4. Ericson- oder Ackeret-Keller-Prozeß

Als Idealprozeß für *Gasturbinenanlagen* schlug ERICSON vor, die isentropen Zustandsänderungen des CARNOT-Prozesses durch Isobaren mit regenerativer Wärmeübertragung zu ersetzen. Erstmalig verwendeten ihn 1940 ACKERET und KELLER. Der Prozeß ist im p,v- und T,s-Diagramm (Bilder 20, 21) dargestellt, wobei die Wärmeabfuhr $|q_{ab}|$ bei der Umgebungstemperatur T_u erfolgt. Bei idealen Gasen mit konstanter spezifischer Wärmekapazität c_p ist die isobar bei hohem Druck p zum Vergrößern des spezifischen Volumens von v_2 auf v_3 erforder-

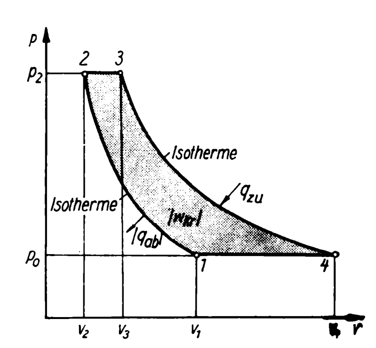


Bild 20. ACKERET-KELLER-Prozeß im p,v-Diagramm

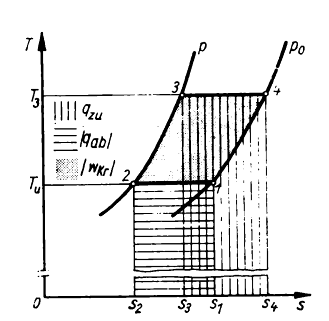


Bild 21. ACKERET-KELLER-Prozeß im T,s-Diagramm

liche *spezifische Wärmemenge* q_{23} (Fläche s_2—2—3—s_3 im Bild 21) gleich der bei niedrigem Druck abzuführenden Wärme $|q_{41}|$ (Fläche s_4—4—1—s_1 im Bild 21), die in einem vollkommenen Gegenströmer übertragen werden kann.
Von außen wird bei konstanter Temperatur T die spezifische Wärmemenge q_{zu}:

$$q_{zu} = q_{34} = RT \ln (p/p_0) \tag{174}$$

zugeführt und an die Umgebung isotherm die Wärmemenge $|q_{ab}|$ abgegeben:

$$|q_{ab}| = |q_{12}| = RT_u \ln (p/p_0) \tag{175}$$

Es ergibt sich der gleiche *thermische Wirkungsgrad* wie beim CARNOT-Prozeß

$$\eta_{th\,rev} = 1 - (T_u/T) \tag{176}$$

Praktisch kann man sich jedoch der isothermen Expansion nur durch *Zwischenerhitzen* und der isothermen Kompression durch *Zwischenkühlen* annähern.
Als Idealprozeß für Gasturbinenanlagen wird auch der JOULE-*Prozeß* mit zwei Isobaren und zwei Isentropen und dem thermischen Wirkungsgrad beim maximalen Druckverhältnis π verwendet:

$$\eta_{th\,rev} = 1 - (1/\pi)^{(\varkappa-1)/\varkappa} \tag{177}$$

4.5. Gasmischung

4.5.1. Gasgemisch

Die Zusammensetzung eines Gemisches aus chemisch nicht miteinander reagierenden Einzelgasen h, i, k usw. mit den molaren Massen M_h, M_i, M_k usw. und den speziellen Gaskonstanten R_h, R_i, R_k usw. läßt sich in Raumteilen v, Molteilen ψ oder Masseteilen ξ angeben.

1. Bei der *technischen Gasanalyse* werden aus der Volumeneinheit die Einzelgase nacheinander absorbiert. Dann mißt man das Restvolumen, nachdem das Gas bei konstanter Temperatur

auf den ursprünglichen Druck verdichtet wurde. Damit ergibt sich die *Gemischzusammensetzung* in *Raumteilen* (Partialvolumen):

$$r_h + r_i + r_k + \cdots = 1 \tag{178}$$

2. Bei der Zusammensetzung in *Molteilen* wird das Verhältnis ψ_h der Molzahl n_h des Bestandteils h zur gesamten Molzahl n des Gemisches verwendet:

$$\psi_h + \psi_i + \psi_k + \cdots = 1 \tag{179}$$

3. Bei der Zusammensetzung in *Masseteilen* benutzt man das Verhältnis ξ_h der Masse m_h des Bestandteils h zur Gesamtmasse m:

$$\xi_h + \xi_i + \xi_k + \cdots = 1 \tag{180}$$

Für das Gemisch werden die *scheinbare molare Masse M:*

$$M = \psi_h M_h + \psi_i M_i + \psi_k M_k + \cdots; \qquad \xi_h = \frac{\psi_h M_h}{M} \tag{181}$$

die molaren Wärmekapazitäten $\bar{c}_p$ und $\bar{c}_v$:

$$\bar{c}_p = \psi_h \bar{c}_{ph} + \psi_i \bar{c}_{pi} + \psi_k \bar{c}_{pk} + \cdots \tag{182}$$

$$\bar{c}_v = \psi_h \bar{c}_{vh} + \psi_i \bar{c}_{vi} + \psi_k \bar{c}_{vk} + \cdots \tag{183}$$

und die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v

$$c_p = \xi_h c_{ph} + \xi_i c_{pi} + \xi_k c_{pk} + \cdots \tag{184}$$

$$c_v = \xi_h c_{vh} + \xi_i c_{vi} + \xi_k c_{vk} + \cdots \tag{185}$$

Für ideale Gase gilt das *Gesetz von* DALTON:

Jedes Einzelgas verteilt sich über den Gesamtraum so, als ob kein weiteres Gas vorhanden wäre, und der *Gesamtdruck p* ist gleich der Summe der Teildrücke (*Partialdrücke*) der einzelnen Gase:

$$p_h + p_i + p_k + \cdots = p \tag{186}$$

Die Partialdrücke sind porportional den Molteilen $p_h = \psi_h p$; $r_h = \psi_h$; die Gln. (119) bis (121) gelten für die Einzelgase und das Gemisch. Die *spezielle Gaskonstante R* wird:

$$R = \xi_h R_h + \xi_i R_i + \xi_k R_k + \cdots \tag{187}$$

4.5.2. Reversible Mischung

Mischung von zwei idealen Gasen mit gleichem Druck p_u und gleicher Temperatur T_u, die getrennt die Raumteile r_h und r_i des Gesamtvolumens V einnehmen. Die *umkehrbare Mischung* ist nur möglich mit Hilfe von zwei halbdurchlässigen (semipermeablen) Kolben (Bild 22), die jeweils das eine Gas ungehindert durchtreten lassen, während sie für das andere Gas undurchlässig sind. Glühendes Platinblech ist z. B. für alle Gase außer Wasserstoff undurchlässig, jedoch sind nur für wenige andere Gase halbdurchlässige Wände bekannt.

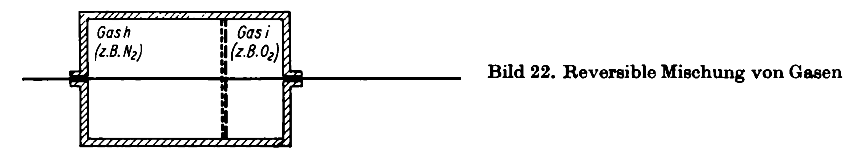


Bild 22. Reversible Mischung von Gasen

Die Massen der Raumteile r_h und r_i betragen:

$$m_h = p_u V r_h / R_h T_u \quad \text{und} \quad m_i = p_u V r_i / R_i T_u \tag{188}$$

Der linke Kolben in Bild 22 sei nur für das Gas h, der rechte nur für das Gas i durchlässig. Das Gemisch kann sich nur zwischen beiden Kolben bilden, wobei das Gas h durch Zufuhr der Wärmemenge Q_h aus

der Umgebung isotherm von p_u auf $r_h p_u$ expandiert und die Raumänderungsarbeit $(-W_h)$:

$$-W_h = p_u r_h V \ln (p_u/r_h p_u) = Q_h \quad (189)$$

an den linken Kolben abgibt. Eine entsprechende Beziehung gilt für das Gas i und den rechten Kolben, so daß die gesamte von der Umgebung zugeführte Wärmemenge:

$$Q = p_u V[r_h \ln (1/r_h) + r_l \ln (1/r_l)] \quad (190)$$

gleich der bei der reversiblen Mischung abgegebenen Arbeit wird. Die *Abnahme der Entropie* der Umgebung um:

$$\Delta S = Q/T_u = p_u V[r_h(\ln 1/r_h) + r_l \ln (1/r_l)]/T_u \quad (191)$$

muß nach dem zweiten Hauptsatz gleich der *Entropiezunahme* der beiden idealen Gase durch ihre Mischung sein, während ihre innere Energie und Enthalpie unverändert bleiben.
Gl. (190) gibt auch die zum Entmischen zweier idealer Gase aufzuwendende *Mindestarbeit* an.

Beispiel. Es ist die Mindestarbeit zum Entmischen von 1 m³ trockener Luft im physikalischen Normzustand (T_0 = 273,15 K, p_0 = 101,325 kPa, Stickstoff r_h = 0,79; Sauerstoff r_l = 0,21) zu berechnen. Nach Gl. (190) ist:

$$W = 101{,}325 \cdot 1 \cdot [0{,}79 \cdot \ln (1/0{,}79) + 0{,}21 \cdot \ln (1/0{,}21)] \text{ kJ} = 52{,}09 \text{ kJ}$$

4.5.3. Irreversible Mischung (Diffusion)

Für die adiabate Mischung zweier Gasmassen m_h und m_l (Volumina V_h und V_l) und zweier Gasströme $\dot{m}_h$ und $\dot{m}_l$ (Volumenströme $\dot{V}_h$ und $\dot{V}_l$), wobei in beiden Fällen die spezifischen Wärmekapazitäten c_{ph} und c_{pl} konstant bleiben und die Temperaturen und Drücke mit T_h, T_l, p_h und p_l bezeichnet werden, ergeben sich folgende Beziehungen:

1. Bei unverändertem Gesamtvolumen $(V_h + V_l)$ und ohne Änderung der äußeren Lage- und Bewegungsenergie bleibt die innere Energie unverändert. Es ergibt sich derselbe Endzustand wie beim umkehrbaren Vorgang, ohne daß während der Diffusion Arbeit nach außen abgegeben oder Wärme aus der Umgebung aufgenommen würde. Die *Entropiezunahme* ist nach Gl. (191) zu berechnen, und Gl. (103) gilt — genau wie bei der Drosselung — für den Verlust an *Exergie*. Die *Temperatur*, die sich nach der Mischung ergibt, wird

allgemein:

$$T = \frac{m_h c_{vh} T_h + m_l c_{vl} T_l}{m_h c_{vh} + m_l c_{vl}} \quad (192)$$

wenn $\varkappa$ für beide Gase gleich ist:

$$T = \frac{p_h V_h + p_l V_l}{\dfrac{p_h V_h}{T_h} + \dfrac{p_l V_l}{T_l}} \quad (193)$$

2. Beim Vermischen zweier Gasströme im Beharrungszustand ohne Änderung der äußeren Lage- und Bewegungsenergie bleibt die Entropie unverändert. Die *Temperatur* des Abflußstroms wird daher

allgemein:

$$T = \frac{\dot{m}_h c_{ph} T_h + \dot{m}_l c_{pl} T_l}{\dot{m}_h c_{ph} + \dot{m}_l c_{pl}} \quad (194)$$

wenn $\varkappa$ für beide Gase gleich ist:

$$T = \frac{p_h \dot{V}_h + p_l \dot{V}_l}{\dfrac{p_h \dot{V}_h}{T_h} + \dfrac{p_l \dot{V}_l}{T_l}} \quad (195)$$

Der Volumenabflußstrom ist zunächst unbestimmt; er ergibt sich nach der Zustandsgleichung (120) für den vorhandenen Gasdruck p des abfließenden Stroms.

5. Thermodynamik realer Gase

Bei realen Gasen müssen die Anziehungskräfte der Moleküle untereinander sowie ihr Eigenvolumen beachtet werden. Im folgenden werden keine Gase behandelt, deren Moleküle bei hohen Temperaturen zerfallen (*Dissoziation*) oder die bei Annäherung an die Sättigungslinie Molekülkomplexe bilden (*Assoziation* oder *Polymerisation*).

5.1. Thermisches Verhalten

5.1.1. Realgasfaktor Z

Für bestimmte Drücke und Temperaturen ist das spezifische Volumen v des wirklichen Gases das Z-fache des spezifischen Volumens des vollkommenen Gases, das mit v_{id} bezeichnet und nach Gl. (121) berechnet wird:

$$v = Zv_{id} = ZRT/p \tag{196}$$

Die Z-Werte sind für Wasserstoff, Stickstoff, CO_2-freie Luft und für Kohlendioxid in der Tabelle 15 zusammengestellt.

1. Bei absoluten Temperaturen $T < 2{,}5T_k$ wird für jede Isotherme bei Druckerhöhung zunächst $Z < 1$. Den Isothermenpunkt für den kleinsten Wert von Z, d. h. $[\partial(pv)/\partial p]_T = 0$, bezeichnet man als BOYLE-*Punkt*, weil sich dort in einem hinreichend kleinen Druckbereich das Gas wie ein ideales Gas verhält, obgleich sein spezifisches Volumen von dem des idealen Gases abweicht. Den Isothermenpunkt, für den $Z = 1$ ist, nennt man *Idealpunkt*. Für Luft bei $T = 273{,}15$ K liegt z. B. der BOYLE-Punkt bei 9,51 MPa und $Z = 0{,}97$ und der *Idealpunkt* bei 18,74 MPa.

Tabelle 15. Realgasfaktoren Z für Wasserstoff, Stickstoff, trockene Luft (CO_2-frei) und Kohlendioxid

Druck p in kPa		Realgasfaktor Z bei Temperatur t in °C								
		−150	−100	−50	0	50	100	200	300	400
101	Wasserstoff	1,0002	1,0006	1,0007	1,0006	1,0006	1,0005	1,0004	1,0000	1,0000
1013	Wasserstoff	1,0033	1,0066	1,0067	1,0062	1,0058	1,0051	1,0040	1,0033	1,0020
2026	Wasserstoff	1,0075	1,0134	1,0135	1,0125	1,0115	1,0102	1,0081	1,0067	1,0041
4053	Wasserstoff	1,0189	1,0281	1,0274	1,0253	1,0229	1,0204	1,0162	1,0138	1,0085
6079	Wasserstoff	1,0335	1,0437	1,0419	1,0382	1,0343	1,0305	1,0243	1,0210	1,0130
8106	Wasserstoff	1,0517	1,0606	1,0568	1,0514	1,0458	1,0409	1,0324	1,0281	1,0171
10132	Wasserstoff	1,0737	1,0786	1,0723	1,0647	1,0573	1,0513	1,0405	1,0353	1,0215
20265	Wasserstoff	—	—	1,1526	1,1337	1,1165	1,1039	1,0889	1,0734	1,0589
40530	Wasserstoff	—	—	1,3266	1,2768	1,2383	1,2093	1,1750	1,1435	1,1226
60795	Wasserstoff	—	—	1,5066	1,4229	1,3601	1,3156	1,2576	1,2113	—
81060	Wasserstoff	—	—	1,6855	1,5679	1,4810	1,4196	1,3402	1,2766	—
101325	Wasserstoff	—	—	1,8606	1,7100	1,6003	1,5221	1,4216	1,3414	—
		−50	0	50	100	150	200	300	400	
101	Stickstoff	0,9987	0,9995	1,0000	1,0002	1,0003	1,0003	1,0003	1,0004	
1013	Stickstoff	0,9861	0,9956	1,0001	1,0023	1,0034	1,0039	1,0043	1,0042	
2026	Stickstoff	0,9728	0,9919	1,0005	1,0048	1,0069	1,0081	1,0088	1,0085	
4053	Stickstoff	0,9491	0,9863	1,0025	1,0105	1,0145	1,0166	1,0178	1,0172	
6079	Stickstoff	0,9294	0,9835	1,0061	1,0171	1,0227	1,0256	1,0270	1,0262	
8106	Stickstoff	0,9147	0,9833	1,0111	1,0247	1,0316	1,0349	1,0363	1,0352	
10132	Stickstoff	0,9063	0,9851	1,0176	1,0334	1,0411	1,0447	1,0459	1,0444	
20265	Stickstoff	0,9605	1,0355	1,0723	1,0902	1,0968	1,1033	1,101	1,0939	
40530	Stickstoff	1,2639	1,2564	1,2530	1,2468	1,2388	1,2383	1,2152	1,1945	
60795	Stickstoff	1,6102	1,5242	1,4709	1,4319	1,4007	1,3826	1,3357	1,2971	
81060	Stickstoff	1,9491	1,7981	1,6974	1,6251	1,5691	1,5236	1,4586	1,4030	
101325	Stickstoff	2,2721	2,0670	1,9229	1,8058	1,7395	1,6855	1,5801	1,5096	

Tabelle 15 (Fortsetzung)

Druck p in kPa		Realgasfaktor Z bei Temperatur t in °C						
		−130	−78,5	0	50	100	150	200
101	trockene Luft	0,9981	0,9986	0,9994	0,9998	1,0001	1,0003	1,0003
1013		—	—	0,9942	0,990	1,0013	1,0025	1,0032
2026		0,8416	0,9509	0,9890	0,9983	1,0029	1,0053	1,0066
4053		0,6355	0,9004	0,9806	0,9982	1,0068	1,0112	1,0136
6079		0,3836	0,8541	0,9747	0,9996	1,0118	1,0179	1,0211
8106		0,3893	0,8135	0,9712	1,0024	1,0177	1,0253	1,0291
10132		—	0,7854	0,9704	1,0068	1,0247	1,0334	1,0376
15198		—	—	0,9834	—	1,0476	—	1,0621
20265		—	—	1,0094	—	1,0747	—	1,0870
30397		—	—	1,0973	—	1,1420	—	1,1447
40530		—	—	1,2133	—	1,2181	—	1,2082
60795		—	—	1,4691	—	1,3959	—	1,3431
81060		—	—	1,7330	—	1,5789	—	1,4845
101325		—	—	1,9908	—	1,7682	—	1,6305

Druck p in kPa		0	10	20	30	40	60	80	100	137	198
5066	Kohlendioxid	0,1043	0,1102	0,6293	0,6936	0,7364	0,8013	0,8420	0,8776	0,9128	0,9519
10132		0,2006	0,2041	0,2119	0,2282	0,2677	0,5383	0,6707	0,7489	0,8328	0,9110
15198		0,2930	0,2961	0,3017	0,3096	0,3266	0,3950	0,5232	0,6334	0,7660	0,8810
20265		0,3824	0,3842	0,3878	0,3938	0,4054	0,4423	0,5070	0,5926	0,7250	0,8615
30397		0,5562	0,5538	0,5544	0,5575	0,5622	0,5782	0,6069	0,6471	0,7329	0,8603
40530		0,7231	0,7167	0,7136	0,6488	0,7130	0,7199	0,7344	0,7554	0,8057	0,9000
50662		0,9843	0,8748	0,8681	0,8618	0,8577	0,8583	0,8635	0,8725	0,9009	0,9663
60795		1,0429	1,0281	1,0180	1,0095	1,0023	0,9927	0,9910	0,9932	1,0041	1,0434
70920		1,1979	1,1804	1,1652	1,1536	1,1427	1,1262	1,1170	1,1109	1,1086	1,1263
81060		1,3488	1,3289	1,3114	1,2959	1,2813	1,2573	1,2399	1,2280	1,2144	1,2139
91190		1,4988	1,4746	1,4521	1,4319	1,4157	1,3844	1,3605	1,3421	1,3190	1,3014
101325		1,6448	1,6144	1,5882	1,5643	1,5421	1,5049	1,4758	1,4534	—	—

2. Für absolute Temperaturen $T > 2{,}5T_K$ ergeben sich bei allen Drücken $p > 0$ nur Z-Werte > 1, Boyle- und Idealpunkt liegen bei $p = 0$. Wenn beim physikalischen Normzustand $Z = Z_0$ ist, wird die *Kompressibilitätszahl* PV nach Amagat:

$$PV = pv/p_0v_0 = ZT/Z_0T_0 \tag{197}$$

In [7] sind Werte $Z/Z_0 = PV \cdot T_0/T$ für technisch wichtige Gase und Gasgemische enthalten.

5.1.2. Thermische Zustandsgleichungen

Thermische Zustandsgleichungen gelten für reale Gase jeweils nur in begrenzten Druck- und Temperaturbereichen. Bleibt z. B. die Änderung der spezifischen Wärmekapazität c_v mit dem spezifischen Volumen hinreichend klein und ist $v > 2v_K/3$, gilt die 1873 von van der Waals aufgestellte Gleichung:

$$[p + (a/v^2)]\,(v - b) = RT \tag{198}$$

Dabei wird a/v^2 als *Kohäsionsdruck* bezeichnet, der die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen berücksichtigt, durch die der Druck auf die Wände vermindert wird. Das *Eigenvolumen der Moleküle* wird durch den Wert b berücksichtigt.

In einem größeren Bereich gilt diese Gleichung in der von CLAUSIUS abgeänderten Form:

$$\{p + [a/(v + h)^2]\}(v - b) = RT \qquad (199)$$

a Temperaturfunktion, $a = d - mT + n/T$; h, b, d, m und n für jedes Gas Festwerte

1903 stellte BERTHELOT eine nur für Drücke $p \ll p_k$ gültige Gleichung auf:

$$[p + (a/Tv^2)](v - b) = RT \qquad (200)$$

Ist die spezifische Wärmekapazität c_p als Funktion von p und T gegeben, so kann man durch zweimalige Integration zur *thermischen Zustandsgleichung* gelangen. Die Abhängigkeit ist jedoch nur für wenige Gase experimentell ermittelt, so daß derartige empirische Zustandsgleichungen für die technische Verwendung zu umständlich werden und man die thermischen und kalorischen Zustandsgrößen tabellarisch oder in Diagrammen (wie bei Dämpfen) darstellt.

Korrespondierende Zustände. Bei Verwendung des Mols als Stoffmengeneinheit und thermodynamisch ähnlicher Gase, d. h. geometrisch ähnlicher Moleküle und gleicher Abhängigkeit der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte von ihrem Abstand, ergeben sich in empirischen Zustandsgleichungen dieselben Festwerte, wenn man nach KAMERLINGH ONNES für die Drücke, Temperaturen und spezifischen Volumina die kritischen Zustandswerte als Bezugsgrößen wählt. Es ergeben sich dann dimensionslose reduzierte Größen, und zwar für den Druck $\pi = p/p_k$, für die Temperatur $\vartheta = T/T_k$ und für das spezifische Volumen $\varphi = v/v_k$. Man bezeichnet Zustände mit gleichen Werten von π, ϑ und φ als *korrespondierende Zustände.*

5.2. Spezifische Enthalpie und Entropie

Die spezifische Enthalpie und die Entropie lassen sich aus den Zustandsgleichungen und der bei verschiedenen Temperaturen und Drücken gemessenen spezifischen Wärmekapazität c_p nach den Gln. (56) und (82) berechnen. Es ist jedoch zweckmäßiger, für verschiedene Drücke in Abhängigkeit von der Temperatur das spezifische Volumen v, die spezifische Enthalpie h und die spezifische Entropie s in *Tabellen* (z. B. für überhitzten Wasserdampf) anzugeben oder in *Diagrammmen* darzustellen. Im t,s-Diagramm für trockene Luft (siehe Beilageblatt B) sind Linien konstanten spezifischen Volumens v, konstanten Drucks p und konstanter spezifischer Enthalpie h eingezeichnet, wobei willkürlich bei $t = 0\,°C$ und $p = 100$ kPa für die spezifische Enthalpie $h = 0$ und die spezifische Entropie $s = 0$ gewählt ist.

6. Thermodynamik der Dämpfe

6.1. Naßdampf

Ein im thermodynamischen Gleichgewicht befindliches heterogenes Gemisch aus flüssiger und gasförmiger Phase eines Stoffes kann nach Bild 3 nur bei Drücken, die unter dem kritischen Druck p_k und über dem Druck im Tripelpunkt Tr liegen, bestehen. Ein solches Gemisch nennt man *Naßdampf* und kennzeichnet es durch den *spezifischen Dampfgehalt* x, der die Masse des dampfförmigen Anteils je Kilogramm Naßdampf angibt. Die *Isohygren* sind Kurven konstanten spezifischen Dampfgehalts. Für Flüssigkeiten von Sättigungstemperatur ist $x = 0$ und für flüssigkeitsfreien Dampf von Sättigungstemperatur (trockener Sattdampf) $x = 1$.

6.1.1. Grenzkurven

Im t,s-Diagramm (Bild 23 für Wasserdampf) liegen die Zustandspunkte für $x = 0$ und $x = 1$ auf der linken bzw. rechten Grenzkurve. Diese Kurven gehen im kritischen Punkt K stetig (differenzierbar) ineinander über. In den Dampftabellen (Tabellen 16 bis 19) sind, abhängig vom Druck bei Wasserdampf oder der Temperatur bei Kältemitteln, die Temperaturen oder die Drücke, die spezifischen Volumina v, die spezifischen Enthalpien h, die spezifischen Entropien s für die linke und rechte Grenzkurve und die spezifische Verdampfungswärme r zusammengestellt, wobei die Werte für $x = 0$ mit Index $'$ (Flüssigkeit)

und $x = 1$ mit Index $''$ (Dampf) bezeichnet sind. Bei Wasser (Tabelle 16) ist international für Flüssigkeit beim Tripelpunkt ($T = 273{,}16$ K; $p = 611$ Pa) $u' = 0$ kJ/kg und $s' = 0$ kJ/(kg · K) vereinbart. Dabei ist $h' = 0{,}6$ J/kg. Für alle Kältemittel empfiehlt das *Institut International du Froid Paris* als Bezugswerte für gesättigte Flüssigkeit bei 0 °C $h' = 200$ kJ/kg und $s' = 1$ kJ/(kg · K).

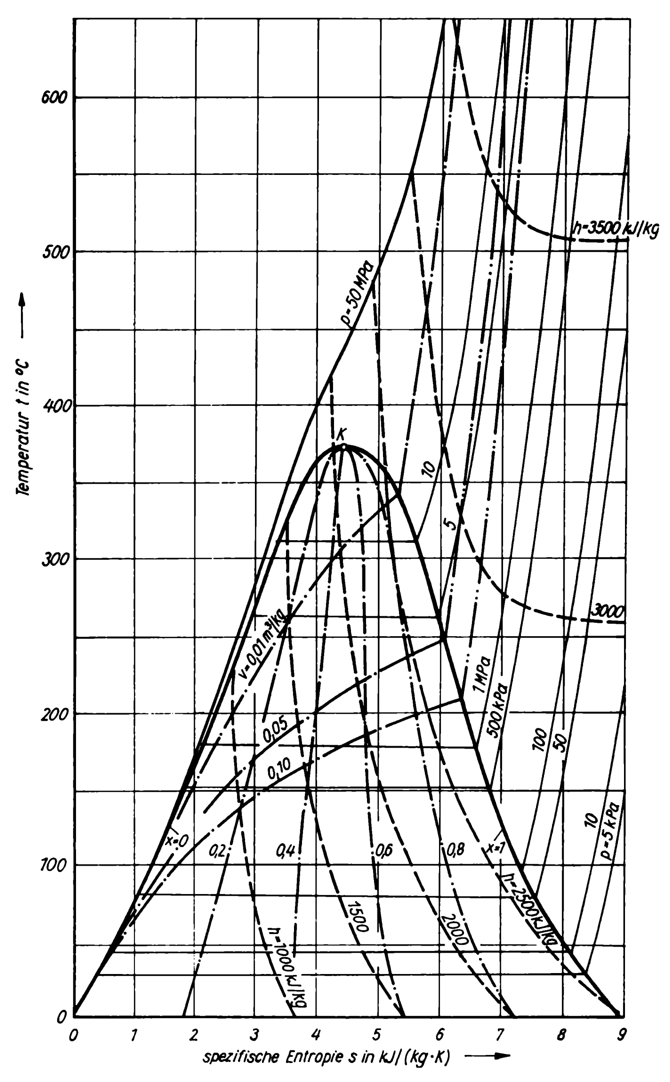


Bild 23. t,s-Diagramm für Wasserdampf

In dem vom Institut für Luft- und Kältetechnik (ILKA) der DDR aufgestellten Berechnungskatalog [20] ist bei allen Kältemitteln für gesättigte Flüssigkeit und 0 °C $s' = 1$ kJ/(kg · K) und $h' = 500$ kJ/kg festgelegt.*)

*) In den Dampftabellen 18 und 19 für die fluorierten Kältemittel R 12 und R 22 sind auszugsweise Werte des Instituts für Luft- und Kältetechnik angegeben. Da für Ammoniak keine neueren Werte verfügbar waren, wurden die Werte [21] in Tabelle 17 auf die vom ILKA verwendeten Bezugswerte umgerechnet.

Tabelle 16. Dampftabelle für Wasser bei Sättigung. Drucktabelle (nach Wukalowitsch [19])

p in kPa	t in °C	v' in m³/kg	v'' in m³/kg	h' in kJ/kg	h'' in kJ/kg	r in kJ/kg	s' in kJ/(kg · K)	s'' in kJ/(kg · K)
1,0	6,982	0,0010001	129,21	29,33	2513,8	2484,5	0,1060	8,976
1,5	13,034	0,0010006	87,98	54,71	2525,0	2470,3	0,1956	8,828
2,0	17,511	0,0010012	67,01	73,45	2533,2	2459,8	0,2606	8,724
2,5	21,094	0,0010020	54,26	88,44	2539,7	2451,3	0,3119	8,643
3,0	24,098	0,0010027	45,67	101,00	2545,2	2444,2	0,3543	8,578
3,5	26,692	0,0010033	39,48	111,84	2549,9	2438,1	0,3907	8,522
4,0	28,981	0,0010040	34,80	121,41	2554,1	2432,7	0,4224	8,474
4,5	31,034	0,0010046	31,14	129,98	2557,8	2427,8	0,4507	8,433
5	32,90	0,0010052	28,20	137,77	2561,2	2423,4	0,4762	8,395
6	36,18	0,0010064	23,74	151,50	2567,1	2415,6	0,5209	8,330
7	39,02	0,0010074	20,53	163,38	2572,2	2408,8	0,5591	8,276
8	41,53	0,0010084	18,11	173,87	2576,7	2402,8	0,5926	8,229
9	43,79	0,0010094	16,21	183,28	2580,8	2397,5	0,6224	8,187
10	45,83	0,0010102	14,68	191,84	2584,4	2392,6	0,6493	8,151
12	49,45	0,0010119	12,36	206,94	2590,9	2384,0	0,6963	8,087
15	54,00	0,0010140	10,025	225,98	2598,9	2372,9	0,7549	8,009
20	60,09	0,0010172	7,651	251,46	2609,6	2358,1	0,8321	7,909
25	64,99	0,0010199	6,206	272,0	2618,1	2346,1	0,8932	7,832
30	69,12	0,0010223	5,231	289,3	2625,3	2336,0	0,9441	7,769
40	75,89	0,0010265	3,994	317,7	2636,8	2319,2	1,0261	7,671
50	81,35	0,0010301	3,241	340,6	2646,0	2305,4	1,0912	7,595
60	85,95	0,0010333	2,733	359,9	2653,6	2293,7	1,1454	7,533
70	89,96	0,0010361	2,366	376,8	2660,2	2283,4	1,1921	7,481
80	93,51	0,0010387	2,088	391,7	2666,0	2274,3	1,2330	7,436
90	96,71	0,0010412	1,870	405,2	2671,1	2265,9	1,2696	7,396
100	99,63	0,0010434	1,694	417,5	2675,7	2258,2	1,3027	7,361
110	102,32	0,0010455	1,550	428,8	2680,0	2251,2	1,3330	7,329
120	104,81	0,0010476	1,429	439,4	2683,8	2244,4	1,3609	7,300
130	107,13	0,0010495	1,326	449,2	2687,4	2238,2	1,3868	7,273
140	109,32	0,0010513	1,237	458,4	2690,8	2232,4	1,4109	7,248
150	111,37	0,0010530	1,160	467,1	2693,9	2226,8	1,4336	7,224
160	113,32	0,0010547	1,092	475,4	2696,8	2221,4	1,4550	7,203
180	116,93	0,0010579	0,9778	490,7	2702,1	2211,4	1,4944	7,164
200	120,23	0,0010608	0,8859	504,7	2706,9	2202,2	1,5301	7,129
220	123,27	0,0010636	0,8103	517,6	2711,3	2193,7	1,5628	7,097
240	126,09	0,0010663	0,7468	529,6	2715,3	2185,7	1,5929	7,068
250	127,43	0,0010675	0,7188	535,4	2717,2	2181,8	1,6072	7,054
300	133,54	0,0010735	0,6059	561,4	2725,5	2164,1	1,672	6,993
350	138,88	0,0010789	0,5243	584,3	2732,5	2148,2	1,727	6,941
400	143,62	0,0010839	0,4624	604,7	2738,5	2133,8	1,776	6,897
450	147,92	0,0010885	0,4139	623,2	2743,8	2120,6	1,820	6,857
500	151,85	0,0010928	0,3748	640,1	2748,5	2108,4	1,860	6,822
550	155,47	0,0010969	0,3426	655,8	2752,7	2096,9	1,897	6,789
600	158,84	0,0011009	0,3156	670,4	2756,4	2086,0	1,931	6,760
650	161,99	0,0011046	0,2926	684,2	2759,9	2075,7	1,962	6,733
700	164,96	0,0011082	0,2727	697,1	2762,9	2065,8	1,992	6,707
750	167,76	0,0011117	0,2555	709,3	2765,8	2056,5	2,019	6,684
800	170,42	0,0011150	0,2403	720,9	2768,4	2047,5	2,046	6,662
850	172,95	0,0011182	0,2269	732,0	2770,8	2038,8	2,071	6,641
900	175,36	0,0011213	0,2148	742,6	2773,0	2030,4	2,094	6,621
950	177,67	0,0011244	0,2041	752,8	2775,1	2022,3	2,117	6,603
1000	179,88	0,0011274	0,1943	762,6	2777,0	2014,4	2,138	6,585



Tabelle 16 (Fortsetzung)

p in kPa	t in °C	v' in m³/kg	v'' in m³/kg	h' in kJ/kg	h'' in kJ/kg	r in kJ/kg	s' in kJ/(kg · K)	s'' in kJ/(kg · K)
1050	182,01	0,0011303	0,1855	772,0	2778,7	2006,7	2,159	6,568
1100	184,06	0,0011331	0,1774	781,1	2780,4	1999,3	2,179	6,552
1150	186,04	0,0011359	0,1700	789,9	2782,0	1992,1	2,198	6,536
1200	187,96	0,0011386	0,1632	798,4	2783,4	1985,0	2,216	6,521
1250	189,81	0,0011412	0,1569	806,7	2784,8	1978,1	2,234	6,507
1300	191,60	0,0011438	0,1511	814,7	2786,0	1971,3	2,251	6,493
1400	195,04	0,0011489	0,1407	830,1	2788,4	1958,3	2,284	6,467
1500	198,28	0,0011538	0,1317	844,7	2790,4	1945,7	2,314	6,442
1600	201,37	0,0011586	0,1237	858,6	2792,2	1933,6	2,344	6,419
1700	204,30	0,0011633	0,1166	871,8	2793,8	1922,0	2,371	6,397
1800	207,10	0,0011678	0,1103	884,6	2795,1	1910,5	2,398	6,376
1900	209,79	0,0011722	0,1046	896,8	2796,4	1899,6	2,423	6,356
2000	212,37	0,0011766	0,09953	908,6	2797,4	1888,8	2,447	6,337
2100	214,85	0,0011808	0,09488	919,9	2798,3	1878,4	2,470	6,319
2200	217,24	0,0011850	0,09064	930,9	2799,1	1868,2	2,492	6,302
2300	219,54	0,0011891	0,08676	941,6	2799,8	1858,2	2,514	6,285
2400	221,78	0,0011932	0,08319	951,9	2800,4	1848,5	2,534	6,269
2500	223,94	0,0011972	0,07990	962,0	2800,8	1838,8	2,554	6,254
2600	226,03	0,0012011	0,07685	971,7	2801,2	1829,5	2,574	6,239
2800	230,04	0,0012088	0,07138	990,5	2801,7	1811,2	2,611	6,210
3000	233,84	0,0012163	0,06662	1008,4	2801,9	1793,5	2,646	6,183
3200	237,44	0,0012237	0,06243	1025,5	2801,8	1776,3	2,679	6,158
3400	240,88	0,0012310	0,05872	1041,8	2801,5	1759,7	2,710	6,134
3600	244,16	0,0012381	0,05540	1057,6	2801,0	1743,4	2,740	6,110
3800	247,31	0,0012451	0,05243	1072,8	2800,3	1727,5	2,769	6,088
4000	250,33	0,0012521	0,04974	1087,5	2799,4	1711,9	2,797	6,067
4500	257,41	0,0012691	0,04402	1122,2	2796,5	1674,3	2,861	6,017
5000	263,92	0,0012858	0,03941	1154,6	2792,8	1638,2	2,921	5,971
5500	269,94	0,0013023	0,03561	1185,1	2788,4	1603,3	2,976	5,928
6000	275,56	0,0013187	0,03241	1213,9	2783,3	1569,4	3,028	5,888
6500	280,83	0,0013350	0,02969	1241,4	2777,6	1536,2	3,076	5,849
7000	285,80	0,0013514	0,02734	1267,7	2771,4	1503,7	3,123	5,813
7500	290,51	0,0013678	0,02530	1293,0	2764,7	1471,7	3,166	5,777
8000	294,98	0,0013843	0,02349	1317,5	2757,5	1440,0	3,208	5,743
8500	299,24	0,0014010	0,02189	1341,2	2749,9	1408,7	3,249	5,710
9000	303,31	0,0014179	0,02046	1364,2	2741,8	1377,6	3,288	5,677
9500	307,22	0,0014351	0,01917	1386,7	2733,4	1346,7	3,325	5,646
10000	310,96	0,0014526	0,01800	1408,6	2724,4	1315,8	3,362	5,614
11000	318,04	0,001489	0,01597	1451,2	2705,4	1254,2	3,432	5,553
12000	324,64	0,001527	0,01425	1492,6	2684,8	1192,2	3,499	5,493
12500	327,77	0,001547	0,01348	1512,9	2673,8	1160,9	3,531	5,463
13000	330,81	0,001567	0,01277	1533,0	2662,4	1129,4	3,563	5,433
14000	336,63	0,001610	0,01149	1572,8	2638,3	1065,5	3,626	5,374
15000	342,12	0,001658	0,01035	1612,2	2611,6	999,4	3,688	5,312
16000	347,32	0,001710	0,009330	1651,5	2582,7	931,2	3,749	5,250
17000	352,26	0,001769	0,008401	1691,6	2550,8	859,2	3,810	5,184
18000	356,96	0,001838	0,007534	1733,4	2514,4	781,0	3,874	5,114
19000	361,44	0,001923	0,006700	1778,2	2470,1	691,9	3,942	5,032
20000	365,71	0,002038	0,005873	1828,8	2413,8	585,0	4,018	4,934
21000	369,79	0,002218	0,005006	1892,2	2340,2	448,0	4,114	4,811
22000	373,68	0,002675	0,003757	2007,7	2192,5	184,8	4,289	4,575
22115	374,12	0,003147		2095,2		0	4,4237	

Tabelle 17. Dampftabelle für Ammoniak bei Sättigung. Temperaturtabelle nach [21] mit den Bezugswerten für gesättigte Flüssigkeit (bei 0 °C): $h' = 500$ kJ/kg und $s' = 1$ kJ/(kg · K)

t in °C	p in kPa	v' in dm³/kg	v'' in dm³/kg	h' in kJ/kg	h'' in kJ/kg	r in kJ/kg	s' in kJ/(kg · K)	s'' in kJ/(kg · K)
−75	7,5	1,368	12890	168,8	1645,1	1476,3	−0,4197	7,0420
−70	10,9	1,379	9009	189,8	1654,3	1464,5	−0,3071	6,9038
−64	16,7	1,392	6044	215,3	1665,2	1449,9	−0,1836	6,7502
−60	21,9	1,401	4699	232,0	1672,3	1440,3	−0,1028	6,6551
−54	32,1	1,415	3288	258,0	1682,8	1424,8	0,0153	6,5182
−50	40,9	1,425	2623	275,2	1689,5	1414,3	0,1132	6,4336
−44	57,7	1,439	1901	301,1	1699,5	1398,4	0,2095	6,3139
−40	71,8	1,449	1550	319,1	1706,2	1387,1	0,2862	6,2377
−35	93,2	1,462	1215	341,2	1714,3	1373,1	0,3804	6,1473
−30	119,5	1,476	936,0	363,6	1722,2	1358,6	0,4733	6,0618
−25	151,6	1,490	771,2	386,0	1729,7	1343,7	0,5646	5,9806
−20	190,3	1,504	623,6	408,6	1737,0	1328,4	0,6546	5,9027
−15	236,4	1,519	508,7	431,3	1744,0	1312,7	0,7425	5,8282
−10	290,9	1,534	418,4	454,1	1750,5	1296,4	0,8296	5,7570
−5	354,9	1,550	346,9	477,0	1756,6	1279,6	0,9154	5,6888
0	429,5	1,566	289,7	500,0	1762,4	1262,4	1,0000	5,6226
5	515,7	1,583	243,5	523,2	1767,8	1244,6	1,0837	5,5590
10	615,1	1,601	205,8	546,5	1772,6	1226,1	1,1422	5,4970
15	728,4	1,619	174,9	570,0	1776,9	1206,9	1,2479	5,4372
20	857,2	1,639	149,4	593,7	1780,9	1187,2	1,3287	5,3790
25	1002,7	1,659	128,3	617,6	1784,3	1166,7	1,4086	5,3225
30	1166,5	1,680	110,7	641,7	1787,1	1145,4	1,4878	5,2668
35	1349,9	1,702	95,9	666,0	1789,4	1123,4	1,5661	5,2123
40	1554,4	1,726	83,3	690,6	1791,1	1100,5	1,6439	5,1587
45	1781,4	1,750	72,6	715,3	1792,1	1076,8	1,7210	5,1060
50	2032,6	1,778	63,5	740,2	1792,5	1052,3	1,7976	5,0541
60	2614,5	1,838	48,9	793,1	1789,5	996,4	1,9546	4,9524
70	3311,7	1,905	37,9	846,2	1786,6	940,4	2,1095	4,8501

Der Verlauf der zwei Grenzkurven im t,s-Diagramm ist bei Wasserdampf und Kältemitteln gleich. Bei Stoffen mit großen Atomzahlen im Molekül (im idealen Gaszustand Isentropenexponent $\varkappa < 1{,}195$) oder mit großer molarer Masse M (z. B. Benzol) kann sich der Verlauf der rechten Grenzkurve so ändern, daß sie zwei Tangenten hat, die parallel zur Temperaturachse liegen.

Die zur vollständigen Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit mit Sättigungstemperatur bei konstantem Druck erforderliche Wärmemenge ist die gesamte *spezifische Verdampfungswärme:*

$$r = h'' - h' \tag{201}$$

Den Anteil, der davon durch die Volumenvergrößerung $(v'' - v')$ als Ausdehnungsarbeit abgegeben wird, nennt man die *spezifische äußere Verdampfungswärme* ψ_{Verd} und den Rest, der die Zunahme der inneren Energie bei der vollständigen Umwandlung von Flüssigkeit in Dampf bei konstanter Temperatur angibt, die *spezifische innere Verdampfungswärme* ϱ_{Verd}:

$$\psi_{\text{Verd}} = p(v'' - v') \tag{202}$$

$$\varrho_{\text{Verd}} = r - \psi_{\text{Verd}} = u'' - u' \tag{203}$$

Wird im Naßdampfgebiet zwischen linker und rechter Grenzkurve ein CARNOT-Prozeß mit hinreichend kleinem Temperaturunterschied dT zwischen Wärmezu- und Wärmeabfuhr durchgeführt (Bilder 24, 25), erhält man:

$$|w_{\text{KrC}}| = (v'' - v')\,dp = (s'' - s')\,dT = q_{\text{zu}\,T}\,dT/T = r\,dT/T \tag{204}$$



Tabelle 18. Dampftabelle für R 12 (Difluordichlormethan CF_2Cl_2) bei Sättigung. Temperaturtabelle nach [20] mit den Bezugswerten für gesättigte Flüssigkeit (bei 0 °C): $h' = 500$ kJ/kg und $s' = 1$ kJ/(kg · K)

t in °C	p in kPa	v' in dm³/kg	v'' in dm³/kg	h' in kJ/kg	h'' in kJ/kg	r in kJ/kg	s' in kJ/(kg · K)	s'' in kJ/(kg · K)
−70	12,260	0,6248	1128,0	437,72	619,49	181,77	0,7378	1,6326
−65	16,793	0,6301	841,7	442,04	621,82	179,78	0,7588	1,6225
−60	22,609	0,6355	638,3	446,37	624,16	177,79	0,7794	1,6135
−55	29,962	0,6410	491,2	450,73	626,50	175,77	0,7996	1,6053
−50	39,130	0,6467	383,3	455,10	628,84	173,74	0,8193	1,5979
−45	50,416	0,6526	302,8	459,49	631,17	171,69	0,8388	1,5913
−40	64,148	0,6587	242,0	463,89	633,50	169,60	0,8578	1,5853
−35	80,679	0,6650	195,4	468,32	635,81	167,49	0,8766	1,5799
−30	100,38	0,6716	159,4	472,77	638,12	165,34	0,8950	1,5750
−25	123,65	0,6783	131,2	477,24	640,40	163,16	0,9131	1,5706
−20	150,90	0,6853	108,9	481,74	642,67	160,93	0,9310	1,5667
−15	182,56	0,6926	91,04	486,26	644,91	158,65	0,9486	1,5632
−10	219,07	0,7002	76,66	490,81	647,13	156,32	0,9660	1,5600
−5	260,92	0,7080	64,97	495,39	649,32	153,93	0,9831	1,5572
0	308,56	0,7163	55,40	500,00	651,48	151,48	1,0000	1,5546
5	362,51	0,7248	47,49	504,65	653,61	148,97	1,0167	1,5523
10	423,26	0,7338	40,92	509,33	655,70	146,37	1,0333	1,5502
15	491,33	0,7433	35,42	514,06	657,75	143,69	1,0496	1,5483
20	567,25	0,7532	30,78	518,84	659,75	140,91	1,0659	1,5466
25	651,58	0,7636	26,86	523,67	661,70	138,03	1,0820	1,5450
30	744,88	0,7747	23,51	528,57	663,59	135,03	1,0981	1,5435
35	847,70	0,7864	20,64	533,53	665,42	131,89	1,1140	1,5420
40	960,65	0,7989	18,17	538,57	667,18	128,61	1,1300	1,5407
45	1084,3	0,8122	16,03	543,70	668,85	125,15	1,1459	1,5393
50	1219,3	0,8265	14,17	548,93	670,43	121,50	1,1619	1,5379
55	1366,4	0,8420	12,54	554,27	671,90	117,63	1,1779	1,5364
60	1526,0	0,8587	11,11	559,74	673,25	113,51	1,1940	1,5347
70	1885,9	0,8974	8,72	571,15	675,47	104,31	1,2268	1,5308
80	2304,8	0,9456	6,82	583,39	676,82	93,43	1,2609	1,5254
90	2788,8	1,0102	5,256	596,82	676,79	79,97	1,2970	1,5172
100	3344,5	1,1092	3,9004	612,24	674,10	61,85	1,3373	1,5031
110	3979,0	1,3545	2,452	633,35	661,80	28,45	1,3911	1,4653

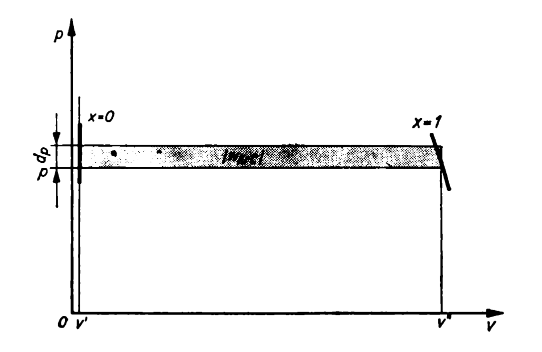


Bild 24. CARNOT-Prozeß für Naßdampf im p,v-Diagramm

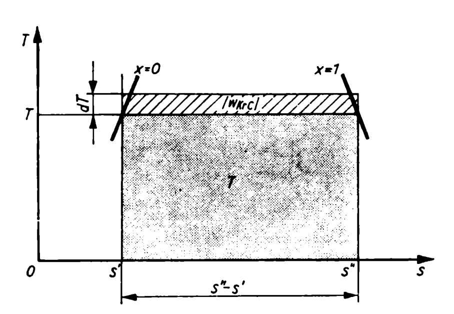


Bild 25. CARNOT-Prozeß für Naßdampf im T,s-Diagramm

Tabelle 19. Dampftabelle für R 22 (Difluormonochlormethan CHF_2Cl) bei Sättigung. Temperaturtabelle nach [20] mit den Bezugswerten für gesättigte Flüssigkeit (bei 0 °C): $h' = 500$ kJ/kg und $s' = 1$ kJ/(kg · K)

t in °C	p in kPa	v' in dm³/kg	v'' in dm³/kg	h' in kJ/kg	h'' in kJ/kg	r in kJ/kg	s' in kJ/(kg · K)	s'' in kJ/(kg · K)
−100	2,073	0,6389	8015,8	396,04	659,53	263,49	0,5316	2,0534
−90	4,895	0,6490	3583,7	405,48	664,40	258,91	0,5847	1,9983
−80	10,45	0,6596	1764,5	415,06	669,32	254,26	0,6356	1,9519
−70	20,51	0,6707	941,6	424,82	674,25	249,44	0,6848	1,9126
−60	37,46	0,6826	537,5	434,78	679,16	244,37	0,7326	1,8791
−55	49,45	0,6889	415,1	439,85	681,58	241,73	0,7561	1,8642
−50	64,35	0,6954	324,8	444,99	683,98	239,00	0,7793	1,8503
−45	82,66	0,7021	257,2	450,19	686,36	236,17	0,8023	1,8374
−40	104,90	0,7092	205,9	455,45	688,69	233,25	0,8250	1,8254
−35	131,61	0,7165	166,5	460,78	690,99	230,21	0,8476	1,8142
−30	163,40	0,7241	135,9	466,17	693,25	227,07	0,8699	1,8038
−25	200,89	0,7321	111,9	471,64	695,45	223,81	0,8920	1,7939
−20	244,72	0,7405	92,9	477,17	697,60	220,43	0,9140	1,7847
−15	295,58	0,7492	77,7	482,77	699,69	216,92	0,9357	1,7760
−10	354,16	0,7583	65,4	488,44	701,71	213,27	0,9573	1,7678
−5	421,19	0,7679	55,4	494,19	703,67	209,48	0,9787	1,7600
0	497,41	0,7780	47,2	500,00	705,55	205,55	1,0000	1,7525
5	583,58	0,7886	40,4	505,89	707,35	201,46	1,0211	1,7454
10	680,48	0,7998	34,8	511,85	709,06	197,20	1,0421	1,7386
15	788,90	0,8116	30,0	517,90	710,67	192,77	1,0630	1,7319
20	909,66	0,8242	26,1	524,03	712,18	188,15	1,0837	1,7255
25	1043,6	0,8375	22,7	530,25	713,57	183,32	1,1044	1,7192
30	1191,5	0,8518	19,8	536,57	714,83	178,26	1,1250	1,7130
35	1354,4	0,8672	17,3	543,00	715,95	172,95	1,1456	1,7068
40	1533,1	0,8839	15,2	549,55	716,91	167,36	1,1661	1,7006
45	1728,6	0,9020	13,3	556,23	717,68	161,45	1,1868	1,6942
50	1941,8	0,9220	11,7	563,07	718,24	155,17	1,2075	1,6877
55	2173,9	0,9443	10,3	570,10	718,55	148,45	1,2284	1,6808
60	2426,0	0,9694	9,04	577,35	718,55	141,21	1,2496	1,6734
70	2995,2	1,0318	6,93	592,74	717,34	124,60	1,2934	1,6565
80	3661,5	1,1213	5,19	610,07	713,50	103,43	1,3411	1,6340
90	4441,6	1,2793	3,60	631,96	703,29	71,33	1,3996	1,5960

Aus Gl. (204) ergibt sich die CLAUSIUS-CLAPEYRON*sche Gleichung*, mit der sich z. B. die Verdampfungswärme aus thermischen Zustandsgrößen ermitteln läßt:

$$r/T = (v'' - v')\,\mathrm{d}p/\mathrm{d}T \tag{205}$$

Der Differentialquotient $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$ ist durch die Sättigungskurve (Bild 3, Kurve c) bekannt. In den Tabellen 16 bis 19 ist r mit angegeben. Die innere Energie u' für Flüssigkeit mit Sättigungstemperatur läßt sich berechnen aus:

$$u' = h' - pv' \tag{206}$$

Bis zu Temperaturen von 150 °C beträgt bei Wasser der Unterschied zwischen u' und h' höchstens 0,4 kJ/kg.

6.1.2. Zustandsgrößen

Für Naßdampf wird das *spezifische Volumen:*

$$v = x(v'' - v') + v' = xv'' + v'(1 - x) \tag{207}$$

Der zweite Summand ist bei geringem Druck vernachlässigbar klein. Es ergeben sich die *spezifische Enthalpie:*

$$h = h' + xr \tag{208}$$

die *spezifische innere Energie:*

$$u = u' + x\varrho_{\text{Verd}} = h - pv \tag{209}$$

und die *spezifische Entropie:*

$$s = s' + x(s'' - s') = s' + xr/T \tag{210}$$

6.1.3. Reversible Zustandsänderungen

1. *Isobare* und *Isotherme* sind identisch und im p,v- oder T,s-Diagramm zur Abszissenachse parallele Geraden (Bilder 24, 25). Es gelten für die *spezifische Raumänderungsarbeit:*

$$w_{12p} = -p(v_2 - v_1) = -p(x_2 - x_1)(v'' - v') = -\psi_{\text{Verd}}(x_2 - x_1) \tag{211}$$

die zuzuführende spezifische Wärmemenge:

$$q_{12p} = h_2 - h_1 = r(x_2 - x_1) \tag{212}$$

und die Änderung der spezifischen Entropie:

$$s_2 - s_1 = r(x_2 - x_1)/T \tag{213}$$

2. Für die *Isochore* gilt:

$$v = x_1(v_1'' - v_1') + v_1' = x_2(v_2'' - v_2') + v_2' \tag{214}$$

$$q_{12v} = u_2 - u_1 = h_2 - h_1 - v(p_2 - p_1) = h_2' - h_1' + x_2r_2 - x_1r_1 - v(p_2 - p_1) \tag{215}$$

$$s_2 - s_1 = s_2' - s_1' + x_2r_2/T_2 - x_1r_1/T_1 \tag{216}$$

Ist Enddruck p_2 oder Endtemperatur T_2 vorgeschrieben, so lassen sich die erforderlichen Zustandsgrößen an den Grenzkurven und die gesamte spezifische Verdampfungswärme r aus den Dampftabellen entnehmen und aus den angegebenen Gleichungen x_2, q_{12} und $(s_2 - s_1)$ berechnen. Ist q_{12} vorgeschrieben, so kann der Endzustand (p_2, T_2) nur durch Probieren gefunden werden.

3. Für die *Isentrope* ergibt sich:

$$s = s_1' + x_1r_1/T_1 = s_2' + x_2r_2/T_2 \tag{217}$$

$$w_{12s} = u_2 - u_1 = h_2' - h_1' + x_2r_2 - x_1r_1 - (p_2v_2 - p_1v_1) \tag{218}$$

$$w_{t12s} = h_2 - h_1 = h_2' - h_1' + x_2r_2 - x_1r_1 \tag{219}$$

Die Zustandsänderung läßt sich am einfachsten im t,s-Diagramm (Bild 23) oder MOLLIER-*h,s-Diagramm* (Bild 26 und Beilage C) verfolgen. Bei isentroper Ausdehnung von sehr nassem Dampf ($x_1 < 0{,}4$) nimmt der spezifische Dampfgehalt zu ($x_2 > x_1$), bei größerem Dampfgehalt wird $x_2 < x_1$. Bei Drücken unter 2,5 MPa und Naßdampf mit $x > 0{,}75$ gelten näherungsweise die Gln. (136) ··· (143) mit $\varkappa = 1{,}035 + 0{,}1x$.

6.1.4. Adiabate Drosselung

Es ist $q_{12} = 0$; $w_{t12} = 0$ und $h_1 = h_2$. Für vorgeschriebenen Enddruck $p_2 < p_1$ lassen sich die Zustandsgröße $h_2' < h_1'$ und $s_2' < s_1'$ an der Grenzkurve und die gesamte spezifische Verdampfungswärme $r_2 > r_1$ aus den Dampftabellen entnehmen und aus Gl. (208):

$$h_1 = h_1' + x_1r_1 = h_2' + x_2r_2 \tag{220}$$

der spezifische Dampfgehalt x_2 nach dem Drosseln berechnen. Meist wird $x_2 > x_1$, nur bei hohem Druck p_1 und großem spezifischem Dampfgehalt x_1 kann $x_2 < x_1$ werden (siehe MOLLIER-h,s-Diagramm). Stets ist die spezifische Entropie s_2 nach Gl. (210) größer als s_1.

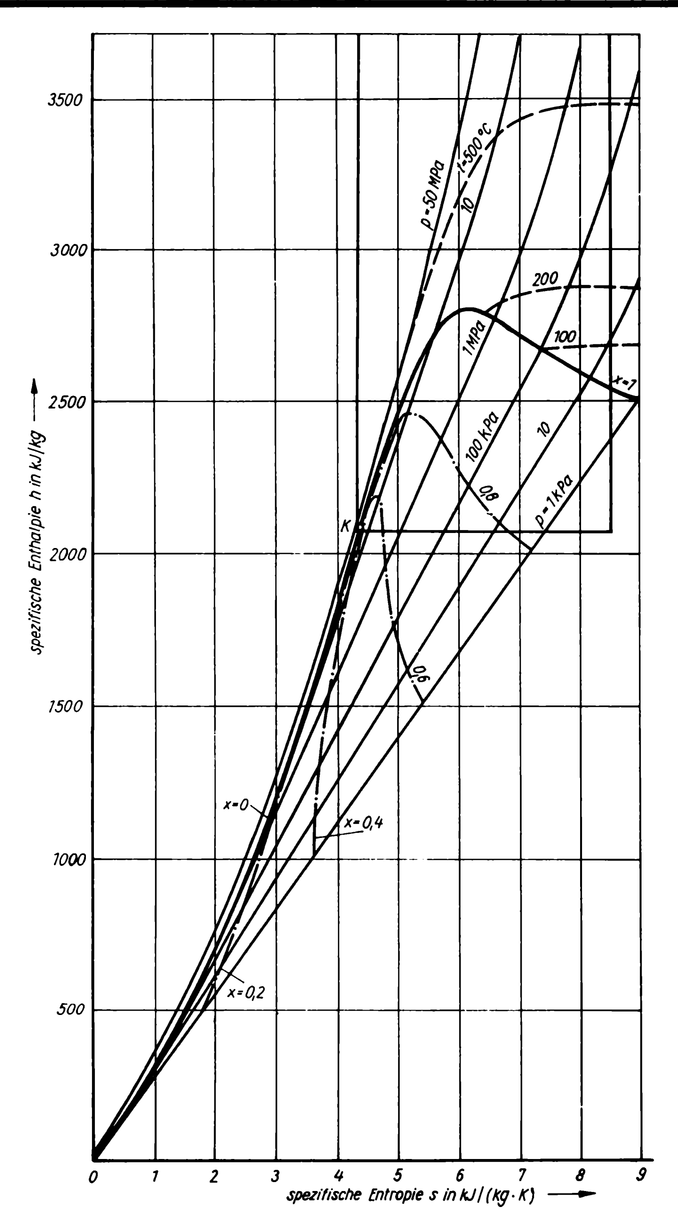


Bild 26. MOLLIER-h,s-Diagramm für Wasserdampf

6.2. Überhitzter Dampf

6.2.1. Zustandsgrößen

Nur bei niedrigen Drücken und ausreichender Überhitzung oder bei sehr kleinen Drücken bis zum trockenen Sattdampf darf überhitzter Dampf als ideales Gas betrachtet werden, in den übrigen Bereichen gelten die Angaben für reale Gase. Tabelle 20 gibt für überhitzten

Wasserdampf bei bestimmten Drücken und Temperaturen das spezifische Volumen, die spezifische Enthalpie und die spezifische Entropie an. Außer dem T,s-Diagramm sind für die Praxis MOLLIER-*Diagramme* mit der Enthalpie als Koordinate, z. B. h,t-, h,s- oder $(\lg p),h$-Diagramm, besonders zweckmäßig. Für *Dampfkraftanlagen* wird das h,s-Diagramm mit Isothermen, Isobaren und Isochoren bevorzugt, wobei der im Bild 26 umrandete Ausschnitt in größerem Maßstab mit v-Linien auf der Beilage C dargestellt ist. In der *Kältetechnik* ist das $(\lg p),h$-Diagramm gebräuchlich (Bild 27). In ihm sind die p-Werte direkt ablesbar, zwischen den Isothermen kann linear interpoliert werden.

Tabelle 20. Dampftabelle für überhitzten Wasserdampf nach WUKALOWITSCH [19]

t in °C	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)
	p = 50 kPa			p = 100 kPa			p = 150 kPa		
90	3,324	2,6630	7,643	—	—	—	—	—	—
100	3,419	2,6826	7,696	1,696	2,6765	7,363	—	—	—
120	3,608	2,7217	7,798	1,793	2,7168	7,468	1,188	2,7117	7,271
140	3,796	2,7606	7,894	1,889	2,7566	7,567	1,253	2,7526	7,372
160	3,983	2,7995	7,986	1,984	2,7962	7,661	1,318	2,7929	7,468
180	4,170	2,8384	8,074	2,078	2,8357	7,750	1,381	2,8329	7,558
200	4,356	2,8775	8,158	2,172	2,8752	7,835	1,444	2,8728	7,644
220	4,542	2,9167	8,240	2,266	2,9147	7,917	1,507	2,9127	7,726
240	4,728	2,9561	8,318	2,359	2,9543	7,996	1,570	2,9526	7,806
260	4,913	2,9956	8,393	2,453	2,9941	8,071	1,632	2,9925	7,882
280	5,099	3,0354	8,467	2,546	3,0340	8,145	1,695	3,0326	7,956
300	5,284	3,0753	8,538	2,639	3,0741	8,216	1,757	3,0729	8,028
320	5,469	3,1155	8,607	2,732	3,1144	8,285	1,819	3,1133	8,097
340	5,654	3,1560	8,674	2,824	3,1551	8,353	1,881	3,1540	8,164
360	5,839	3,1966	8,739	2,917	3,1957	8,418	1,943	3,1948	8,230
380	6,024	3,2376	8,803	3,010	3,2367	8,482	2,005	3,2359	8,294
400	6,209	3,2787	8,865	3,103	3,2780	8,544	2,067	3,2772	8,356
420	6,394	3,3202	8,925	3,195	3,3195	8,605	2,129	3,3188	8,417
440	6,579	3,3619	8,985	3,288	3,3612	8,664	2,191	3,3605	8,476
460	6,764	3,4038	9,043	3,380	3,4032	8,722	2,252	3,4026	8,534
480	6,949	3,4460	9,099	3,473	3,4454	8,779	2,314	3,4449	8,591
500	7,134	3,4885	9,155	3,565	3,4879	8,835	2,376	3,4874	8,647
520	7,318	3,5312	9,210	3,658	3,5307	8,889	2,438	3,5302	8,702
540	7,503	3,5742	9,263	3,750	3,5738	8,943	2,499	3,5733	8,755
550	7,595	3,5958	9,290	3,797	3,5954	8,969	2,530	3,5949	8,782
	p = 200 kPa			p = 250 kPa			p = 300 kPa		
140	0,9353	2,7484	7,231	0,7443	2,7441	7,120	0,6170	2,7396	7,028
160	0,9842	2,7895	7,329	0,7842	2,7860	7,219	0,6508	2,7825	7,129
180	1,0326	2,8301	7,420	0,8233	2,8273	7,312	0,6838	2,8243	7,223
200	1,080	2,8705	7,507	0,8620	2,8680	7,401	0,7164	2,8656	7,312
220	1,128	2,9106	7,591	0,9004	2,9086	7,484	0,7486	2,9065	7,397
240	1,175	2,9508	7,670	0,9384	2,9490	7,565	0,7805	2,9472	7,478
260	1,222	2,9910	7,747	0,9763	2,9894	7,642	0,8123	2,9879	7,556
280	1,269	3,0313	7,821	1,0140	3,0299	7,717	0,8438	3,0285	7,631
300	1,316	3,0717	7,893	1,052	3,0704	7,789	0,8753	3,0692	7,703
320	1,363	3,1122	7,963	1,089	3,1111	7,858	0,9067	3,1100	7,773
340	1,410	3,1530	8,030	1,127	3,1519	7,926	0,9380	3,1509	7,841
360	1,456	3,1939	8,096	1,164	3,1930	7,992	0,9692	3,1920	7,907

Tabelle 20 (Fortsetzung)

t in °C	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)
	p = 200 kPa			p = 250 kPa			p = 300 kPa		
380	1,503	3,2351	8,160	1,201	3,2342	8,056	1,0004	3,2334	7,971
400	1,549	3,2765	8,222	1,239	3,2757	8,119	1,0315	3,2749	8,034
420	1,596	3,3181	8,283	1,276	3,3173	8,180	1,0626	3,3166	8,095
440	1,642	3,3599	8,343	1,313	3,3592	8,239	1,094	3,3586	8,154
460	1,689	3,4020	8,401	1,350	3,4014	8,297	1,125	3,4007	8,213
480	1,735	3,4443	8,458	1,387	3,4437	8,354	1,156	3,4432	8,270
500	1,781	3,4869	8,514	1,424	3,4863	8,410	1,187	3,4858	8,326
520	1,828	3,5297	8,568	1,462	3,5292	8,465	1,218	3,5287	8,380
540	1,874	3,5728	8,622	1,499	3,5724	8,519	1,248	3,5719	8,434
550	1,897	3,5945	8,649	1,517	3,5940	8,545	1,264	3,5936	8,461
	p = 500 kPa			p = 750 kPa			p = 1 MPa		
160	0,3836	2,7673	6,865	—	—	—	—	—	—
180	0,4046	2,8121	6,967	0,2646	2,7955	6,750	0,1944	2,7773	6,585
200	0,4250	2,8555	7,060	0,2791	2,8420	6,851	0,2059	2,8275	6,694
220	0,4450	2,8980	7,148	0,2930	2,8868	6,944	0,2169	2,8749	6,792
240	0,4646	2,9399	7,232	0,3066	2,9304	7,030	0,2275	2,9205	6,883
260	0,4841	2,9815	7,311	0,3200	2,9733	7,112	0,2378	2,9648	6,967
280	0,5034	3,0229	7,387	0,3331	3,0157	7,190	0,2480	3,0083	7,048
300	0,5226	3,0642	7,461	0,3462	3,0578	7,265	0,2580	3,0513	7,124
320	0,5416	3,1055	7,531	0,3591	3,0998	7,337	0,2678	3,0940	7,197
340	0,5606	3,1469	7,600	0,3720	3,1417	7,407	0,2776	3,1365	7,268
360	0,5796	3,1883	7,667	0,3847	3,1837	7,474	0,2873	3,1789	7,336
380	0,5984	3,2300	7,731	0,3974	3,2258	7,540	0,2970	3,2215	7,402
400	0,6172	3,2718	7,794	0,4101	3,2680	7,603	0,3066	3,2640	7,461
420	0,6360	3,3138	7,856	0,4228	3,3102	7,665	0,3161	3,3066	7,528
440	0,6548	3,3559	7,916	0,4354	3,3526	7,725	0,3256	3,3493	7,589
460	0,6735	3,3983	7,974	0,4479	3,3952	7,784	0,3351	3,3921	7,648
480	0,6922	3,4409	8,032	0,4605	3,4380	7,842	0,3446	3,4351	7,706
500	0,7109	3,4837	8,088	0,4730	3,4810	7,898	0,3540	3,4783	7,763
520	0,7295	3,5267	8,143	0,4855	3,5242	7,953	0,3635	3,5217	7,818
540	0,7482	3,5700	8,197	0,4980	3,5677	8,007	0,3729	3,5653	7,872
560				0,5104	3,6113	8,060	0,3823	3,6091	7,926
580				0,5229	3,6552	8,113	0,3916	3,6532	7,978
600				0,5353	3,6994	8,164	0,4010	3,6974	8,029
620				0,5488	3,7438	8,214	0,4104	3,7419	8,080
640				0,5602	3,7884	8,263	0,4197	3,7866	8,129
660				0,5726	3,8333	8,312	0,4291	3,8316	8,178
680				0,5851	3,8785	8,360	0,4384	3,8769	8,226
700				0,5975	3,9240	8,407	0,4478	3,9224	8,273
	p = 1,25 MPa			p = 1,5 MPa			p = 2,0 MPa		
200	0,1619	2,8120	6,565	0,1324	2,7953	6,452	—	—	—
220	0,1712	2,8625	6,669	0,1406	2,8492	6,564	0,1021	2,8204	6,384
240	0,1800	2,9101	6,764	0,1483	2,8993	6,664	0,1084	2,8763	6,495
260	0,1885	2,9560	6,852	0,1556	2,9470	6,755	0,1144	2,9279	6,594



Tabelle 20 (Fortsetzung)

t in °C	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)
	p = 1,25 MPa			p = 1,5 MPa			p = 2,0 MPa		
280	0,1968	3,0008	6,934	0,1627	2,9930	6,839	0,1200	2,9769	6,684
300	0,2050	3,0447	7,012	0,1697	3,0379	6,919	0,1255	3,0240	6,768
320	0,2130	3,0881	7,087	0,1765	3,0821	6,995	0,1308	3,0698	6,847
340	0,2210	3,1312	7,158	0,1832	3,1258	7,067	0,1360	3,1149	6,921
360	0,2288	3,1742	7,227	0,1899	3,1693	7,137	0,1411	3,1595	6,993
380	0,2366	3,2172	7,294	0,1964	3,2128	7,205	0,1462	3,2040	7,062
400	0,2444	3,2601	7,359	0,2030	3,2561	7,270	0,1512	3,2481	7,129
420	0,2521	3,3030	7,421	0,2095	3,2993	7,333	0,1561	3,2919	7,193
440	0,2598	3,3459	7,483	0,2159	3,3426	7,395	0,1610	3,3358	7,255
460	0,2674	3,3890	7,542	0,2223	3,3859	7,455	0,1659	3,3796	7,316
480	0,2751	3,4322	7,600	0,2287	3,4293	7,513	0,1708	3,4235	7,375
500	0,2827	3,4756	7,657	0,2351	3,4729	7,570	0,1756	3,4674	7,432
520	0,2903	3,5192	7,713	0,2414	3,5166	7,626	0,1804	3,5115	7,489
540	0,2978	3,5629	7,767	0,2478	3,5605	7,681	0,1852	3,5558	7,544
560	0,3054	3,6069	7,821	0,2541	3,6046	7,735	0,1900	3,6002	7,598
580	0,3129	3,6511	7,873	0,2604	3,6490	7,787	0,1948	3,6448	7,651
600	0,3204	3,6954	7,925	0,2667	3,6935	7,839	0,1995	3,6895	7,702
620	0,3279	3,7400	7,975	0,2730	3,7382	7,889	0,2043	3,7344	7,753
640	0,3354	3,7849	8,025	0,2793	3,7831	7,939	0,2090	3,7795	7,803
660	0,3430	3,8299	8,073	0,2855	3,8282	7,988	0,2138	3,8248	7,852
680	0,3504	3,8753	8,122	0,2918	3,8737	8,036	0,2185	3,8704	7,901
700	0,3579	3,9209	8,169	0,2980	3,9194	8,084	0,2232	3,9163	7,948
	p = 2,5 MPa			p = 3,0 MPa			p = 4,0 MPa		
240	0,0844	2,8510	6,353	0,0682	2,8230	6,225	—	—	—
260	0,0895	2,9075	6,461	0,0729	2,8855	6,344	0,0517	2,8356	6,136
280	0,0943	2,9598	6,557	0,0771	2,9418	6,448	0,0555	2,9022	6,258
300	0,0989	3,0094	6,645	0,0812	2,9942	6,541	0,0588	2,9615	6,363
320	0,1033	3,0571	6,727	0,0850	3,0440	6,626	0,0620	3,0162	6,457
340	0,1076	3,1036	6,804	0,0887	3,0921	6,706	0,0650	3,0679	6,543
360	0,1119	3,1496	6,878	0,0923	3,1393	6,782	0,0679	3,1182	6,624
380	0,1160	3,1950	6,949	0,0959	3,1858	6,854	0,0707	3,1669	6,700
400	0,1201	3,2399	7,017	0,0993	3,2316	6,926	0,0734	3,2145	6,771
420	0,1241	3,2845	7,082	0,1028	3,2769	6,989	0,0761	3,2614	6,840
440	0,1281	3,3289	7,145	0,1061	3,3219	7,054	0,0787	3,3077	6,906
460	0,1321	3,3732	7,206	0,1095	3,3668	7,116	0,0813	3,3537	6,969
480	0,1360	3,4175	7,266	0,1128	3,4116	7,176	0,0838	3,3995	7,031
500	0,1399	3,4619	7,324	0,1161	3,4564	7,235	0,0864	3,4452	7,091
520	0,1438	3,5064	7,381	0,1194	3,5012	7,292	0,0889	3,4908	7,149
540	0,1477	3,5510	7,436	0,1227	3,5461	7,348	0,0914	3,5364	7,206
560	0,1516	3,5957	7,491	0,1259	3,5911	7,402	0,0939	3,5820	7,261
580	0,1554	3,6405	7,544	0,1292	3,6363	7,456	0,0963	3,6277	7,316
600	0,1592	3,6855	7,596	0,1324	3,6815	7,508	0,0988	3,6734	7,369
620	0,1631	3,7306	7,647	0,1356	3,7268	7,560	0,1012	3,7192	7,420
640	0,1669	3,7759	7,697	0,1388	3,7723	7,610	0,1037	3,7651	7,471
660	0,1707	3,8214	7,747	0,1420	3,8180	7,660	0,1061	3,8112	7,521
680	0,1745	3,8672	7,795	0,1452	3,8639	7,708	0,1085	3,8574	7,570
700	0,1783	3,9132	7,843	0,1483	3,9101	7,756	0,1109	3,9039	7,619

Tabelle 20 (Fortsetzung)

t in °C	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)
	p = 5,0 MPa			p = 6,0 MPa			p = 8,0 MPa		
280	0,0422	2,8570	6,089	0,0332	2,8040	5,925	—	—	—
300	0,0453	2,9254	6,210	0,0362	2,8850	6,069	0,0242	2,7854	5,792
320	0,0481	2,9862	6,315	0,0388	2,9535	6,187	0,0268	2,8781	5,951
340	0,0507	3,0422	6,408	0,0411	3,0149	6,289	0,0290	2,9539	6,077
360	0,0532	3,0959	6,494	0,0433	3,0724	6,381	0,0309	3,0213	6,185
380	0,0555	3,1472	6,574	0,0454	3,1266	6,465	0,0326	3,0827	6,280
400	0,0578	3,1969	6,649	0,0474	3,1786	6,544	0,0343	3,1401	6,367
420	0,0600	3,2454	6,720	0,0493	3,2290	6,618	0,0359	3,1947	6,447
440	0,0622	3,2932	6,786	0,0512	3,2783	6,688	0,0374	3,2473	6,522
460	0,0643	3,3404	6,853	0,0530	3,3268	6,755	0,0389	3,2986	6,593
480	0,0664	3,3872	6,916	0,0548	3,3747	6,819	0,0403	3,3490	6,661
500	0,0685	3,4338	6,977	0,0566	3,4222	6,881	0,0417	3,3985	6,725
520	0,0706	3,4802	7,036	0,0584	3,4695	6,942	0,0431	3,4476	6,788
540	0,0726	3,5265	7,094	0,0601	3,5165	7,000	0,0444	3,4962	6,849
560	0,0746	3,5728	7,150	0,0618	3,5635	7,058	0,0458	3,5446	6,908
580	0,0766	3,6191	7,205	0,0635	3,6104	7,113	0,0471	3,5928	6,965
600	0,0786	3,6654	7,259	0,0652	3,6572	7,167	0,0484	3,6407	7,020
620	0,0806	3,7116	7,311	0,0669	3,7039	7,220	0,0497	3,6884	7,074
640	0,0826	3,7579	7,362	0,0686	3,7506	7,272	0,0510	3,7360	7,127
660	0,0846	3,8043	7,413	0,0702	3,7974	7,323	0,0523	3,7836	7,178
680	0,0865	3,8509	7,462	0,0718	3,8444	7,372	0,0535	3,8313	7,229
700	0,0885	3,8977	7,511	0,0735	3,8915	7,421	0,0548	3,8791	7,279

t in °C	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)
	p = 10,0 MPa			p = 12,5 MPa			p = 15,0 MPa		
320	0,0192	2,7820	5,712	—	—	—	—	—	—
340	0,0215	2,8821	5,878	0,0151	2,7672	5,617	—	—	—
360	0,0233	2,9633	6,009	0,0170	2,8782	5,795	0,0126	2,7713	5,569
380	0,0249	3,0344	6,119	0,0186	2,9662	5,932	0,0143	2,8867	5,748
400	0,0264	3,0985	6,216	0,0200	3,0414	6,046	0,0157	2,9776	5,885
420	0,0278	3,1581	6,303	0,0213	3,1090	6,145	0,0168	3,0553	5,999
440	0,0291	3,2148	6,384	0,0224	3,1715	6,234	0,0179	3,1252	6,098
460	0,0304	3,2693	6,459	0,0235	3,2308	6,316	0,0189	3,1900	6,188
480	0,0316	3,3223	6,531	0,0246	3,2875	6,392	0,0199	3,2512	6,270
500	0,0328	3,3741	6,598	0,0256	3,3426	6,464	0,0208	3,3097	6,347
520	0,0339	3,4251	6,664	0,0266	3,3962	6,533	0,0217	3,3664	6,419
540	0,0350	3,4754	6,726	0,0275	3,4488	6,598	0,0225	3,4215	6,488
560	0,0362	3,5254	6,787	0,0285	3,5008	6,661	0,0233	3,4756	6,554
580	0,0373	3,5749	6,846	0,0294	3,5521	6,722	0,0241	3,5288	6,617
600	0,0383	3,6240	6,903	0,0303	3,6027	6,781	0,0249	3,5812	6,678
620	0,0394	3,6727	6,958	0,0312	3,6529	6,838	0,0256	3,6328	6,736
640	0,0404	3,7212	7,011	0,0320	3,7026	6,893	0,0264	3,6838	6,793
660	0,0415	3,7697	7,064	0,0329	3,7521	6,946	0,0271	3,7344	6,847
680	0 0425	3,8181	7,115	0,0337	3,8015	6,999	0,0279	3,7849	6,901
700	0,0436	3,8666	7,166	0,0346	3,8510	7,050	0,0286	3,8352	6,953

Tabelle 20 (Fortsetzung)

t in °C	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)	v in m³/kg	h in MJ/kg	s in kJ/(kg · K)
	p = 20,0 MPa			p = 25,0 MPa*)			p = 30,0 MPa*)		
360	—	—	—	0,0017	1,7013	3,804	0,0016	1,6786	3,755
380	0,0083	2,6632	5,321	0,0022	1,9395	4,173	0,0019	1,8413	4,007
400	0,0100	2,8201	5,558	0,0060	2,5832	5,147	0,0028	2,1591	4,485
420	0,0112	2,9310	5,720	0,0076	2,7730	5,425	0,0049	2,5572	5,069
440	0,0122	3,0217	5,849	0,0087	2,8994	5,605	0,0062	2,7517	5,346
460	0,0132	3,1010	5,959	0,0096	3,0003	5,745	0,0072	2,8854	5,531
480	0,0140	3,1731	6,056	0,0104	3,0870	5,862	0,0080	2,9922	5,675
500	0,0148	3,2402	6,144	0,0111	3,1650	5,964	0,0087	3,0839	5,795
520	0,0155	3,3037	6,225	0,0118	3,2370	6,056	0,0093	3,1661	5,900
540	0,0162	3,3646	6,301	0,0124	3,3047	6,140	0,0099	3,2417	5,995
560	0,0169	3,4236	6,373	0,0130	3,3692	6,219	0,0104	3,3126	6,081
580	0,0175	3,4809	6,441	0,0136	3,4312	6,292	0,0109	3,3798	6,160
600	0,0182	3,5369	6,506	0,0141	3,4912	6,362	0,0114	3,4442	6,235
620	0,0188	3,5917	6,568	0,0146	3,5495	6,428	0,0119	3,5064	6,305
640	0,0194	3,6455	6,627	0,0152	3,6064	6,491	0,0124	3,5665	6,372
660	0,0200	3,6986	6,685	0,0157	3,6622	6,551	0,0128	3,6252	6,436
680	0,0205	3,7512	6,740	0,0162	3,7171	6,609	0,0132	3,6826	6,497
700	0,0211	3,8035	6,795	0,0166	3,7715	6,666	0,0136	3,7392	6,555
	p = 35,0 MPa*)			p = 40,0 MPa*)			p = 50,0 MPa*)		
360	0,0016	1,6627	3,717	0,0015	1,6506	3,686	0,0015	1,6334	3,634
380	0,0018	1,8038	3,936	0,0017	1,7803	3,887	0,0016	1,7504	3,816
400	0,0021	1,9936	4,222	0,0019	1,9357	4,121	0,0017	1,8791	4,010
420	0,0031	2,2965	4,665	0,0024	2,1418	4,423	0,0019	2,0254	4,224
440	0,0044	2,5757	5,063	0,0032	2,3985	4,788	0,0023	2,1952	4,466
460	0,0054	2,7555	5,311	0,0041	2,6145	5,089	0,0027	2,3835	4,726
480	0,0062	2,8884	5,490	0,0049	2,7780	5,307	0,0033	2,5660	4,972
500	0,0069	2,9971	5,633	0,0056	2,9058	5,475	0,0039	2,7232	5,178
520	0,0075	3,0913	5,753	0,0062	3,0134	5,612	0,0044	2,8560	5,348
540	0,0081	3,1760	5,859	0,0067	3,1082	5,730	0,0049	2,9707	5,490
560	0,0086	3,2540	5,954	0,0072	3,1938	5,834	0,0053	3,0721	5,614
580	0,0091	3,3269	6,040	0,0077	3,2729	5,928	0,0057	3,1637	5,722
600	0,0095	3,3961	6,120	0,0081	3,3472	6,014	0,0061	3,2483	5,820
620	0,0099	3,4623	6,195	0,0085	3,4176	6,094	0,0065	3,3276	5,910
640	0,0104	3,5260	6,266	0,0089	3,4850	6,168	0,0068	3,4025	5,993
660	0,0108	3,5877	6,333	0,0092	3,5499	6,239	0,0071	3,4740	6,071
680	0,0112	3,6478	6,396	0,0096	3,6128	6,305	0,0074	3,5427	6,143
700	0,0115	3,7068	6,458	0,0099	3,6742	6,369	0,0077	3,6092	6,213

*) Bei überkritischen Drücken läßt sich der Übergang zwischen flüssiger und gasförmiger Phase nicht angeben.

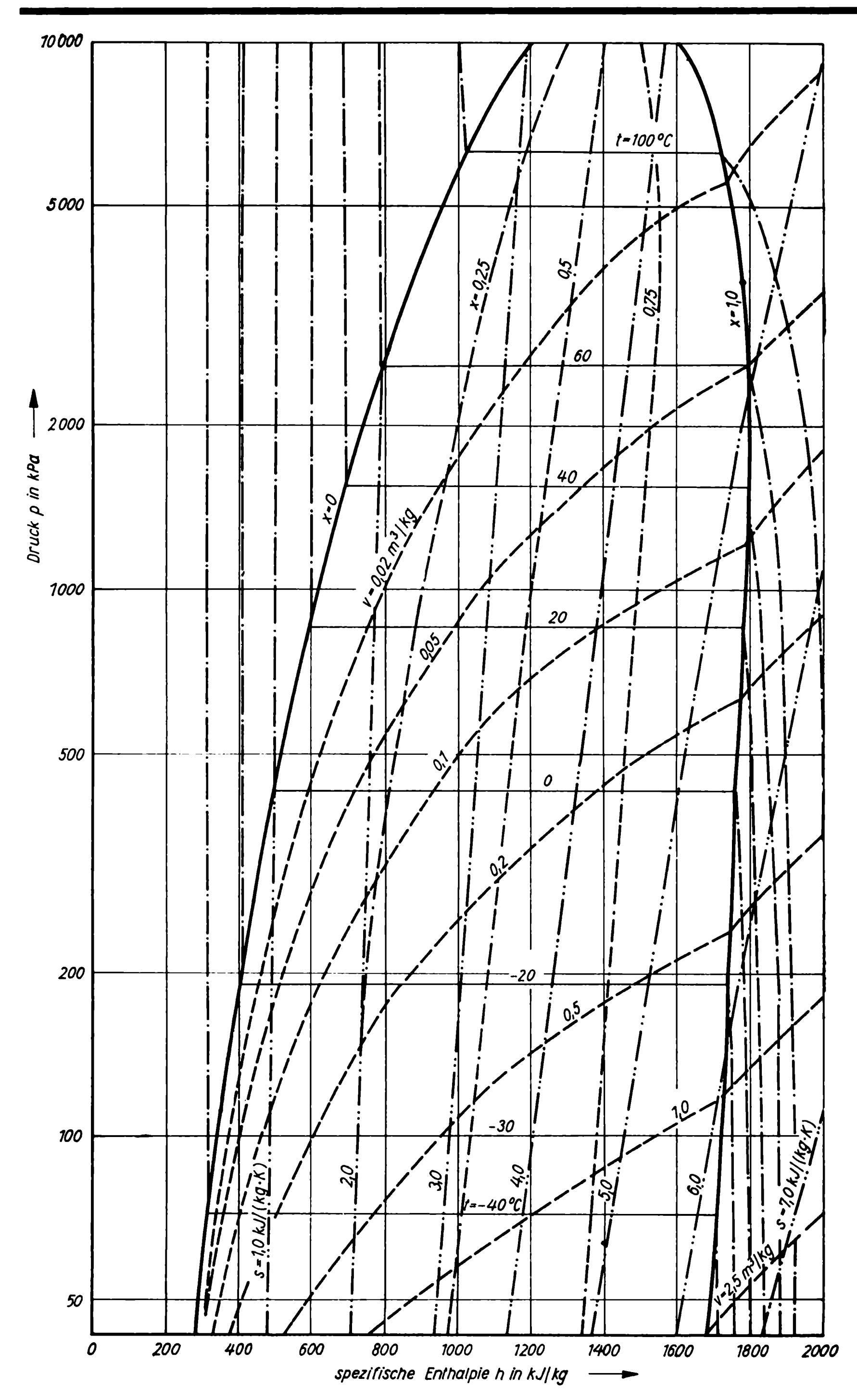


Bild 27. MOLLIER-(lg p),h-Diagramm für Ammoniak ($s_0' = 1{,}000$ kJ/(kg · K); $h_0' = 500$ kJ/kg)

6.2.2. Reversible und irreversible Zustandsänderungen

Alle Prozesse, bei denen die Grenzkurve für trockenen Sattdampf überschritten wird, lassen sich mit Diagrammen anschaulich behandeln. Mit dem MOLLIER-h,s-Diagramm (Beilage C) ergibt sich für *reversible Zustandsänderungen:*

1. Die *Isobaren* schließen an der rechten Grenzkurve ohne Knick an die Geraden des Naßdampfgebiets an und ähneln mit wachsender Überhitzung immer mehr Exponentialfunktionen. Bei der zugeführten spezifischen Wärme $q_{12p} = h_2 - h_1$ wird die spezifische Raumänderungsarbeit $w_{12p} = -p(v_2 - v_1)$.
2. Die *Isothermen*, die im Naßdampfgebiet identisch mit den Isobaren sind, knicken an der rechten Grenzkurve ab und steigen mit wachsender Überhitzung immer weniger an. Die zugeführte spezifische Wärmemenge ist nach Gl. (77) $q_{12T} = T(s_2 - s_1)$, nach Gl. (49) die spezifische technische Arbeit $w_{t12T} = h_2 - h_1 - T(s_2 - s_1)$ und die spezifische Raumänderungsarbeit $w_{12T} = w_{t12T} - (p_2v_2 - p_1v_1)$.
3. Die *Isochoren*, die im Naßdampfgebiet Geraden sind, verlaufen im überhitzten Gebiet steiler als die Isobaren. Die zugeführte spezifische Wärmemenge ist $q_{12v} = u_2 - u_1 = h_2 - h_1 - v(p_2 - p_1)$. Die spezifische technische Arbeit wird $w_{t12v} = v(p_2 - p_1)$.
4. Für die *Isentrope* (reversible Adiabate) ist $s_1 = s_2$, d. h., die spezifische technische Arbeit $w_{t12s} = h_2 - h_1$ und die spezifische Raumänderungsarbeit $w_{12s} = h_2 - h_1 - (p_2v_2 - p_1v_1)$. Bei Isentropen, die ausschließlich im überhitzten Gebiet in ausreichender Entfernung von der Kurve des trockenen Sattdampfes liegen, gelten näherungsweise Gln. (136) bis (143) mit $\varkappa = 1{,}30$.
5. Eine irreversible Zustandsänderung ist die *Drosselung*. Bei Vernachlässigung des Unterschieds der äußeren Strömungsgeschwindigkeiten gilt $h_2 = h_1$. Der Endzustand (aber kein Zwischenzustand) läßt sich in MOLLIER-Diagrammen einfach ermitteln.

Beispiel. **1 kg Wasserdampf von 10 MPa und 460 °C expandiert isentrop auf a) 2 MPa und b) 100 kPa. Zu bestimmen sind der Endzustand und die technische Arbeit.**
Für den Anfangszustand ergibt sich aus Tabelle 20 $v_1 = 0{,}0304$ m³/kg; $h_1 = 3{,}2693$ MJ/kg; $s_1 = 6{,}459$ kJ/(kg · K).

a) Für den Endzustand $s_2 = s_1$ und $p_2 = 2$ MPa wird nach Tabelle 16 $s_2'' = 6{,}337$ kJ/(kg · K). Da $s'' < s_2$, liegt der Endzustand im Heißdampfgebiet, und die Werte müssen der Tabelle 20 entnommen werden:

$t = 240$ °C; $s = 6{,}495$ kJ/(kg · K); $h = 2{,}8763$ MJ/kg; $v = 0{,}1084$ m³/kg;

$t = 220$ °C; $s = 6{,}384$ kJ/(kg · K); $h = 2{,}8204$ MJ/kg; $v = 0{,}1021$ m³/kg.

Durch Interpolation ergibt sich für $s_2 = 6{,}459$ kJ/(kg · K):

$$t_2 = 220\,°\mathrm{C} + \frac{0{,}075 \cdot 20\ \mathrm{K}}{0{,}111} = 233{,}5\,°\mathrm{C}; \qquad h_2 = 2{,}8204\ \mathrm{MJ/kg} + \frac{0{,}075 \cdot 55{,}9}{0{,}111}\ \mathrm{kJ/kg} = 2{,}8582\ \mathrm{MJ/kg}$$

$$v_2 = 0{,}1021\ \mathrm{m^3/kg} + \frac{0{,}075 \cdot 0{,}0063}{0{,}111}\ \mathrm{m^3/kg} = 0{,}1064\ \mathrm{m^3/kg}.$$

Die spezifische technische Arbeit ist:

$$w_{t12s} = h_2 - h_1 = -(3{,}2693 - 2{,}8582)\ \mathrm{MJ/kg} = -411{,}1\ \mathrm{kJ/kg}.$$

Selbst bei diesen hohen Drücken weichen die nach (136), (138), (140) und (143) berechneten Werte nur wenig von den genaueren, aus der Dampftabelle ermittelten Werten ab.

$$v_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(1/\varkappa)} v_1 = \left(\frac{10}{2}\right)^{(1/1,3)} \cdot 0{,}0304\ \mathrm{m^3/kg} = 0{,}1047\ \mathrm{m^3/kg};$$

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} T_1 = \frac{733{,}2\ \mathrm{K}}{5^{(0,3/1,3)}} = 505{,}7\ \mathrm{K} \qquad (t_2 = 232{,}5\,°\mathrm{C});$$

$$w_{t12s} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\varkappa-1/\varkappa)} - 1\right] = -\frac{1{,}3}{0{,}3} \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} \cdot 0{,}0304\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}} \left[\frac{1}{5^{0,3/1,3}} - 1\right]$$
$$= -408 \cdot 10^3\ \mathrm{J/kg} = -408\ \mathrm{kJ/kg}.$$

b) Für den Endzustand $s_2 = s_1 = 6{,}459$ kJ/(kg·K) und $p_2 = 100$ kPa wird nach Tabelle 16 $s'' = 7{,}361$ kJ/(kg · K) $> s_2$. Die Werte für den im Naßdampfgebiet liegenden Endzustand können nach (207), (208) und (210) berechnet werden, wobei die benötigten Werte der Tabelle 16 zu entnehmen sind:

$$x_2 = (s_2 - s_2')/(s_2'' - s_2') = (6{,}459 - 1{,}303)/(7{,}361 - 1{,}303) = 0{,}851$$

$$h_2 = h_2' + x_2 r_2 = 417{,}5\ \text{kJ/kg} + 0{,}851 \cdot 2258{,}2\ \text{kJ/kg} = 2{,}3392\ \text{MJ/kg}$$

$$v_2 = x_2(v_2'' - v_2') + v_2' = 0{,}851(1{,}694 - 0{,}001)\ \text{m}^3/\text{kg} + 0{,}001\ \text{m}^3/\text{kg} = 1{,}442\ \text{m}^3/\text{kg}.$$

Die spezifische technische Arbeit wird:

$$w_{t12s} = h_2 - h_1 = -(3{,}2693 - 2{,}3392)\ \text{MJ/kg} = -0{,}9301\ \text{MJ/kg}.$$

Beispiel. Naßdampf bei 1 MPa wird auf 100 kPa gedrosselt, wobei er eine Temperatur von 113,0 °C erreicht. Zu bestimmen sind der spezifische Dampfgehalt x_1 vor dem Drosseln und die Entropiezunahme durch das Drosseln, wenn der Unterschied der äußeren Strömungsgeschwindigkeiten vor und nach dem Drosseln vernachlässigbar klein ist.
Um den Endzustand festzulegen, entnimmt man der Tabelle 20 für 100 kPa:

$t = 120$ °C; $h = 2{,}7168$ MJ/kg; $s = 7{,}468$ kJ/(kg · K);

$t = 100$ °C; $h = 2{,}6765$ MJ/kg; $s = 7{,}363$ kJ/(kg · K).

Durch Interpolation ergibt sich für $t_2 = 113$ °C, $h_2 = 2{,}7027$ MJ/kg und $s_2 = 7{,}431$ kJ/(kg · K).
Für den Anfangszustand von 1 MPa und $h_1 = h_2 = 2{,}7027$ MJ/kg ergibt sich mit den Werten aus Tabelle 16 nach (208) und (210):

$$x_1 = (h_1 - h_1')/r_1 = (2702{,}7 - 762{,}6)/2014{,}4 = 0{,}963$$

$$s_1 = s_1' + x_1(s_1'' - s_1') = 2{,}138\ \text{kJ/(kg·K)} + 0{,}963 \cdot (6{,}585 - 2{,}138)\ \text{kJ/(kg·K)} = 6{,}420\ \text{kJ/(kg·K)}.$$

Die Entropiezunahme durch das Drosseln ist:

$$s_2 - s_1 = (7{,}431 - 6{,}420)\ \text{kJ/(kg·K)} = 1{,}011\ \text{kJ/(kg·K)}.$$

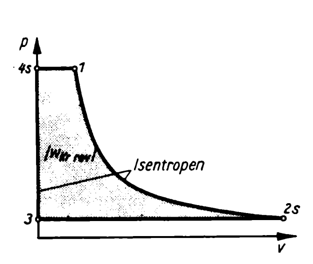


Bild 28. Clausius-Rankine-Prozeß im p,v-Diagramm

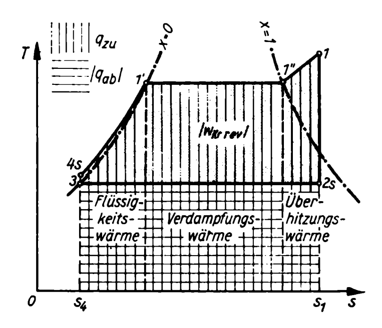


Bild 29. Clausius-Rankine-Prozeß im T,s-Diagramm

6.2.3. Clausius-Rankine-Kreisprozeß

Idealprozeß für *Dampfkraftanlagen* mit zwei Isobaren zur Wärmezufuhr und -abfuhr und zwei Isentropen; für überhitzten Wasserdampf im unterkritischen Druckbereich (Bilder 28 und 29). Der Prozeß wird in mehreren, getrennten Bauteilen durchgeführt:

1. Im *vollkommenen Dampferzeuger* wird bei konstantem Druck p_1 der Flüssigkeit (spezifisches Volumen v_4 im p,v-Diagramm von der Ordinatenachse nicht zu unterscheiden, da gegenüber dem Dampfvolumen v_1 außerordentlich klein) die Flüssigkeits-, Verdampfungs- und Überhitzungswärme $q_{zu} = q_{41} = (h_1 - h_{4s})$ zugeführt, die im T,s-Diagramm durch die Fläche $s_4 - 4 - 1' - 1'' - 1 - s_1$ dargestellt wird.
In der Idealanlage ändert sich der Dampfzustand zwischen Austritt am Überhitzer und Eintritt in die Dampfturbine nicht.
2. In der *vollkommenen Kraftmaschine* expandiert der Dampf isentrop bis auf den Kondensatordruck p_2. Der Zustand 2 liegt bei Kondensationsturbinen im Naßdampf- und bei Gegendruckturbinen meist im überhitzten Gebiet. Die technische Arbeit $w_{t12s} = (h_{2s} - h_1)$ wird negativ, d. h. nach außen abgegeben.



In der Idealanlage ändert sich der Dampfzustand zwischen Austritt aus der Kraftmaschine und Eintritt in den Kondensator (Wärmeübertrager) nicht.

3. Im *vollkommenen Wärmeübertrager* wird der Abdampf isobar bis an die Grenzkurve ($x_3 = 0$) verflüssigt. Die spezifische Wärmemenge $q_{ab} = q_{23} = (h_3 - h_{2s})$ ist als abgeführte Wärme negativ und wird im T,s-Diagramm durch die Fläche $s_1 - 2 - 3 - s_4$ dargestellt.
4. Durch die *vollkommene Kondensat- und Kesselspeisepumpe* wird das flüssige Wasser isentrop vom Kondensator in den Dampferzeuger gefördert. Die technische Arbeit $w_{t34s} = (h_{4s} - h_3) = \int_3^4 v\, dp$ ist positiv, d. h. von außen zuzuführen. Die Kompressibilität der Flüssigkeit ist vernachlässigbar klein, d. h. $w_{t34s} = v_3'(p_1 - p_2)$.

Die *Kreisprozeßarbeit* wird:

$$|w_{Kr}| = |w_{t12s}| - w_{t34s} = h_1 - h_{2s} - (h_{4s} - h_3) \tag{221}$$

und der *thermische Wirkungsgrad:*

$$\eta_{th} = |w_{Kr}|/q_{zu} = 1 - (h_{2s} - h_3)/(h_1 - h_{4s}) = 1 - (|q_{ab}|/q_{zu}) \tag{222}$$

Solange der Druck p_1 beträchtlich kleiner als der kritische Druck p_k ist, sind die Enthalpiezunahme des Wassers in den Pumpen und die Pumpenarbeit gegenüber dem Absolutwert der Kraftmaschinenarbeit vernachlässigbar klein. Dann kann gesetzt werden: $w_{Kr} = h_1 - h_{2s}$ und

$$\eta_{th} = |w_{t12s}|/q_{zu} = (h_1 - h_{2s})/(h_1 - h_{4s}) \tag{223}$$

Infolge der irreversiblen Prozesse in der ausgeführten Dampfkraftanlage wird die vom Zudampf in der Turbine an die Laufschaufeln abgegebene spezifische Innenarbeit $|w_i| < |w_{Kr}|$. Daher hat der Dampf beim Austrittsdruck p_2 eine größere spezifische Entropie $s_2 > s_1$ und eine größere spezifische Enthalpie $h_2 > h_{2s}$. Sind die äußeren Lässigkeitsverluste und die Verluste durch unvollkommene Wärmeisolation vernachlässigbar klein, so gilt nach Gl. (50):

$$|w_i| = |w_{t12}| - w_{t34} = h_1 - h_2 - (h_4 - h_3) < |w_{Kr}| \tag{224}$$

Infolge des Arbeitsbedarfs der für den Betrieb erforderlichen Hilfseinrichtungen und der mechanischen Reibungsverluste ist die nach außen abgegebene spezifische Nutzarbeit $|w_e| < |w_i|$.

Der *mechanische Wirkungsgrad* η_m gibt das Verhältnis w_e/w_i und der *Gütegrad* η_g das Verhältnis w_i/w_{Kr} an, das unter den angegebenen Voraussetzungen ist:

$$\eta_g = w_i/w_{Kr} = (h_1 - h_2 + h_3 - h_4)/(h_1 - h_{2s} + h_3 - h_{4s}) \tag{225}$$

Für die ausgeführte Dampfkraftmaschine wird der *thermische Innenwirkungsgrad:*

$$\eta_{th\,i} = |w_i|/q_{zu} = \eta_g\,|w_{Kr}|/q_{zu} = \eta_{th}\eta_g \tag{226}$$

und der *thermische Nutzwirkungsgrad:*

$$\eta_{th\,e} = |w_e|/q_{zu} = \eta_m\eta_{th\,i} = \eta_{th}\eta_g\eta_m \tag{227}$$

In der Praxis benutzt man die Kehrwerte der spezifischen Arbeiten, die als *spezifischer Dampfverbrauch* mit d, d_i und d_e bezeichnet und als Quotient aus dem Zudampfstrom $\dot{m}_{Zu}$ und der Leistung P berechnet werden. Es gelten:

$$d = \dot{m}_{Zu}/P = 1/|w_{Kr}| \tag{228}$$

$$d_i = \dot{m}_{Zu}/P_i = 1/|w_i| = 1/\eta_g|w_{Kr}| = d/\eta_g \tag{229}$$

$$d_e = \dot{m}_{Zu}/P_e = 1/|w_e| = d_i/\eta_m = d/\eta_g\eta_m \tag{230}$$

Wird die Leistung in Kilowatt und der stündliche Zudampfstrom in kg/h angegeben, erhält man statt der kohärenten Einheit (kg/J) die inkohärente (kg/kWh), es gilt die Zahlenwertgleichung:

$$d = \dot{m}_{Zu}/P = 3600/|w_{Kr}| = 3600/(h_1 - h_{2s} + h_3 - h_{4s}) \approx 3600/(h_1 - h_{2s}) \tag{231}$$

d	$\dot{m}$	P	w_{Kr}	h
kg/kWh	kg/h	kW	kJ/kg	kJ/kg

6.3. Mischung von Wasserdampf und Luft

Das Zweistoffsystem Wasser und trockene Luft bezeichnet man als *feuchte Luft* und bezieht den Wassergehalt m_W auf die Masse der trockenen Luft m_L:

$$x_f = m_W/m_L \tag{232}$$

x_f Wassermasse in feuchter Luft je Masseeinheit trockener Luft (kg/kg)

In der *Klimatechnik* werden nur Druck- und Temperaturbereiche benötigt, in denen beide Stoffe als ideale Gase mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten anzusehen sind und das Gesetz von DALTON gilt. Der Teildruck p_D des Wasserdampfs kann (unabhängig vom Gesamtdruck p) höchstens gleich dem der Temperatur entsprechenden Sättigungsdruck p_s werden. Bei gesättigter Luft enthält 1 kg Trockenluft die Wasserdampfmasse x_s, die vom Gesamtdruck p abhängt (Tabelle 21). Bei ungesättigter und gesättigter Luft ist das System *homogen*, der Teildruck des Wasserdampfs $p_D \leqq p_s$ und der Wassergehalt $x_f \leqq x_s$. Im Gemisch befinden sich Luft und überhitzter oder trocken gesättigter Wasserdampf. Für $x_f > x_s$ ergibt sich ein *heterogenes Dampf-Luft-Gemisch* mit Flüssigkeitstropfen (*feuchter Nebel*) beim Druck von 100 kPa und Temperaturen über 0 °C und Eiskristallen (*Eisnebel*) bei Temperaturen unter 0 °C. Die Kurve der x_s-Werte bei verschiedenen Temperaturen trennt das homogene vom heterogenen Gebiet (*Grenzkurve*).
Für ungesättigte Luft gibt man entweder die relative Luftfeuchtigkeit $\varphi_f = p_D/p_s$ oder den Sättigungsgrad $\chi = x_f/x_s$ an. Es gilt:

$$\chi = \varphi_f(p - p_s)/(p - \varphi_f p_S) \tag{233}$$

Für $p \gg p_S$ ist $\chi \approx \varphi_f$.

6.3.1. Zustandsgrößen

Die Dichte ϱ_D des Wasserdampfs in der feuchten Luft wird für ungesättigte Luft nach Gl. (121):

$$\varrho_D = p_D/R_D T \tag{234}$$

mit der spezifischen Gaskonstanten für Wasserdampf $R_D = 461{,}4$ J/(kg · K).
Das spezifische Volumen der ungesättigten feuchten Luft wird auf Trockenluft oder feuchte Luft bezogen. Durch Addition der *thermischen Zustandsgleichungen* (119) für Luft und Wasserdampf ergibt sich:

$$pV = (m_L R_L + m_D R_D)\, T = \left(\frac{R_L}{R_D} + \frac{m_D}{m_L}\right) m_L R_D T \tag{235}$$

Mit der spezifischen Gaskonstanten für trockene Luft $R_L = 287{,}1$ J/(kg · K) wird $R_L/R_D = 0{,}622$ und damit das *spezifische Volumen:*

$$v_{1+xf} = V/m_L = R_D(0{,}622 + x_f)\, T/p \tag{236}$$

Für konstante Temperatur und konstanten Gasdruck ist v_{1+xf} eine lineare Funktion von x_f. Für gesättigte feuchte Luft ($\varphi_f = 1{,}0$) wird $x_f = x_s$. Da bei Nebelluft das Volumen des Nebels gegenüber dem des Dampf-Luft-Gemisches vernachlässigbar klein ist, ändert sich auch bei $x_f > x_s$ das spezifische Volumen (auf Trockenluft bezogen) nicht:

$$v_{1+xf} = R_D(0{,}622 + x_s)\, T/p \tag{237}$$

Die Dichte von Nebelluft wird jedoch:

$$\varrho = 1/v = (1 + x_f)\, p/[(0{,}622 + x_s)\, R_D T] \tag{238}$$

Bei ungesättigter feuchter Luft wird der *Wasserdampfgehalt* je Kilogramm trockener Luft:

$$x_f = R_L p_D/(p - p_D)\, R_D = 0{,}622 \varphi_f p_s/(p - \varphi_f p_s) \tag{239}$$



Tabelle 21. Abhängigkeit des Sättigungsdrucks p_s des Wasserdampfs von der Temperatur. Dampfgehalt x_s, spezifisches Volumen v_{1+xs} und spezifische Enthalpie h_{1+xs} für gesättigte feuchte Luft für 100 kPa Gesamtdruck

Temperatur t in °C	Sättigungsdruck p_s in kPa	Dampfgehalt x_s in g/kg	Spezifisches Volumen v_{1+xs} in m³/kg	Spezifische Enthalpie h_{1+xs} in kJ/kg
		für 100 kPa Gesamtdruck		
−40	0,0124	0,0772	0,667	−40,01
−35	0,0223	0,1387	0,684	−34,84
−30	0,0373	0,2324	0,700	−29,58
−25	0,0628	0,391	0,714	−24,17
−20	0,1029	0,641	0,728	−18,53
−15	0,1649	1,028	0,742	−12,54
−10	0,2594	1,618	0,757	−6,04
−8	0,3095	1,932	0,763	−3,24
−6	0,3681	2,30	0,769	−0,31
−4	0,4368	2,73	0,776	2,78
−2	0,5172	3,23	0,782	6,06
0	0,6108	3,82	0,788	9,56
2	0,7054	4,42	0,795	13,07
4	0,8129	5,10	0,802	16,80
6	0,935	5,87	0,808	20,77
8	1,072	6,74	0,815	25,00
10	1,228	7,73	0,822	29,52
12	1,403	8,84	0,830	34,37
14	1,599	10,10	0,837	39,59
16	1,817	11,51	0,845	45,21
18	2,064	13,10	0,853	51,28
20	2,339	14,88	0,861	57,88
22	2,644	16,87	0,870	65,02
24	2,984	19,12	0,879	72,79
25	3,168	20,34	0,883	76,94
30	4,243	27,52	0,908	100,52
35	5,624	37,05	0,937	130,26
40	7,376	49,52	0,970	167,73
45	9,584	65,92	1,010	218,6
50	12,335	87,52	1,058	277,3
55	15,730	116,2	1,117	357,8
60	19,920	154,7	1,194	464,5
65	25,010	207,7	1,294	610,3
70	31,160	281,5	1,430	811,1
75	38,550	390,2	1,626	1106
80	47,350	559,6	1,925	1563
85	57,810	851,9	2,435	2351
90	70,110	1459	3,486	3983
95	84,520	3396	6,824	9190
100	101,325	—	—	—

Daraus ergibt sich der Teildruck p_D des Wasserdampfs:

$$p_D = x_f p/(0{,}622 + x_f) \tag{240}$$

Der *Wasserdampfgehalt* gesättigter feuchter Luft ($\varphi_f = 1$) ist:

$$x_s = 0{,}622 p_s/(p - p_s) \tag{241}$$

Während der Sättigungsdruck p_s nur von der Temperatur (Tabelle 21) abhängt, nimmt der Wasserdampfgehalt gesättigter feuchter Luft x_s mit steigendem Gesamtdruck p ab. Für den Gesamtdruck $p = 100$ kPa sind für Temperaturen zwischen $-40\,°C$ und $100\,°C$ die Werte für x_s und das auf Trockenluft bezogene spezifische Volumen v_{1+xs} in Tabelle 21 angegeben. Bild 30 gilt für diesen Gesamtdruck.

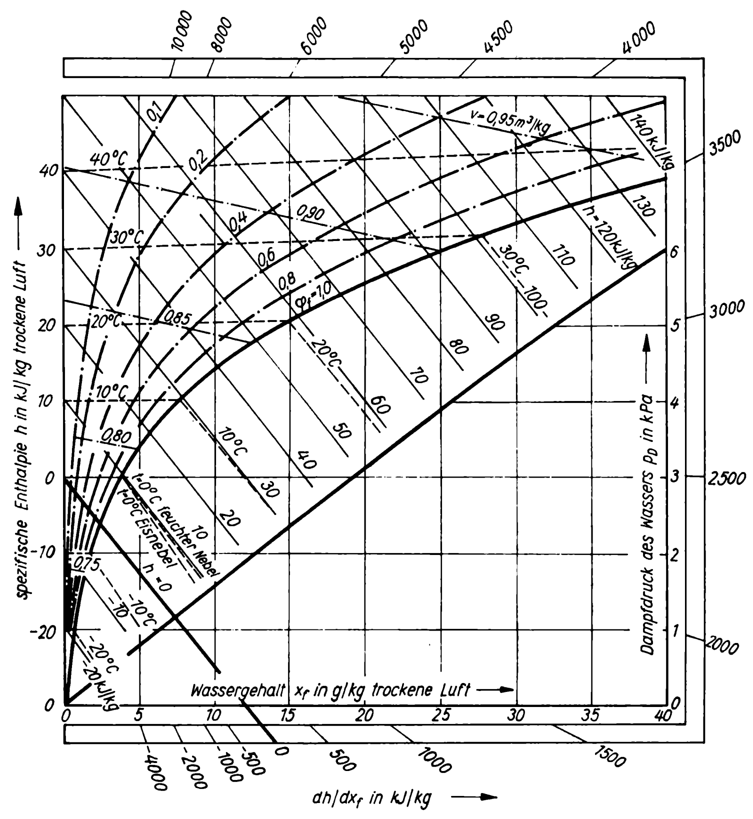


Bild 30. Schiefwinkliges MOLLIER-h,x_f-Diagramm für feuchte Luft bei $p = 100$ kPa und $t = -20 \cdots +40\,°C$

Die spezifische Enthalpie der trockenen Luft und die spezifische Enthalpie des flüssigen Wassers bei 0 °C und 100 kPa werden gleich Null gesetzt. Damit ergibt sich die spezifische Enthalpie für 1 kg Trockenluft mit x_f kg Wasser bei ungesättigter feuchter Luft (überhitzter Wasserdampf):

$$h_{1+xf} = (c_{pL} + x_f c_{pD})(T - T_0) + x_f r_0 \tag{242}$$

$c_{pL} = 1{,}00$ kJ/(kg · K); $c_{pD} = 1{,}86$ kJ/(kg · K); $r_0 = 2{,}5$ MJ/kg

und bei gesättigter feuchter Luft (trockener Sattdampf):

$$h_{1+xs} = (c_{pL} + x_s c_{pD})(T - T_0) + x_s r_0 \tag{243}$$

Für $p = 100$ kPa sind die Werte in Tabelle 21 angegeben.

Bei $T > 273{,}15$ K und $x_f > x_s$ (Tropfen im Dampf-Luft-Gemisch) gilt:

$$h_{1+xf} = [c_{pL} + x_s c_{pD} + (x_f - x_s)\, c_{pW}]\,(T - T_0) + x_s r_0$$
$$= h_{1+xs} + (x_f - x_s)\, c_{pW}(T - T_0) \tag{244}$$

$c_{pW} = 4{,}19$ kJ/(kg · K)

und bei $T < 273{,}15$ K und $x_f > x_s$ (Eisnebel):

$$h_{1+xf} = [c_{pL} + x_s c_{pD} + (x_f - x_s)\, c_{pE}]\,(T - T_0) + x_s r_0 - (x_f - x_s)\, r_{\text{Schm}} \tag{245}$$

$c_{pE} = 2{,}09$ kJ/(kg · K); Schmelzwärme des Eises $r_{\text{Schm}} = 334$ kJ/kg.

6.3.2. Mollier-h,x_f-Diagramm

Im schiefwinkligen h,x_f-Diagramm ist über dem Wassergehalt x_f (Bild 30) die Enthalpie h_{1+xf} aufgetragen. Damit das ungesättigte Gebiet größer dargestellt wird, ist in ihm die *Isotherme* für $T_0 = 273{,}15$ K senkrecht zur Richtung der Ordinatenachse gewählt. Nach Gl. (242) muß die Abszissenachse zu dieser Isotherme um $(\partial h/\partial x_f)_{T_0} = r_0$ geneigt sein. Die Zustände für trockene Luft ($x_f = 0$) liegen auf der Ordinatenachse. Die *Isenthalpen* verlaufen parallel zur Abszissenachse. Die *Isothermen* sind Geraden, die jedoch an der Grenzkurve zwischen ungesättigtem und heterogenem Gebiet ($\varphi_f = 1{,}0$) infolge der Unterschiede in den Gln. (242), (244), (245) einen *Knick* haben, wobei die Richtungen der *Nebelisothermen* nicht vom Gesamtdruck, aber von der Temperatur abhängen. Bei der Temperatur 0 °C ergeben sich Nebelisothermen für Eis- und feuchten Nebel. Zwischen diesen zwei Isothermen enthält die Luft Wasserdampf, flüssiges Wasser und Eis. Da der Wasserdampfgehalt gesättigter feuchter Luft x_s nach Gl. (241) vom Gesamtdruck abhängt, läßt sich im Diagramm die Kurve für die relative Luftfeuchte $\varphi_f = 1$ nur für einen zweckmäßig gewählten Gesamtdruck (im Bild 30 $p = 100$ kPa) eintragen. Mit Gl. (239) ergeben sich die Kurven für $\varphi_f < 1$. Außerdem sind Linien für konstantes spezifisches Volumen v_{1+xf} eingetragen, die im Nebelgebiet identisch mit den Isothermen sind.
Der *Randmaßstab* (dh/dx_f) wird benötigt, um Zustandsänderungen zu behandeln, bei denen der feuchten Luft Wasser (flüssig oder dampfförmig) mit bestimmter spezifischer Enthalpie h_W zugesetzt wird. Im unteren Teil des Diagramms ist für den Gesamtdruck $p = 100$ kPa in Abhängigkeit vom Wassergehalt x_f der Dampfdruck p_D angegeben. Damit das homogene Gebiet nicht überschritten wird, muß $p_D \leqq p_s$, dem der Temperatur entsprechenden Sättigungsdruck (Tabelle 21), sein, und die relative Feuchtigkeit wird $\varphi_f = p_D/p_s$.
Beim Übergang auf andere Gesamtdrücke ändert die Kurvenschar für $\varphi =$ konst. ihre Lage nicht, jedoch gehören zu den einzelnen Kurven andere Zahlenwerte von φ_f [10]. Aus den Diagrammwerten p und φ_f ergibt sich bei geändertem Gesamtdruck p' die relative Feuchtigkeit $\varphi_f' = \varphi_f p'/p$.

6.3.3. Zustandsänderungen bei konstantem Gesamtdruck

Alle im folgenden besprochenen Zustandsänderungen können anschaulich quantitativ mit Hilfe des Mollier-h,x_f-Diagramms behandelt werden (Arbeitsblätter z. B. in [2], [10]).

1. *Isobares Erwärmen oder Abkühlen feuchter Luft.* Der reversible Prozeß muß im thermischen Gleichgewicht verlaufen, d. h., zu jedem Zeitpunkt sind die Temperaturen von Luft, Wasserdampf, flüssigem Wasser und Eis gleich. Der Wassergehalt x_f bleibt konstant ($x_{f1} = x_{f2}$), und die für die Masse von $(1 + x_f)$ kg feuchter Luft erforderliche spezifische Wärmemenge wird:

$$q_{12} = (h_{1+xf})_2 - (h_{1+xf})_1 \tag{246}$$

Wird bei diesem Prozeß die Grenze zwischen homogenem und heterogenem Gebiet erreicht, so bezeichnet man die dabei vorhandene Temperatur als *Taupunkttemperatur* T_τ. Sie ergibt sich bei einem heterogenen Gemisch durch hinreichend große Wärmezufuhr, bei einem homogenen Gemisch durch hinreichend große Wärmeabfuhr. Im zweiten Fall ändert der gasförmige Teil bei weiterer Wärmeabfuhr seinen Zustand längs der Grenzkurve ($\varphi_f = 1$) und wird flüssig (bei $t > 0$ °C) oder fest (bei $t < 0$ °C) abgeschieden.

Beispiel. Nebelluft mit 100 kPa Gesamtdruck, $t_1 = 10$ °C und $x_{f1} = 13{,}1$ g/kg Wassergehalt kann durch Erwärmen auf 20 °C entnebelt werden. Zu ermitteln sind die Taupunkttemperatur t_τ, die je Kilogramm Trockenluft verdampfte Wassermasse, der Sättigungsgrad χ_2, die relative Luftfeuchtigkeit φ_{f2} und die erforderliche spezifische Wärmemenge q_{12}.

Die Zustandsänderung ist im MOLLIER-h,s-Diagramm (Bild 31) dargestellt. Der Zustand 1 liegt auf der Nebelisotherme für $t_1 = 10\,°C$ bei $x_{f1} = 13{,}1$ g/kg. Für t_1 ergibt sich der Dampfgehalt $x_{s1} = 7{,}8$ g/kg, so daß $(x_f - x_{s1}) = 5{,}3$ g/kg Trockenluft im Nebel flüssig und zu verdampfen sind. Aus dem Diagramm läßt sich die spezifische Enthalpie $(h_{1+xf})_1 = 29{,}8$ kJ/kg ablesen. Durch die Wärmezufuhr steigt die Temperatur, wobei sich die Wasserdampfmasse auf den entsprechenden Nebelisothermen längs der Grenzkurve $\varphi_f = 1$ erhöht bei entsprechender Abnahme der Flüssigkeit. Bei der Taupunkttemperatur $t_\tau = 18\,°C$ ist die gesamte Flüssigkeit verdampft, das Gemisch homogen und nebelfrei. Beim Endzustand 2 bei $t_2 = 20\,°C$ ist $x_{s2} = 14{,}9$ g/kg, $(h_{1+xf})_2 = 53{,}3$ kJ/kg, $\varphi_{f2} = 0{,}88$ und $q_{12} = 23{,}5$ kJ/kg (Strecke $\overline{12}$). Der Sättigungsgrad $\chi_2 = x_f/x_{s2} = 0{,}879$ unterscheidet sich kaum von der abgelesenen relativen Luftfeuchtigkeit φ_{f2}.

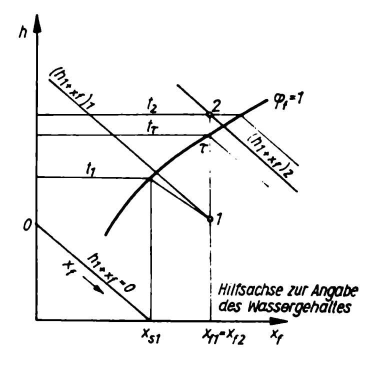


Bild 31. Isobares Erwärmen von Nebelluft ($t > 0\,°C$), dargestellt im MOLLIER-h,x_f-Diagramm

Bei Verwendung der Tabelle 21 ist auch die Berechnung einfach. Aus ihr werden für 10 °C der dampfförmige Wasseranteil im Zustand 1 $x_{s1} = 7{,}73$ g/kg; für $x_{f1} = x_{s\tau} = 13{,}10$ g/kg die Taupunkttemperatur $t_\tau = 18\,°C$ und $x_{s2} = 14{,}88$ g/kg, $p_{s2} = 2{,}339$ kPa für Zustand 2 entnommen. Die je Kilogramm Trockenluft verdampfte Wassermenge ist $(x_{f1} - x_{s1}) = 5{,}37$ g. Nach Gl. (244), in die die x_f-Werte in kg/kg eingesetzt werden müssen, ergeben sich die *spezifische Enthalpie* für Zustand 1:

$$(h_{1+xf})_1 = \{[(1{,}00 + 0{,}00773 \cdot 1{,}86 + 0{,}00537 \cdot 4{,}19)] \cdot 10 + 0{,}00773 \cdot 2500\}\ \text{kJ/kg} = 29{,}69\ \text{kJ/kg}$$

und für Zustand 2 nach Gl. (242):

$$(h_{1+xf})_2 = [(1{,}00 + 0{,}0131 \cdot 1{,}86) \cdot 20 + 0{,}0131 \cdot 2500]\ \text{kJ/kg} = 53{,}24\ \text{kJ/kg}$$

sowie der *Sättigungsgrad:*

$$\chi_2 = x_f/x_{s2} = 0{,}880.$$

Der Teildruck des Dampfes nach Gl. (240) beträgt:

$$p_{D2} = x_{f2} \cdot p/(0{,}622 + x_{f2}) = (0{,}0131 \cdot 100000/0{,}635)\ \text{Pa} = 2{,}063\ \text{kPa}$$

und die *relative Luftfeuchtigkeit:*

$$\varphi_{f2} = p_{D2}/p_{s2} = 2{,}063/2{,}339 = 0{,}882.$$

Die für $(1 + x_f)$ kg feuchte Luft erforderliche spezifische Wärmemenge wird nach Gl. (246):

$$q_{12} = (h_{1+xf})_2 - (h_{1+xf})_1 = 53{,}24\ \text{kJ/kg} - 29{,}69\ \text{kJ/kg} = 23{,}55\ \text{kJ/kg}.$$

Da die Wärme zuzuführen ist, ergibt sich ein positiver Wert.

2. *Adiabate Mischung zweier feuchter Luftmassen.* Die Masse m_{L1} der trockenen Luft mit $(x_{f1}m_{L1})$ Wassergehalt und der Temperatur t_1 wird gemischt mit der Masse m_{L2} trockener Luft mit $(x_{f2}m_{L2})$ Wassergehalt und der Temperatur t_2. Es ist ein *irreversibler Vorgang,* bei dem sich keine Zwischenzustände angeben lassen. Der Prozeß wird im MOLLIER-h,x_f-Diagramm (Bild 32) dargestellt. Aus der *Wasserbilanz* ergibt sich für den Mischpunkt m:

$$x_{fm} = (m_{L1}x_{f1} + m_{L2}x_{f2})/(m_{L1} + m_{L2}) \tag{247}$$

oder

$$m_{L1}(x_{f1} - x_{fm}) = m_{L2}(x_{fm} - x_{f2}) \tag{248}$$

Nach Bild 32 wird:

$$m_{L1}/m_{L2} = (x_{fm} - x_{f2})/(x_{f1} - x_{fm}) = l_2/l_1 \tag{249}$$

Im MOLLIER-h,x_f-Diagramm liegt der Mischpunkt m auf der Verbindungsgeraden der beiden Zustandspunkte, die im umgekehrten Verhältnis der beiden trockenen Luftmassen zu teilen ist. Wie aus Bild 32 zu ersehen ist, läßt sich damit die Luftmasse m_{L2} entnebeln. Für die Enthalpie gilt entsprechend:

$$(h_{1+xf})_m = [m_{L1}(h_{1+xf})_1 + m_{L2}(h_{1+xf})_2]/(m_{L1} + m_{L2}) \quad (250)$$

Je nach der Lage des Punkts m läßt sich die Mischungstemperatur t_m mit den Gln. (242), (244), (245) berechnen.

Beispiel. Bei konstantem Gesamtdruck $p = 100$ kPa soll eine nebelhaltige Luftmasse mit $m_{L1} = 3{,}2$ kg Trockenluft, $t_1 = 4\,°C$, $x_{f1} = 5{,}5$ g/kg, $(h_{1+xf})_1 = 16{,}83$ kJ/kg durch Mischen mit der Luftmasse mit $m_{L2} = 6{,}4$ kg Trockenluft, $t_2 = 25\,°C$; $\varphi_{f2} = 0{,}5$; $x_{f2} = 10{,}0$ g/kg; $(h_{1+xf})_2 = 50{,}62$ kJ/kg entnebelt werden.
In Bild 32 lassen sich die Punkte 1 und 2 einzeichnen, Punkt m nach Gl. (249) ermitteln und x_{fm}, $(h_{1+xf})_m$, t_m und φ_{fm} ablesen. Die Berechnung ergibt mit den Gln. (247) und (250):

$x_{fm} = [(3{,}2 \cdot 5{,}5 + 6{,}4 \cdot 10{,}0)/(3{,}2 + 6{,}4)]$ g/kg $= 8{,}50$ g/kg Trockenluft,

$(h_{1+xf})_m = [(3{,}2 \cdot 16{,}83 + 6{,}4 \cdot 50{,}62)/(3{,}2 + 6{,}4)]$ kJ/kg $= 39{,}36$ kJ/kg Trockenluft.

Die *Temperatur* wird nach Gl. (242) berechnet, wobei der Wert für x_{fm} in kg/kg Trockenluft einzusetzen ist:

$t_m = [(h_{1+xf})_m - x_{fm}r_0]/(c_{pL} + x_{fm}c_{pD}) = [(39{,}36 - 0{,}0085 \cdot 2500)/(1{,}00 + 0{,}0085 \cdot 1{,}86)]\,°C = 17{,}8\,°C.$

Aus Gl. (240) errechnet sich der *Teildruck des Wasserdampfs:*

$p_{Dm} = 0{,}0085 \cdot 100\,000/0{,}6305$ Pa $= 1{,}348$ kPa und mit $p_{sm} = 2{,}046$ kPa bei $17{,}8\,°C$: $\varphi_{fm} = p_{Dm}/p_{sm} = 1{,}348/2{,}046 = 0{,}659$.

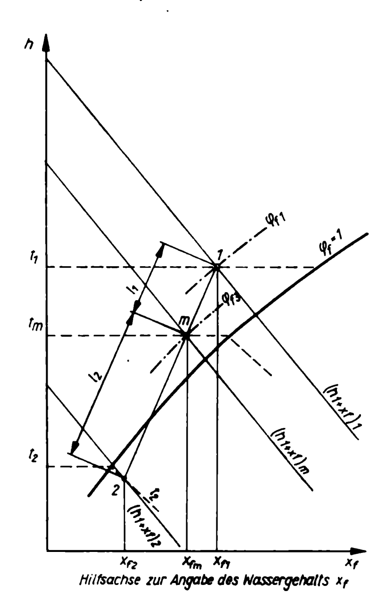


Bild 32. Mischung zweier Luftmassen, dargestellt im MOLLIER-h,x_f-Diagramm

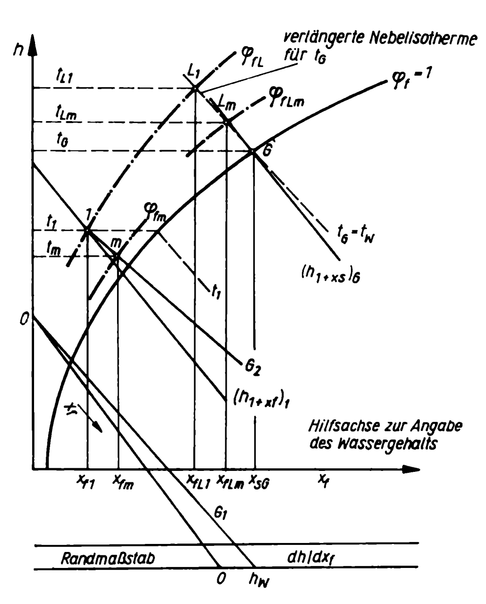


Bild 33. Adiabates Befeuchten feuchter Luft mit Wasser, dargestellt im MOLLIER-h,x_f-Diagramm

3. *Adiabates Befeuchten feuchter Luft mit flüssigem Wasser oder Wasserdampf.* Der Masse $(m_L + x_{f1}m_L)$ feuchter Luft mit der Temperatur t_1 und der spezifischen Enthalpie $(h_{1+xf})_1$ wird die Wassermasse m_W mit der spezifischen Enthalpie h_W zugesetzt. Nach der Mischung sind:

$$x_{fm} = (m_L x_{f1} + m_W)/m_L \quad (251)$$

oder: $$x_{fm} - x_{f1} = m_W/m_L \quad (252)$$

$$(h_{1+xf})_m = [m_L(h_{1+xf})_1 + m_W h_W]/m_L \quad (253)$$

oder: $$(h_{1+xf})_m - (h_1 + x_f)_1 = h_W m_W/m_L \quad (254)$$

und damit:

$$[(h_{1+xf})_m - (h_{1+xf})_1]/(x_{fm} - x_{f1}) = h_W \quad (255)$$

Auf dem Randmaßstab für dh/dx_f des MOLLIER-h,x_f-Diagramms wird der Wert für h_W (beim Befeuchten mit Wasserdampf h'' nach Tabelle 16) mit dem Koordinatennullpunkt O verbunden (Gerade G_1 im Bild 33) und zu der Verbindungsgeraden durch den Zustandspunkt 1, der durch x_{f1} und t_1 oder $(h_{1+xf})_1$ bestimmt ist, die Parallele G_2 (Bild 33) gezogen. Auf dieser Parallelen liegt bei x_{fm} nach Gl. (251) der Mischpunkt m mit der Temperatur $t_m < t_1$.

4. *Adiabate Verdunstung.* Der Vorgang wird für ein wärmedichtes waagerechtes Rohr, das nur teilweise mit Wasser (Temperatur im Eintrittsquerschnitt t_{W1}) gefüllt ist, behandelt. Durch das Rohr strömt stationär ein feuchter ungesättigter Luftstrom $\dot{m}_L(1 + x_{fL1})$ mit dem Druck p und einer Eintrittstemperatur $t_{L1} > t_{W1}$, bei der die Abkühlung der Luft die zur Verdunstung des Wassers erforderliche Wärme aufbringt, so daß die Wassertemperatur konstant bleibt. Da die Verdunstung jedoch ausschließlich an der Wasseroberfläche erfolgt, kühlt sich zunächst nur dort der Luftstrom ab und erst, wenn durch konvektive Wärmeübertragung die Wärme vom gesamten Luftstrom dorthin gelangte, ist *thermisches Gleichgewicht* vorhanden. Dann lassen sich die Temperatur t_{Lm} und Enthalpie h_{Lm} nach Gl. (242) bestimmen.

Der Vorgang ist ein *Befeuchten feuchter Luft mit Wasser* konstanter Temperatur, und damit gelten die Gln. (251), (253), (255). Im MOLLIER-h,x_f-Diagramm (Bild 33) müssen die Punkte L_1 und L_m (bei beliebigem x_{fLm}) auf der verlängerten Nebelisotherme durch t_{W1} liegen. Die niedrigste erreichbare Lufttemperatur bei $\varphi_1 = 1$ wird als *Kühlgrenztemperatur* t_G bezeichnet. Der gesättigte feuchte Luftstrom $\dot{m}_L(1 + x_{sG})$ ist bei entsprechender Abnahme des Wasserstroms größer als im Eintrittsquerschnitt.
Tatsächlich kann der Eintrittszustand des Luftstroms beim adiabaten Verdunsten im gesamten ungesättigten Bereich liegen. Ist die Lufttemperatur niedriger als hier behandelt, so reicht die vom Luftstrom abgegebene Wärme nicht aus, der Rest muß vom Wasser abgegeben und durch konvektive Wärmeübertragung an die Wasseroberfläche transportiert werden, d. h., die Wassertemperatur t_{W1} nimmt ab. In Tabelle 22 ist bei konstanter Kühlgrenztemperatur t_G für alle durch die Lufttemperatur t_{L1} und den Dampfstrom $x_{fL1}\dot{m}_L$ festgelegten Eintrittszustände des feuchten Luftstroms die Richtung der Temperaturänderungen des Luft- und Wasserstroms in allen vier möglichen Bereichen angegeben.

Tabelle 22. Richtung der Temperaturänderung des Luft- und Wasserstroms bei adiabatem Verdunsten mit konstanter Kühlgrenztemperatur t_G. Eintrittszustand des feuchten Luftstroms t_{L1} und x_{fL1}

Bereich	t_{L1}	x_{fL1}	Luftstrom	Wasserstrom	Vorgang
1	$t_{L1} < t_G$	$x_{fL1} < x_{sG}$	Erwärmen	Abkühlen	Verdunstung
2	$t_{L1} > t_G$	$x_{fL1} < x_{sG}$	Abkühlen	Abkühlen	Verdunstung
3	$t_{L1} > t_G$	$x_{fL1} < x_{sG}$	Abkühlen	Erwärmen	Verdunstung
4	$t_{L1} > t_G$	$x_{fL1} > x_{sG}$	Abkühlen	Erwärmen	Austauen

Im ersten Bereich ist $t_{L1} < t_G$, der Luftstrom läßt sich bei entsprechender Abkühlung des Wasserstroms bis auf t_G erwärmen. In allen anderen Bereichen kann der Luftstrom bis t_G abgekühlt werden, wobei der Wasserstrom sich nur im zweiten Bereich abkühlt, während er sich im dritten und vierten erwärmt, weil die vom Luftstrom abgegebene Wärme größer als die zur Verdunstung des Wassers erforderliche ist oder im vierten Bereich sich flüssiges Wasser aus dem Dampfstrom ausscheidet. Dieser Vorgang wird als *Austauen* bezeichnet.
Nichtadiabate Verdunstungsvorgänge sind in [1] behandelt. Die Abkühlung der Luft bis auf die Kühlgrenztemperatur t_G durch Wasserverdunstung wird beim ASSMANN*schen Aspirationspsychrometer* zum Ermitteln der relativen Luftfeuchtigkeit φ_f benutzt. Von zwei strahlungsgeschützten Thermometern hat der Fühler des einen einen Stoffbezug, der mit destilliertem Wasser dauernd feuchtgehalten wird. Wenn an

beiden Thermometern die feuchte Luft mit etwa 3 m/s vorbeistreicht, zeigt das feuchte Thermometer für Temperaturen zwischen 0 °C und 40 °C die Kühlgrenztemperatur t_G an, zu der der Sättigungsdruck p_{sG} (Tabelle 21) gehört, während am trockenen Thermometer die Lufttemperatur t_L abzulesen ist.
Aus den Gln. (255) und (242) ergibt sich der Wassergehalt x_{fL} je Kilogramm trockener Luft:

$$x_{fL} = \frac{(h_{1+xs})_G - c_{pL}t_L - c_{pW}x_{sG}t_G}{r_0 + c_{pD}t_L - c_{pW}t_G} \tag{256}$$

und mit Gl. (240) beim Gesamtdruck p der Teildruck p_D des Wasserdampfs. Dieser läßt sich auch näherungsweise aus der *Formel von* Sprung ermitteln, in die die Drücke in kPa eingesetzt werden:

$$p_D = p_{sG} - [C_s p(t_L - t_G)/1000] \tag{257}$$

C_s Psychrometerbeiwert bei Lufttemperatur t_{L1} am trockenen Thermometer

$C_s = 0{,}587\ \mathrm{K^{-1}}$ (bei $t_{L1} = 0\ °C$, Eis),

$C_s = 0{,}660\ \mathrm{K^{-1}}$ (bei $t_{L1} = 0\ °C$, Wasser),

$C_s = 0{,}676\ \mathrm{K^{-1}}$ (bei $t_{L1} = 20\ °C$),

$C_s = 0{,}696\ \mathrm{K^{-1}}$ (bei $t_{L1} = 40\ °C$).

Die relative Luftfeuchtigkeit wird $\varphi_f = p_D/p_{sL}$.

Beispiel. Bei 100 kPa Gesamtdruck werden am trockenen Thermometer eines Psychrometers die Lufttemperatur $t_L = 30\ °C$ und am feuchten Thermometer $t_G = 20\ °C$ gemessen. Die relative Luftfeuchtigkeit φ_f ist nach der Formel von Sprung, mit dem Mollier-h,x_f-Diagramm und mit Gl. (256) zu ermitteln.
Aus Tabelle 21 werden für 100 kPa Gesamtdruck und 20 °C entnommen:

$p_{sG} = 2{,}339$ kPa; $x_{sG} = 14{,}88$ g/kg; $(h_{1+xs})_G = 57{,}88$ kJ/kg und für 30 °C $p_s = 4{,}243$ kPa. Nach der Formel von Sprung wird mit $C_s = 0{,}684\ \mathrm{K^{-1}}$:

$p_D = 2{,}339\ \mathrm{kPa} - 0{,}684\ \mathrm{kPa} = 1{,}655\ \mathrm{kPa}$, $\varphi_f = 1{,}655/4{,}243 = 0{,}390$.

Aus dem Mollier-h,x_f-Diagramm ergibt sich auf der verlängerten Nebelisotherme für 20 °C beim Schnittpunkt mit der Isotherme von 30 °C: $x_{fL} = 10{,}7$ g/kg; $(h_{1+xf})_L = 57{,}3$ kJ/kg und $\varphi_{fL} = 0{,}398$. Nach Gl. (256) wird

$$x_{fL} = \frac{(h_{1+xs})_G - c_{pL}t_L - c_{pW}x_{sG}t_G}{r_0 + c_{pD}t_L - c_{pW}t_G} = \frac{57{,}88 - 1{,}00 \cdot 30 - 4{,}19 \cdot 0{,}01488 \cdot 20}{2500 + 1{,}86 \cdot 30 - 4{,}19 \cdot 20} = 0{,}01077\ \mathrm{kg/kg}$$

$x_{fL} = 10{,}77$ g/kg Trockenluft.

Der *Teildruck* p_D des Wasserdampfs ist nach Gl. (240): $p_{DL} = x_{fL}p/(0{,}622 + x_{fL}) = 0{,}01077 \cdot 100/0{,}63277\ \mathrm{kPa} = 1{,}70\ \mathrm{kPa}$ und damit die *relative Luftfeuchtigkeit:* $\varphi_{fL} = p_{DL}/p_{sL} = 1{,}70/4{,}243 = 0{,}401$.
Zum Vergleich mit den Werten des Mollier-Diagramms soll noch die Enthalpie $(h_{1+xf})_L$ nach Gl. (242) berechnet werden:

$$\begin{aligned}(h_{1+xf})_L &= (c_{pL} + x_{fL}c_{pD})\,t_L + x_{fL}r_0 = [(1{,}00 + 0{,}01077 \cdot 1{,}86) \cdot 30 + 0{,}01077 \cdot 2500]\ \mathrm{kJ/kg} \\ &= 57{,}52\ \mathrm{kJ/kg}.\end{aligned}$$

7. Stationäre Strömungen kompressibler Stoffe und thermische Vorgänge

7.1. Grundlagen

Bei diesen Strömungen hat das Gas oder der Dampf in einem beliebigen Querschnitt A eines Kanals den durch Temperatur T, Druck p, spezifisches Volumen v, spezifische Enthalpie h, spezifische Entropie s und mittlere äußere Strömungsgeschwindigkeit c festgelegten Zustand. Durch jeden Querschnitt fließt der gleiche Massestrom $\dot{m}$, während sich der Volumenstrom $\dot{V}$ ändert. Nach der *Kontinuitätsgleichung* gilt:

$$\dot{V} = \dot{m}v = Ac \tag{258}$$

oder:
$$\mathrm{d}A/A = \mathrm{d}v/v - \mathrm{d}c/c \tag{259}$$

1. Für alle Strömungen gelten die Gln. (43) bis (50). Bei irreversiblen Strömungen erhöht die spezifische Reibungsarbeit w_R, die durch die Reibung der Teilchen an der Wand und unter-

einander bedingt ist, die spezifische Enthalpie h und die spezifische Entropie s. Entsprechend vermindert sich nach den Gln. (45) bis (47) die Strömungsgeschwindigkeit c_2.

2. *Adiabate Expansionsströmung* ist im p,v-Diagramm (Bild 34) und im MOLLIER-h,s-Diagramm (Bild 35), die *adiabate Kompressionsströmung* im MOLLIER-h,s-Diagramm (Bild 36) dargestellt. Obgleich es irreversible Strömungen sind, lassen sie sich häufig durch Polytropen nach Gl. (138) mit $n < \varkappa$ bei Expansionsströmungen und $n > \varkappa$ bei Kompressionsströmungen annähern.

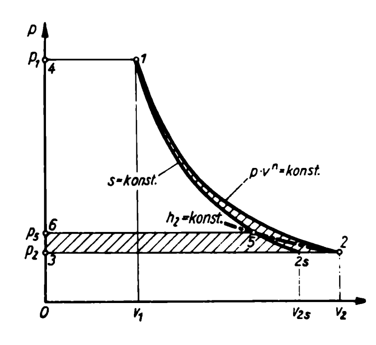


Bild 34. Expansionsströmung, dargestellt im p,v-Diagramm

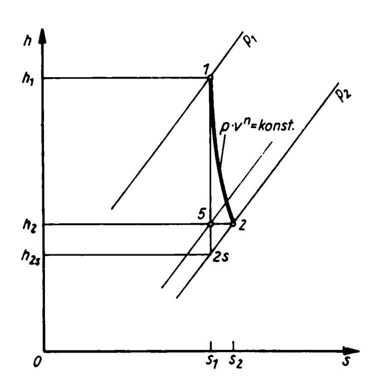


Bild 35. Expansionsströmung, dargestellt im MOLLIER-h,s-Diagramm

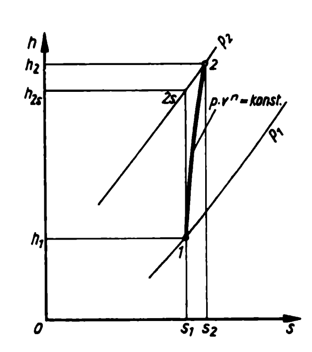


Bild 36. Kompressionsströmung, dargestellt im MOLLIER-h,s-Diagramm

Da die Fläche 4—1—2—3 im Bild 34 die technische Arbeit $w_{t12} = \int_{p_1}^{p_2} v\,dp$ (negativer Wert) darstellt, gilt:

$$\left| \int_{p_1}^{p_2} v\,dp \right| = g(z_2 - z_1) + (c_2^2 - c_1^2)/2 + w_R \tag{260}$$

Die Änderung der potentiellen Energie $g(z_2 - z_1)$ und die kinetische Energie im Eintrittsquerschnitt $c_1^2/2$ sind bei Expansionsströmungen meist belanglos klein. Unter den angegebenen Voraussetzungen ergibt sich aus Gl. (47) die *Austrittsgeschwindigkeit:*

$$c_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)} \tag{261}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (258) kann bei vorgeschriebenem Massestrom $\dot{m}$ der erforderliche Querschnitt A in Abhängigkeit vom Druck p berechnet werden.

Die in *Strömungsmaschinen* auftretenden Vorgänge lassen sich als reibungsbehaftete Strömung ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung behandeln. Bei der Expansionsströmung (beschleunigte Strömung der Dampf- und Gasturbinen) wird zunächst durch Düsen oder feststehende Leitschaufelkränze die äußere Geschwindigkeit des Stroms erhöht und dieser dann durch bewegte Laufschaufelkränze zu einer Richtungs-

änderung gezwungen, wobei der Arbeitsstoff mechanische Arbeit an die Laufschaufeln abgibt und seine äußere Strömungsgeschwindigkeit vermindert. Bei der *Gleichdruckturbine*, bei der vor und hinter den Laufschaufeln der Gasdruck unverändert ist, ergibt sich der beste Gütegrad, wenn die Schaufelgeschwindigkeit etwa gleich der halben Umfangskomponente der absoluten Strömungsgeschwindigkeit bei Eintritt in das Laufrad ist. Da jedoch die Schaufelgeschwindigkeit mit Rücksicht auf die durch die Fliehkräfte verursachten Beanspruchungen begrenzt ist, muß man zur Erzielung bestmöglicher Wirkungsgrade die Turbinen *mehr-* oder *vielstufig* ausführen.

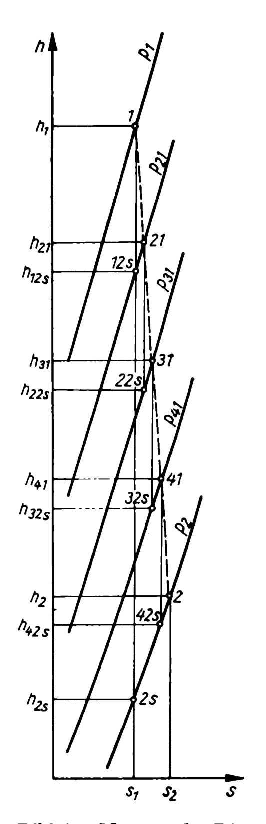


Bild 37. MOLLIER-h,s-Diagramm einer vierstufigen Dampfturbine mit Verlusten

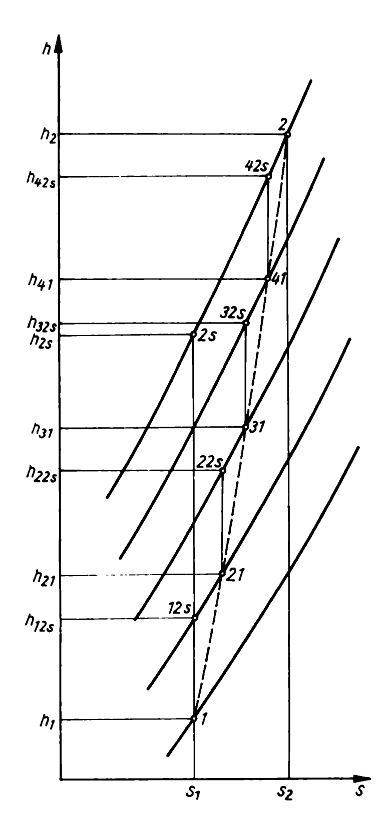


Bild 38. MOLLIER-h,s-Diagramm eines vierstufigen Kreiselverdichters ohne Zwischenkühlung mit Verlusten

Der Verlauf der Zustandsänderungen in einer *vierstufigen Dampfturbine* mit Verlusten ist im MOLLIER-h,s-Diagramm (Bild 37) dargestellt. Die Anfangsdrücke der 2., 3. und 4. Stufe p_{21}, p_{31} und p_{41} wurden so gewählt, daß der isentrope Enthalpieunterschied jeder Stufe der gleiche ist, d. h. $(h_1 - h_{12s}) = (h_{21} - h_{22s}) = (h_{31} - h_{32s}) = (h_{41} - h_{42s})$ (Bild 37). Da bei Dampf oder realem Gas die Isobaren nicht wie bei idealem Gas im MOLLIER-h,s-Diagramm äquidistante Kurven sind, ergibt sich ein geringer Rückgewinn der Verluste der ersten bis dritten Stufe in der zweiten bis vierten Stufe. Die Summe der isentropen Enthalpieunterschiede $4(h_1 - h_{12s})$ wird größer als der gesamte isentrope Enthalpieunterschied $(h_1 - h_{2s})$ der Turbine. Dadurch ist der Gütegrad der gesamten Turbine $(h_1 - h_2)/(h_1 - h_{2s})$ etwas besser als der Gütegrad der einzelnen Stufen $(h_1 - h_{21})/(h_1 - h_{12s})$.

Moderne *Dampfturbinen* arbeiten nicht als Gleichdruckturbinen. Vom Gesamtenthalpieunterschied einer Stufe nützt man in den Leitschaufeln mindestens 50% zur Erhöhung der äußeren Strömungsgeschwindigkeit aus, so daß der Dampfdruck auch im Laufschaufelkanal abnimmt (*Überdruckturbine*).

Bild 38 zeigt den Verlauf der Zustandsänderungen in einem *vierstufigen Kreiselverdichter* ohne Zwischenkühlung mit Verlusten. Bei gleichem isentropem Enthalpieunterschied jeder Stufe $(h_{12s} - h_1) = (h_{22s} - h_{21}) = (h_{32s} - h_{31}) = (h_{42s} - h_{41})$ und gleichem isentropem Innenwirkungsgrad η_{si} der Einzelstufen

$(h_{12s} - h_1)/(h_{21} - h_1)$ wird der isentrope Innenwirkungsgrad des Verdichters $(h_{2s} - h_1)/(h_2 - h_1)$ schlechter als der der Einzelstufen, da $4(h_{12s} - h_1) > (h_2 - h_1)$.

3. Bei reibungsfreier, adiabater (*isentroper*) *Expansionsströmung* (Bilder 34, 35) ergibt sich nach Gl. (261) die Austrittsgeschwindigkeit:

$$c_{2s} = \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} \tag{262}$$

Die durch die spezifische Reibungsarbeit w_R bedingte Enthalpieerhöhung:

$$(c_{2s}^2 - c_2^2)/2 = h_2 - h_{2s} \tag{263}$$

läßt sich in Bild 34 als Fläche eintragen. Dazu wird durch 2 eine Isenthalpie h_2 = konst. (nur bei idealem Gas zugleich Isotherme) bis zum Schnittpunkt 5 beim Druck p_5 (Bild 35) mit der Isentrope durch 1 gelegt. Es ist:

$$h_2 - h_{2s} = -w_{t52s} = -\int_{p_2}^{p_5} v\,\mathrm{d}p \tag{264}$$

(dargestellt durch die Fläche 6—5—2s—3). Sie ist etwas kleiner als die Fläche der spezifischen Reibungsarbeit w_R, bei der sich die spezifische Entropie von $s_5 = s_1$ auf s_2 erhöht.

7.2. Adiabate Strömung idealer Gase mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten durch Düsen

7.2.1. Isentrope Strömung

Das Gas habe im Behälter (Bild 39a) die Geschwindigkeit $c_1 = 0$ und ströme isentrop durch eine Düse in einen Raum mit kleinerem Druck p_u. Im Austrittsquerschnitt der Düse A_2 erreicht es den Druck p_u, die Temperatur T_{2s}, das spezifische Volumen v_{2s}, die spezifische Enthalpie h_{2s} und die Strömungsgeschwindigkeit c_{2s}. Die Werte T_{2s} und v_{2s} lassen sich nach den Gln. (136) und (138) berechnen. Nach den Gln. (140) und (262) ist:

$$c_{2s} = \sqrt{2\varkappa p_1 v_1[1 - (p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa}]/(\varkappa - 1)} \tag{265}$$

und nach Gl. (258) der Austrittsquerschnitt:

$$A_2 = \dot{m}_s v_{2s}/c_{2s} \tag{266}$$

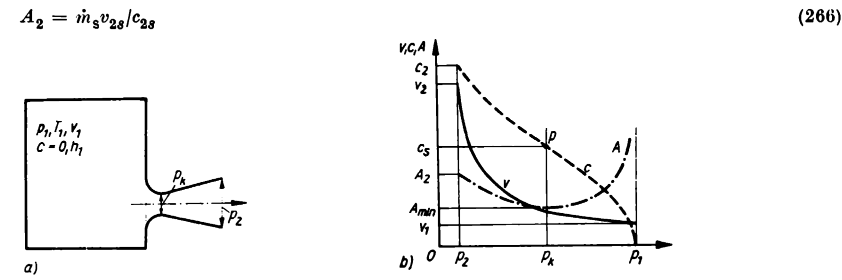


Bild 39. Isentroper Ausfluß aus einem Behälter durch eine erweiterte Düse. a) Behälter und Düse; b) Abhängigkeit des spezifischen Volumens v, der Strömungsgeschwindigkeit c und des Querschnitts A vom statischen Druck p

Druckverlauf. Für $p_2 \to 0$ (absolutes Vakuum) werden $v_{2s} \to \infty$, $T_{2s} \to 0$ K, $A_2 \to \infty$ und

$$c_{2s\,\max} = \sqrt{2\varkappa p_1 v_1/(\varkappa - 1)} \tag{267}$$

Für beliebige Zwischendrücke p können entsprechend die zugehörigen Werte für v, T, A, c berechnet werden (Bild 39b). Da bei niedrigen Drücken das spezifische Volumen v stärker als die Strömungsgeschwindigkeit c zunimmt, ergibt sich bei einem bestimmten Druck p_k ein Kleinstwert $A_{\min}$, für den:

$$\frac{\mathrm{d}A_{\min}}{A_{\min}} = \frac{\mathrm{d}v_k}{v_k} - \frac{\mathrm{d}c_S}{c_S} = 0 \tag{268}$$

und das *kritische* oder LAVAL-*Druckverhältnis:*

$$p_k/p_1 = [2/(\varkappa + 1)]^{\varkappa/(\varkappa-1)} \tag{269}$$

ist und die c,p-Kurve einen Wendepunkt P (Bild 39b) hat.

Geschwindigkeiten. Beim LAVAL-Druckverhältnis wird die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit c_S für den in diesem Querschnitt herrschenden Zustand:

$$c_S = \sqrt{\varkappa p_k v_k} = \sqrt{\varkappa R T_k} = \sqrt{\frac{2\varkappa p_1 v_1}{\varkappa + 1}} = \sqrt{\frac{2\varkappa R T_1}{\varkappa + 1}} \tag{270}$$

Zweckmäßigerweise bezieht man die Geschwindigkeit c_{2s} im Austrittsquerschnitt, Gl. (265), auf die Schallgeschwindigkeit c_S, Gl. (270). Das Verhältnis wird:

$$\frac{c_{2s}}{c_S} = \frac{\sqrt{2\varkappa p_1 v_1 [1 - (p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa}]/(\varkappa - 1)}}{\sqrt{2\varkappa p_1 v_1/(\varkappa + 1)}} = \sqrt{\frac{(\varkappa + 1)\,[1 - (p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa}]}{\varkappa - 1}} \tag{271}$$

Der Wert c_{2s}/c_S hängt nicht vom spezifischen Volumen oder der Dichte des Gases ab. Er ist für verschiedene $\varkappa$-Werte und Druckverhältnisse p_2/p_1 zwischen 0 und 0,50 in Tabelle 23 angegeben. Das Verhältnis der Höchstgeschwindigkeit $c_{2s\,max}$ nach Gl. (267) zur Schallgeschwindigkeit c_S hängt nur von $\varkappa$ ab (Tab. 24):

$$c_{2s\,max}/c_S = \sqrt{(\varkappa + 1)/(\varkappa - 1)} \tag{272}$$

Tabelle 23. Geschwindigkeitsverhältnis c_{2s}/c_S und Querschnittsverhältnis A_2/A_{min} für $\varkappa = 1{,}4$; 1,3 und 1,135 bei Druckverhältnissen $p_2/p_1 = 0 \cdots 0{,}5$

p_2/p_1	$\varkappa = 1{,}40$		$\varkappa = 1{,}30$		$\varkappa = 1{,}135$	
	c_{2s}/c_S	A_2/A_{min}	c_{2s}/c_S	A_2/A_{min}	c_{2s}/c_S	A_2/A_{min}
0	2,45	∞	2,77	∞	3,98	∞
0,01	2,10	8,13	2,24	9,71	2,58	13,80
0,02	2,01	5,16	2,14	5,97	2,43	7,98
0,05	1,86	2,90	1,96	3,22	2,18	3,97
0,10	1,72	1,94	1,78	2,08	1,92	2,44
0,25	1,40	1,21	1,45	1,26	1,55	1,35
0,50	1,04	1,005	1,07	1,01	1,12	1,02

Tabelle 24. Kritisches Druckverhältnis p_k/p_1, Verhältnis der Höchstgeschwindigkeit $c_{2s\,max}$ zur Schallgeschwindigkeit c_S und Größtwert $\psi_{s\,max}$ der Ausflußfunktion für verschiedene $\varkappa$-Werte

$\varkappa$	p_k/p_1	$c_{2s\,max}/c_S$	$\psi_{s\,max}$
1,1	0,585	4,58	0,444
1,135	0,577	3,98	0,450
1,15	0,574	3,79	0,452
1,20	0,564	3,32	0,459
1,25	0,555	3,00	0,465
1,30	0,546	2,77	0,472
1,35	0,537	2,59	0,478
1,40	0,528	2,45	0,484

Düsenverengung und Massestrom. Für $c_{2s}/c_S < 1$ verengt sich die Düse in Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Die Schallgeschwindigkeit läßt sich nur mit einer erweiterten Düse überschreiten, während sich im Endquerschnitt A_2 einer nicht erweiterten Düse beim Außendruck $p_u < p_k$ der Druck p_k einstellt und erst hinter dem Austritt der Strahl mit starken *Schallschwingungen* (*Geräusch*) irreversibel expandiert. Ist dagegen $p_2 < p_u$, so ergibt sich ein *Verdichtungsstoß*, bei dem irreversibel die Geschwindigkeit auf Unterschallgeschwindigkeit sinkt.

1. Der ausfließende *Massestrom* $\dot{m}_s$ wird bei einer Düse, in der nicht die Schallgeschwindigkeit überschritten wird ($p_2 \geqq p_k$):

$$\dot{m}_s = A_2 \sqrt{\frac{2\varkappa p_1}{(\varkappa - 1) v_1} [(p_2/p_1)^{2/\varkappa} - (p_2/p_1)^{(\varkappa+1)/\varkappa}]} \tag{273}$$

$$\dot{m}_s = A_2 \psi_s \sqrt{2p_1/v_1} = A_2 \psi_s p_1 \sqrt{2/RT_1} \tag{274}$$

mit der *Ausflußfunktion* ψ_s, die nur vom Druckverhältnis p_2/p_1 und dem *Isentropenexponenten* $\varkappa$ abhängt:

$$\psi_s = \sqrt{\varkappa[(p_2/p_1)^{2/\varkappa} - (p_2/p_1)^{(\varkappa+1)/\varkappa}]/(\varkappa - 1)} \tag{275}$$

Der Größtwert $\psi_{s\,max}$ (Tabelle 24, Bild 40) wird beim kritischen Druckverhältnis p_k/p_1 erreicht. Mit Gl. (269) wird:

$$\psi_{s\,max} = [2/(\varkappa + 1)]^{1/(\varkappa-1)} \sqrt{\varkappa/(\varkappa + 1)} \tag{276}$$

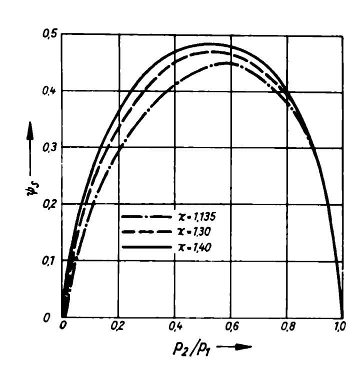


Bild 40. Ausflußfunktion ψ_s

2. Man bezieht den *Massestrom* $\dot{m}_s$ bei einer erweiterten Düse, in deren Kleinstquerschnitt A_{min} die Schallgeschwindigkeit erreicht wird, auf A_{min}, weil er nicht von der Strömung hinter dem engsten Querschnitt abhängt:

$$\dot{m}_s = A_{min} \psi_{s\,max} \sqrt{2p_1/v_1} = A_{min} \psi_{s\,max} p_1 \sqrt{2/RT_1} \tag{277}$$

Der *Austrittsquerschnitt* A_2 wird:

$$A_2 = A_{min} \psi_{s\,max}/\psi_s \tag{278}$$

In Tabelle 23 ist für verschiedene $\varkappa$-Werte und Druckverhältnisse p_2/p_1 zwischen 0 und 0,5 das Verhältnis A_2/A_{min} einer erweiterten Düse bei isentroper Strömung nach den Gln. (275), (276), (278) angegeben.

7.2.2. Strömung mit Reibung

Infolge Reibung, die verschieden berücksichtigt wird, ist die Austrittsgeschwindigkeit $c_2 < c_{2s}$. Der *Geschwindigkeitsbeiwert* $\varphi = c_2/c_{2s}$ liegt bei gut abgerundeten Düsen zwischen 0,98 und 0,95, bei Strahlapparaten zwischen 0,98 und 0,90 (je nach umgesetztem Enthalpieunterschied $(h_1 - h_{2s})$ und Oberflächenrauhigkeit der Düse). Der *Gütegrad der Umsetzung* in kinetische Energie beträgt:

$$\eta_g = (h_1 - h_2)/(h_1 - h_{2s}) = (c_2/c_{2s})^2 = \varphi^2 \tag{279}$$

die *Verlustzahl:*

$$\xi = 1 - (h_1 - h_2)/(h_1 - h_{2s}) = 1 - \eta_g = 1 - \varphi^2 \tag{280}$$

Ändert sich das spezifische Volumen bei Druckänderung nach der Polytropengleichung (138) mit dem Exponenten $n < \varkappa$, so gilt:

$$c_2 = \sqrt{2\varkappa p_1 v_1[1 - (p_2/p_1)^{(n-1)/n}]/(\varkappa - 1)} \tag{281}$$



und zwischen dem Geschwindigkeitsbeiwert φ und dem Exponenten n ergibt sich

allgemein: $$\varphi^2 = \frac{1 - (p_2/p_1)^{(n-1)/n}}{1 - (p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa}}$$ *bei* $p_2/p_1 \to 1$: $$\varphi^2 \to \frac{(n-1)\,\varkappa}{(\varkappa-1)\,n} \tag{282}$$

Düsenverengung und Massestrom. Im kleinsten Querschnitt A_{min} werden die Zustandsgrößen p', v' erreicht. Das Druckverhältnis ist größer als bei isentroper Strömung:

$$p'/p_1 = [2/(n+1)]^{n/(n-1)} \tag{283}$$

und die Geschwindigkeit c' kleiner als die Schallgeschwindigkeit c_S:

$$c' = \sqrt{\frac{\varkappa(n-1)\,p'v'}{(\varkappa-1)}} = \sqrt{2\,\frac{\varkappa}{(n+1)}\,\frac{(n-1)}{(\varkappa-1)}\,p_1v_1} \tag{284}$$

Der ausfließende Massestrom $\dot{m}$ wird bei $p_u \gtreqless p'$:

$$\dot{m} = \mu\varphi\dot{m}_s = \mu A_2 \sqrt{\frac{2\varkappa p_1}{(\varkappa-1)\,v_1}\,[(p_2/p_1)^{2/n} - (p_2/p_1)^{(n+1)/n}]} \tag{285}$$

Das Verhältnis des Querschnitts des austretenden Strahls zum Düsenquerschnitt A_2 bezeichnet man als *Kontraktionszahl* μ. Bei gut abgerundeten Mündungen wird $\mu = 1$, während bei zugeschärften Eintrittskanten (Meßblende) μ bis 0,65 abnimmt[4]). Das Produkt $\mu\varphi$ ist die *Ausflußzahl.*
Der Massestrom bei einer erweiterten Düse ($p_u < p'$) wird auf den Kleinstquerschnitt A_{min} bezogen, für den $\mu = 1$ gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \varphi A_{\text{min}}\psi_{\text{max}}p_1\sqrt{2/RT_1} \\ &= A_{\text{min}}p_1[2/(n+1)]^{1/(n-1)}\sqrt{\frac{\varkappa(n-1)}{(n+1)(\varkappa-1)}}\cdot\sqrt{2/RT_1} \end{aligned} \tag{286}$$

8. Wärmeübertragung

8.1. Überblick

Wärme wird von selbst nur von einem System mit höherer Temperatur an ein System mit niedrigerer Temperatur transportiert, und zwar durch *Leitung, Konvektion* und *Temperaturstrahlung.* Dieselben Möglichkeiten und auch die entsprechenden Gesetze gelten für die Übertragung von innerer Energie zwischen den Teilen eines nicht im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems, die deshalb im folgenden auch als „Wärmeübertragung" oder „Wärmetransport" bezeichnet wird.
Bei der Wärmeleitung in festen oder unbewegten flüssigen und gasförmigen (fluiden) Stoffen gibt ein Teilchen höherer Temperatur an alle angrenzenden Teilchen mit niedrigerer Temperatur innere Energie durch *Impulsaustausch* oder durch *Diffusion* von Molekülen, Atomen oder freien Elektronen ab. Wichtig für die Übertragung ist eine bei Festkörpern und Flüssigkeiten wenig und nur bei Gasen in bestimmten Druckbereichen stärker vom Druck, aber stets von der Temperatur abhängige Stoffeigenschaft, die *Wärmeleitfähigkeit* λ. Sie nimmt z. B. bei trockener Luft (zwischen 1 kPa und 1 Pa) und bei den meisten Metallen und Flüssigkeiten mit steigender Temperatur ab (Ausnahme z. B. Wasser zwischen 0 °C und 80 °C). Bei Gasen und konstantem Druck steigt sie mit zunehmender Temperatur, während der Temperatureinfluß anderer Feststoffe unterschiedlich ist (Tabellen 25, 26). Bei der *stationären Wärmeleitung* sind die Temperaturen nur örtlich verschieden, aber zeitlich konstant. Bei *instationärer Wärmeleitung* wird die Zeit mit τ bezeichnet, um Verwechslungen mit der CELSIUS-Temperatur t zu vermeiden. Außer der Wärmeleitfähigkeit λ sind die Dichte ϱ oder das spezifische Volumen v und die spezifische Wärmekapazität c_p die für das Temperaturfeld maßgebenden Stoffeigenschaften. Diese Werte faßt die *Temperaturleitfähigkeit* a zusammen (Tabelle 26):

$$a = \lambda/\varrho c_p = \lambda v/c_p \tag{287}$$

Tabelle 25. Wärmeleitfähigkeit. a) von Metallen und Legierungen bei 20 °C; b) von festen Stoffen bei verschiedenen Temperaturen

a) Metalle und Legierungen

Stoff	Reinheit bzw. Zusammensetzung	Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m·K)	Stoff	Reinheit bzw. Zusammensetzung	Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m·K)
Aluminium	99,75%	229	Kupfer	99,9%	384
Aluminium	99%	209	Messing	70% Cu, 30% Zn	112
Blei (rein)	—	35	Nickel	99,94%	84
Bronze	10% Sn, 90% Cu	42	Nickel	98%	58
Eisen	99,92%	72	Rotguß	86% Cu, 7% Zn, 6,4% Sn	60
Grauguß	3,5% C, 1% Si	58			
Stahl	0,2% C	46,6	Silber	99,98%	418
Nickeleisen	5% Ni	35	Zink (rein)	—	113
Chromstahl	0,8% Cr, 0,2% C	39,6	Zinn (rein)	—	65
Chromnickelstahl, nichtrostend	18% Cr, 8% Ni	14,5			

b) Feste Stoffe

Stoff	Temperatur t in °C	Dichte ϱ in kg/m³	Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m · K)
Bau- und feuerfeste Stoffe			
Basalt	20	2900	1,68
Beton, lufttrocken	20	1600 ··· 2400	0,8 ··· 1,4
Holz, lufttrocken			
Fichte ⊥ Faser	20	400	0,093 ··· 0,14
Fichte ‖ Faser	20	400	< 0,244
Eiche ⊥ Faser	20	600 ··· 800	0,175 ··· 0,21
Eiche ‖ Faser	20	600 ··· 800	0,37 ··· 0,42
Kiefer ⊥ Faser	20	550 ··· 600	0,14
Kiefer ‖ Faser	20	550 ··· 600	0,37
Sandstein	20	2100 ··· 2300	1,6 ··· 2,1
Schamottestein	200	1650 ··· 2200	0,60 ··· 1,02
Schamottestein	600	1650 ··· 2200	0,77 ··· 1,14
Schamottestein	1000	1650 ··· 2200	0,95 ··· 1,19
Silikatsteine	200	1510 ··· 2100	0,64 ··· 1,1
Silikatsteine	600	1510 ··· 2100	1,02 ··· 1,36
Silikatsteine	1000	1510 ··· 2100	1,38 ··· 1,63
Silikatsteine	1400	1510 ··· 2100	1,7 ··· 1,9
Ziegelsteine, lufttrocken	20	1600 ··· 1800	0,41 ··· 0,52
Ziegelmauer, normalfeucht, Innenwand	20	1400 ··· 1800	0,70 ··· 0,76
Ziegelmauer, Außenwand	20	1400 ··· 1800	0,87 ··· 0,93
Hohlziegelstein	20	600 ··· 1100	0,12 ··· 0,23
Hohlziegelmauer	20	1300	0,41
Isolierstoffe			
Asbestpapier	20	500	0,07
Asbestpapier	20	1000	0,15
Asbestplatte	20	2000	0,7



Tabelle 25 (Fortsetzung)

Stoff	Temperatur t in °C	Dichte ϱ in kg/m³	Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m · K)
Isolierstoffe			
Asbestschnur	50	300	0,099
Asbestschnur	300	300	0,128
Asbestwolle	50	300	0,090
Asbestwolle	300	300	0,131
Glaspulver mit 1% Feuchtigkeit	20	1200	0,16
Glaspulver mit 10% Feuchtigkeit	20	—	0,40
Glaswolle	0	200	0,035
Glaswolle	300	200	0,105
Kieselgur, gebrannt	50	300 ··· 700	0,071 ··· 0,14
Kieselgur, gebrannt	200	300 ··· 700	0,095 ··· 0,157
Kieselgur, Pulver	50	200	0,053
Kieselgur, Pulver	300	200	0,079
Korkplatte	50	300	0,07
Korkplatte	0	200	0,047
Weitere Stoffe			
Eis	0	917	2,2
Erde, grobkiesig	20	2000	0,52
Erde, lehmig	20	2000	2,3
Glas	20	2300 ··· 2700	0,8 ··· 1,05
Quarzglas	20	2200	1,4
Gummi, weich	20	1100	0,13 ··· 0,23
Hartgummi	50	1200	0,159
Kesselstein, gipsreich	20	2500 ··· 2800	1,2 ··· 2,4
Kesselstein, kalkreich	20	1500 ··· 2000	0,43 ··· 0,98
Kesselstein, siliziumreich	20	500 ··· 1000	0,09 ··· 0,17
Ruß	40	165	0,07 ··· 0,12

Je größer sie ist, um so schneller steigt beim Erhöhen der Oberflächentemperatur eines Körpers seine Temperatur im Innern durch „Wärmeleitung".
Bei strömenden Fluida tritt außer der Wärmeleitung der *konvektive „Wärmetransport"* durch die von den Fluidteilen mitgeführte innere Energie auf. Der technisch wichtigste Fall ist der als *Wärmeübergang* bezeichnete Wärmetransport von einer festen Wandfläche A an ein strömendes Fluid oder umgekehrt. Als Beispiel wird eine Rohrleitung behandelt, deren innere Wandoberflächentemperatur t_{Wi} höher als die Temperatur des im Rohr strömenden Fluids (in hinreichend großem Wandabstand in der Kernströmung außerhalb der Grenzschicht, mittlere Temperatur t_f, mittlere Geschwindigkeit c_f) ist. Der Wärmestrom $\dot{Q}$ wird nur von den Fluidteilen in der Grenzschicht unmittelbar an der Wand durch Wärmeleitung aufgenommen und infolge der Strömung über den gesamten Rohrquerschnitt verteilt. Nach der Gleichung von Newton (1701) gilt:

$$\dot{Q} = \alpha A(t_{Wi} - t_f) \tag{288}$$

Der *Wärmeübergangskoeffizient* α hängt von allen den Wärmetransport und die Strömung beeinflussenden Größen ab. Die für das Geschwindigkeitsfeld maßgebende Stoffeigenschaft ist die *kinematische Viskosität* ν*), der Quotient aus dynamischer Viskosität η und Dichte ϱ,

*) siehe Abschn. Technische Strömungslehre

Tabelle 26. Kinematische Viskosität ν, Wärmeleitfähigkeit λ, Temperaturleitfähigkeit a und PRANDTL-Zahl Pr für Flüssigkeiten (Druck bei Wasser 98,0665 kPa, bei allen anderen Flüssigkeiten 101,325 kPa oder bei dem zur Temperatur gehörenden größeren Sättigungsdruck — durch ^{I}) gekennzeichnet) und Gase (Druck: 101,325 kPa) für verschiedene Temperaturen (nach [9] und [18])

Stoff	Temperatur t in °C	ν in 10^{-6} m²/s	λ in W/(m · K)	a in 10^{-6} m²/s	Pr
Flüssigkeiten					
Äthylenglykol $C_2H_4(OH)_2$	20	19,5	0,250	0,094	207
	60	4,89	0,260	0,0933	52,4
	100	2,27	0,263	0,0910	24,9
Benzol C_6H_6	20	0,740	0,154	0,101	7,33
Ammoniak NH_3	0^{I})	0,376	0,540	0,182	2,07
	20^{I})	0,361	0,494	0,170	2,12
Kohlendioxid CO_2	20^{I})	0,062	0,087	0,031	2,00
Quecksilber Hg	20	0,115	9,3	5,00	0,023
Schwefeldioxid SO_2	−20	0,313	0,223	0,118	2,65
	0^{I})	0,257	0,213	0,109	2,36
	20^{I})	0,220	0,199	0,103	2,14
Spindelöl	20	15,0	0,144	0,0895	168
	40	7,93	0,143	0,0862	92,0
	80	3,40	0,141	0,0806	42,1
	120	1,91	0,138	0,0756	25,3
Transformatorenöl	20	36,5	0,124	0,0759	481
	40	16,7	0,123	0,0726	230
	80	5,2	0,119	0,0656	79,4
Wasser, rein, luftfrei	0	1,792	0,552	0,131	13,67
	10	1,307	0,578	0,138	9,47
	20	1,004	0,598	0,143	7,01
	30	0,801	0,614	0,148	5,43
	40	0,658	0,628	0,151	4,35
	50	0,554	0,641	0,155	3,57
	60	0,475	0,651	0,158	3,00
	80	0,365	0,668	0,164	2,23
	100^{I})	0,295	0,682	0,168	1,75
	120^{I})	0,2485	0,685	0,171	1,45
	160^{I})	0,1890	0,682	0,173	1,09
	200^{I})	0,1579	0,664	0,171	0,92
	240^{I})	0,1420	0,634	0,1635	0,87
	300^{I})	0,1298	0,541	0,1295	1,0
	360^{I})	0,1306	0,348	0,05	2,6
Gase*)					
Ammoniak NH_3	0	12,5	0,022	13,6	0,92
	100	24,1	0,030	24,9	0,97
Kohlendioxid CO_2	0	7,2	0,0143	9,00	0,80
	100	13,2	0,0213	16,45	0,802
	200	20,8	0,0283	25,7	0,81
Trockene Luft	−150	3,11	0,0119	4,19	0,74
	−100	5,96	0,0165	8,28	0,72
	−50	9,55	0,0206	13,4	0,715
	0	13,30	0,0243	18,7	0,711



Tabelle 26 (Fortsetzung)

Stoff	Temperatur t in °C	ν in 10^{-6} m²/s	λ in W/(m · K)	a in 10^{-6} m²/s	Pr
Gase*)					
Trockene Luft	20	15,11	0,0257	21,2	0,713
	60	18,90	0,0285	26,65	0,709
	100	23,06	0,0314	32,75	0,704
	200	34,63	0,0386	50,5	0,685
	400	62,53	0,0515	92	0,68
	600	95,57	0,0621	138	0,69
	800	132,8	0,0706	186	0,715
	1000	173	0,0770	235	0,735
Schwefeldioxid SO_2	0	4,1	0,0084	4,75	0,86
Wasserstoff H_2	0	97	0,176	142	0,68
	100	162	0,229	249	0,65
	200	241	0,276	378	0,64
	300	336	0,297	492	0,68
Wasserdampf	100	22,1	0,0242	19,65	1,12
	200	36,8	0,0328	37,6	0,98
	300	54,1	0,0427	57,0	0,95
	400	74,4	0,0552	85,0	0,88
	500	97,5	0,0752	125,7	0,78

*) Für vollkommene zwei- und dreiatomige Gase ist $Pr = 0{,}70$ bzw. 0,89. Die PRANDTL-Zahl ist bei Gasen nicht vom Druck abhängig.

während die Temperaturleitfähigkeit a die für das Temperaturfeld maßgebenden Stoffeigenschaften angibt. Die für die Beziehungen zwischen beiden Feldern maßgebenden Stoffwerte werden in der dimensionslosen PRANDTL-Zahl Pr zusammengefaßt (Tabelle 26):

$$Pr = \nu/a = \eta c_p/\lambda \tag{289}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit c_f kann entweder durch einen z. B. mit einer Pumpe erzeugten Druckunterschied aufgezwungen werden (*erzwungene Strömung*) oder nur durch den Wärmeübergang und die dadurch auftretenden Temperatur- und Dichteunterschiede verursacht sein (*freie Strömung*), z. B. bei Schwerkraft-Warmwasserheizungen. Der Wärmeübergangskoeffizient α wird durch Rohrkrümmer und Einbauteile (z. B. Ventile, Rührwerke) erhöht, die die Strömung verwirbeln und den Strömungswiderstand vergrößern. Bei *turbulenter Strömung* mit Wirbelballen veränderlicher Größe und Strömungsrichtung ist er stets größer als bei *laminarer Strömung*. Die meisten Probleme des Wärmeübergangs lassen sich nicht mathematisch, sondern nur experimentell klären.

Bleibt der Aggregatzustand des strömenden Stoffes beim Wärmeübergang gleich (s. 8.3.), so ändern sich die Stoffeigenschaften stetig, und durch die von NUSSELT entwickelte Ähnlichkeitstheorie mit dimensionslosen Kennzahlen lassen sich Versuchsergebnisse übertragen. Ist jedoch die Wandtemperatur der Kühlfläche niedriger als die Sättigungstemperatur des strömenden Dampfes oder die Wandtemperatur der Heizfläche höher als die Sättigungstemperatur der strömenden Flüssigkeit, so wird an der Wandoberfläche Dampf kondensieren oder Flüssigkeit verdampfen (s. 8.4.). Die Stoffeigenschaften ändern sich dabei sprunghaft. Der Vorgang ist mit der Ähnlichkeitstheorie nicht zu erfassen. Nur für spezielle Versuchsbedingungen lassen sich Gleichungen angeben, die in sehr begrenzten Bereichen gelten.

In der Technik werden Wärmeübertrager verwendet, bei denen ein strömender Stoff durch eine feste Wand Wärme an einen zweiten strömenden Stoff überträgt (*Rekuperatoren*). Der Vorgang wird als *Wärmedurchgang* bezeichnet.

Die *Temperaturstrahlung*, bei der ein System innere Energie in Form von elektromagnetischen Wellen (Strahlung), die sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s auch im absolut leeren Raum ausbreiten, aussendet (emittiert) oder aus der Umgebung aufnimmt (absorbiert),

hängt von der absoluten Temperatur T des Körpers und nicht einer Temperaturdifferenz wie bei Wärmeleitung und Wärmeübergang ab. Die Temperaturstrahlung wächst mit der vierten Potenz der absoluten Temperatur. Sind System- und Umgebungstemperatur gleich, so sind emittierte und adsorbierte Strahlungsenergie gleich. Ein resultierender Energiestrom, der die innere Energie des Systems ändert und sich daher wie ein Wärmestrom $\dot{Q}_{str}$ auswirkt, ergibt sich bei von der Umgebungstemperatur abweichender Systemtemperatur (s. 8.6.).

8.2. Wärmeleitung

8.2.1. Stationäre Wärmeleitung

8.2.1.1. Stationäre Wärmeleitung durch eine ebene Wand

Bei der stationären Wärmeleitung eines nicht im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems bleibt das Temperaturfeld unverändert, wenn an der Stelle höchster Temperatur der Wärmestrom $\dot{Q}$ zugeführt und derselbe Wärmestrom an der Stelle niedrigster Temperatur abgeführt wird. In einem kartesischen Koordinatensystem sind für ein Raumelement $(dx \cdot dy \cdot dz)$ die Temperaturgefälle $\frac{dt}{dx}, \frac{dt}{dy}, \frac{dt}{dz}$ verschieden. Der Strom innerer Energie (Wärmestrom $d\dot{Q}$), der senkrecht durch das Flächenelement $dA = dy \cdot dz$ strömt, wird bei der Wärmeleitfähigkeit λ nach dem FOURIER*schen Gesetz* bestimmt:

$$d\dot{Q} = dQ/d\tau = -\lambda \, dA \, dt/dx \tag{290}$$

Das negative Vorzeichen steht, weil die „Wärme“ in Richtung abnehmender Temperatur strömt. In fast allen praktisch wichtigen Fällen ist das Temperaturgefälle in einer Richtung viel größer als in den anderen, die vernachlässigbar klein werden (eindimensionale Behandlung).
Nach Gl. (290) läßt sich für den *Wärmestrom* $\dot{Q}$ durch eine ebene Wand mit den Flächen $A_i = A_a = A$ konstanter Wanddicke δ und $t_{Wi} > t_{Wa}$ schreiben:

$$\dot{Q} = -\lambda A (dt/dx) = \lambda A (t_{Wi} - t_{Wa})/\delta \tag{291}$$

Im Temperatur-Wanddicke-Diagramm (Bild 41a) ergibt sich ein linearer Temperaturverlauf. Die *Wärmestromdichte* q ist der auf die Flächeneinheit bezogene Wärmestrom:

$$q = \dot{Q}/A = -\lambda \, dt/dx = \lambda (t_{Wi} - t_{Wa})/\delta \tag{292}$$

Mit dem *Wärmeleitwiderstand* $R_\lambda = \delta/\lambda A$ erhält man eine dem OHMschen Gesetz der Elektrotechnik entsprechende Schreibweise:

$$\dot{Q} = (t_{Wi} - t_{Wa})/R_\lambda \tag{293}$$

Für eine ebene Wand aus mehreren hintereinanderliegenden, gut verbundenen Schichten (Kontaktwiderstand vernachlässigbar) der Dicken $\delta_1, \delta_2, \ldots$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind die Wärmeleitwiderstände zu addieren:

$$\dot{Q} = (t_{Wi} - t_{Wa})/\sum R_\lambda \tag{294}$$

Bei bekannten Wandtemperaturen t_{Wi} und t_{Wa} lassen sich im Temperatur-Wanddicke-Diagramm (Bild 41b) in der dargestellten Weise die Temperaturen an den Grenzen der Schichten ermitteln. Rechnerisch ist:

$$t_{W1} = t_{Wi} - \dot{Q}R_{\lambda 1} = t_{Wi} - q\delta_1/\lambda_1; \quad t_{W2} = t_{Wi} - q\delta_2/\lambda_2 \tag{295}$$

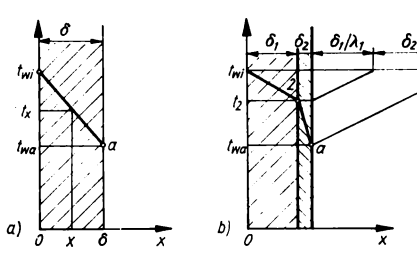


Bild 41. Temperaturverlauf bei stationärer Wärmeleitung in einer ebenen Außenwand im Winter ($t_{Wi} > t_{Wa}$). a) Wand aus einer Schicht; b) Wand aus zwei Schichten mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten

8.2.1.2. Stationäre Wärmeleitung durch eine zylindrische Wand (Rohrwand)

Da sich bei gekrümmten Wänden die Wandflächen ändern, ist es zweckmäßiger, stets mit den Wärmeleitwiderständen $R_{\lambda R}$ statt mit den Wärmeleitfähigkeiten λ zu rechnen. Durch eine Rohrwand mit den konstanten Durchmessern d_i und d_a, der Länge L und der konstanten Wandtemperatur $t_{Wi} > t_{Wa}$ fließe der Wärmestrom $\dot{Q}$ in radialer Richtung senkrecht zur Rohrachse. Für den beliebigen Durchmesser d mit $d_i < d < d_a$ ergibt sich:

$$\dot{Q} = -\lambda A(\mathrm{d}t/\mathrm{d}r) = -2\pi L\lambda r(\mathrm{d}t/\mathrm{d}r) \tag{296}$$

oder bei gegebenen Wandtemperaturen t_{Wi} und t_{Wa}:

$$Q = 2\pi L\lambda(t_{Wi} - t_{Wa})/\ln(d_a/d_i) \tag{297}$$

Die Temperatur in der Wand ändert sich nach einer logarithmischen Funktion (Bild 42b). Wird als Wärmeleitwiderstand $R_{\lambda R}$ eingeführt:

$$R_{\lambda R} = \ln(d_a/d_i)/2\pi L\lambda \tag{298}$$

ergibt sich wieder Gl. (293). Für eine Rohrwand aus z. B. drei Schichten (Bild 42a) mit den Wärmeleitfähigkeiten λ_1, λ_2, λ_3 und den Durchmessern d_i, d_1, d_2, d_a gilt Gl. (294) mit:

$$\sum R_{\lambda R} = \ln(d_1/d_i)/2\pi L\lambda_1 + \ln(d_2/d_1)/2\pi L\lambda_2 + \ln(d_a/d_2)/2\pi l\lambda_3 \tag{299}$$

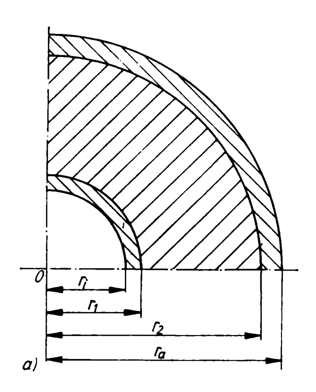
In Tabelle 27 sind die zu (d_2/d_1) gehörenden Werte für $\ln(d_2/d_1)$ zusammengestellt. Meist gibt man den Wärmeleitwiderstand für 1 m Rohrlänge an. Er wird nach Gl. (299):

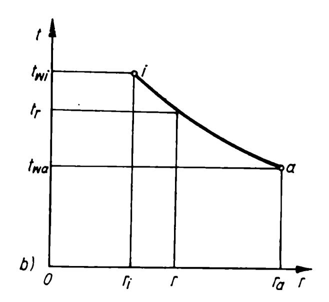
$$L\sum R_{\lambda R} = \ln(d_1/d_i)/2\pi\lambda_1 + \ln(d_2/d_1)/2\pi\lambda_2 + \ln(d_a/d_2)/2\pi\lambda_3 \tag{300}$$

Die Temperaturen t_1, t_2, t_a ergeben sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{Q}/L &= 2\pi\lambda_1(t_{Wi} - t_1)/\ln(d_1/d_i) = 2\pi\lambda_2(t_1 - t_2)/\ln(d_2/d_1)\\ &= 2\pi\lambda_3(t_2 - t_a)/\ln(d_a/d_2)\\ &= (t_{Wi} - t_1)/LR_{\lambda R1} = (t_1 - t_2)/LR_{\lambda R2} + (t_2 - t_a)/LR_{\lambda R3}\end{aligned} \tag{301}$$

Den Temperaturverlauf zeigt Bild 42c.





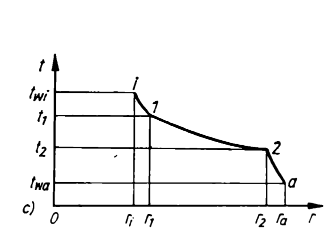


Bild 42. Temperaturverlauf bei stationärer Wärmeleitung in einer Rohrwand ($t_{Wi} > t_{Wa}$). a) Schnitt durch eine Wand aus drei Schichten mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten; b) Temperaturverlauf bei einer Schicht; c) Temperaturverlauf bei drei Schichten

Tabelle 27. Werte für $\ln(d_2/d_1)$ in Abhängigkeit von (d_2/d_1)

d_2/d_1	1,05	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$\ln(d_2/d_1)$	0,0488	0,095	0,182	0,260	0,336	0,405	0,470
d_2/d_1	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$\ln(d_2/d_1)$	0,588	0,693	0,788	0,876	0,956	1,030	1,099

8.2.2. Instationäre Wärmeleitung

In Apparaten (z. B. Regeneratoren) strömt abwechselnd ein Fluid mit hoher Temperatur zum Abkühlen und ein Fluid mit niedriger Temperatur zum Aufheizen. Dadurch ändern sich die Temperaturen periodisch, meist jedoch stetig, z. B. beim Anheizen oder Abkühlen von Werkstücken und Räumen. Die Änderungsgeschwindigkeit der Temperatur ($\partial t/\partial \tau$) ist proportional den Temperaturleitfähigkeiten a (Tabelle 26). In einem kartesischen Koordinatensystem ergeben sich für das Raumelement ($dx \cdot dy \cdot dz$) eines homogenen Systems mit konstanten Temperaturleitfähigkeiten die zeitliche Temperaturänderung ($\partial t/\partial \tau$) nach der allgemeinen FOURIER*schen Differentialgleichung der Wärmeleitung* (ohne Wärmequellen):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \tag{302}$$

und für einen bestimmten Zeitpunkt der Wärmestrom $\dot{Q}_x$ in der x-Richtung durch den Querschnitt A nach Gl. (291), in der der partielle Differentialquotient ($\partial t/\partial x$) einzusetzen ist. Selbst bei eindimensionaler Behandlung, d. h. bei Vernachlässigung der Glieder ($\partial^2 t/\partial y^2$) und ($\partial^2 t/\partial z^2$), sind analytische Lösungen der Gl. (302) nur für einfache geometrische Körperformen bei einfachen Voraussetzungen bekannt. Das sind der vorzugebende Temperaturverlauf zur Zeit $\tau = 0$ (Anfangsbedingungen) und die an den Wandoberflächen für $\tau > 0$ durch Wärmeleitung, Wärmeübergang oder Temperaturstrahlung zu- oder abgeführten Wärmeströme, die die Oberflächentemperatur bestimmen (Randbedingungen). Die Lösung der vereinfachten partiellen Differentialgleichung (302) $t = f(x, \tau)$ läßt sich als Summe von partikulären Lösungen schreiben, in denen die Integrationskonstanten A, B, C, D, q, q_k, s aus den Anfangs- und Randbedingungen ermittelt werden müssen. Bei der Lösung:

$$t(x, \tau) = A + Bx + C\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\xi^2}\, d\xi \tag{303}$$

werden die beiden Variablen x und τ mit den Temperaturleitfähigkeiten a zum dimensionslosen Wert $\xi = x/\sqrt{4a\tau}$ zusammengefaßt.

Der Wert $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\xi^2}\, d\xi$ ist das GAUSS*sche Fehlerintegral* (Tabelle 28).

Die Lösung

$$t(x, \tau) = A + Bx + \sum_k (C_k' e^{-q_k^2 a\tau} \cos q_k x + C_k'' e^{-q_k^2 a\tau} \sin q_k x) \tag{304}$$

läßt sich oft der vorgegebenen Anfangstemperaturverteilung leicht anpassen, die allerdings bestimmte Bedingungen erfüllen muß [3]. Weitere Lösungen sind z. B.:

$$t(x, \tau) = A + Bx + C\, e^{-q^2 a\tau} \cos qx \tag{305}$$

$$t(x, \tau) = A + Bx + C\, e^{q^2 a\tau} \sin qx \tag{306}$$

$$t(x, \tau) = A + Bx + \frac{C}{\sqrt{\tau}}\, e^{-(x-s)^2/4a\tau} \tag{307}$$

Tabelle 28. GAUSSsches Fehlerintegral für $\xi = 0 \cdots \infty$

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\xi^2}\, d\xi$	0	0,21	0,425	0,600	0,745	0,840	0,905	0,955	0,980	0,995	0,995	1



Wenn sich die zeitlichen Temperaturänderungen an der Wandoberfläche mathematisch schwer erfassen lassen oder aus sonstigen Gründen die analytische Lösung zu aufwendig wird, verwendet man *Differenzenverfahren*, z. B. nach WIRTZ und SCHMIDT [18].
Eine ebene Wand ist in eine Anzahl hinreichend dünner Scheiben Δx zu unterteilen, und das endliche Zeitintervall $\Delta\tau$ ist so zu bestimmen, daß $\Delta\tau = \Delta x^2/2a$ wird. Aus dem Temperaturverlauf zur Zeit $\tau = 0$ ergibt sich der zu den Zeiten $\Delta\tau, 2\Delta\tau, \ldots$ vorhandene Temperaturverlauf in den einzelnen Schichten, wobei die Wandtemperaturen t_{Wi} und t_{Wa} stets durch die Randbedingungen vorgeschrieben sind.
Die der Gl. (302) entsprechende Differenzengleichung, bei der durch den Index x oder τ am Differenzenzeichen Δ angegeben ist, welcher Wert konstant bleibt, wird:

$$\Delta_x t/\Delta\tau = a\Delta_\tau(\Delta_\tau t)/\Delta x^2 \tag{308}$$

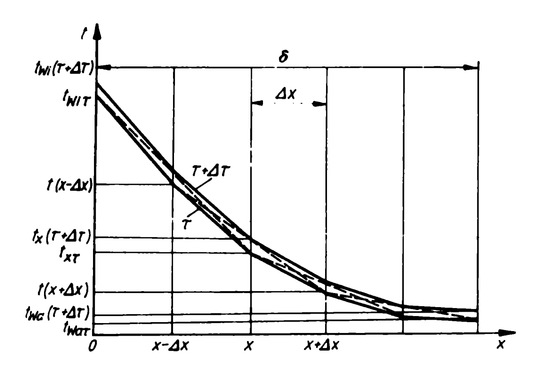


Bild 43. Grafische Ermittlung des Temperaturverlaufs zur Zeit $(\tau + \Delta\tau)$ aus dem Temperaturverlauf zur Zeit τ bei instationärer Wärmeleitung in einer ebenen Wand

Dabei sind zur Zeit $\tau = k\Delta\tau$ in den Schichten $(x - \Delta x)$, x und $(x + \Delta x)$ die Temperaturen bekannt, und es ergibt sich:

$$\Delta_\tau(\Delta_\tau t) = (t_{x-\Delta x} - t_x) - (t_x - t_{x+\Delta x}) = t_{x+\Delta x} + t_{x-\Delta x} - 2t_x \tag{309}$$

Werden dieser Wert und der Wert für $\Delta\tau$ in die Differenzengleichung eingesetzt, erhält man die Temperaturänderung in der Schicht x bis zur Zeit $(\tau + \Delta\tau)$:

$$\Delta_x t = (t_{x+\Delta x} + t_{x-\Delta x})/2 - t_x \tag{310}$$

Die Temperatur in der Schicht x zur Zeit $(\tau + \Delta\tau)$ ergibt sich aus den Temperaturen zur Zeit τ in den Schichten $(x + \Delta x)$ und $(x - \Delta x)$. Die grafische Ermittlung ist im Bild 43 dargestellt.

8.2.2.1. Instationäre Wärmeleitung durch eine ebene Wand bei sprunghafter Temperaturerhöhung der Oberfläche

Wenn an einer ebenen Innenwand mit großer Wanddicke und großen seitlichen Abmessungen zur Zeit $\tau = 0$ sprungartig die Temperatur von t_{Wi} auf t_0 erhöht wird und dann konstant bleibt, ergibt sich der Temperaturverlauf nach Gl. (303):

$$t(x, \tau) = t_0 - (t_0 - t_{\text{Wi}}) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \tag{311}$$

mit $\xi = x/\sqrt{4a\tau}$.

Der Temperaturverlauf in der Wand für $\tau = 0$, τ und 2τ ist im Bild 44a dargestellt. Durch Differenzieren der Gl. (311) und mit Gl. (292) erhält man für die *Wärmestromdichte* im Abstand x von der Innenwand:

$$q(x) = \lambda(\partial t/\partial x) = \lambda(t_0 - t_{\text{Wi}})\, \mathrm{e}^{-x^2/4a\tau}/\sqrt{\pi a\tau} \tag{312}$$

Die der Wandinnenfläche ($x = 0$) zugeführte Wärmestromdichte ist:

$$q(0) = \lambda(t_0 - t_{Wi})/\sqrt{\pi a \tau} \tag{313}$$

Zur Zeit $\tau = 0$ ergibt sich ∞, der Wert nimmt jedoch zunächst sehr schnell ab (Bild 44b). Die im Zeitraum von τ_1 bis τ_2 je Flächeneinheit der Wandinnenfläche zugeführte Wärme ist:

$$Q/A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} q(0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{2\lambda(t_0 - t_{Wi})}{\sqrt{\pi a}} \left(\sqrt{\tau_2} - \sqrt{\tau_1}\right) \tag{314}$$

Die Gln. (311) bis (314) gelten für Wände mit begrenzter Dicke δ, wenn von der Außenwand die nach Gl. (312) für $x = \delta$ berechnete Wärmestromdichte $q(\delta)$ durch Konvektion (s. 8.3.) abgeführt wird.

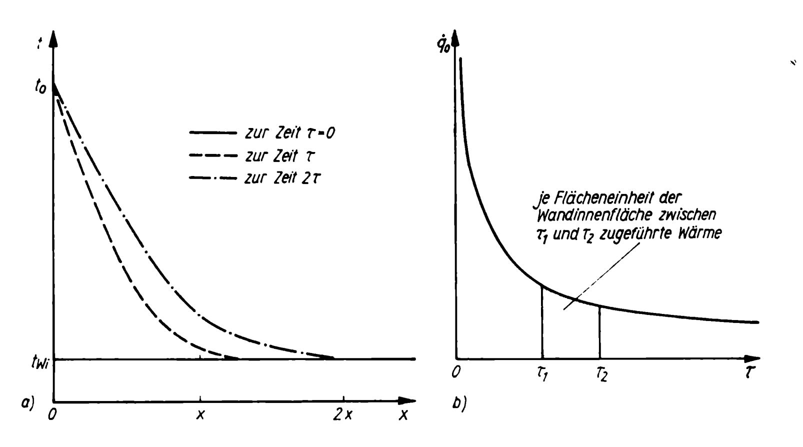


Bild 44. Instationäre Wärmeleitung durch eine ebene Wand bei sprunghafter Temperaturerhöhung einer Oberfläche auf konstante Temperatur. a) Temperaturverlauf in Abhängigkeit vom Wandabstand zur Zeit 0, τ und 2τ; b) Wärmestromdichte q_0 an der Oberfläche in Abhängigkeit von der Zeit

8.2.2.2. Instationäre Wärmeleitung in symmetrische Körper bei sprunghafter Temperaturerhöhung der Oberfläche

Folgende Körperformen kommen technisch häufig vor: ebene Platte mit großer seitlicher Ausdehnung, rechteckiger Balken mit großer Länge, Zylinder großer Länge l oder $l = d$, Würfel und Kugel. Die Koordinatenachse $x = 0$ wird durch die Zylinderachse, den Körpermittelpunkt oder im Abstand $\delta/2$ von den Oberflächen gelegt. Zur Zeit $\tau = 0$ ist die Temperatur t_a an jeder Stelle des Körpers bekannt. Die Oberflächentemperatur wird durch Wärmezufuhr sprungartig auf t_0 erhöht und für $\tau > 0$ konstant gehalten. Als Lösung der vereinfachten Gl. (302) ist Gl. (304) zweckmäßig. Sie läßt sich für die ebene Platte mit der Dicke δ in folgender Form schreiben:

$$t(x, \tau) = t_0 - (t_0 - t_a)\, f(x, \tau) \tag{315}$$

$$f(x, \tau) = \left[e^{-\pi^2 a\tau/\delta^2} \cos\left(\frac{\pi x}{\delta}\right) - \frac{1}{3} e^{-9\pi^2 a\tau/\delta^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{\delta}\right) + \frac{1}{5} e^{-25\pi^2 a\tau/\delta^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{\delta}\right) - \frac{1}{7} e^{-49\pi^2 a\tau/\delta^2} \cos\left(\frac{7\pi x}{\delta}\right) + \cdots\right] \frac{4}{\pi}$$

Für $x = 0$ sind die Funktionswerte $f(0, \tau)$ in Abhängigkeit vom dimensionslosen Wert $4a\tau/\delta^2$ in Tabelle 29 zusammengestellt.



Tabelle 29. Funktionswerte $f(0, \tau)$ für den Temperaturverlauf in der Mitte symmetrischer Körper bei sprunghafter Erhöhung der Oberflächentemperatur

	$4a\tau/\delta^2$									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2
Ebene Platte	1,0	0,95	0,78	0,61	0,50	0,39	0,30	0,18	0,115	0,070
Balken $l = \infty$	1,0	0,90	0,60	0,375	0,235	0,15	0,10	0,03	0,01	0
Würfel	1,0	0,86	0,50	0,24	0,125	0,07	0,04	0,01	0	0
Zylinder $l = \infty$	1,0	0,85	0,51	0,29	0,16	0,11	0,07	0,02	0,005	0
Zylinder $l = d$	1,0	0,81	0,40	0,175	0,095	0,05	0,03	0	0	0
Kugel	1,0	0,71	0,28	0,11	0,04	0,02	0,015	0	0	0

8.3. Konvektiver Wärmeübergang ohne Änderung des Aggregatzustands des strömenden Stoffes

8.3.1. Grundlagen

Für die Wärmeübergangsgleichung (288) ergibt sich die dem OHMschen Gesetz entsprechende Form durch Einführen des *Wärmeübergangswiderstands* R_α bei ebenem Querschnitt A:

$$\dot{Q} = (t_W - t_f)/R_\alpha = (t_W - t_f)\,\alpha A \quad (316)$$

Bei zylindrischer Wand mit dem Durchmesser d, der Länge L und $A = \pi L d$ wird:

$$R_{\alpha R} = 1/\pi L d \alpha \quad (317)$$

Die Ähnlichkeitstheorie läßt sich nur für *stationäre Strömungen* und konstante Stoffwerte anwenden. Bei der *freien Strömung* (s. 8.3.3.) muß die Temperaturabhängigkeit der Dichte berücksichtigt werden. Ändert sich bei einem Fluid mit der Temperatur die dynamische Viskosität und dadurch das Geschwindigkeitsfeld stark, so ist der Unterschied zwischen Erwärmen oder Abkühlen des Fluids durch die Wand durch einen Faktor mit dem Verhältnis der Viskositäten (η_f/η_W) oder der PRANDTL-Zahlen (Pr_f/Pr_W) des Fluids bei den Temperaturen t_f und t_W zu berücksichtigen. Bei den folgenden dimensionslosen Kennzahlen wird durch einen Index angegeben, ob t_f, t_W oder $t_m = (t_f + t_W)/2$ bei Berechnung des spezifischen Volumens v oder der Dichte ϱ, des thermischen Ausdehnungskoeffizienten γ, der dynamischen Viskosität η, der kinematischen Viskosität ν, der spezifischen Wärmekapazität c_p, der Wärmeleitfähigkeit λ und der Temperaturleitfähigkeit a des Fluids zu verwenden ist.

1. Die REYNOLDS-*Zahl* Re*) gibt für ein von festen Wänden vollständig umschlossenes Fluid, das aufgezwungen mit Geschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit strömt, das Verhältnis von Trägheits- und Reibungskraft an. Bei der nach der Kontinuitätsgleichung gemittelten Strömungsgeschwindigkeit c_f und einer kennzeichnenden Längenabmessung l_0 (z. B. bei Strömungen in Kreisrohren der Innendurchmesser d_i, in Rohren mit rechteckigem oder Kreisringquerschnitt der gleichwertige Durchmesser $d_{gl} = 4A/U$ mit A als Strömungsquerschnitt und U als Teil des Umfangs, durch den der Wärmeübergang erfolgt, oder bei beliebig geformten Kanälen, z. B. Riffelblechen, $d_{gl} = 4V/O$ mit V als Kanalvolumen und O als Oberfläche, durch die der Wärmeübergang erfolgt) ist:

$$Re = c_f l_0/\nu = c_f l_0/v\eta = c_f l_0 \varrho/\eta \quad (318)$$

Fließt der Massestrom $\dot{m}$ mit dem spezifischen Volumen v durch z_R Kreisrohre mit dem Innendurchmesser d_i, so wird:

$$Re = 4\dot{m}v/\pi z_R d_i \nu = 4\dot{m}/\pi z_R d_i \eta \quad (319)$$

*) siehe Abschn. TECHNISCHE STRÖMUNGSLEHRE

2. Die PECLET-*Zahl Pe* ergibt sich durch Einsetzen von a statt ν in Gl. (318) und mit Gl. (289):

$$Pe = c_f l_0 / a = Re \cdot Pr \tag{320}$$

3. Die GRASHOF-*Zahl Gr* wird benötigt, wenn thermische Auftriebskräfte (Fallbeschleunigung g) das Strömungsfeld erzeugen (freie Strömung) oder verändern. Mit der kennzeichnenden Längenabmessung l_0 (bei Kreisrohren der Durchmesser d oder Innendurchmesser d_i, bei anderen Rohrquerschnitten d_{gl}, bei ebenen Platten die Höhe h) ergibt sich:

$$Gr = g\gamma l_0^3 (t_W - t_f)/\nu^2 \tag{321}$$

4. Werden geometrisch nicht ähnliche Fälle untersucht (z. B. bei Rohrströmungen bei gleichem Innendurchmesser d_i verschiedene Längen L), muß das Verhältnis der Abmessungen, z. B. d_i/L, mit eingeführt werden [s. Gl. (323)].

5. Die NUSSELT-*Zahl Nu* ermöglicht die dimensionslose Angabe des Wärmeübergangskoeffizienten α und kann als Verhältnis der Dicke einer an der Wand haftenden Fluidschicht mit der Wärmeleitfähigkeit λ_F zur kennzeichnenden Längenabmessung l_0 angesehen werden:

$$Nu = \alpha l_0 / \lambda_F \tag{322}$$

Sind die angegebenen Voraussetzungen der Ähnlichkeitstheorie erfüllt, lassen sich Versuchsergebnisse, z. B. von Kreisrohren mit dem Durchmesser d_i und verschiedenen Längen L, zusammenfassen:

$$Nu = f(Pr, Re, Gr, d_i/L) \tag{323}$$

Dabei erhalten die unabhängigen Kennzahlen Exponenten, die meist in großen, anzugebenden Bereichen konstant sind. Bei erzwungener Strömung verändern oft die thermischen Auftriebskräfte das Geschwindigkeitsfeld nur unwesentlich. Dann vereinfacht sich Gl. (323) zu:

$$Nu = f(Pr, Re, d_i/L) \tag{324}$$

Bei freier Strömung entfällt Re:

$$Nu = f(Pr, Gr, d_i/L) \tag{325}$$

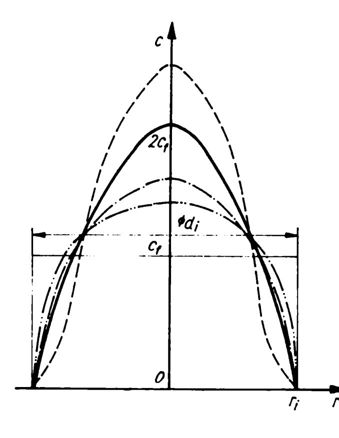


Bild 45. Geschwindigkeitsprofile beruhigter Laminarströmung im geraden Rohr bei konstanter Wandtemperatur t_W und konstanter mittlerer Flüssigkeitsgeschwindigkeit c_f. ——— $t_f = t_W$ (parabolische Geschwindigkeitsverteilung); – – – – $t_f > t_W$ (ohne freie Strömung, Abkühlen der Flüssigkeit); –·–·– $t_f < t_W$ (ohne freie Strömung, Erwärmen der Flüssigkeit); –··–··– $t_f < t_W$ (mit freier Strömung im vertikalen Rohr und gleicher Richtung der freien und erzwungenen Strömung)

8.3.2. Wärmeübergang bei erzwungener Strömung

Die *Laminarströmung* im geraden Rohr ist stabil bei $Re \leq 2320$. Erst nach einer bestimmten Rohrlänge (Anlauflänge $L_a \approx 0{,}03 d\, Re$) ändern sich bei konstanter Wandtemperatur t_W mit wachsender Rohrlänge Geschwindigkeits- und Temperaturfeld im Rohrquerschnitt nicht mehr (beruhigte oder stabilisierte Strömung). Dann ist bei $t_f = t_W$ die Fluidgeschwindigkeit in der Rohrachse $2c_f$. Das Geschwindigkeitsprofil ist parabolisch und ändert sich bei $t_f \neq t_W$ (Bild 45), weil bei $t_f < t_W$ (Heizung des Fluids) bei Flüssigkeiten die dynamische Viskosität der wandnahen Schichten infolge ihrer Temperaturerhöhung (bis t_W für die an der Wand

haftende Schicht) abnimmt, während ihre Geschwindigkeiten und der Durchflußstrom wachsen. Dadurch werden diese beiden Werte in der Nähe der Rohrachse kleiner, das gesamte Geschwindigkeitsprofil wird gleichmäßiger. Bei zusätzlicher freier Strömung, die nur in Wandnähe bei großem Temperaturgradienten auftritt, soll bei vertikal angeordneten Rohren die kalte Flüssigkeit von unten nach oben strömen, damit ihre Richtung mit der Richtung der freien Strömung übereinstimmt. Nach [16] ergibt sich für $L/d_i > 50$ die mittlere NUSSELT-Zahl für die gesamte Rohrlänge bei Berücksichtigung der freien Konvektion:

$$Nu_f = 0{,}15 Re_f^{0,33} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot Gr_f^{0,1} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0,25} \quad (326)$$

Tabelle 30. Faktoren ε zur Berücksichtigung des größeren Wärmeübergangs in der Anlaufstrecke bei $L/d_i < 50$

Re_f	L/d_i								
	1	2	5	10	15	20	30	40	45
≤ 2320	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,01
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1,015
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1,01
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1,01
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1,01
$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1,005

Für $L/d_i < 50$ ist Nu_f mit dem in Tabelle 30 angegebenen Faktor ε zu multiplizieren, um den größeren Wärmeübergang in der Anlaufstrecke zu berücksichtigen. Im Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung ($Re = 2320 \cdots 10000$) und bis $Re = 1 \cdot 10^6$, $Pr = 0{,}6 \cdots 500$ und $L/d_i = 1 \cdots \infty$ gilt nach [22]:

$$Nu_f = 0{,}116(Re_f^{2/3} - 125) \cdot Pr_f^{1/3} \cdot [1 + (d_i/L)^{2/3}] \cdot (\eta_f/\eta_W)^{0,14} \quad (327)$$

Nur im turbulenten Gebiet (für $Re_f = 10^4 \cdots 5 \cdot 10^6$, $Pr_f = 0{,}6 \cdots 2500$ und $L/d_i > 50$) wird nach [16]:

$$Nu_f = 0{,}021 Re_f^{0,80} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0,25} \quad (328)$$

Für Gase mit konstantem Pr vereinfacht sich die Gleichung, z. B. für Luft mit $Pr = 0{,}70$:

$$Nu_f = 0{,}018\, Re_f^{0,80} \quad (329)$$

Die Gleichungen gelten für Rohre mit Kreisquerschnitt oder dem gleichwertigen Durchmesser bei rechteckigem, dreieckigem, ringförmigem ($d_2/d_1 = 1 \cdots 1/5{,}6$) und spaltförmigem ($a/b = 1 \cdots 1/40$) Querschnitt. Der Faktor ε für $L/d_i < 50$ ist Tabelle 30 zu entnehmen. Er wird bei Rohrbogen mit dem Innendurchmesser d_i und dem Krümmungshalbmesser R dann $\varepsilon = 1 + 1{,}77\, d_i/R$.

Bei einem in einen Kanal eingebauten Kreisrohr, das senkrecht zur Achse angeströmt (Anströmwinkel $\delta = 90°$) und umströmt wird, löst sich die Strömung an einem Teil des Umfangs (etwa $\varphi = 80 \cdots 180°$, im Bild 46a) ab, es bilden sich *Wirbel*, und der Wärmeübergangskoeffizient α ändert sich längs des Umfangs beträchtlich. Die Größtwerte ergeben sich am Staupunkt S oder bei $\varphi = 180°$, die Kleinstwerte etwa bei 90° (Bild 46a). Bei großem örtlichem Wärmeübergangskoeffizienten kann z. B. in einem Rohr eines Dampfüberhitzers der Werkstoff thermisch überbeansprucht werden. Nach [16] gilt für den Mittelwert bei Flüssigkeiten und $Re_f = 1 \cdots 1000$:

$$Nu_f = 0{,}59 Re_f^{0,47} \cdot Pr_f^{0,38} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0,25} \quad (330)$$

und bei $Re_f = 1 \cdot 10^3 \cdots 2 \cdot 10^5$

$$Nu_f = 0{,}21 Re_f^{0,62} \cdot Pr_f^{0,38} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0,25} \quad (331)$$

Dabei sind als kennzeichnende Längenabmessung der Rohraußendurchmesser d und die auf den kleinsten Kanalquerschnitt bezogene mittlere Strömungsgeschwindigkeit c_f zu verwenden. Bei Luft mit konstanter PRANDTL-Zahl $Pr = 0{,}70$ vereinfachen sich die Gleichungen bei $Re_f = 1 \cdots 1000$:

$$Nu_f = 0{,}52 Re_f^{0,47} \quad (332)$$

und bei $Re_f = 1 \cdot 10^3 \cdots 2 \cdot 10^5$

$$Nu_f = 0{,}18 Re_f^{0,62} \quad (333)$$

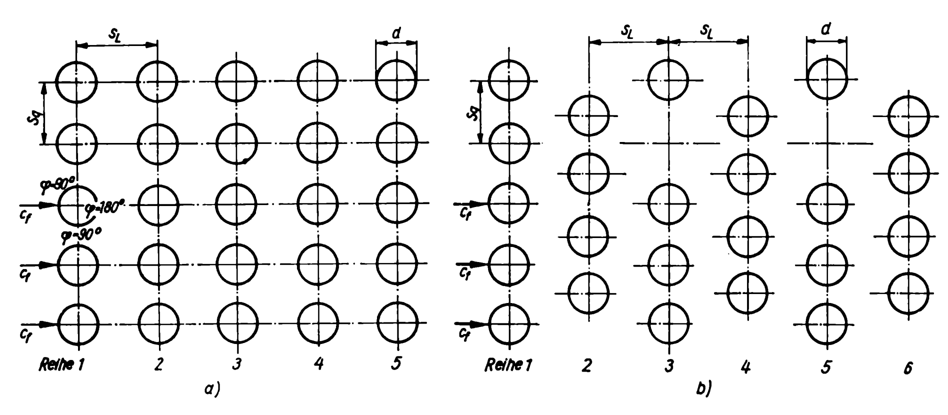


Bild 46. Schema der Rohranordnung in Rohrbündeln. a) fluchtende Rohre; b) versetzte Rohre

Bei einem querumströmten Rohrbündel können die Rohre *fluchtend* (Bild 46a) oder *versetzt* (Bild 46b) angeordnet sein. Zur Kennzeichnung dient das *relative Querteilungsverhältnis* $a = s_q/d$ und *Längsteilungsverhältnis* $b = s_L/d$. In der ersten Rohrreihe unterscheidet sich die Umströmung nur unwesentlich vom Einzelrohr und hängt stark von der Anfangsturbulenz der Strömung ab, jedoch liegen bei fluchtender Anordnung alle folgenden Reihen im Wirbelgebiet der vorhergehenden, und die Umströmung ihrer Stirn- und Rückseiten ist geringer. Bei versetzt angeordneten Reihen werden alle nahezu gleichmäßig umströmt. Nach [16] gilt für $Re_f = 200 \cdots 200000$ für die dritte und alle folgenden Rohrreihen bei fluchtender Rohranordnung:

$$Nu_f = 0{,}23 Re_f^{0{,}65} \cdot Pr_f^{0{,}33} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0{,}25} \tag{334}$$

und bei versetzter Rohranordnung:

$$Nu_f = 0{,}41 Re_f^{0{,}60} \cdot Pr_f^{0{,}33} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0{,}25} \tag{335}$$

Für Luft mit konstanter PRANDTL-Zahl $Pr = 0{,}70$ werden:

$$Nu_f = 0{,}21 Re_f^{0{,}65} \quad \text{für} \quad Re_f \leqq 10^5 \tag{336}$$

$$Nu_f = 0{,}31 Re_f^{0{,}60} \quad \text{für} \quad Re_f > 10^5 \tag{337}$$

Für die erste Reihe eines Rohrbündels sind die nach den Gln. (334) und (335) berechneten NUSSELT-Zahlen mit 0,60, für die zweite Reihe bei fluchtender Anordnung mit 0,90 und bei versetzter Anordnung mit 0,70 zu multiplizieren. Für alle Rohrreihen sind die ermittelten NUSSELT-Zahlen mit dem Faktor ε_δ der Tabelle 31 zu multiplizieren, wenn der Anströmwinkel δ zwischen Rohrachse und Anströmrichtung $< 90°$.

Tabelle 31. Faktor ε_δ bei Anströmwinkeln $\delta < 90°$ in Rohrbündeln

δ in °	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_δ	1	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

Bei der Strömung *mit Wärmeübergang* längs einer ebenen Platte mit der Anströmgeschwindigkeit c_f läßt sich bisher die für den Vorgang wichtige Anfangsturbulenz der Strömung nicht exakt angeben. Die verschiedenen im Schrifttum niedergelegten Beziehungen ergeben deshalb sehr unterschiedliche Werte. Außerdem beeinflußt bei kleinen Geschwindigkeiten (für Luft $c_f < 5$ m/s) die freie Strömung den Wärmeübergang wesentlich. Die REYNOLDS-Zahl wird mit der in Strömungsrichtung liegenden Plattenlänge l und der Anströmgeschwindigkeit c_f ermittelt. Bis $Re_f = 10^5$ strömt die Grenzschicht laminar, bei $Re_f > 10^5$ wird sie turbulent mit einer dünnen laminaren Unterschicht. Nach [16] gilt:

$$Nu_f = 0{,}664 Re_f^{0{,}50} \cdot Pr_f^{0{,}43} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0{,}25} \quad \text{für} \quad Re_f \leqq 10^5 \tag{338}$$

$$Nu_f = 0{,}037 Re_f^{0{,}80} \cdot Pr_f^{0{,}43} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{0{,}25} \quad \text{für} \quad Re_f > 10^5 \tag{339}$$

Für Luft mit konstanter PRANDTL-Zahl $Pr = 0{,}70$ werden:

$$Nu_f = 0{,}57 Re_f^{0{,}50} \quad \text{für} \quad Re_f \leqq 10^5 \tag{340}$$

$$Nu_f = 0{,}033 Re_f^{0{,}80} \quad \text{für} \quad Re_f > 10^5 \tag{341}$$

8.3.3. Wärmeübergang bei freier Strömung

Aus Versuchen mit Gasen (Luft, Kohlendioxid, Wasserstoff usw.) im Druckbereich zwischen 3 kPa und 7 MPa und Flüssigkeiten (Wasser, Ölen, Glyzerin usw.) an vertikalen und horizontalen Rohren bis 245 mm Durchmesser und 6 m Länge, ebenen Platten bis zur gleichen Höhe ergaben sich nach [16] bei $Pr \geqq 0{,}7$:

$$Nu_m = c(Gr_m \cdot Pr_m)^n \tag{342}$$

wobei die Werte für c und n in Abhängigkeit von $(Gr \cdot Pr)$ in Tabelle 32 zusammengefaßt sind. Für reine Schichtströmung bei $(Gr \cdot Pr) < 1$ ist die NUSSELT-Zahl $Nu = 0{,}5$ konstant und der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha = 0{,}5\lambda_f/l_0$ nur durch die Wärmeleitfähigkeit des Fluids bestimmt. Da die Schichtströmung aber bei $(Gr \cdot Pr) > 0{,}001$ instabil ist, ändert sich mitunter die NUSSELT-Zahl schon in diesem Bereich. Bis $(Gr \cdot Pr) = 20 \cdot 10^6$ ist *laminare freie Strömung*, bei größeren Werten *turbulente Strömung* vorhanden. Bei horizontal liegenden Platten wird statt der Höhe die kleinere Seitenlänge als kennzeichnende Länge verwendet.

Tabelle 32. Werte für c und n in Abhängigkeit von $(Gr \cdot Pr)$ bei freier Strömung

$Gr \cdot Pr$	c	n
$0{,}001 \cdots 500$	1,18	1/8
$500 \cdots 20 \cdot 10^6$	0,54	1/4
$20 \cdot 10^6 \cdots 10 \cdot 10^{12}$	0,135	1/3

Für *horizontale Rohre* gilt nach [16]:

$$Nu_f = 0{,}50(Gr_f \cdot Pr_f)^{1/4} \cdot (Pr_f/Pr_W)^{1/4} \tag{343}$$

Für Luft bei $Pr = 0{,}70$ ergibt sich:

$$Nu_f = 0{,}46 Gr_f^{1/4} \tag{344}$$

In einem begrenzten Raum, z. B. zwischen zwei parallelen Wandflächen gleicher Größe A in kleinem Abstand δ mit verschiedenen Temperaturen $t_{W1} > t_f > t_{W2}$, beeinflussen sich die freien Strömungen an den beiden Wänden so stark, daß sich die Wärmeübergangskoeffizienten α nach den vorstehenden Gleichungen nicht ermitteln lassen. Nach [16] wird dann eine *äquivalente Wärmeleitfähigkeit* $\lambda_{ä}$ nach Gl. (291) aus Versuchen, bei denen der übertragene Wärmestrom $\dot{Q}$ und die Wandtemperaturen t_{W1} und t_{W2} gemessen werden, ermittelt:

$$\lambda_{ä} = \dot{Q}\delta/A(t_{W1} - t_{W2}) \tag{345}$$

Der Wert ist stets mindestens ebenso groß wie die Wärmeleitfähigkeit λ_f des Fluids zwischen den Wänden.

Der *Konvektionsfaktor* $\varepsilon_k = \lambda_{ä}/\lambda_f$ kennzeichnet den Einfluß der freien Strömung und gestattet, Versuchsergebnisse dimensionslos anzugeben. Nach [16] gilt für $(Gr_f \cdot Pr_f) < 1000$: $\varepsilon_k = 1$. Der Einfluß der freien Strömung ist zu vernachlässigen:

$$\varepsilon_k = 0{,}105(Gr_f \cdot Pr_f)^{0{,}3} \quad \text{für} \quad (Gr_f \cdot Pr_f) = 10^3 \cdots 10^6 \tag{346}$$

$$\varepsilon_k = 0{,}40(Gr_f \cdot Pr_f)^{0{,}2} \quad \text{für} \quad (Gr_f \cdot Pr_f) = 10^6 \cdots 10^{10} \tag{347}$$

oder näherungsweise:

$$\varepsilon_k = 0{,}18(Gr_f \cdot Pr_f)^{0{,}25} \quad \text{für} \quad (Gr_f \cdot Pr_f) = 10^3 \cdots 10^{10} \tag{348}$$

8.4. Konvektiver Wärmeübergang bei Änderung des Aggregatzustands des strömenden Stoffes

8.4.1. Kondensation von Dampf

Filmkondensation

Strömt reiner trockener Sattdampf ($x = 1$, spezifische Verdampfungswärme r), dessen Kondensat die Wand benetzt (z. B. Wasserdampf und Metallwand), mit der Temperatur t_s an einer sauberen Rohrwand bei horizontaler Rohrlage (Durchmesser d) bzw. bei vertikaler Rohrlage (Länge L) oder bei vertikalen ebenen Wänden und konstanter Wandtemperatur $t_W < t_s$, so bildet sich ein *Kondensatfilm* mit der Temperatur t_W an der Wand und der Temperatur t_s an der Grenze zum Dampf. Es ist mit seinen Stoffwerten bei der Temperatur $t_m = (t_s + t_W)/2$ zu rechnen, die den Index m erhalten.
Für die örtliche Kondensationsgeschwindigkeit ist die Wärmestromdichte q im Film ausschlaggebend. Aus den Gln. (288) und (291) ergibt sich der *örtliche Wärmeübergangskoeffizient* α_δ bei der Filmdicke y und der Wärmeleitfähigkeit λ_m des Kondensats:

$$\alpha_\delta = \lambda_m/y \tag{349}$$

Infolge der Fallbeschleunigung g läuft das Kondensat mit der mittleren Geschwindigkeit c_K an der Wand herab. Die Filmdicke y nimmt mit der Temperaturdifferenz $(t_s - t_W)$ und der Wandlänge L zu. Für die Wandbreite von 1 m wird der Kondensatstrom $\dot{m}_K/1\ \mathrm{m} = c_K y \varrho_m/1\ \mathrm{m}$.

Laminarströmung des Kondensats

Bei der dynamischen Viskosität η_m ergibt sich die Reynolds-Zahl $Re_K = \dot{m}_{K1}/\eta_m \cdot 1\ \mathrm{m}$. Für $Re_K \leqq 350$ strömt der Film laminar, und für Dampfgeschwindigkeiten unter etwa 5 m/s ergibt sich bei vertikalen Rohren nach Nusselt der *mittlere Wärmeübergangskoeffizient* mit der kinematischen Viskosität $\nu = \eta/\varrho$:

$$\alpha = 0{,}943\,[g\varrho_m\lambda_m{}^3 r/\nu_m l(t_s - t_W)]^{0{,}25} \tag{350}$$

Bei horizontalen Rohren sind der Durchmesser d statt l und der Wert 0,726 statt 0,943 einzusetzen. Sie ergeben bei größeren Rohrlängen höhere Wärmeübergangskoeffizienten als vertikale Rohre, bei denen die Filmdicke y stark ansteigt. Dies läßt sich allerdings durch Einbau von dachförmigen Kondensatableitern in hinreichend kleinen Abständen vermindern. Bei horizontalen Rohren bleibt auch in Rohrbündeln der Wärmeübergangskoeffizient nahezu unverändert, weil das auftropfende Kondensat der vorhergehenden Rohrreihe die Flüssigkeitsschicht der folgenden Rohrreihe durchwirbelt. Bei gleicher Strömungsrichtung von Dampf und Kondensat und Dampfgeschwindigkeiten über 5 m/s steigt infolge der Schubspannungen an der Oberfläche des Films der Wärmeübergangskoeffizient um etwa 20%.

Turbulente Strömung des Kondensats

Bei vertikalen Rohren und $Re_K > 350$ ergibt sich bei großen Temperaturdifferenzen und Rohrlängen l eine Zunahme des mittleren Wärmeübergangskoeffizienten α. Nach [8] gilt:

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-3}[g\lambda_m{}^3 l(t_s - t_W)/\varrho_m\nu_m{}^3 r]^{0{,}5} \tag{351}$$

Um ohne Kenntnis von Re_K festzustellen, ob das Kondensat turbulent oder laminar strömt, wird α nach den Gln. (350), (351) berechnet. Bei Laminarströmung ergibt Gl. (350), bei turbulenter Gl. (351) den größeren Wert. Die Gleichungen gelten auch für überhitzten Dampf, wobei statt r die Enthalpiedifferenz $(h_ü - h')$ eingesetzt wird. Bei rauhen Wandflächen vermindern sich infolge der größeren Filmdicke die Filmgeschwindigkeit und der Wärmeübergangskoeffizient bis 30% und mehr. Sind im Dampf bei der Temperatur t_W nicht kondensierbare Gase (z. B. Luft) enthalten, nehmen Partialdruck des Dampfes, seine Sättigungstemperatur t_s (Tabelle 21) an der Filmoberfläche und die Temperaturdifferenz $(t_s - t_W)$ ab. Vorwiegend durch Diffusion (s. 4.5.3.) gelangt Dampf an die Filmschicht. Der Wärmeübergangskoeffizient wird beträchtlich kleiner als nach den Gln. (350), (351) bei reinem Dampf α_r (Bild 47). Bei 0,5 Masse-% Luft ist $\alpha = 0{,}6\alpha_r$. Ausreichendes Absaugen der Luft aus dem Kondensator vermindert die Abnahme.



Beispiel. An einer vertikalen sauberen Wand von $l = 4$ m Höhe und konstanter Wandtemperatur $t_W = 145\,°C$ kondensiert reiner Sattdampf von $t_s = 155\,°C$. Zu ermitteln ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient α.
Für $t_s = 155\,°C$ ergibt sich aus Tabelle 16 $r = 2{,}114$ MJ/kg und für $t_m = 150\,°C$ die mittlere Dichte des Kondensatfilms $\varrho_m = 1/v_m = 918{,}5$ kg/m³. Aus Tabelle 26 werden für 150 °C die kinematische Viskosität $\nu_m = 0{,}201 \cdot 10^{-6}$ m²/s und die Wärmeleitfähigkeit $\lambda_m = 0{,}683$ W/(m · K) ermittelt. Nach Gl. (350) ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient:

$$\alpha = 0{,}943 \cdot [9{,}81 \cdot 918{,}5 \cdot 0{,}683^3 \cdot 2{,}114 \cdot 10^6/0{,}201 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot (155 - 145)]^{0,25}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot k)}$$
$$= 4{,}943\ \mathrm{kW/(m^2 \cdot K)}$$

und nach Gl. (351):

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-3}[9{,}81 \cdot 0{,}683^3 \cdot 4 \cdot (155 - 145)/918{,}5 \cdot 0{,}201^2 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}114 \cdot 10^6]^{0,5}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$$
$$= 8{,}447\ \mathrm{kW/(m^2 \cdot K)}.$$

Bei dieser Wandhöhe strömt der Kondensatfilm turbulent, weil der α-Wert nach Gl. (351) größer als nach Gl. (350) wird.

Tropfenkondensation

Das Kondensat schlägt sich in Form kleinster Tröpfchen nieder, wenn es eine glatte Wand unvollständig benetzt, z. B. wenn bei Wasserdampf ein dünner Ölfilm an der Wand haftet. Dabei genügt eine monomolekulare Ölschicht, deren Wärmeleitwiderstand vernachlässigbar ist. Die Tröpfchen vergrößern sich, bis sie unter dem Einfluß der Schwerkraft an der Wand herabfließen. Ebenso tritt Tropfenkondensation bei verschiedenen Dampfgemischen (z. B. Wasser- und Benzoldampf) auf, selbst bei Filmkondensation beider reinen Dämpfe. Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient ist bei Tropfenkondensation stets wesentlich größer als bei Filmkondensation und erreicht je nach Wandmetall, Dampfgeschwindigkeit und Impfstoff Werte von 17,5···200 kW/(m² · K). In technisch verwendeten Kondensatoren läßt sich eine reine Tropfenkondensation infolge der Wandrauhigkeit nicht erreichen; es treten gleichmäßig Film- und Tropfenkondensation (*Mischkondensation*) auf.

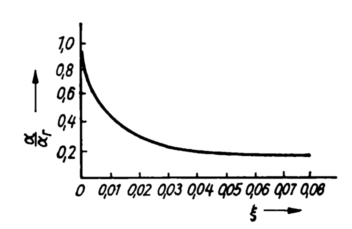


Bild 47. Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten α/α_r (nach [16]) bei der Kondensation von lufthaltigem und reinem Dampf bis zum Masseverhältnis $\xi = 0{,}08$

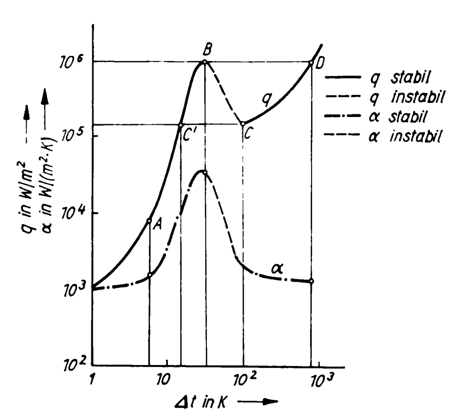


Bild 48. Allgemeine Siedekurve für reines Wasser bei $t_s = 100\,°C$ und konstantem Druck $p_s = 101{,}325$ kPa in doppeltlogarithmischer Darstellung (nach [6])

8.4.2. Verdampfung von Flüssigkeit

Verdampft Flüssigkeit in einem offenen System bei konstantem Druck, bleibt die entsprechende Sättigungstemperatur t_s (bei Wasser Tabelle 16) konstant. Bei konstanter Wandtemperatur $t_W > t_s$ hängt die Art der Verdampfung von der Flüssigkeit und vom Temperaturunterschied $\Delta t = (t_W - t_s)$ ab. Alle folgenden Zahlenangaben nach [6] gelten für die Verdampfung von reinem Wasser bei 100 °C (allgemeine Siedekurve, Bild 48). Ist Δt kleiner als 5,5 K (Punkt A), erfolgt die Dampfbildung weder an der Heizfläche

noch in der Flüssigkeit, sondern nur an der Flüssigkeitsoberfläche (*Oberflächenverdampfung*). Der Wärmeübergang erfolgt ohne Phasenänderung, und die Wärmestromdichte q von der Wand in die Flüssigkeit läßt sich mit den Gleichungen für freie oder erzwungene Strömung ermitteln. Nur in einer dünnen Grenzschicht an der Heizfläche wird die Flüssigkeit stärker überhitzt (in der an der Heizfläche haftenden Schicht bis t_W). Dann ändert sich ihre Temperatur bis zur Oberfläche wenig (dort wird 100,4 °C erreicht). Bei Temperaturdifferenzen über 5,5 K sind in einzelnen Poren oder Rauhigkeitsvertiefungen der glatten Metalloberfläche Luft-, Gas- oder Dampfkeime mit etwa 3 μm Durchmesser, deren Anzahl je Quadratzentimeter von 1 bis etwa 40 bei $\Delta t = 25$ K und 100 bei $\Delta t = 30$ K (Punkt B) zunimmt, vorhanden. Ihre Wärmeaufnahme von der Heizfläche ist vernachlässigbar klein, jedoch verdampft überhitzte Flüssigkeit der Grenzschicht in sie hinein, so daß sich ihr Durchmesser sehr rasch auf 0,05 ··· 5 mm vergrößert und sie mit einer Frequenz von etwa 20 Hz bei großen, bis 100 Hz bei kleineren Durchmessern abreißen. Dadurch entsteht eine starke *Pulsationsströmung*. Die kältere Flüssigkeit strömt so prallartig auf die Heizfläche und zerstört die stärker überhitzte Grenzschicht. Der Einfluß der freien oder erzwungenen Geschwindigkeit wird immer kleiner, und die Wärmestromdichte q und der Wärmeübergangskoeffizient α nehmen beträchtlich zu (Tabelle 33). Die abgerissenen Blasen steigen zur Oberfläche und vergrößern dabei ihr Volumen durch Verdampfung überhitzter Flüssigkeit auf das Mehrfache. Der gesamte Vorgang, bei dem der Dampf in den Blasen stets die Sättigungstemperatur hat, wird als *Blasenverdampfung* bezeichnet. Dampfblasen von Flüssigkeiten, die metallische Heizflächen benetzen (Petroleum, Wasser), lösen sich bei kleinerem Volumen leichter als die von nicht benetzenden Flüssigkeiten von der Heizfläche ab. Für Wasser gelten nach [6] im Gebiet der intensiven Blasenverdampfung bei Sättigungsdrücken p_s von 10 kPa bis etwa 15 MPa die Zahlenwertgleichungen

$$\alpha = 281{,}7 \cdot q^{0{,}72} \cdot (p/100)^{0{,}24}$$
$$\alpha = 10{,}82 \cdot \Delta t^{2{,}57} (p/100)^{0{,}857} \qquad (352)$$

α	q	p	Δt
W(m² · K)	kW/m²	kPa	K

Mit steigendem Druck nimmt der Abreißdurchmesser ab, während der Wärmeübergangskoeffizient zunimmt.

Tabelle 33. Abhängigkeit der Wärmestromdichte q und des Wärmeübergangskoeffizienten α von der Art der Verdampfung und dem Temperaturunterschied $\Delta t = t_W - t_s$ beim Sieden von reinem Wasser (bei 100 °C und 101,325 kPa) (nach [6])

Temperaturdifferenz Δt in K	Verdampfung	Punkt im Bild 48	Wärmestromdichte q in kW/m²	Wärmeübergangskoeffizient α in kW/(m² · K)
1	Oberflächenverdampfung		1,100	1,130
5,5	Beginn der Blasenverdampfung	A	8,150	1,600
15	Blasenverdampfung	C′	195,000	13,700
25	Blasenverdampfung		630,000	33,000
30	Beginn der instabilen Filmverdampfung	B	930,000	34,000
100	Beginn der stabilen Filmverdampfung	C	195,000	2,000
800	stabile Filmverdampfung	D	930,000	1,340

Bei Temperaturdifferenzen von 30 ··· 100 K (Punkt C) lösen sich nicht mehr alle Dampfblasen von der Wandfläche, sondern wachsen zu *Dampffilmen* zusammen, die sich zeitlich und örtlich sehr verschieden ausbilden. Sie lösen sich als *Dampfballen* ab und steigen zur Oberfläche. Infolge der abnehmenden Rührwirkung und der niedrigen Wärmeleitfähigkeit des Dampfes werden bei konstanter Wandtemperatur (z. B. beim Heizen mit kondensierendem Dampf) die Wärmestromdichte q und der Wärmeübergangskoeffizient α kleiner (Gebiet der *instabilen Filmverdampfung*). Bei Temperaturdifferenzen über 100 K bildet sich ein stabiler Dampffilm zwischen Heizfläche und Flüssigkeit. Diese verdampft an der Phasengrenze zum Dampffilm (*stabile Filmverdampfung*). Die dazu erforderliche Energie muß durch die mit wachsender Temperaturdifferenz Δt dicker werdende Dampfschicht mit kleiner Wärmeleitfähigkeit λ (s. Tabelle 26) und Temperaturstrahlung (s. 8.6.2.) transportiert werden. Infolge der Temperaturstrahlung nimmt die Wärmestromdichte $\dot{q}$ trotz weiter abnehmender Wärmeübergangskoeffizienten α (Tabelle 33) wieder zu, erreicht aber erst bei $\Delta t = 800$ K (Punkt D) den Maximalwert der Blasenverdampfung. In Anlagen mit aufgeprägter Wärmestromdichte (z. B. Kernreaktoren oder bei elektrischer Heizung), steigt beim Überschreiten des Maximalwerts der Blasenverdampfung die Wandtemperatur sehr rasch (Parallele zur Abszisse durch B und D im Bild 48), wobei sich statt der Blasenverdampfung die stabile Filmverdampfung ausbildet. Dabei kann u. U. die Heizfläche durchbrennen. Selbst beim Vermindern der Wärme-

stromdichte q bleibt dann die stabile Filmverdampfung mit viel höheren Wandtemperaturen als bei der Blasenverdampfung bis zum Punkt C bestehen. Erst bei weiterer Abnahme von q stellt sich wieder Blasenverdampfung (Punkt C') ein, bei der die Wärmestromdichte bis auf den Maximalwert gesteigert werden darf.

8.5. Stationärer Wärmedurchgang

8.5.1. Wärmedurchgangskoeffizient k und Wärmedurchgangswiderstand R_k

Ebene Wand

Die Wärme wird von einem strömenden Fluid, dessen mittlere Temperatur in hinreichender Entfernung von der Wand t_i ist, durch eine aus n Schichten bestehende Wand (Oberflächentemperaturen t_{Wi} und t_{Wa}, Wanddicken $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, Wärmeleitfähigkeiten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) an ein zweites strömendes Fluid mit konstanter mittlerer Temperatur $t_a < t_i$ in hinreichender Entfernung von der Wand transportiert. Es ergibt sich für zwei Wärmeübergangs- und n Wärmeleitvorgänge der Wärmestrom $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = \alpha_i A(t_i - t_{Wi}) = \lambda_1 A(t_{Wi} - t_{W2})/\delta_1 = \lambda_2 A(t_{W2} - t_{W3})/\delta_2$$
$$= \lambda_n A(t_{Wn} - t_{Wa})/\delta_n = \alpha_a A(t_{Wa} - t_a) = kA(t_i - t_a) = (t_i - t_a)/R_k \qquad (353)$$

Dabei ist der Wärmedurchgangskoeffizient:

$$k = 1/[(1/\alpha_i) + (\delta_1/\lambda_1) + (\delta_2/\lambda_2) + \cdots + (\delta_n/\lambda_n) + (1/\alpha_a)] \qquad (354)$$

und der Wärmedurchgangswiderstand:

$$R_k = 1/kA = R_{\alpha i} + \sum R_\lambda + R_{\alpha a} \qquad (355)$$

Aus Gl. (353) oder der im Bild 49 ersichtlichen Weise lassen sich die Wandtemperaturen t_{Wi} und t_{Wa} ermitteln. Die Temperaturen der Fluida in Wandnähe hängen von den Strömungszuständen (s. 8.3.) ab, jedoch verhalten sich ihre Neigungen an der Wand umgekehrt wie die Wärmeleitfähigkeiten der Fluida bei den Temperaturen t_{Wi} und t_{Wa}. Dadurch ergibt sich an den Wandoberflächen ein Knick im Temperaturverlauf.

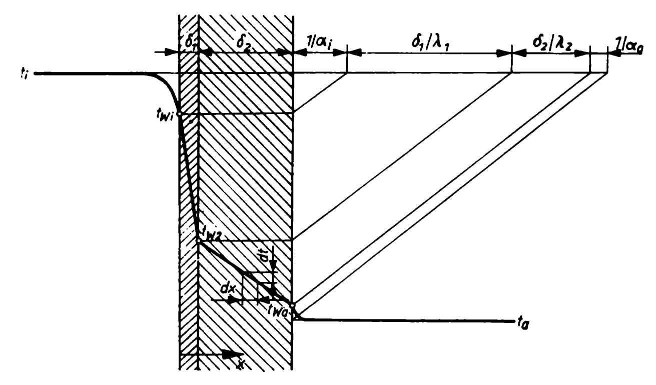


Bild 49. Temperaturverlauf beim stationären Wärmedurchgang durch eine ebene Wand, an der die Fluida in hinreichender Entfernung von der Wand mit jeweils konstanten Temperaturen $t_i > t_a$ strömen

Rohrwand (Bild 50), **3 Schichten**

Für 1 m Rohrlänge wird der stationäre Wärmestrom Q bei der gesamten Rohrlänge L:

$$\dot{Q}/L = \pi\alpha_i d_i(t_i - t_{Wi}) = 2\pi\lambda_1(t_{Wi} - t_{W2})/\ln(d_2/d_i)$$
$$= 2\pi\lambda_2(t_{W2} - t_{W3})/\ln(d_3/d_2) = 2\pi\lambda_3(t_{W3} - t_{Wa})/\ln(d_a/d_3)$$
$$= \pi\alpha_a d_a(t_a - t_{Wa}) = k_R(t_i - t_a) = (t_i - t_a)/LR_{kR} \qquad (356)$$

Dabei ist der Wärmedurchgangskoeffizient:

$$k_R = \pi \Big/ \left(\frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_i} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \ln \frac{d_a}{d_3} + \frac{1}{\alpha_a d_a} \right) \tag{357}$$

Der Wärmedurchgangswiderstand für 1 m Rohrlänge wird:

$$LR_{kR} = LR_{\alpha Ri} + L \sum R_{\lambda R} + LR_{\alpha Ra} = 1/\pi d_i \alpha_i + \ln (d_2/d_i)/2\pi\lambda_1 + \ln (d_3/d_2)/2\pi\lambda_2 + \ln (d_a/d_3)/2\pi\lambda_3 + 1/\pi d_a \alpha_a \tag{357a}$$

Werte für $\ln (d_2/d_1)$, ... enthält Tabelle 27. Für vorgeschriebene Rohrabmessungen, Wärmeleitfähigkeiten und ermittelte Wärmeübergangswiderstände, mittlere Fluidtemperaturen t_i und t_a lassen sich der Wärmestrom je Meter Rohrlänge und die Temperaturen t_{Wi} und t_{Wa} aus Gl. (356) berechnen.

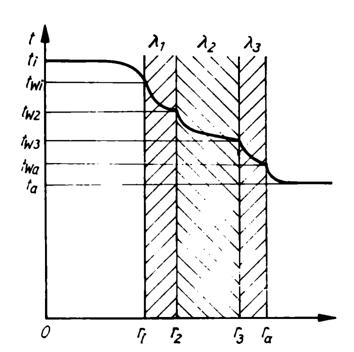


Bild 50. Temperaturverlauf beim stationären Wärmedurchgang durch eine Rohrwand, an der die Fluida in hinreichender Entfernung von der Wand mit jeweils konstanten Temperaturen $t_i > t_a$ strömen

8.5.2. Wärmeübertrager (Rekuperator)

Längs der Fläche A oder der Rohrlänge L wird der Wärmestrom $\dot{Q}$ vom Massestrom $\dot{m}_1$ an den Massestrom $\dot{m}_2$ transportiert, ohne daß sich die Aggregatzustände der Fluida ändern. Der Wärmeübertrager wird als adiabates System mit konstanten Stoffwerten und konstanten Werten von Druck, Wärmeübergangskoeffizienten, Wärmedurchgangskoeffizient bei ebenen Platten oder Wärmedurchgangswiderstand je Meter Rohrlänge bei Rohrbündeln und vernachlässigbar kleiner Wärmeleitung in Strömungsrichtung der Fluida in der festen Wand und den beiden Fluida betrachtet. Der *Wärmekapazitätsstrom* $\dot{C} = \dot{m}c_p$ ist der Wärmestrom zum Erhöhen der Temperatur des Massestroms $\dot{m}$ um 1 K. Die Temperaturen der beiden Fluidströme ändern sich längs der Heizfläche von den Anfangswerten t_1' und t_2' auf die Endwerte t_1'' und t_2'' um $\Delta t_1 = (t_1' - t_1'')$ und $\Delta t_2 = (t_2'' - t_2')$. Der Temperaturverlauf längs der Heizfläche hängt von der Strömungsrichtung (Bild 51) und dem Verhältnis der Wärmekapazitätsströme $\dot{C}_1/\dot{C}_2$ ab. Beim Kreuzstrom ändern sich die Temperaturen t'' im Austrittsquerschnitt (Bild 51c), und es muß mit t''_{1m} und t''_{2m} gerechnet werden. Die Temperaturdifferenzen zwischen den beiden Fluidströmen ändern sich meist längs der Heizfläche, sie werden auf der Eintrittsseite des wärmeabgebenden Fluidstroms $\dot{m}_1$ mit Δt_0 und auf seiner Austrittsseite mit Δt_A bezeichnet. Im Bild 52 sind die Temperaturverläufe für Gleich- und Gegenstrom bei $\dot{C}_1/\dot{C}_2 \lesseqgtr 1$ dargestellt. Obgleich die Temperaturdifferenz nur bei Gegenstrom und $\dot{C}_1/\dot{C}_2 = 1$ konstant bleibt, werden für den verlangten Wärmestrom $\dot{Q}$ mit Gl. (353) die *Plattenwärmeübertrager* und mit Gl. (356) die *Rohrbündelwärmeübertrager* berechnet, wobei sich für den mittleren Temperaturunterschied Δt_m bei $\Delta t_0 > \Delta t_a$ ergibt:

$$\Delta t_m = (\Delta t_0 - \Delta t_A)/\ln (\Delta t_0/\Delta t_A) = \psi \Delta t_0 \tag{358}$$

mit

$$\psi = [1 - (\Delta t_A/\Delta t_0)]/\ln (\Delta t_0/\Delta t_A) \tag{359}$$

Bei Gegenstrom und $\dot{C}_1/\dot{C}_2 > 1$ wird $\Delta t_0 < \Delta t_A$ und

$$\Delta t_m = (\Delta t_A - \Delta t_0)/\ln (\Delta t_A/\Delta t_0) = \psi \Delta t_A \tag{360}$$

mit

$$\psi = [1 - (\Delta t_0/\Delta t_A)]/\ln (\Delta t_A/\Delta t_0) \tag{361}$$

Für $(\Delta t_A/\Delta t_0)$ und $(\Delta t_0/\Delta t_A)$ von 0,05 ··· 0,90 sind die ψ-Werte in Tabelle 34 zusammengestellt. Für stationären Wärmedurchgang ergibt die Energiebilanz:

$$\dot{Q} = \dot{C}_1(t_1' - t_1'') = \dot{C}_2(t_2'' - t_2') = \dot{C}_1 \Delta t_1 = \dot{C}_2 \Delta t_2 = \Delta t_m / R_k \tag{362}$$

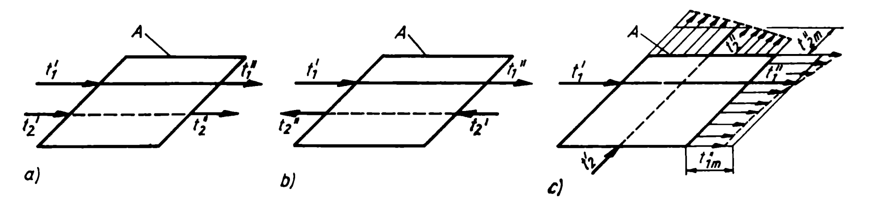


Bild 51. Strömungsrichtungen bei Plattenwärmeübertragern. a) Gleichströmer; b) Gegenströmer; c) Kreuzströmer

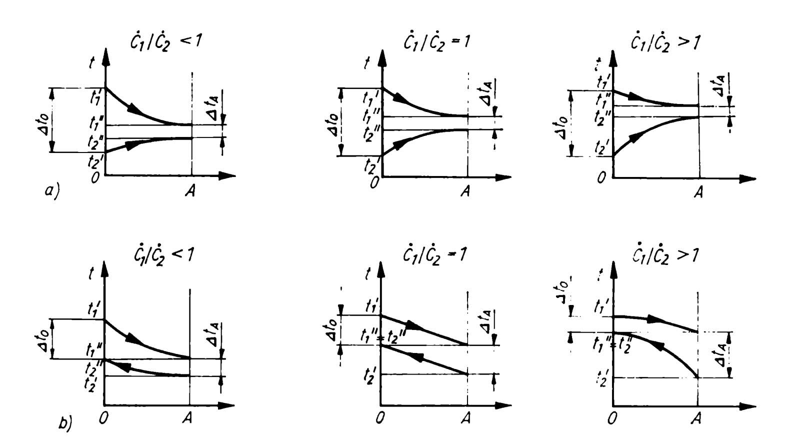


Bild 52. Temperaturverlauf längs der Heizfläche bei verschiedenen Verhältnissen der Wärmekapazitätsströme $\dot{C}_1/\dot{C}_2 \lesseqgtr 1$ ohne Änderung des Aggregatzustands. a) für Gleichstrom; b) für Gegenstrom

Tabelle 34. Werte für ψ zum Berechnen der mittleren Temperaturdifferenz bei Gleich- und Gegenströmern in Abhängigkeit von $\Delta t_A/\Delta t_0$ oder $\Delta t_0/\Delta t_A$

$\Delta t_A/\Delta t_0$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	
ψ	0,317	0,334	0,350	0,364	0,391	0,415	0,437	0,458	0,478	
$\Delta t_A/\Delta t_0$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
ψ	0,497	0,541	0,582	0,620	0,657	0,722	0,785	0,84	0,90	0,95

mit dem Wärmedurchgangswiderstand R_k nach Gln. (355), (357a). Für Plattenwärmeübertrager wird meist mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten k geschrieben:

$$\dot{Q} = \dot{C}_1(t_1' - t_1'') = \dot{C}_2(t_2'' - t_2') = kA\Delta t_m \qquad (363)$$

Nach [1] werden über den dimensionslosen Werten:

$$1/\dot{C}_1R_k = kA/\dot{C}_1 = (t_1' - t_2'')/\Delta t_m \qquad (364)$$

für die sich durch eine logarithmische Teilung bei kleinen Werten die Ablesegenauigkeit erhöht, für verschiedene Verhältnisse der Wärmekapazitätsströme $\dot{C}_1/\dot{C}_2$ von 0 ··· 20 die als *„Betriebscharakteristik"* bezeichneten Werte:

$$\Phi = (t_1' - t_1'')/(t_1' - t_2') \qquad (365)$$

aufgetragen, mit $0 \leqq \Phi \leqq 1$. Die Temperaturabnahme des Heizstoffs bei vorgeschriebenen Zulauftemperaturen t_1' und t_2' nimmt mit wachsenden Φ-Werten zu. Nur für $\dot{C}_1/\dot{C}_2 = 0$ ist mit Gleichströmern $\Phi = 1$ erreichbar. Von $\dot{C}_1/\dot{C}_2 = 0$ abgesehen, ergeben sich bei bestimmten Werten für $\dot{C}_1/\dot{C}_2$ bei Gleich-, Gegen- und Kreuzströmern unterschiedliche Kurven (3 Diagramme), die jedoch bei $\Phi = 0$ und $1/\dot{C}_1 R_k = 0$ eine gemeinsame Tangente haben. Bei $1/\dot{C}_1 R_k \leqq 0{,}8$ und $\dot{C}_1/\dot{C}_2 \leqq 0{,}6$ ergeben sich mit allen drei Wärmeübertragerbauarten keine wesentlichen Unterschiede. Außerhalb dieses Bereichs wird für einen bestimmten Wärmestrom $\dot{Q}$ bei vorgeschriebenen Zulauftemperaturen t_1', t_2' und Masseströmen $\dot{m}_1$, $\dot{m}_2$ die erforderliche wärmeübertragende Oberfläche bei Gegenströmern am kleinsten, bei Kreuzströmern etwas größer und bei Gleichströmern am größten.

Die Betriebscharakteristik-Diagramme lassen sich für *Kondensatoren* $[(t_1' - t_1'') = 0;\ \dot{C}_1/\dot{C}_2 = \infty]$ durch Einführen der Betriebscharakteristik:

$$\Phi^+ = (t_I' - t_I'')/(t_I' - t_{II}') \tag{366}$$

mit Index I für den Kühlstoff und Index II für den kondensierenden Stoff, d. h. $\dot{C}_I/\dot{C}_{II} = 0$, verwenden.

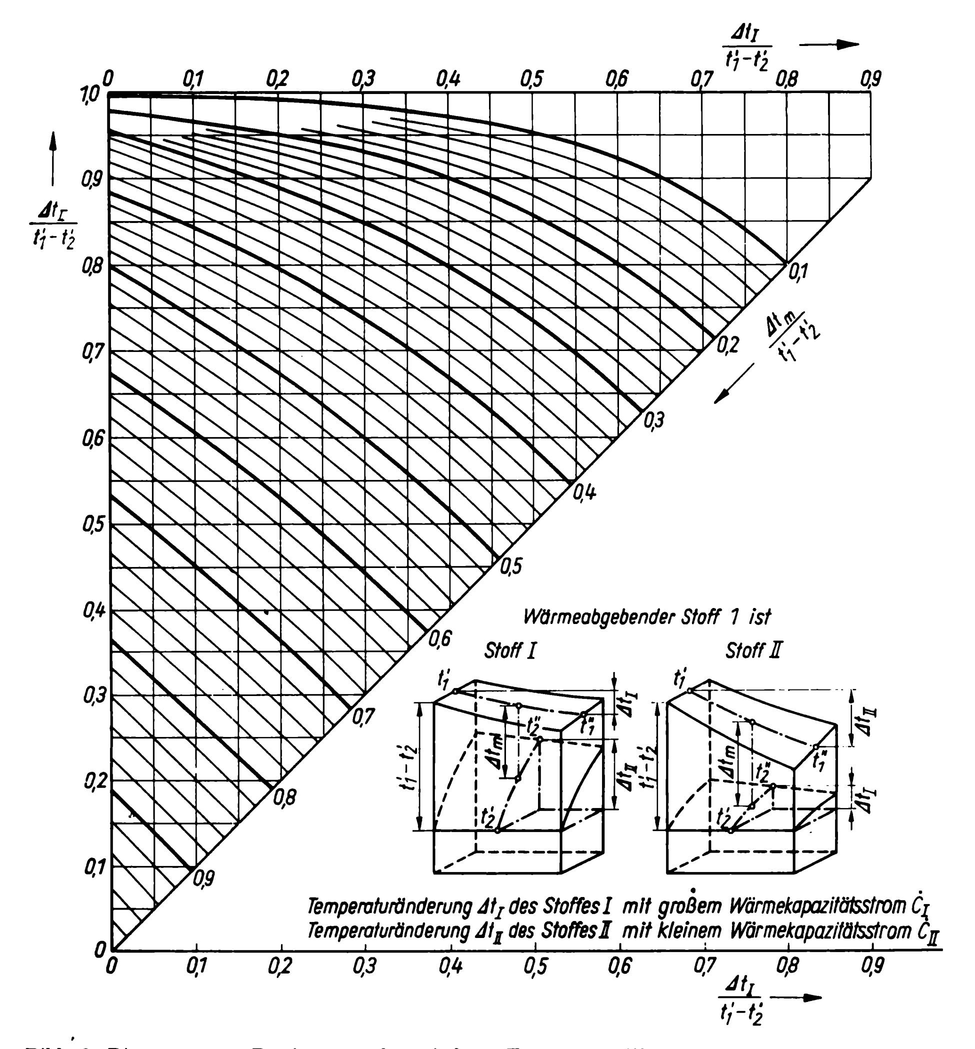


Bild 53. Diagramm zur Bestimmung der mittleren Temperaturdifferenz für Kreuzstrom (nach [15])



Für *Gleichströmer* (Bild 51a) ist:

$$\Phi = \frac{1 - e^{-[1+(\dot{C}_1/\dot{C}_2)]/\dot{C}_1 R_k}}{1 + (\dot{C}_1/\dot{C}_2)} \tag{367}$$

für *Gegenströmer* (Bild 51b):

$$\Phi = \frac{1 - e^{-[1-(\dot{C}_1/\dot{C}_2)]/\dot{C}_1 R_k}}{1 - (\dot{C}_1/\dot{C}_2)\, e^{-[1-(\dot{C}_1/\dot{C}_2)]/\dot{C}_1 R_k}} \tag{368}$$

Mit diesen Gleichungen läßt sich ohne Diagramm für einen ausgeführten Wärmeübertrager für bestimmte Masseströme, d. h. bekannte Werte $\dot{C}_1/\dot{C}_2$ mit ihren Zulauftemperaturen t_1' und t_2', die Ablauftemperatur des wärmeabgebenden Stoffes t_1'' berechnen. Aus Gl. (362) ergeben sich der übertragene Wärmestrom $\dot{Q}$ und die Ablauftemperatur t_2'' des wärmeaufnehmenden Stoffes.

Für *Kreuzstrom*, bei dem der wärmeabgebende Massestrom $\dot{m}_1$ senkrecht zur Richtung des wärmeaufnehmenden Massestroms $\dot{m}_2$ fließt, lassen sich die Temperaturdifferenzen Δt_0 und Δt_A nicht festlegen. Es gilt Gl. (362), und damit läßt sich bei ausgeführten Wärmeübertragern für bestimmte Masseströme $\dot{m}_1$ und $\dot{m}_2$ bei bekannten Zulauftemperaturen eine Ablauftemperatur messen. Dann können der Wärmestrom $\dot{Q}$, die zweite Ablauftemperatur, die mittlere Temperaturdifferenz Δt_m und die Betriebscharakteristik Φ berechnet werden. Die exakte Berechnung nach Nusselt [3] ist für die Praxis zu aufwendig. Bei den von Kühne [15] aufgestellten Diagrammen (Bilder 53, 54) werden alle Temperaturdifferenzen auf $(t_1' - t_2')$ bezogen und der Stoff I mit dem größeren und der Stoff II mit dem kleineren Wärmekapazitätsstrom $(\dot{C}_I > \dot{C}_{II})$ eingeführt. Bei Bild 53 sind auf der Abszissenachse $\Delta t_I/(t_1' - t_2')$ und auf der Ordinatenachse $\Delta t_{II}/(t_1' - t_2')$ angegeben. Auf den eingetragenen Kurven für $\Delta t_m/(t_1' - t_2')$ ergibt sich die in die Gln. (353), (356) beim Durchgangswiderstand R_k oder LR_k einzusetzende mittlere Temperaturdifferenz Δt_m. Aus Bild 54 läßt sich der Wert $\Delta t_{II}/(t_1' - t_2')$ ablesen. Mit Gl. (362) sind der Wärmestrom $\dot{Q}$ und die Ablauf-

Bild 54. Diagramm zur Bestimmung der Werte $1/\dot{C}_{II}R_k$ und der Ablauftemperaturen für Kreuzstrom (nach [15])

temperaturen t_1'' und t_2'' zu berechnen, wenn der Wärmeübertrager und die beiden Masseströme mit ihren Zulauftemperaturen bekannt sind. Sind Zu- und Ablauftemperaturen und ein Massestrom gegeben, werden mit Gl. (362) der Wärmestrom $\dot{Q}$ und der zweite Massestrom und aus dem Wert $1/\dot{C}_{II}R_k$ des Bildes 54 der Wärmedurchgangswiderstand R_k berechnet.

Beispiel. In einem Gegenstromröhrenkühler, der 350 mm Innendurchmesser hat, sind $z_R = 184$ Stahlrohre [$\lambda_{St} = 46{,}6$ W/(m · K) mit 18/13 mm Durchmesser und je 2,8 m Länge] angeordnet ($L_1 = 184 \cdot 2{,}8$ m). Durch die Stahlrohre fließt ein trockener Luftstrom $\dot{m}_1 = 0{,}86$ kg/s mit 400 kPa und $t_1' = 160\,°C$ Eintrittstemperatur. Die Rohre werden von einem Wasserstrom $\dot{m}_2 = 2{,}5$ kg/s mit 100 kPa und $t_2' = 27\,°C$ umspült. Zu berechnen sind die Betriebscharakteristik Φ und die Ablauftemperaturen t_1'' und t_2'' des Luft- und Kühlwasserstroms. Wärmeverluste an die Umgebung bleiben unberücksichtigt!
Um den Wärmekapazitätsstrom $\dot{C}_1$ zu berechnen, wird die mittlere spezifische Wärmekapazität der Luft aus den mittleren molaren Wärmekapazitäten nach Tabelle 7 für eine angenommene Luftaustrittstemperatur von 45 °C ermittelt:

$$c_{p1}\Big|_{t_1''}^{t_1'} = \frac{\bar{c}_{p1}\Big|_0^{t_1'} \cdot t_1' - \bar{c}_{p1}\Big|_0^{t_1''} \cdot t_1''}{M(t_1' - t_1'')} = \frac{29{,}25 \cdot 160 - 29{,}1 \cdot 45}{28{,}96(160 - 45)}\ \text{kJ/(kg · K)} = 1{,}01\ \text{kJ/(kg · K)}$$

$$\dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_p\Big|_{t_1''}^{t_1'} = 0{,}86 \cdot 1010\ \text{W/K} = 869\ \text{W/K}$$

Der Wärmekapazitätsstrom des Wasserstroms mit $c_{p2} = 4{,}19$ kJ/(kg · K) ist $\dot{C}_2 = \dot{m}_2 c_{p2} = 2{,}5 \cdot 4190$ W/K $= 10{,}475$ kW/K und damit

$$\dot{C}_1/\dot{C}_2 = 869/10\,475 = 0{,}08296$$

Für Gegenstrom ist in Gl. (368) einzusetzen: $1 - (\dot{C}_1/\dot{C}_2) = 0{,}917\,04$. Für 1 m Rohrlänge wird nach Gl. (317) der Wärmeübergangswiderstand $L_1R_{\alpha 1}$ auf der Luftseite:

$$L_1R_{\alpha 1} = 1/\pi d_1\alpha_1$$

Infolge des niedrigen Drucks kann die Luft als vollkommenes Gas angesehen werden. Die dynamische Viskosität η_1 ist unabhängig vom Druck. In Tabelle 26 ist die kinematische Viskosität ν für 101,325 kPa Druck angegeben. Deshalb muß das spezifische Volumen v für diesen Druck berechnet werden. Bei der geschätzten mittleren Lufttemperatur von 100 °C ist:

$$v_1 = RT/p = 287{,}1 \cdot 373/101\,325\ \text{m}^3/\text{kg} = 1{,}057\ \text{m}^3/\text{kg}$$

Aus Tabelle 26:

$$\nu_1 = 23{,}06 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}; \quad \lambda_1 = 0{,}0314\ \text{W/(m · K)}; \quad Pr_1 = 0{,}704$$

$$\eta_1 = \nu_1/v_1 = 23{,}06 \cdot 10^{-6}/1{,}057\ \text{Pa · s} = 21{,}82 \cdot 10^{-6}\ \text{Pa · s}$$

Die Reynolds-Zahl wird nach Gl. (319):

$$Re_1 = 4\dot{m}_1/\pi z_R d_1\eta_1 = 4 \cdot 0{,}86 \cdot 10^6/\pi \cdot 184 \cdot 0{,}013 \cdot 21{,}82 = 20\,979 \approx 20\,980$$

Die Strömung ist turbulent. Zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten α kann Gl. (327) oder (328) verwendet werden. Nach Gl. (327) wird für $d_1/L \approx 0$:

$$Nu_1 = 0{,}116(Re_1^{2/3} - 125)\,Pr_1^{1/3} = 0{,}116(20\,980^{2/3} - 125) \cdot 0{,}704^{1/3} = 65{,}6$$

und nach Gl. (328):

$$Nu_1 = 0{,}021 \cdot Re_1^{0,80} \cdot Pr_1^{0,43} = 0{,}021 \cdot 20980^{0,80} \cdot 0{,}704^{0,43} = 51{,}8$$

Die Werte weichen beträchtlich voneinander ab, es wird mit dem arithmetischen Mittelwert $Nu_1 = 59$ weitergerechnet, für den sich der Wärmeübergangskoeffizient:

$$\alpha_1 = Nu_1\lambda_1/d_1 = 59 \cdot 0{,}0314/0{,}013\ \text{W/(m}^2 \cdot \text{K)} = 142{,}5\ \text{W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

und der Wärmeübergangswiderstand je Meter Rohrlänge:

$L_1R_{\alpha 1} = 1/\pi d_1\alpha_1 = 1/\pi Nu_1\lambda_1 = 1/\pi \cdot 59 \cdot 0{,}0314$ m · K/W $= 0{,}172$ m · K/W ergeben. Auf der Wasserseite sind der Gesamtquerschnitt: $A_2 = \pi \cdot 35^2/4 - 184\pi \cdot 1{,}8^2/4 = 494$ cm² und der gleichwertige Kreisrohrdurchmesser:

$$d_{gl2} = 4A_2/U_2 = 4A_2/\pi z_R d_a = 4 \cdot 494/\pi \cdot 184 \cdot 1{,}8\ \text{cm} = 1{,}90\ \text{cm}$$

Bei einer mittleren Wassertemperatur von etwa 32 °C und dem spezifischen Volumen nach Tabelle 16 ($v = 1{,}0050$ dm³/kg) werden der Volumenstrom: $\dot{V}_2 = \dot{m}_2 v = 2{,}5 \cdot 1{,}0050 = 2{,}5125$ dm³/s, nach der Kontinuitätsgleichung die Wassergeschwindigkeit: $c_2 = \dot{V}_2/A_2 = 2{,}5125/4{,}94$ dm/s $= 0{,}0509$ m/s, nach Tabelle 26 die kinematische Viskosität $\nu_2 = 0{,}771 \cdot 10^{-6}$ m²/s, die Wärmeleitfähigkeit $\lambda_2 = 0{,}616$ W/(m · K)

und die PRANDTL-Zahl $Pr_{f2} = 5{,}20$. Aus Gl. (318) ergibt sich die REYNOLDS-Zahl: $Re_2 = c_2 d_{gl2}/\nu_2 = 0{,}0509 \times 0{,}0190 \cdot 10^6/0{,}771 = 1254$
Da $Re_2 < 2320$ ist, herrscht erzwungene Laminarströmung. Bei der geschätzten mittleren Wandtemperatur auf der Wasserseite von 45 °C wird nach Tabelle 26 die PRANDTL-Zahl $Pr_{W2} = 3{,}96$. Mit Gl. (326) erhält man ohne Berücksichtigung der freien Konvektion:

$$Nu_2 = 0{,}15 \cdot Re^{0{,}33} \cdot Pr_{f2}^{0{,}43}(Pr_{f2}/Pr_{W2})^{0{,}25} = 0{,}15 \cdot 1254^{0{,}33} \cdot 5{,}20^{0{,}43}(5{,}20/3{,}96)^{0{,}25}$$
$$= 0{,}15 \cdot 10{,}52 \cdot 2{,}03 \cdot 1{,}07 = 3{,}43.$$

Für $L_1/d_{gl} > 50$ entfällt die Berücksichtigung der Anlaufstrecke. Es werden der Wärmeübergangskoeffizient: $\alpha_2 = Nu_2\lambda_2/d_{gl2} = 3{,}43 \cdot 0{,}616/0{,}019$ W/(m² · K) = 111,2 W/(m² · K), der Wärmeübergangswiderstand je Meter Rohrlänge: $L_1R_{a2} = 1/\pi Nu_2\lambda_2 = 1/\pi \cdot 3{,}43 \cdot 0{,}616$ m · K/W = 0,151 m · K/W, der Wärmeleitwiderstand je Meter Rohrlänge nach Gl. (298), der sehr klein im Vergleich zu den L_1R_α-Werten ist: $L_1R_\lambda = \ln(d_a/d_i)/2\pi\lambda = \ln(18/13)/2 \cdot \pi \cdot 46{,}6$ m · K/W = $1{,}11 \cdot 10^{-3}$ m · K/W, der Wärmedurchgangswiderstand je Meter Rohrlänge nach Gl. (357a): $L_1R_k = L_1R_{\alpha1} + L_1R_\lambda + L_1R_{\alpha2} = (0{,}172 + 0{,}00112 + 0{,}151)$ m · K/W = 0,324 m · K/W für den gesamten Kühler mit $L_1 = 184 \cdot 2{,}8$ m:

$$R_k = 0{,}324/184 \cdot 2{,}8 \text{ K/W} = 0{,}629 \cdot 10^{-3} \text{ K/W}$$
$$1/\dot C_1 R_k = 1/869 \cdot 0{,}629 \cdot 10^{-3} = 1{,}829$$
$$[1 - (\dot C_1/\dot C_2)]/\dot C_1 R_k = 0{,}91704 \cdot 1{,}829 = 1{,}677.$$

Die Betriebscharakteristik wird nach Gl. (368):

$$\Phi = \frac{1 - e^{-[1-(\dot C_1/\dot C_2)]/\dot C_1 R_k}}{1 - (\dot C_1/\dot C_2)\, e^{-[1-(\dot C_1/\dot C_2)]/\dot C_1 R_k}} = \frac{1 - e^{-1{,}677}}{1 - 0{,}08296\, e^{-1{,}677}} = \frac{0{,}81307}{0{,}9845} = 0{,}826.$$

Die Austrittstemperatur des Luftstroms ist nach Gl. (365):

$$t_1'' = t_1' - (t_1' - t_2')\,\Phi = [160 - (160 - 27) \cdot 0{,}826]\,°\text{C} \approx 50{,}1\,°\text{C}$$

und die Austrittstemperatur des Wasserstroms nach Gl. (362)

$$t_2'' = t_2' + (t_1' - t_1'')\,\dot C_1/\dot C_2 = (27 + 0{,}08296 \cdot 110)\,°\text{C} = 36{,}1\,°\text{C}.$$

8.6. Wärmeübertragung durch Temperaturstrahlung

8.6.1. Strahlungsgesetze

Die Wellenlänge der Temperaturstrahlung ($\lambda = 0{,}4 \cdots 800$ µm im sichtbaren und infraroten Spektrum) ist größer als die der Röntgen- und Höhenstrahlung und kleiner als die elektrischer Wellen. Die Temperaturstrahlung im gesamten Wellenlängenbereich, die auf der Oberfläche fester oder flüssiger Körper auftrifft, wird von dieser verschieden stark reflektiert, absorbiert oder durchgelassen. Der ***Reflexionskoeffizient r*** gibt den reflektierten, der ***Absorptionskoeffizient a*** den absorbierten und der ***Durchlaßkoeffizient d*** den durchgelassenen Teil der Gesamtstrahlung an:

$$r + a + d = 1 \qquad (369)$$

Man unterscheidet ideale weiße, schwarze, diathermane farbige und graue Körper.

Die Oberfläche des „*weißen Körpers*" reflektiert die gesamte auftreffende Temperaturstrahlung ($r = 1$) entweder bei glatter Oberfläche (deren Unebenheiten im Verhältnis zur Wellenlänge der Strahlung klein sind) spiegelnd oder bei rauher Oberfläche diffus. Dabei wird von dem im Mittelpunkt einer Halbkugel liegenden Flächenelement dA die Strahlung in alle Richtungen des Halbraums (Raumwinkel 2π) gleichmäßig reflektiert. Der „*schwarze Körper*" absorbiert alle Temperaturstrahlen ($a = 1$), während der „*diathermane*" die gesamte Temperaturstrahlung durchläßt ($d = 1$).
Die *schwarze Strahlung*, für die alle Werte durch den Index s gekennzeichnet werden, läßt sich durch einen Hohlraum verwirklichen, der mit einer (im Verhältnis zu seinen Abmessungen) kleinen Austrittsöffnung für die Strahlung versehen ist und dessen Wände überall gleiche Temperatur haben. Mit berußten Oberflächen ergibt sich die schwarze Strahlung nur unvollkommen (Tabelle 35). Beim *farbigen Körper* unterscheiden sich bei den verschiedenen Wellenlängen sowohl der Reflexions- als auch der Absorptionskoeffizient, während sie beim „*grauen Körper*" jeweils für alle Wellenlängen gleich, aber kleiner als Eins sind.

Tabelle 35. Emissionsverhältnisse ε der Gesamtstrahlung und ε_n der Strahlung in Richtung der Flächennormalen bei verschiedenen Temperaturen (nach [18])

Stoff	Temperatur in °C	Emissionsverhältnis ε	ε_n
Aluminium, walzblank	170	0,049	0,039
Blei, grau oxydiert	20	—	0,28
Chrom, poliert	150	0,071	0,058
Eisen, blank geätzt	150	0,158	0,128
Eisen, blank abgeschmirgelt	20	—	0,24
Eisen, angerostet	20	—	0,61
Eisen, stark verrostet	20	—	0,85
Gold, Silber, Kupfer } poliert	20	—	0,02 ··· 0,03
Kupfer, geschabt	20	—	0,07
Kupfer, schwarz oxydiert	20	—	0,78
Kupfer, oxydiert	130	0,725	0,76
Nickel, poliert	100	0,053	0,045
Nickel, matt	100	0,046	0,041
Wismut, blank	80	0,366	0,34
Zink, grau oxydiert	20	—	0,23 ··· 0,28
Dachpappe	20	—	0,93
Eis, glatt	0	0,918	0,966
Emaille, Lacke	20	—	0,85 ··· 0,95
Heizkörperlack, Mennigeanstrich	100	—	0,93
Holz	70	0,91	0,935
Papier	95	0,89	0,92
Porzellan	20	—	0,92 ··· 0,94
Ton, gebrannt	70	0,86	0,91
Wasserglasrußanstrich	20	—	0,96
Ziegelstein, Mörtel, Putz	20	—	0,93

Nur Körper, die Strahlung absorbieren, emittieren sie auch. Der je Flächeneinheit emittierte Gesamtenergiestrom eines beliebigen Strahlers wird mit E bezeichnet. Für schwarze Strahler ergibt sich der Maximalwert E_s. Das Verhältnis E/E_s ist das *Emissionsverhältnis* ε der Gesamtstrahlung. Es nimmt bei metallischen Oberflächen mit steigender Temperatur zu und bei nichtmetallischen ab. Das Emissionsverhältnis ε_n der Strahlung in Richtung der Flächennormalen wird bei blanken Metalloberflächen etwa $0{,}83\varepsilon$, bei anderen Körpern mit glatten Oberflächen $1{,}05\varepsilon$ und mit rauhen Oberflächen $1{,}02\varepsilon$.

Nach dem KIRCHHOFFschen Gesetz ist für jeden Wellenlängenbereich $d\lambda$ das Verhältnis der Emission E_λ eines Körpers zu seinem Absorptionskoeffizienten a_λ nur von der Körpertemperatur T, aber nicht von seinen sonstigen Eigenschaften abhängig:

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = a_\lambda(\lambda, T) \tag{370}$$

Bei einer bestimmten Temperatur T wird der Energiestrombetrag des schwarzen Strahlers für den Wellenlängenbereich $d\lambda$ als Strahlungsintensität $I_{\lambda s}$ bezeichnet. Der Gesamtenergiestrom für den Raumwinkel 2π ist:

$$E_s(T) = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} I_s(\lambda, T)\, d\lambda \tag{371}$$

Im Bild 55 ist die Abhängigkeit der Strahlungsintensität $I_s(\lambda)$ des schwarzen Strahlers von der Wellenlänge λ bei verschiedenen Temperaturen T für den Raumwinkel 2π dargestellt. PLANCK berechnete $I_s(\lambda, T)$ im Jahre 1900 mit Hilfe des PLANCKschen Wirkungsquantums h, der Lichtgeschwindigkeit c und der BOLTZMANNschen Konstanten k.

Das PLANCK*sche Strahlungsgesetz* lautet:

$$I_s(\lambda, T) = c_1/\lambda^5(e^{c_2/\lambda T} - 1) \tag{372}$$

$c_1 = 2\pi hc^2 = 374 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{W \cdot m^2}$, $c_2 = hc/k = 0{,}01438\ \mathrm{m \cdot K}$

Der im Wellenlängenbereich $d\lambda$ bei der absoluten Temperatur $T = 1200$ K von der Flächeneinheit in den Halbraum ausgestrahlte Energiestrom ist im Bild 55 besonders gekennzeichnet. Für den gesamten ausgestrahlten Energiestrom wird nach STEFAN-BOLTZMANN zweckmäßig geschrieben:

$$E_s(T) = C_s(T/100)^4 \tag{373}$$

$C_s = 5{,}77\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$, Strahlungskoeffizient des schwarzen Strahlers

Für den grauen Körper mit dem Emissionsverhältnis $\varepsilon_{gr} < 1$ ist der Strahlungskoeffizient $C_{gr} = \varepsilon_{gr} C_s$. Für schwarze Strahler, bei denen die Strahlung vollkommen zerstreut wird, ergibt sich der Energiestrom je Flächeneinheit $E_{\beta s}$ in der Richtung, die mit der Flächennormalen den Winkel β bildet, nach dem LAMBERT*schen Gesetz:*

$$E_{\beta s} = E_{ns} \cos \beta \tag{374}$$

Für graue Körper gilt diese Beziehung nur angenähert.

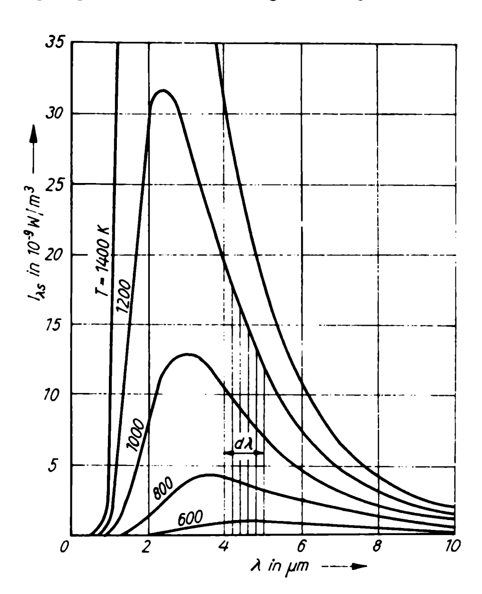


Bild 55. Abhängigkeit der Strahlungsintensität $I_s(\lambda)$ des schwarzen Strahlers von der Wellenlänge λ bei verschiedenen Temperaturen T für den Halbraum (Raumwinkel 2π)

8.6.2. Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen

Betrachtet werden zwei strahlungsundurchlässige ($d = 0$) graue Flächen A_1 mit höherer Temperatur T_1 und dem Strahlungskoeffizienten C_1 und A_2 mit niedrigerer Temperatur T_2 und dem Strahlungskoeffizienten C_2. Umschließt die Fläche A_2 die Fläche A_1 vollständig (Bild 56), ergibt sich die Differenz der Energieströme $(E_1 - E_2)$, die mit $\dot{Q}_{12}$ bezeichnet wird:

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} A_1 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] = \alpha_{St} A_1 (T_1 - T_2) \tag{375}$$

mit den resultierenden Strahlungskoeffizienten:

$$C_{12} = 1/[1/C_1 + (A_1/A_2)(1/C_2 - 1/C_s)] \tag{376}$$

Nur für $A_1/A_2 \ll 1$ wird $C_{12} \approx C_1$. Der Wärmeübergangskoeffizient α_{St} durch Strahlung analog zum konvektiven Wärmeübergang ergibt sich aus Gl. (375):

$$\alpha_{St} = C_{12}[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]/(T_1 - T_2) = \psi C_{12} \tag{377}$$

Die ψ-Werte sind aus Tabelle 36 zu entnehmen.
Bei gleich großen parallelen Ebenen gelten die Gln. (375), (376) mit $A_1 = A_2 = A$. Wenn Wärmeübergänge durch Konvektion und Strahlung gleichzeitig auftreten, sind die entsprechenden Wärmeübergangskoeffizienten zu addieren.

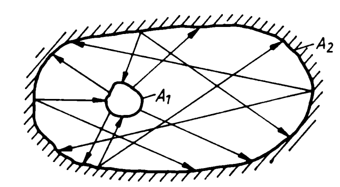


Bild 56. Temperaturstrahlung zwischen zwei Oberflächen

Tabelle 36. ψ-Werte in Abhängigkeit von t_1 und t_2

t_1 in °C	t_2 in °C												
	−100	0	20	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,465	0,814	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	0,540	0,908	1,008	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
50	0,666	1,060	1,172	1,34	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	0,923	1,380	1,49	1,70	2,08	—	—	—	—	—	—	—	—
200	1,630	2,225	2,36	2,69	3,07	4,23	—	—	—	—	—	—	—
300	2,673	3,408	3,60	3,87	4,42	5,77	7,53	—	—	—	—	—	—
400	4,08	4,99	5,20	5,55	6,19	7,75	9,73	12,19	—	—	—	—	—
500	5,94	7,03	7,29	7,71	8,44	10,23	12,46	15,19	18,48	—	—	—	—
600	8,28	9,59	9,89	10,36	11,30	13,27	15,77	18,70	22,38	26,61	—	—	—
700	11,19	12,72	13,07	13,62	14,62	16,92	19,71	23,04	26,96	31,55	36,84	—	—
800	14,72	16,50	16,90	17,53	18,66	21,26	24,36	28,01	32,29	37,29	42,93	49,5	—
900	18,92	20,97	21,47	22,20	23,42	26,33	29,76	33,76	38,41	43,75	49,85	56,8	64,6
1000	23,87	26,21	26,75	27,54	28,96	32,20	35,98	40,35	45,38	51,1	57,6	65,0	73,3
1200	36,21	39,2	39,83	40,84	42,62	46,5	52,1	56,3	62,2	68,7	76,2	84,5	93,8
1400	52,2	56,0	56,7	57,9	60,1	64,9	70,2	76,3	83,1	90,8	99,1	108,7	118,8

8.6.3. Gasstrahlung

Der *Reflexionskoeffizient* r ist bei Gasen stets Null. Alle ein- und zweiatomigen Gase sind diatherman ($d = 1$) oder absorbieren Strahlung nur in so schmalen Wellenbereichen, daß die Gesamtstrahlung selbst bei den höchsten technisch verwendeten Temperaturen vernachlässigbar klein bleibt. Bei mehratomigen Gasen (z. B. Kohlendioxid, Wasserdampf, Ammoniak, Schwefeldioxid, Teerdämpfe) ist die Eigenstrahlung bei Temperaturen über 400 °C zu berücksichtigen. In begrenzten Wellenlängenbereichen oder Banden (bei Kohlendioxid von 2,36 ··· 3,02 µm, 4,01 ··· 4,80 µm und 12,5 ··· 16,5 µm; bei Wasserdampf 2,24 ··· 3,27 µm, 4,8 ··· 8,5 µm und 12 ··· 25 µm) dringen ankommende Strahlen geradlinig in das Gas ein, wobei ihre Intensität allmählich abgebaut wird. Die geometrische Form des Gasraums ist daher zu berücksichtigen. Für eine bestimmte Wellenlänge λ hängt der Absorptionskoeffizient a_λ von dem *Extinktionskoeffizienten* $\varkappa_\lambda$ und dem Eindringweg x ab. Es gilt:

$$a_\lambda = 1 - \exp(-\varkappa_\lambda x) \tag{378}$$

Für den Extinktionskoeffizienten sind die Wellenlänge λ, die Temperatur T und die Schichtdicke x maßgebend. Die absorbierte Gesamtstrahlung oder die durch Strahlung emittierte Energie E ist für Kohlendioxid und Wasserdampf als den wichtigsten Mischungskomponenten der Feuerungsgase experimentell bei etwa 100 kPa Druck ermittelt und von SCHACK [17] analytisch ausgewertet worden. Ist in einem Gasgemisch nur Kohlendioxid mit dem Raumteil r_{CO_2} (s. 4.5.1.) nicht diatherman, so ist für $(xr_{CO_2}) = 0{,}003$ bis 0,4 m und $t = 500 \cdots 1800$ °C:

$$E = 10{,}35(xr_{CO_2})^{0,4}\,(T/100)^{3,2} \tag{379}$$

E	x	r	T
W/m²	m	—	K

Für Wasserdampf bei $(xr_{H_2O}) = 0 \cdots 0{,}36$ m und $t = 650 \cdots 1900$ °C gilt:

$$E = 1{,}163(40 - 73xr_{H_2O})^{0,6}\,(T/100)^{2,32+1,37\sqrt[3]{xr_{H_2O}}} \tag{380}$$

E	x	r	T
W/m²	m	—	K

Enthält ein Gasgemisch beide nicht diathermanen Gase, liegen die strahlenden Banden teilweise auf den gleichen Wellenlängen (s. o.), und die Gesamtstrahlung ist je nach Höhe der Temperatur um 2 ··· 5% kleiner als die Summe der Einzelstrahlungen.

Literaturverzeichnis

[1] *Bošnjaković, F.:* Technische Thermodynamik. 2 Teile. 6. bzw. 5. Aufl. — Dresden: Verlag Theodor Steinkopff 1972, 1971

[2] *Christian, W.:* Einführung in die technische Thermodynamik. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973

[3] *Elsner, N.:* Grundlagen der Technischen Thermodynamik. 3. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1975
[4] *Fischer, S.:* Zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von Einzelgasen und Gasmischungen bei der thermodynamischen Berechnung von Strömungsmaschinen. Freiberger Forschungshefte A 381. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1965
[5] *Fratzscher, W.:* Einführung des Exergiebegriffes in die Technische Thermodynamik. Anhang zum Lehrbuch von Wukalowitsch, M. P., und Nowikow, I. I., „Technische Thermodynamik". — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1962
[6] *Fitz, W.:* Grundlagen der Wärmeübertragung beim Verdampfen von Flüssigkeiten. Chem.-Ing.-Technik **35** (1963), S. 753···764
[7] *Gramberg, A.:* Technische Messungen bei Maschinenuntersuchungen und zur Betriebskontrolle. 7. Aufl. — Berlin (West): Springer-Verlag 1953
[8] *Grigull, U.:* Technische Thermodynamik. 2 Bände. Sammlung Göschen, Bd. 1084 und 1084a. 3. Aufl. — Berlin (West), New York: Verlag W. d. Gruyter 1977
[9] *Gröber, H., Erk, S., Grigull, U.:* Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. 3. Aufl. — Berlin (West): Springer-Verlag 1963
[10] *Häußler, W.:* Lufttechnische Berechnungen im MOLLIER-i,x-Diagramm. — Dresden: Verlag Theodor Steinkopff 1969
[11] *Heinrich, H.:* Zur Durchführung thermodynamischer Rechnungen. Wiss. Z. der TH Dresden 4 (1954/1955) 4, S. 539···544
[12] *Jante, A.:* Theoretische Verbrennungskraftmaschinen — Kreisprozesse, praktisch beurteilt. die Technik 4 (1949) 3, S. 94 ···98
[13] *Justi, E.:* Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation technischer Gase und Dämpfe. — Berlin: Springer-Verlag 1938
[14] *Krönert, J.:* Handbuch der technischen Betriebskontrolle. Band 2: Mengenmessungen im Betrieb. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1955
[15] *Kühne, H.:* Die Grundlagen der Berechnung von Oberflächenwärmeaustauschern. — Göttingen: Verlag Vandenhoeck und Ruprecht 1949
[16] *Michejew, M. A.:* Grundlagen der Wärmeübertragung. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1964
[17] *Schack, A.:* Der industrielle Wärmeübergang. 7. Aufl. — Düsseldorf: Verlag Stahleisen 1968
[18] *Schmidt, E.:* Technische Thermodynamik. 11. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1975
[19] *Wukalowitsch, M. P., Riwkin, C. L., Alexandrow, A. A.:* Tabellen der Wärmezustände des Wassers und des Wasserdampfes. — Moskau: 1969
[20] ILKA-Berechnungskatalog vom Institut für Luft- und Kältetechnik der DDR 1974
[21] Kältemaschinen-Regeln. Regeln für Leistungsversuche an Kältemaschinen und Kühlanlagen. 5. Aufl. — Verlag C. F. Müller 1958
[22] VDI-Wärmeatlas. Berechnungsblätter für den Wärmeübergang. 2. Aufl. — Düsseldorf: VDI-Verlag 1974

Weiterführende Literatur

[23] *Baehr, H. D.:* Thermodynamik. 4. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1978
[24] *Berties, W.:* Übungsbeispiele aus der Wärmelehre. 12. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[25] *Dietzel, F.:* Technische Wärmelehre kurz und bündig. — Würzburg: Vogel-Verlag 1976
[26] *Fleischer, L.-G., Picht, H.-P.:* Verfahrenstechnik — Technische Thermodynamik I. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976
[27] *Hell, F.:* Grundlagen der Wärmeübertragung. — Düsseldorf: VDI-Verlag 1973
[28] *Hohmann, K.:* Technische Wärmelehre. — Braunschweig: Vieweg 1971
[29] *Löffler, H. J.:* Thermodynamik. 2 Bände. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1969
[30] *Meyer, G., Schiffner, E.:* Technische Thermodynamik. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[31] *Puschmann, G., Drath, R.:* Die Grundzüge der technischen Wärmelehre. 24. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[32] *Rant, Z.:* Verdampfen in Theorie und Praxis. 2. Aufl. — Dresden: Verlag Theodor Steinkopff 1977
[33] *Schrieder, E.:* Aufgabensammlung aus der Technischen Wärmelehre. 19. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1969
[34] *Thiem, M.:* Einführung in die technische Wärmelehre. 2. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1971
[35] *Winter, F. W.:* Technische Wärmelehre. 9. Aufl. — Essen: Verlag Girardet 1975



EE Elektrotechnik und Elektronik

Von Prof. Dr. sc. nat. Reinhold Schönefeld, Ilmenau

Inhaltsverzeichnis

Wichtigste Formelzeichen[1])

Formelzeichen	Einheit	Größe
B	S (= 1/Ω)	Blindleitwert
$\mathbf{B}$	T (= Wb/m²)	magnetische Flußdichte, magnetische Induktion
C	F (= A · s/V)	elektrische Kapazität
$\mathbf{D}$	C/m²	Verschiebungsflußdichte, Verschiebung
$\mathbf{E}$	V/m	elektrische Feldstärke
E, U_{12}	V	Urspannung, Quellenspannung
e	V	Augenblickswert der Urspannung
e	C (= A · s)	Elementarladung
$\mathbf{F}$	T	magnetische Flußdichte, Induktion
f	Hz	Frequenz
G	S	Wirkleitwert, elektrischer Leitwert
$\mathbf{H}$	A/m	magnetische Feldstärke
I	A	elektrische Stromstärke
$\mathbf{J}$	A/m²	elektrische Stromdichte
L	H (= V · s/A)	Induktivität
M	H	Gegeninduktivität
$\mathbf{m}$	A · m²	magnetisches Moment
m_e	kg	Ruhmasse des Elektrons
N	—	Windungszahl
P	W	Wirkleistung, Leistung
Q	var	Blindleistung
Q	C	Elektrizitätsmenge, Ladung

Formelzeichen	Einheit	Größe
R	Ω	Wirkwiderstand, elektrischer Widerstand
$\underline{S}$	W	komplexe Leistung
S	V · A	Scheinleistung
U	V	elektrische Spannung
W	J (= W · s)	Arbeit, Energie
X	Ω	Blindwiderstand
$\underline{Y}$	S	komplexer Leitwert
Y	S	Scheinleitwert
$\underline{Z}$	Ω	komplexer Widerstand
Z	Ω	Scheinwiderstand
α	1/K	Längenausdehnungskoeffizient
ε_0	F/m	elektrische Feldkonstante
ε_r	—	Dielektrizitätszahl
Θ	A	Durchflutung
$\varkappa$	S/m	elektrische Leitfähigkeit
Λ	H	magnetischer Leitwert
μ_0	H/m	magnetische Feldkonstante
μ_r	—	Permeabilitätszahl
ϱ	Ω · m	spezifischer elektrischer Widerstand
τ	s	Zeitkonstante
Φ	Wb	magnetischer Fluß
φ	V	elektrisches Potential
φ	rad, °	Phasenverschiebung
Ψ	Wb	verketteter magnetischer Fluß
ω	1/s	Kreisfrequenz

1. Einführung

Elektrotechnik und Elektronik haben für die menschliche Gesellschaft eine große Bedeutung erlangt. So wird z. B. der riesige Energiebedarf meist durch die Elektrotechnik abgedeckt. Mit ihrer Hilfe erfolgen die *Energieumwandlung* und der *Energietransport*. Die Elektronik ist die Grundlage einer leistungsfähigen *Informationsübertragung* und *-verarbeitung* (z. B. durch Nachrichtentechnik oder elektronische Datenverarbeitung). Die Errungenschaften dieser Gebiete sind somit integrierter Bestandteil der meisten technischen Geräte und Anlagen vom Haushaltsgerät bis zum Raumflugkörper geworden und tragen in erheblichem Maße zu einer rationelleren und intensiveren Produktion bei. Auf Grund ihrer Stellung in Naturwissenschaft und Technik haben sich Elektrotechnik und Elektronik als selbständige Disziplinen herausgebildet und stürmisch weiterentwickelt. In diesem Nachschlagewerk wurde dem Rechnung getragen, beide Gebiete sind aus dem Abschnitt PHYSIK ausgegliedert. Im vorliegenden Abschnitt ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK werden die elementaren Grundlagen in kurzer und übersichtlicher Form behandelt. Für interessierte Leser wird auf die weiterführende Literatur sowie „Fachwissen des Ingenieurs", Band 5, verwiesen.

Tafel 1. Wichtige Schaltzeichen der Elektrotechnik und Elektronik [3])bis[15])

Widerstand, allgemein (vereinfacht)	Strommesser
Widerstand, einstellbar (vereinfacht)	Spannungsmesser
Widerstand, stetig verstellbar (vereinfacht)	Glühlampe
Kondensator, allgemein	Relais
Kondensator, einstellbar	Halbleiterdiode
Kondensator, verstellbar	Z-Diode
Elektrolytkondensator, gepolt	Thyristor
Spule, allgemein	pnp-Transistor
Spule mit Ferromagnetkern	npn-Transistor
Spule mit Massekern	n-Kanal-SFET
Einphasentransformator mit Ferromagnetkern	Eintor-p-Kanal-MOSFET (Anreicherungstyp, ohne Substratanschluß
galvanisches Element	
Schalter, allgemein	

2. Gleichstrom

2.1. Grundbegriffe*)

Elektrische Ladung

Träger der Elektrizität sind die negativ geladenen Elektronen und positiv geladenen Protonen**). Die *Elementarladung* eines Elektrons beträgt $e = -1{,}602189 \cdot 10^{-19}$ C, sie kann als Elementarquantum der elektrischen Ladung betrachtet werden. Die *Ruhmasse* eines Elektrons ist $m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ kg.

Elektrischer Strom

Ein elektrischer Strom entsteht, wenn sich elektrische Ladungen bewegen. Entsprechend der Beweglichkeit der Elektronen unterteilt man die Stoffe in elektrischer Beziehung in

*) Einheiten s. Abschn. GRÖSSEN UND EINHEITEN

**) s. Abschn. PHYSIK, Quanten- und Atomphysik, Bestandteile der Atome

Leiter (Metalle, Elektrolyte) und in *Nichtleiter* (Isolatoren). Eine Zwischenstellung nehmen die *Halbleiter* ein, die nur unter besonderen Bedingungen einen Strom leiten.
Fließt durch den Leitungsquerschnitt in der Zeit dt die Ladungsmenge dQ, so ist der elektrische Strom definiert durch:

$$I = dQ/dt \quad (1)$$

Für *Gleichstrom* ist die Ladungsänderung konstant, es gilt:

$$I = Q/t \quad (2)$$

Gleichstrom ist also ein elektrischer Strom, dessen Augenblickswerte zeitlich konstant sind oder der stets nur in einer Richtung fließt. Die Stromrichtung ist nach Definition gleich der Strömungsrichtung der positiven Ladungsträger.

Quellenspannung und elektrische Spannung

Für die Bewegung einer Ladung im Raum ist eine Energie erforderlich. Die Energiedifferenz je Ladungseinheit zwischen zwei Punkten A und B ist als *elektrische Spannung* definiert. Bei der Erhöhung der Energie einer Ladung zwischen A und B spricht man von der *Quellen-* oder *Urspannung* U_{AB} der Spannungsquelle:

$$U_{AB} = W_{AB}/Q \quad (3)$$

Bei Abgabe der Energie an einen Verbraucher spricht man vom *Spannungsabfall* oder der *Spannung* U:

$$U_{AB} = W_{AB}/Q = U \quad (4)$$

Elektrischer Widerstand

Die Tatsache, daß zur Aufrechterhaltung eines Stroms eine Spannung und damit eine Energie erforderlich ist (ausgenommen bei Supraleitung), kann als das Vorhandensein eines dem Strom entgegengebrachten Widerstands betrachtet werden. Der *Widerstand* zwischen zwei Punkten A und B ist definiert:

$$R_{AB} = U_{AB}/I \quad (5)$$

Einheit des Widerstands ist das Ohm (Ω).

Ohmsches Gesetz

Der Quotient von Spannung und Strom, unabhängig von anderen physikalischen Einflußgrößen (Druck, Temperatur, ...), ist konstant:

$$R = U/I = \text{konst.} \quad (6)$$

Strom-Spannungs-Kennlinien

Das Verhältnis $R = U/I$ ist bei genauer Untersuchung für zahlreiche Leiter nicht konstant, sondern ändert sich bei Variation von I und U. Die Abhängigkeit des Stroms von der Spannung wird in einer Strom-Spannungs-Kennlinie dargestellt, von der im Bild 1 nur der erste Quadrant angegeben ist.

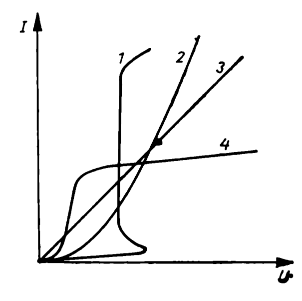


Bild 1. Strom-Spannungs-Kennlinien. *1* Gasentladung; *2* Diode; *3* ohmscher Widerstand; *4* Eisen-Wasserstoff-Widerstand

Durch die Kennlinie *1* werden die Strom-Spannungs-Verhältnisse bei einer *Gasentladung* beschrieben. Die mit 2 bezeichnete Kennlinie findet man bei *Röhren- und Halbleiterdioden*. Kurve 3 zeigt den Anstieg des ohmschen Widerstands, für den Proportionalität zwischen Strom und Spannung besteht. Der Widerstand eines Eisendrahts in einer Wasserstoffatmosphäre wächst oberhalb einer bestimmten Temperatur stark an, so daß der Strom in einem gewissen Spannungsbereich nahezu konstant bleibt (Stromstabilisator — Kennlinie 4).

Widerstand eines homogenen Leiters

Elektrische Leitungen haben häufig relativ kleine Querschnittsabmessungen im Verhältnis zu ihrer Länge. Der Strom füllt dabei den Querschnitt gleichmäßig aus. Für den elektrischen Widerstand R eines Drahts mit der Querschnittsfläche A, der Länge l und dem *spezifischen elektrischen Widerstand* ϱ bzw. der *elektrischen Leitfähigkeit* $\varkappa$ gilt:

$$R = l\varrho/A = l/\varkappa A \tag{7}$$

Der Kehrwert des elektrischen Widerstands ist der *elektrische Leitwert* G (Einheit: Siemens, S).

Im allgemeinen ist der elektrische Widerstand eines Leiters temperaturabhängig. Für praktische Temperaturgrenzen (bis 200 °C) gilt mit ausreichender Genauigkeit:

$$R_\vartheta = R_{20}[1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20\,°\mathrm{C})] \tag{8}$$

R_{20} Widerstand bei 20 °C, R_ϑ Widerstand bei der Temperatur ϑ, α_{20} Temperaturkoeffizient für 20 °C (Tabelle 1)

Aus der Widerstandszunahme wird oft auf die Temperatur geschlossen, z. B. bei Widerstandsthermometern, bei elektrischen Feuermeldern usw.
Technische Ausführungsformen von Widerständen sind: Schichtwiderstände, Drahtwiderstände, einstellbare und veränderliche Widerstände sowie Halbleiterwiderstände [16]…[19].

Tabelle 1. Elektrische Werte wichtiger Leiterwerkstoffe bei 20 °C (weitere Metalle siehe Tabelle 3, Abschn. WERKSTOFFE)

Werkstoff	Zusammensetzung in %				Dichte ϱ in 10^3 kg/m³	Spezifischer elektrischer Widerstand ϱ in $10^{-6}\Omega\cdot$m	Elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$ in 10^6 S/m	Temperaturkoeffizient des Widerstands α in 10^{-3}/K
	Cu	Ni	Zn	Mn				
Kohle					1,4	30	0,033	−0,50
Konstantan	54	45	—	1	8,9	0,50	2,0	0,004
Manganin	82 … 84	2 … 4	—	12 … 15	8,9	0,43	2,3	0,04
Messing	×		×		8,4 … 8,6	0,074	13,5	1,5
Nickelin	54	26	20	—	8,7	0,43	2,3	0,11

Elektrische Energie und Leistung

Die elektrische *Energie* ist für zeitabhängigen Strom und zeitabhängige Spannung:

$$W(t) = \int_0^t U(t)\,I(t)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Sind U und I konstant, so gilt:

$$W = UIt = QU = I^2Rt = U^2t/R \tag{10}$$

Die (elektrische) *Leistung* ist die Energieänderung dW je Zeit dt:

$$P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t \tag{11}$$

Aus Gl. (10) folgt damit:

$$P = UI = I^2R = U^2/R \tag{12}$$

2.2. Elektrischer Gleichstrom in linearen Netzen

Als *lineares Gleichstromnetz* bezeichnet man eine Anordnung aus elektrischen Quellen und Verbrauchern, die durch Leitungen verbunden sind. Die Widerstandswerte der einzelnen Verbraucher sind konstant, d. h. vom Strom unabhängig.

2.2.1. Zusammenwirken von elektrischen Quellen und Verbrauchern

Der *unverzweigte Stromkreis* kann durch zwei Ersatzschaltungen dargestellt werden, wobei man unter elektrischer *Ersatzschaltung* eine Anordnung von Widerständen und Quellen (elektrisches Netz) versteht, die bei Berechnungen gleiche Ergebnisse erzielt wie der wirkliche Stromkreis. Ersatzschaltungen verdeutlichen im allgemeinen nicht in allen Beziehungen die volle Wirklichkeit, so daß für ein und dasselbe Element mehrere Ersatzschaltungen existieren.

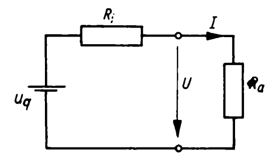


Bild 2. Einfacher Stromkreis mit Ersatzspannungsquelle

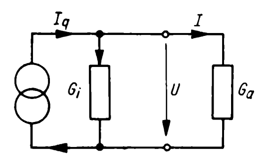


Bild 3. Einfacher Stromkreis mit Ersatzstromquelle

Bild 2 zeigt den einfachen Stromkreis mit einer *Spannungsquelle* und angeschaltetem Verbraucher R_a. Der Gesamtwiderstand im Kreis ist $R = R_i + R_a$, und nach dem OHMschen Gesetz ergibt sich:

$$U_q = IR = I(R_i + R_a) = IR_i + U \qquad (13)$$

Im Bild 3 wird der Stromkreis durch eine *Stromquelle* (Einströmung) betrieben. Hierbei gilt:

$$I_q = U(G_i + G_a) = U[(1/R_i) + (1/R_a)] \qquad (14)$$

Die charakteristischen Größen der Quellen sind die Leerlauf- oder Quellenspannung U_q, der *Kurzschlußstrom* $I_q = I_k$ und der *Innenwiderstand* $R_i = 1/G_i$. Sie sind durch folgende Gleichung miteinander verknüpft:

$$U_q = I_k R_i \qquad (15)$$

Bei *Leerlauf* ist $I = 0$, d. h. $U = U_q$; bei Kurzschluß ist $U = 0$, d. h. $I = I_k$.
Ist $R_i \ll R_a$, d. h. $U \approx U_q$, so ist die Klemmenspannung praktisch unabhängig von R_a. Dieser Fall der eingeprägten Spannung tritt hauptsächlich in der *Starkstromtechnik* (Leistungselektrik) auf (z. B. bei Turbogeneratoren). Für $R_i \gg R_a$ wird $I \approx I_k$, d. h., der Strom ist praktisch unabhängig von R_a. Dieser Zustand des eingeprägten Stroms wird häufig in der *Schwachstromtechnik* (Informationselektrik) beobachtet (z. B. im Verstärker).

2.2.2. Verzweigter Stromkreis

Jedes Netz besteht aus einzelnen *Zweigen*, die an den *Knotenpunkten* verbunden sind. Einen einfach in sich geschlossenen Weg innerhalb eines Netzes nennt man *Masche* (Bild 4).

2.2.2.1. Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Bei *Reihenschaltung* mehrerer Widerstände $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ist der Gesamtwiderstand R_g gleich der Summe der Einzelwiderstände:

$$R_g = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n \qquad (16)$$

Durch jeden Widerstand fließt ein gleich großer Strom (Bild 5a). Der Spannungsabfall an jedem Widerstand ist proportional der Größe des Widerstands, d. h.:

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2, \quad \ldots, \quad U_n = IR_n \tag{17}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \tag{18}$$

Die Summe aller Spannungsabfälle ist gleich der gesamten angelegten Spannung.

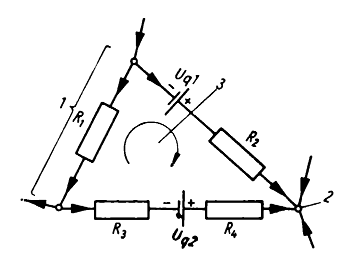


Bild 4. Grundbegriffe eines elektrischen Netzwerks. *1* Zweig; *2* Knotenpunkt; *3* Masche

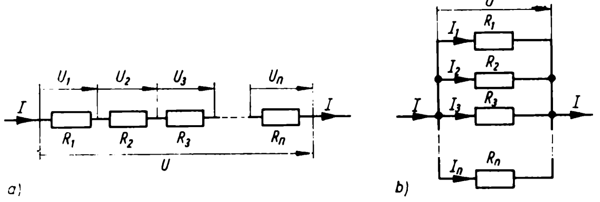


Bild 5. Reihenschaltung von Widerständen (a), Parallelschaltung von Widerständen (b)

Bei *Parallelschaltung* mehrerer Widerstände $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ist der Gesamtleitwert G_g gleich der Summe der Einzelleitwerte:

$$G_g = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n \quad \text{bzw.} \tag{19}$$

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{20}$$

Für zwei parallele Widerstände gilt:

$$R_g = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \tag{21}$$

Bei Parallelschaltung liegt an jedem Widerstand die gleiche Spannung (Bild 5b). Die Stromstärken in den einzelnen Zweigen verhalten sich wie die dazugehörigen Leitwerte bzw. umgekehrt wie die Widerstände:

$$I_1 : I_2 : I_3 : \cdots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \cdots : \frac{1}{R_n} \tag{22}$$

Die Einzelströme summieren sich zum Gesamtstrom:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n \tag{23}$$

2.2.2.2. Die Kirchhoffschen Gesetze

Durch die KIRCHHOFFschen Gesetze ist der elektrische Zustand in jedem linearen Netz vollkommen bestimmt.

Das 1. KIRCHHOFFsche Gesetz (*Knotenregel*) bezieht sich auf die Knotenpunkte eines Netzes und lautet:

Die vorzeichenbehaftete Summe aller Ströme in einem Knoten ist gleich Null:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{24}$$

Das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz (*Maschenregel*) leitet sich aus den Maschen des Netzes ab und lautet:

In jeder Masche eines elektrischen Netzes ist die vorzeichenbehaftete Summe aller Teilspannungen (Quellenspannungen und Spannungsabfälle) *gleich* Null:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \qquad (25)$$

Zur Anwendung dieser Gesetze sind folgende Regeln einzuhalten:

1. In jedem Zweig einer Masche wird ein willkürlicher Umlaufsinn des Stroms I_i festgelegt.
2. In einem Knoten sind die ankommenden Ströme positiv, die abfließenden negativ einzusetzen.
3. Nach beliebiger Festlegung des Umlaufsinns ist die gesamte Masche in diesem Sinn zu durchfahren und die Summe aller Quellenspannungen U_{qi} zu bilden. Quellenspannungen, die von Plus nach Minus durchlaufen werden, erhalten ein positives Vorzeichen, die anderen ein negatives. Im selben Sinn werden alle Spannungsabfälle behandelt. Widerstände, die in Pfeilrichtung des Stromes durchlaufen werden, haben positive, die anderen negative Spannungsabfälle.
4. Enthält ein Netz n Zweige und damit n unbekannte Zweigströme, so sind zu deren Berechnung auch n voneinander unabhängige Gleichungen nötig. Daher gewinnt man mit dem 1. KIRCHHOFFschen Gesetz aus m Knoten $(m - 1)$ voneinander unabhängige Gleichungen. Die restlichen $n - (m - 1)$ erforderlichen Gleichungen werden durch Anwendung des 2. KIRCHHOFFschen Gesetzes auf die Maschen gebildet.

Beispiel. Zwei Quellen U_{q1} und U_{q2} mit den Innerwiderständen R_{i1} und R_{i2} arbeiten über Leitungswiderstände R_1, R_2 und R_3 auf einen Verbraucher R_V. Wie groß ist der Verbraucherstrom I_V?
Nach willkürlicher Festlegung der Stromrichtungen und des Umlaufsinns (Bild 6) wird ersichtlich, daß eine Knotenpunktsgleichung (1. KIRCHHOFFsches Gesetz) und zwei Maschengleichungen (2. KIRCHHOFFsches Gesetz) aufzustellen sind, weil drei unbekannte Zweigströme vorliegen. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$I_V = I_1 + I_2$$
$$I_1R_1 + I_V(R_3 + R_V) - U_{q1} = 0$$
$$-I_2R_2 - I_V(R_3 + R_V) + U_{q2} = 0.$$

Löst man die letzten beiden nach I_1 und I_2 auf und setzt sie in die erste Gleichung ein, so enthält diese nur noch I_V und ergibt nach Auflösung den gesuchten Verbraucherstrom:

$$I_V = \frac{U_{q1}R_2 + U_{q2}R_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_V)}$$

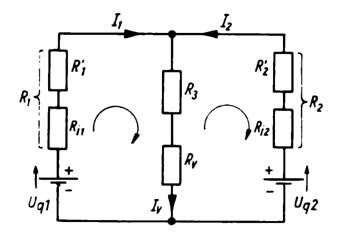


Bild 6. Parallelbetrieb zweier Quellen U_{q1} und U_{q2} auf einen Verbraucher R_V

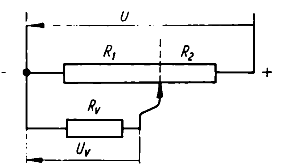


Bild 7. Spannungsteiler

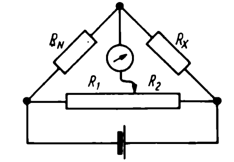


Bild 8. WHEATSTONEsche Brücke

Spannungsteiler. Der belastete Spannungsteiler ist ein weiteres Anwendungsbeispiel einer verzweigten Schaltung (Bild 7). Teilt man den Stellwiderstand (Abgreifkontakt) in zwei Widerstände R_1 und R_2, so gilt für den Gesamtwiderstand der Anordnung:

$$R_g = R_2 + [R_1R_V/(R_1 + R_V)] \qquad (26)$$

Für den Fall, daß R_V wesentlich größer ist als R_1, gilt für die abgegriffene Spannung U_V:

$$U_V \approx UR_1/(R_1 + R_2) \qquad (27)$$

Die Spannungen sind dann den Widerständen direkt proportional (Spannungsteiler unbelastet). Die WHEATSTONEsche *Brücke* stellt eine Parallelschaltung zweier Spannungsteiler dar (Bild 8). Der Teiler R_NR_x ist fest eingestellt, der Teiler R_1R_2 ist beweglich. Bei einer bestimmten Stellung des Schleifers ist



der Spannungsabfall über R_N gleich dem über R_1 und der über R_x gleich dem über R_2. Durch das eingeschaltete Meßinstrument fließt dann kein Strom, es zeigt keinen Ausschlag (beide Spannungsteiler unbelastet). Auf Grund der Proportionalität von Spannungen und Widerständen gilt $R_1 : R_2 = R_N : R_x$. Ist R_x ein unbekannter Widerstand, so läßt er sich bei Abgleich (kein Ausschlag) berechnen:

$$R_x = R_N R_2 / R_1 \tag{28}$$

Die Brückenmethode wird häufig in der elektrischen Meßtechnik angewandt, sie ist sehr genau.

3. Elektrische Leitungs- und Entladungsvorgänge

3.1. Stromleitung in Metallen

Metalle (Silber, Kupfer, Aluminium usw.) sind als gute elektrische *Leiter* bekannt. Die Stromleitung wird in ihnen durch *freie Elektronen* (Valenzelektronen) ermöglicht, die sich in den Gitterzwischenräumen der Kristalle ähnlich wie ein Gas in ungeordneter Bewegung befinden. Wird eine Spannung an den metallischen Leiter angelegt, erfahren die Elektronen eine gerichtete Bewegung. Ihre Geschwindigkeit ist dabei sehr gering und beträgt nur einige tausendstel cm/s. Durch Störungen im Kristallaufbau, Verunreinigungen aller Art und die Temperaturbewegung der Gitterpunkte wird der Elektronenbewegung infolge häufigeren Zusammenstoßes mit den Gitterbausteinen u. a. ein Widerstand entgegengebracht.
Bei einigen Metallen nimmt der Widerstand in der Nähe des absoluten Nullpunkts der Temperatur sprunghaft nahezu den Wert Null an. Diese Erscheinung ist als *Supraleitfähigkeit* bekannt. Die Sprungtemperatur beträgt z. B. für Blei 7,26 K, für eine Verbindung aus Niob und Germanium ≈ 23 K. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt zur Erzeugung extrem starker Magnetfelder oder zur Herstellung verlustarmer elektrischer Maschinen und Kabel.

3.2. Stromleitung in Halbleitern

Halbleiter (z. B. Germanium und Silizium)*) zeigen eine mit steigender Temperatur stark anwachsende Leitfähigkeit. Das unterscheidet sie von den Leitern und Nichtleitern.
Kurzzeichen und Begriffe der Halbleitertechnik siehe [20]) und [21]).

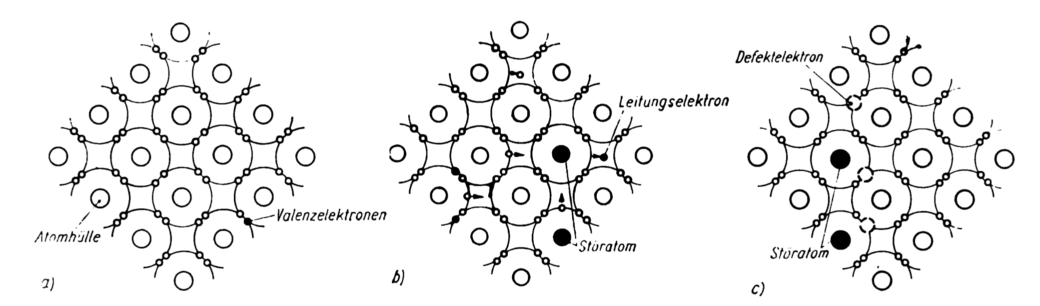


Bild 9. Kristallstruktur. a) des reinen Halbleiters; b) und c) des gestörten Halbleiters

3.2.1. Eigenleitung

Die Eigenleitung findet in extrem reinen Halbleiterwerkstoffen statt. Charakteristisch für solche Stoffe ist, daß bei niedrigen Temperaturen alle Valenzelektronen in der Kristallstruktur gebunden sind (Bild 9a). Freie Elektronen fehlen zunächst, am absoluten Nullpunkt der Temperatur verhält sich der Halbleiter wie ein Isolator. Durch erhöhte Energiezufuhr (Wärme,

*) s. auch Abschn. CHEMIE, Elemente der IV. Hauptgruppe

Licht) kann ein Valenzelektron aus seiner festen Bindung losgerissen werden und als *freies Leitungselektron* durch die Zwischengitterräume wandern. An seinen leergewordenen Platz setzt sich ein anderes Valenzelektron, an dessen ursprünglichen Platz wieder ein anderes usw. Auf diese Art und Weise wandert außer dem losgerissenen Elektron auch der leergewordene Platz durch den Zwischengitterraum, was als fehlende freie negative bzw. freie positive Ladung aufgefaßt werden kann. Die Eigenleitung setzt sich somit aus *negativen Leitungselektronen* und freien positiven Ladungen, den sogenannten *Defektelektronen*, zusammen.

3.2.2. Störstellenleitung

Eine entscheidende Erhöhung der Leitfähigkeit eines Halbleiters wird durch geringfügige Beimengungen von Atomen erreicht, die ein Valenzelektron mehr (Bild 9b) oder auch weniger (Bild 9c) als die anderen Atomhüllen besitzen. Dafür werden Elemente der dritten bzw. fünften Gruppe des Periodensystems benutzt. Das Zusetzen solcher Fremdatome zum reinen Halbleiterwerkstoff heißt *Dotierung*.
Elemente, die einen Überschuß an Valenzelektronen bilden, heißen *Donatoren*. Ein mit ihnen dotierter Halbleiter wird als n-Leiter bezeichnet. Elemente, die einen Mangel an Valenzelektronen, also Überschuß an Defektelektronen, bilden, heißen *Akzeptoren*. Das mit ihnen dotierte Halbleitermaterial wird als p-Leiter bezeichnet.

3.2.3. pn-Übergang (Halbleiterdiode)

Werden ein p-Leiter und ein n-Leiter zu einem Schichtkristall zusammengefügt, so diffundieren die Elektronen bzw. Defektelektronen wegen des Konzentrationsunterschieds in die jeweils gegenüberliegende Schicht. Durch diese Abwanderung entstehen in der *Grenzschicht* Raumladungen. Die elektrischen Feldkräfte in diesem Raumladungsfeld wirken dem Diffusionsbestreben entgegegen, so daß sich ein Gleichgewichtszustand einstellt*).

Beim Anlegen einer äußeren Spannung (Bild 10a) wird durch das zusätzliche elektrische Feld der Gleichgewichtszustand gestört. Die Elektronen werden in die n-Schicht, die Defektelektronen in die p-Schicht zurückgedrängt. Die Übergangszone verarmt dadurch an Ladungsträgern und wird schlecht leitend. Es fließt nur noch ein ganz geringer *Sperrstrom* I_{sp}, der durch die Eigenleitung hervorgerufen wird. Beim Umpolen der äußeren Spannungsquelle (Bild 10b) wird das Raumladungsfeld durch das äußere Feld geschwächt, und es gelangt eine größere Anzahl Ladungsträger in die Grenzschicht. Diese erhöht damit ihre Leitfähigkeit, es fließt ein Strom I_d, der *Durchlaßstrom*. Die Übergangszone zeigt also typisches Ventilverhalten, und der pn-Übergang bildet die Grundlage für *Halbleiterdioden*.

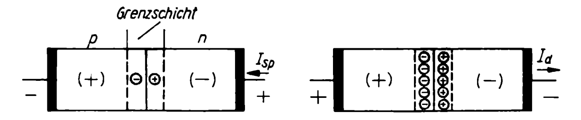


Bild 10. pn-Übergang. a) in Sperrichtung; b) in Durchlaßrichtung

3.2.4. Transistoren

3.2.4.1. Bipolartransistoren

Durch Zusammenfügen von drei Halbleiterschichten in der Reihenfolge npn (Bild 11) entstehen zwei Grenzschichten. Eine solche Anordnung wird als npn-*Transistor* bezeichnet. Es lassen sich auch pnp-Transistoren aufbauen, sie verlangen aber eine entgegengesetzte Polung der Betriebsspannungen.

*) s. auch Fachwissen des Ingenieurs, Band 5, Abschn. BAUELEMENTE UND GRUNDSCHALTUNGEN DER ELEKTRONIK



Im npn-Transistor nach Bild 11 wird die erste Grenzschicht (Emitter—Basis) in Durchlaßrichtung, die zweite Grenzschicht (Basis—Kollektor) in Sperrichtung betrieben. Da die Basis sehr dünn ausgeführt ist, diffundieren die Elektronen aus der Emitterschicht nicht nur in die Basisschicht hinein, sondern sie gelangen bis in die an Ladungsträgern arme zweite Grenzschicht, die dadurch in ihrer Leitfähigkeit stark beeinflußbar wird. Der Kollektor sammelt gewissermaßen die hindurchdiffundierten Elektronen ein. Damit ist eine Steuerung des Kollektorstroms I_C durch den Emitterstrom I_E möglich. I_C ist jedoch immer etwas kleiner als I_E, weil letzterer nicht nur aus Elektronen, sondern auch aus Defektelektronen besteht, die nicht zum Strom im Kollektorkreis beitragen. Außerdem „vereinigt" sich in der Basis ein Teil der Defektelektronen und Elektronen (Rekombination genannt) und kann somit ebenfalls nicht zum Kollektorstrom beitragen. Die *Stromverstärkung* $\Delta I_C/\Delta I_E$ ist damit kleiner Eins. Da die Kollektorgrenzschicht in Sperrichtung betrieben wird (hoher Widerstand), bedeuten Stromänderungen ΔI_C große Spannungsänderungen. Die Emittergrenzschicht in Durchlaßrichtung (kleiner Widerstand) hat bei Stromänderungen ΔI_E kleine Spannungsänderungen zur Folge. Die *Spannungsverstärkung* zwischen Kollektor und Emitter ist demzufolge viel größer als Eins.

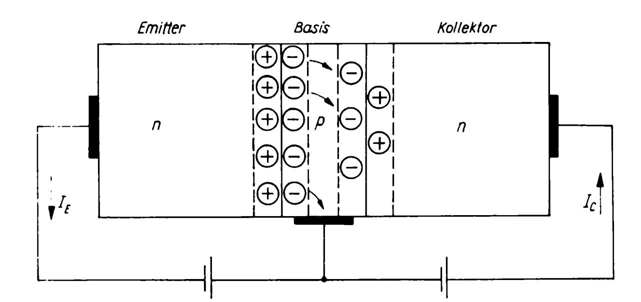


Bild 11. Zur Wirkungsweise eines npn-Flächentransistors in Basisschaltung

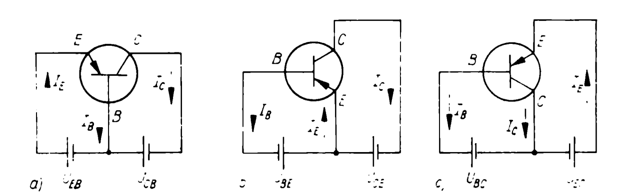


Bild 12. pnp-Transistorgrundschaltungen. a) Basisschaltung; b) Emitterschaltung; c) Kollektorschaltung

Der Transistor läßt sich in Basisschaltung, Emitterschaltung und Kollektorschaltung betreiben (Bild 12). In der Emitterschaltung treten ganz erhebliche *Stromverstärkungen* auf. Da auch die Spannungsänderung auf der Kollektorseite die der Basisseite um ein Vielfaches übertrifft, kommen beachtliche *Leistungsverstärkungen* zustande.

Nach dem *Herstellungsverfahren* unterscheidet man zwischen Legierungs-, Mesa-, Epitaxie-Planartransistoren und solchen, bei deren Herstellung mehrere Technologien kombiniert werden.

3.2.4.2. Unipolartransistoren (Feldeffekttransistoren)

Bei Feldeffekttransistoren wird der Strom nur durch eine Ladungsträgerart (z. B. Elektronen) hervorgerufen, d. h. die Leitfähigkeit durch ein Feld gesteuert. Bild 13 zeigt zwei Ausführungsformen des Feldeffekttransistors, den Sperrschicht-Feldeffekttransistor (SFET) und den Feldeffekttransistor mit isolierter Steuerelektrode (IGFET, isolated gate field effect transistor), der wegen seines Aufbaus auch MOSFET (metal-oxide-semiconductor-FET) genannt wird.

Beim SFET wird die Leitfähigkeit des *Hauptkanals* (Quelle — Senke) durch die in Sperrichtung gepolten pn-Übergänge mit Hilfe eines Feldes beeinflußt, das durch die *Steuerelektrode* (Gate) hervorgerufen wird (Feldeffekt). Beim MOSFET wird durch die Anordnung Metallelektrode—Isolierschicht(SiO_2)-Halbleiter

ein Kondensator gebildet, auf dessen Elektroden sich entsprechend der Größe und Polarität der Spannungen Ladungen anhäufen. Ist z. B. das *Gitter* (G) gegenüber der *Quelle* (S) positiv vorgespannt, so werden im Halbleiter (p-Silizium) unter der Steuerelektrode G negative Ladungen influenziert. Das bedeutet, daß sich ein stärker n-leitender Kanal bildet. Seine Leitfähigkeit kann mit der Spannung zwischen G und S gesteuert werden. Man unterscheidet zwischen dem *Verarmungstyp* und dem *Anreicherungstyp*, wobei beide Typen sowohl mit n- als auch mit p-leitendem Kanal hergestellt werden können.
Der besondere Vorteil der Feldeffekttransistoren liegt in ihrem hohen Eingangswiderstand, der bis zu $10^{14}\,\Omega$ betragen kann.

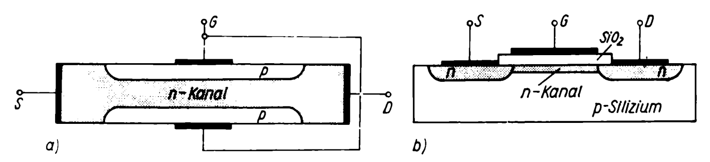


Bild 13. Prinzipieller Aufbau von Feldeffekttransistoren. a) SFET; b) MOSFET.
S Quellenelektrode (source); D Senkenelektrode (drain); G Steuerelektrode (gate)

3.2.5. Lichtelektrische Effekte in Halbleitern

Halbleiter können Fotonen absorbieren, wobei deren Energie zur Erzeugung von Trägerpaaren (Elektronen und Defektelektronen) verwendet wird. Dieser als *innerer Fotoeffekt* bekannte Prozeß erhöht die Leitfähigkeit von Halbleitern bei Bestrahlung. Die technische Ausnutzung dieser Eigenschaft erfolgt in den aus lichtempfindlichem Material (CdS, PbS u. ä.) bestehenden *Fotowiderständen.*
Wird ein in Sperrichtung vorgespannter pn-Übergang durch die Strahlung im wesentlichen nur im Sperrgebiet getroffen, so ist eine gegenüber dem Fotowiderstand viel effektivere Beeinflussung der Leitfähigkeit möglich. Die auf diesem Prinzip beruhenden Bauelemente heißen *Fotodioden.*
Auch ohne angelegte äußere Spannung entsteht in einem pn-Übergang durch Diffusion eine Ladungstrennung, die sich als elektrisches Feld und Potentialfall über der Grenzschicht bemerkbar macht. Eine Bestrahlung der Grenzschicht erzeugt Trägerpaare, die durch das Feld getrennt werden, und zwar so, daß die Elektronen zur n-Schicht, die Defektelektronen zur p-Schicht wandern. Die n-Schicht lädt sich deshalb gegenüber der p-Schicht negativ auf. Dieser Potentialunterschied ist als Urspannung abnehmbar (Prinzip des *Fotoelements*). Fotoelemente werden z. B. in Belichtungsmessern und Solarzellen technisch ausgenutzt.

3.3. Stromleitung in Elektrolyten

Ladungsträger entstehen in wäßrigen Lösungen von Säuren, Basen und Salzen durch Zerfall der elektrisch neutralen Moleküle in positive und negative *Ionen.* Solche Lösungen werden *Elektrolyte* genannt*). Die Vorgänge beim Stromdurchgang durch Elektrolyte werden als *Elektrolyse* bezeichnet*).
Besondere Bedeutung für die Speicherung elektrischer Energie haben galvanische Elemente**) und Akkumulatoren erlangt.

3.3.1. Galvanische Elemente

Taucht man zwei Platten (Elektroden) aus verschiedenen Metallen (oder Metall und Kohle) in einen Elektrolyten, so entsteht durch physikalisch-chemische Vorgänge ein Spannungsunterschied, es bildet sich ein *galvanisches Element***)[22]). Ein Element aus Kupfer und Zink

*) s. Abschn. CHEMIE, Elektrochemie, Elektrolyse
**) elektrochemische Vorgänge s. Abschn. CHEMIE, Elektrochemie, Elektrochemische Vorgänge in galvanischen Elementen

(DANIELL-Element) hat beispielsweise eine Urspannung von 1,1 V, wenn es in einen Schwefelsäure-Elektrolyten getaucht wird. Durch Anschalten eines äußeren Widerstandes fließt ein Strom; die *Anode* (Lösungselektrode) geht dabei in Lösung. An der *Katode* (Ableitungselektrode) scheidet sich Wasserstoff in kleinen Bläschen ab (Polarisation), die Katode erscheint als *Wasserstoffelektrode*. Die Folge ist ein Sinken der Urspannung. Durch *Depolarisatoren* (Stoffe, die sich leicht mit Wasserstoff verbinden oder Sauerstoff abgeben, z. B. Braunstein) wird die Polarisation ausgeglichen.

In der Praxis wird heute hauptsächlich das von LECLANCHÉ entwickelte Salmiak-Element verwendet. Es besteht aus einer Kohle- und einer Zinkelektrode. Als Elektrolyt dienen Ammonsulfat und Braunstein (Trockenelement). Die Gebrauchsspannung beträgt anfangs 1,5 V, sinkt aber rasch auf 1,1 V ab und bleibt dann bis zur Erschöpfung konstant. Für Eichzwecke in der Meßtechnik liefern die *Normalelemente* eine genaue und konstante Vergleichsspannung. Das WESTON-Element hat eine Urspannung von 1,0183 V bei 20 °C und darf maximal mit 0,1 mA belastet werden.

3.3.2. Akkumulatoren

Akkumulatoren (Sammler) sind galvanische Elemente, bei denen die Anode durch Stromfluß nicht aufgebraucht, sondern nur chemisch verändert wird. Diese Veränderung läßt sich durch Ladung des Akkus wieder rückgängig machen. Dabei wird elektrische Energie in chemische umgewandelt. Der Entladungsprozeß stellt den umgekehrten Fall dar.

Bei *Bleiakkumulatoren*[23]) besteht die rotbraune positive Elektrode aus Bleidioxid PbO_2 (gleichzeitig Depolarisator), die graue negative Elektrode aus Schwammblei (fein verteiltes Blei). Als Elektrolyt wird verdünnte Schwefelsäure (20- bis 30%ig) mit einer Dichte von $1{,}21 \cdot 10^3$ kg/m³ im geladenen und $1{,}16 \cdot 10^3$ kg/m³ (20 °C) im ungeladenen Zustand verwendet.
Chemische Gesamtreaktion im Bleiakku in vereinfachter Form:

$$PbO_2 + 2H_2SO_4 + Pb \underset{\text{Ladung}}{\overset{\text{Entladung}}{\rightleftarrows}} PbSO_4 + 2H_2O + PbSO_4$$

Bei der Entladung werden beide Platten in Bleisulfat $PbSO_4$ verwandelt. Während der Ladung wird die von der Plusplatte aufgenommene Schwefelsäure H_2SO_4 wieder frei und die Platte in Bleidioxid PbO_2 zurückverwandelt. Die negative Platte nimmt den Wasserstoff H_2 auf, der sich mit SO_4 zu H_2SO_4 verbindet, so daß sich diese Platte wieder in Blei Pb umsetzt.
Die *Spannung einer Zelle* beträgt etwa 1,8 ··· 2,0 V. Der Ladezustand kann durch Messung der Dichte der Schwefelsäure bestimmt werden. Unter *Kapazität* (Ladung) einer Zelle versteht man die bei Entladung entnehmbare Elektrizitätsmenge. Sie ist von der Entladestromstärke und der Entladezeit abhängig. Der Vorteil des Bleiakkumulators liegt in seinem hohen Wirkungsgrad (≈ 80%). Außerdem können ihm kurzzeitig große Ströme entnommen werden.
Die *Stahlakkumulatoren*[24]) sind wesentlich anders in Aufbau und Wirkungsweise. Von den beiden Ausführungen als *Nickel-Eisen-* (NiFe-Akku) und *Nickel-Kadmium-Zelle* (NK-Akku) ist die letztere universeller einsetzbar. Die positiven Elektroden bestehen bei beiden Ausführungen aus Nickel(III)-hydroxid $Ni(OH)_3$, das sich bei Entladung in Nickel(II)-hydroxid $Ni(OH)_2$ verwandelt. Die negativen Elektroden sind metallisches Kadmium, das bei Entladung in Kadmiumhydroxid $Cd(OH)_2$ übergeht, bzw. bei der Ni—Fe-Zelle feinverteiltes metallisches Eisen, das sich in Eisenhydroxid umsetzt. Als Elektrolyt dient Kalilauge (20%ig) mit einer Dichte von $(1{,}18 \cdots 1{,}21) \cdot 10^3$ kg/m³ bei 20 °C. Sie verändert sich bei Betrieb des Akkus nicht nennenswert.
Chemische Gesamtreaktion im Stahlakkumulator in vereinfachter Form:

$$2Ni(OH)_3 + Cd \underset{\text{Ladung}}{\overset{\text{Entladung}}{\rightleftarrows}} 2Ni(OH)_2 + Cd(OH)_2$$

(bei Ni—Fe-Zellen ist lediglich Eisen anstelle von Kadmium einzusetzen).
Die mittlere Entladespannung der Stahlakkus beträgt nur 1,2 V. Stahlakkumulatoren sind im allgemeinen robuster als Bleiakkumulatoren, haben außerdem eine geringere Masse und einen kleineren Wirkungsgrad. Nickel-Kadmium-Akkumulatoren werden in abgeschlossener, gasdichter Ausführung hergestellt.

3.4. Stromleitung im Vakuum und in Gasen

Im *Vakuum* kann ein Stromfluß nur entstehen, wenn aus dem Metall der Stromzuführung (Katode) freie Elektronen austreten und nach Durchfliegen des Vakuums von der Anode wieder eingefangen werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Materialien zur Emission von freien Elektronen zu veranlassen. Generell muß dem abzulösenden Elektron eine bestimmte Energie zugeführt werden, die größer oder gleich seiner Austrittsarbeit ist.
In *Gasen* sind normalerweise verschwindend wenig Ladungsträger vorhanden (etwa 10^3 Ionen/cm^3). Gase werden also nur elektrisch leitend, wenn man Ladungsträger in sie hineinbringt oder in ihnen durch Ionisation freisetzt.

3.4.1. Elektronenemission

Thermische Elektronenemission (Glühemission)

Durch Erhitzen der Katode (*Glühkatode*) wird die kinetische Energie der Elektronen so weit erhöht, daß sie bei Erreichen der Austrittsarbeit in der Lage sind, den Metallverband zu verlassen. Tabelle 2 gibt einige Werte von Glühkatodenmaterialien an. Ausnutzung der Glühemission in den Glühkatoden der Elektronenröhren[25])[26]).

Tabelle 2. Austrittsarbeit W_0 und Temperatur T von Glühkatodenmaterialien

Material	W	Mo	W+Th	W+Ba	W+Cs	Oxidkatode
W_0 in eV	4,52	4,24	2,63	1,6	1,4	1,0
in 10^{-19} J	7,25	6,72	4,16	2,56	2,22	1,60
T in K	2500	2300	1800	1400	1400	1100

Feldemission

Auch eine kalte Katode ist in der Lage, Elektronen zu emittieren, wenn an ihrer Oberfläche äußerst hohe elektrische Feldstärken (etwa 10^9 V/m) auftreten. Die Katode wird dazu als feine Spitze oder scharfe Kante ausgeführt, um bei technisch realisierbaren Spannungen diese Feldstärken zu erzeugen. Ausnutzung im Feldelektronenmikroskop.

Fotoelektronenemission

Eine weitere Emissionsform ist die lichtelektrische Emission (*äußerer Fotoeffekt**)). Hierbei werden aus der Oberfläche eines Metalls Elektronen ausgelöst, wenn es von einer genügend kurzwelligen Strahlung ($\triangleq$ genügend hoher Energie) getroffen wird. Die Austrittsarbeit muß von den Fotonen erbracht werden, die von der Katode absorbiert werden. Technische Ausnutzung des Fotoeffekts in Fotozellen.

Sekundärelektronenemission

Auf eine Metalloberfläche aufprallende Elektronen (Primärelektronen) können selbst Elektronen auslösen. Die Primärelektronen dringen in das Elektrodenmaterial (Metall) ein und geben ihre Energie an *Sekundärelektronen* ab, die dadurch emittiert werden können. Technische Verwendung findet die Sekundärelektronenemission in Sekundärelektronenvervielfachern (SEV) oder Bildschirmen (in Fernsehgeräten, Oszillografen, Elektronenmikroskopen usw.).

*) s. Abschn. PHYSIK, Quanten- und Atomphysik, Lichtelektrischer Effekt



3.4.2. Gasentladungen

Bei der *unselbständigen Gasentladung* muß das Gas durch äußere Einwirkung (z. B. Röntgenstrahlung) ionisiert werden. Eine Stromleitung ist dann bei relativ niedrigen Spannungen durch das Gas möglich. Praktische Nutzung in der Ionisationskammer.
Bei der *selbständigen Gasentladung* werden die Träger durch den Entladungsvorgang selbst gebildet. Die Ionisation des Gases wird hauptsächlich durch Elektronenstoß (Stoßionisation) bewirkt. Als Träger dienen dann nicht nur freie Elektronen und einfach geladene positive Ionen, sondern es treten auch negative Ionen auf. Alle Ionen können auch mehr als nur eine Elementarladung haben.
Neben der TOWNSEND-*Entladung* (Dunkelentladung) sind vor allem die Glimmentladung mit ihren Sonderformen (*Koronaentladung* und *Funkenentladung*) und die Bogenentladung bekannt.

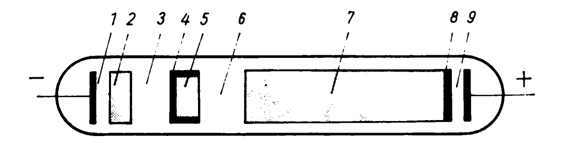


Bild 14. Strukturierung einer Glimmentladung. *1* ASTONscher Dunkelraum; *2* erste Katodenschicht; *3* HITTDORFscher Dunkelraum; *4* Glimmsaum; *5* negatives Glimmlicht; *6* FARADAYscher Dunkelraum; *7* positive Säule; *8* anodisches Glimmlicht; *9* Anodendunkelraum

Glimmentladung

Betreibt man eine Gasentladungsstrecke unterhalb eines Drucks von 6,67 kPa (50 Torr) mit einer Spannung (Brennspannung) > 70 V, so erfolgt Glimmentladung. Diese Entladungsart zeigt eine charakteristische optische Strukturierung, die sich durch helle und dunkle Schichten ausdrückt (Bild 14). Der größte Teil der angelegten Spannung fällt zwischen Katode und Glimmsaum ab (Katodenfall), so daß die Feldstärke im restlichen Teil der Gasentladungsstrecke nur noch klein ist. Ist die Glimmbedeckung der Katode noch nicht vollständig erreicht, besteht Proportionalität zwischen Strom und katodischer Ansatzfläche. Man spricht von normaler Glimmentladung mit konstanter Stromdichte. Der Strombereich der Glimmentladung geht nur bis zu einigen zehntel Ampere. Technische Anwendung findet die Glimmentladung in Glimmlampen, Leuchtstoffröhren (mit Hochspannung betrieben) und -lampen (meist mit 220 V betrieben).

Bogenentladung

Bei höheren Stromdichten geht die Glimmentladung in die Bogenentladung über. Dabei ist die Temperatur des katodischen Ansatzflecks viel höher und der Spannungsabfall vor der Katode (Katodenfall) erheblich niedriger als bei der Glimmentladung. Durch thermische Elektronenemission und Feldemission werden dem Bogen genügend Ladungsträger zur Verfügung gestellt. Technische Nutzung findet die Bogenentladung in Bogenlampen, Wolframpunktlampen, Quecksilberdampflampen und Hochdrucklampen zur Lichterzeugung. Außerdem Nutzung beim Lichtbogenschweißen und im Lichtbogenofen.

4. Elektrisches Feld

4.1. Stationäres elektrisches Strömungsfeld

Bisher wurde angenommen, daß der Strom einen Leiter völlig gleichmäßig ausfüllt (homogene Strömung), wie das bei Drähten der Fall ist. Betrachtet man jedoch den Stromverlauf zwischen Kontaktflächen und bei Querschnittsveränderungen, so ist eine ungleichmäßige Stromverteilung (inhomogene Strömung) zu beobachten. Hier ist der Strom in gleich großen Querschnitten an verschiedenen Orten innerhalb des Leiters unterschiedlich groß. Die Dichte des Stroms, kurz *Stromdichte*, ist eine charakteristische Größe des Strömungsfelds und wird definiert:

$$|\boldsymbol{J}| = J = \mathrm{d}I/\mathrm{d}A \qquad (29)$$

Dabei stellt dA das vom Teilstrom dI durchflossene Querschnittsflächenelement dar. Neben verschiedenen Beträgen hat die Stromdichte auch von Ort zu Ort eine verschiedene Richtung und ist somit ein *Vektor*.

Die Ursache für den Strom im elektrischen Stromkreis ist eine *Spannung*. Die Stromdichte wird durch eine ähnliche Größe hervorgerufen, das Spannungsgefälle, d. h. die Spannungszunahme oder -abnahme längs der Länge l. Bezeichnet man diese mit $\boldsymbol{E}$, so ergibt sich für differentiell kleine Leiterlängen dl:

$$|\boldsymbol{E}| = E = dU/dl \tag{30}$$

Das ist die Definitionsgleichung der ***elektrischen Feldstärke E***. Sie ist wie $\boldsymbol{J}$ ein Ortsvektor. Beide sind durch das OHMsche Gesetz in Differentialform verbunden:

$$\boldsymbol{J} = \varkappa \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}/\varrho \tag{31}$$

4.2. Elektrostatisches Feld

4.2.1. Grundbegriffe

Im Gegensatz zu Strömungsfeldern in Leitern bezeichnet man die elektrischen Felder in Isolatoren als *elektrostatische Felder*. Der elektrische Zustand in einem solchen Feld ist dadurch ausgezeichnet, daß auf eine *ruhende* elektrische Ladung Q eine mechanische Kraft ausgeübt wird (Bild 15). Die Größe der Kraft berechnet sich nach:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{32}$$

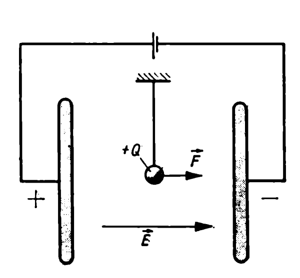


Bild 15. Elektrostatisches Feld zwischen zwei Platten

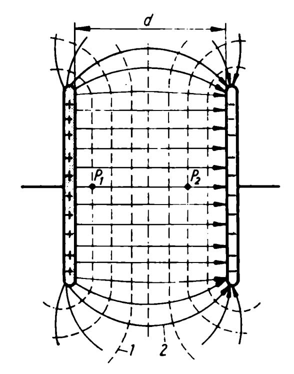


Bild 16. Feld- und Potentiallinien zwischen zwei ebenen Platten (Schnitt). *1* Potentiallinie; *2* Feldlinie

Die Richtung der Kraft fällt mit der Richtung der Feldstärke zusammen. Für die Feldstärke gilt die Definitionsgleichung (30) genau wie im Strömungsfeld. Die Richtung der elektrischen Feldstärke an jeder Stelle des Raums kann schematisch durch Feldlinien (Bild 16) veranschaulicht werden, die von der positiv geladenen Elektrode zur negativen übergehen. Je größer die Ladung auf einer Elektrode ist, um so mehr Feldlinien enden auf ihr.

4.2.1.1. Elektrisches Potential

Das elektrostatische Feld kann man neben Feldlinien auch durch *Potentiallinien* beschreiben (z. B. Äquipotentiallinien, Bild 16). Sie entstehen, indem man im Feld Punkte gleichen Potentials miteinander verbindet. Die Feldlinien stehen senkrecht auf den Leiteroberflächen,

während die Potentiallinien senkrecht auf den Feldlinien stehen. Das bedeutet, daß die Leiteroberfläche selbst eine Potentiallinie (im Schnitt) darstellt. Das Potential wird allgemein von einem Bezugspunkt aus gemessen. Legt man als Bezugspunkt das Erdpotential ($\varphi = 0$) fest, so spricht man vom „Potential gegen Erde". Der Potentialunterschied zweier Punkte (Bild 16) ist gleich der elektrischen Spannung zwischen diesen Punkten oder gleich dem Integral über die Feldstärke auf einem Weg zwischen P_1 und P_2:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}l \qquad (33)$$

4.2.1.2. Elektrischer Fluß und elektrische Verschiebungsflußdichte

Die Gesamtheit der Feldlinien heißt *elektrischer Fluß*, er entspricht der Ladung Q der Elektrode. Entsprechend der Stromdichte $\boldsymbol{J}$ wird die Dichte der Feldlinien *Verschiebungsdichte* $\boldsymbol{D}$ genannt. Für den Betrag der Verschiebungsdichte gilt:

$$|\boldsymbol{D}| = D = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}A \qquad (34)$$

$\mathrm{d}A$ ist das Flächenelement, durch das die Ladung $\mathrm{d}Q$ tritt. Durch Messungen fand man, daß $\boldsymbol{D}$ genau proportional der elektrischen Feldstärke ist:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \qquad (35)$$

ε_0 elektrische Feldkonstante, $\varepsilon_0 = 8{,}85416 \cdot 10^{-12}$ F/m; ε_r Dielektrizitätszahl (Tabelle 3)

Tabelle 3. Dielektrizitätszahlen einiger Isolierstoffe

Material	ε_r	Material	ε_r
Vakuum	1	Luft	1,0006
Bariumtitanat	$10^3 \cdots 2 \cdot 10^3$	Papier	1,8 ··· 2,6
Bernstein	2,9	Paraffin	2,0 ··· 2,3
Kondensa C, (F)	85	Polyäthylen	2,2
Glas	5,0 ··· 16,5	Polystyrol	2,6
Glimmer	5,0 ··· 8,0	Porzellan	5,0 ··· 6,5
Hartgummi	2,8 ··· 5,0	Trafoöl	2,2 ··· 2,5
Holz	2,5 ··· 6,8	Wasser	80,8

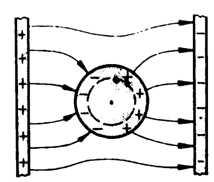


Bild 17. Influenzwirkung

4.2.1.3. Influenz und Polarisation

Bringt man einen Leiter in ein elektrostatisches Feld (Bild 17), so werden seine freien Ladungsträger (Elektronengas) durch mechanische Kräfte getrennt. Diesen Vorgang nennt man *Influenz*. Unter der Einwirkung der Feldkräfte wandern die freien Ladungsträger bis zur Oberfläche des Leiters und bleiben hier so lange, wie ein äußeres Feld besteht. Im Innern des Leiters entsteht ein feldfreier Raum. Diese Tatsache wird zur *Abschirmung* elektrischer Felder ausgenutzt (FARADAY-Käfig).

Wird statt des Leiters ein Nichtleiter in das Feld gebracht, dessen Ladungsträger fest im Atom- bzw. im Molekülverband gebunden sind, so werden sie von den Feldkräften nicht so leicht getrennt wie beim Leiter. Die Feldkräfte bewirken hier nur eine geringe elastische Verschiebung der Ladungsträger, die man als *Polarisation* bezeichnet. Diese Verschiebung reicht jedoch aus, um auf den gegenüberliegenden Oberflächen des Nichtleiters elektrische Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens hervorzurufen. Die Vorgänge sind je nach Aufbau des Nichtleiters verschieden und kompliziert.

4.2.1.4. Kraft und Energie

Befinden sich zwei Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r voneinander, so wirkt zwischen ihnen die Kraft:

$$|\boldsymbol{F}| = Q_1 Q_2 / 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2 \quad (36)$$

Diese Beziehung ist das COULOMB*sche Gesetz,* welches besagt, daß sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstoßen und Ladungen mit ungleichem Vorzeichen anziehen.
Wächst die Spannung an einem Kondensator auf einen Wert U, so ist die gesamte vom Kondensator aufgenommene Energie:

$$W = CU^2/2 = QU/2 \quad (37)$$

Die praktisch auftretenden Feldkräfte sind sehr klein. Elektrische Feldkräfte bilden die Grundlage der elektrostatischen Meßinstrumente (Elektrometer) und der Elektrofilter. Letztere dienen zur Entstaubung bzw. Reinigung von Rauchgasen, Kohlen-, Zementstaub. Die Staubteilchen werden im elektrischen Feld aufgeladen (Polarisation) und fliegen dann zur Niederschlagselektrode, an der sie sich festsetzen und durch Abklopfen entfernt werden können.

4.2.2. Kondensator

Legt man an zwei voneinander isolierte Metallelektroden eine Spannung, so laden sie sich auf und behalten ihre Ladung, auch wenn man die Spannungsquelle entfernt. Eine solche Einrichtung wird als *Kondensator* bezeichnet. Die auf den Elektroden angehäufte Ladungsmenge Q ist proportional der angelegten Spannung U:

$$Q = CU \quad (38)$$

Der Proportionalitätsfaktor C heißt *Kapazität* des Kondensators und hängt von der geometrischen Form der Elektroden und vom Material des dazwischenliegenden Nichtleiters (Dielektrikum) ab. Die Einheit der Kapazität ist das Farad (1 F = 1 As/V).

Ausführungsformen von Kondensatoren sind: Keramik-, Plastfolie-, Papier-, Metallpapier-, Elektrolyt- und veränderbare Kondensatoren (Drehkondensatoren und Trimmer) [27] ... [31]).
Bild 16 zeigt den Aufbau eines Plattenkondensators mit den Plattenflächen A und dem gegenseitigen Abstand d. Hat das Dielektrikum die relative Dielektrizitätskonstante ε_r, so berechnet sich die Kapazität des Plattenkondensators aus:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d \quad (39)$$

Bei gleichen räumlichen Abmessungen läßt sich C vergrößern, indem man ein Dielektrikum mit großem ε_r verwendet, z. B. Glimmer oder Keramik.

Bei *Parallelschaltung* von Kondensatoren addieren sich die Einzelkapazitäten:

$$C_g = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \quad (40)$$

Bei *Reihenschaltung* addieren sich die Kehrwerte:

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (41)$$

Ladung und Entladung eines Kondensators (Bild 18)

Zwischen Strom und Spannung am Kondensator gilt*):

$$i = C(\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t) \quad (42)$$

Bei der *Ladung* ergibt sich (2. KIRCHHOFFsches Gesetz):

$$u_R + u_C = RC(\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t) + u_C = u_\mathrm{q} \quad (43)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (43) lautet:

$$u_C = u_\mathrm{q}[1 - \mathrm{e}^{-(t/\tau)}] \quad (44)$$

$$i = (u_\mathrm{q}/R)\,\mathrm{e}^{-(t/\tau)} \quad (45)$$

$\tau = RC$ ist die *Zeitkonstante* des *RC*-Glieds.

Bild 19 zeigt den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung beim Laden. Die Zeitkonstante τ läßt sich durch Anlegen der Tangente ermitteln.

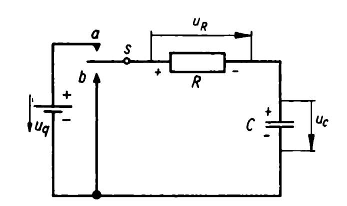


Bild 18. Ladung (S—a) und Entladung (S—b) eines Kondensators

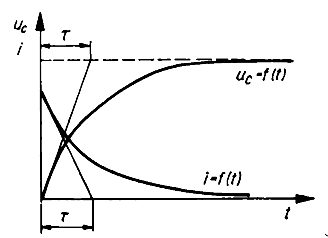


Bild 19. Zeitliche Abhängigkeit von Strom und Spannung beim Laden eines Kondensators

Bei der *Entladung* hat die Differentialgleichung die Form:

$$RC(\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t) + u_C = 0 \quad (46)$$

Lösung: $u_C = u_\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{-(t/\tau)}$ (47)

Für den Strom ergibt sich:

$$i = -(u_\mathrm{q}/R)\,\mathrm{e}^{-(t/\tau)} \quad (48)$$

Man beachte die qualitativ ähnlichen Verläufe wie beim Ladestrom.

5. Magnetisches Feld

5.1. Stationäres magnetisches Feld

5.1.1. Grundbegriffe

Ein magnetisches Feld tritt immer auf, wenn ein elektrischer Strom fließt, d. h. wenn sich elektrische Ladungen bewegen. Der vom Magnetfeld ausgefüllte Raum ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihm auf stromdurchflossene Leiter Kräfte ausgeübt und in bewegten Leitern elektromotorische Kräfte induziert werden. Das magnetische Feld kann wie das elektrische Feld durch Feld- oder Kraftlinien veranschaulicht werden, die in sich geschlossen sind. Die Gesamtheit aller Feldlinien, auch magnetische Induktionslinien genannt, bildet den *magnetischen Fluß* Φ.

*) Zeitlich veränderliche Größen und Kennwerte (Momentanwerte) werden durch kleine Buchstaben gekennzeichnet.

Das Magnetfeld baut sich um den stromdurchflossenen Leiter ringförmig auf (Bild 20). Den Zusammenhang von Feld- und Stromrichtung vermittelt die *Korkenzieherregel:*

Wird ein Korkenzieher in Richtung des fließenden Stroms vorwärtsgeschraubt, so gibt sein Drehsinn die Richtung der Feldlinien an (Bild 20).

Bei einer stromdurchflossenen Spule vereinigt sich das Feld der Einzelleiter zum Gesamtfeld (Bild 21). Das Spulenende, an dem die Feldlinien austreten, ist ein Nordpol; wo sie eintreten, ist ein Südpol.

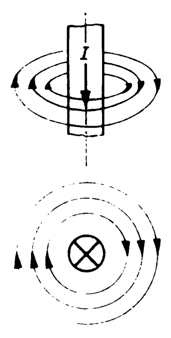


Bild 20. Magnetische Feldlinien um einen stromdurchflossenen Leiter

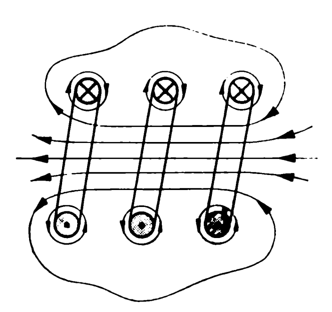


Bild 21. Bild des Felds um eine stromdurchflossene Spule

Wird der magnetische Fluß auf ein Querschnittsflächenelement dA bezogen, so ergibt dies den Betrag der magnetischen Flußdichte, die *magnetische Induktion:*

$$|\boldsymbol{B}| = B = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A \tag{49}$$

Sie ist ein Vektor, d. h., Betrag und Richtung können ortsabhängig sein. Die Einheit des magnetischen Flusses ist das *Weber* (1 Wb = 1 V · s), die Einheit der magnetischen Flußdichte ist das *Tesla* (1 T = 1 Wb/m² = 1 V · s/m²).
Für die Darstellung eines magnetischen Felds ist noch eine Feldgröße, die *magnetische Feldstärke* $\boldsymbol{H}$, wichtig. Sie ist mit der magnetischen Flußdichte durch die Beziehung verknüpft:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{50}$$

μ_0 magnetische Feldkonstante; $\mu_0 = 1{,}256637 \cdot 10^{-6}$ H/m
μ_r Permeabilitätszahl ($\mu_r < 1$: diamagnetische Stoffe; $\mu_r > 1$: paramagnetische Stoffe; $\mu_r \gg 1$: ferromagnetische Stoffe)

5.1.1.1. Durchflutungsgesetz und Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

Durch Experimente kann man ermitteln, daß der fließende Strom und die magnetische Feldstärke direkt proportional sind (*Durchflutungsgesetz*):

$$|\boldsymbol{H}|\, l = Hl = IN = \Theta \tag{51}$$

N Anzahl der Windungen, die der Strom durchfließt; l mittlere Länge der magnetischen Kraftlinie mit der Feldstärke $\boldsymbol{H}$, Θ magnetische Durchflutung oder magnetomotorische Kraft (MMK, Einheit A).

Die Durchflutung hat im magnetischen Kreis eine ähnliche Aufgabe wie die Quellenspannung im Stromkreis, nämlich den magnetischen Fluß Φ aufrechtzuerhalten, der dem Strom I im elektrischen Stromkreis analog ist. Demzufolge gibt es zum elektrischen Widerstand ein Analogon, es ist der *magnetische Widerstand* R_m (Einheit 1/H) bzw. sein Kehrwert, der *magnetische Leitwert* Λ (Einheit H):

$$\Lambda = \mu_0 \mu_r A/l \tag{52}$$

A vom Fluß Φ durchsetzte Querschnittsfläche, l mittlere Länge der Feldlinien

In Analogie zum OHMschen Gesetz gilt:

$$\Phi = \Lambda \Theta \tag{53}$$

Man rechnet selten mit dem magnetischen Leitwert oder Widerstand, da μ_r für die wichtigsten magnetischen, die ferromagnetischen, Werkstoffe keine Konstante ist. Die relative Permeabilität hängt von der magnetischen Feldstärke ab, und damit wird die Berechnung mit Gl. (53) kompliziert.

5.1.1.2. Kraft

Auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge l wirkt die Kraft:

$$|\boldsymbol{F}| = F = BIl \sin \alpha \tag{54}$$

Die Bedeutung der einzelnen Faktoren ist Bild 22 zu entnehmen. Für die Richtung der erzeugten Kraft gilt die oft gebrauchte *Rechte-Hand-Regel:*

Hält man die rechte Hand so, daß die Feldlinien in die Handinnenfläche eintreten, und bringt man den abgespreizten Daumen in die Richtung des Leiterstroms, so geben die ausgestreckten Finger die Richtung der Kraft an.

Das Prinzip des *Elektromotors* beruht auf der Kraftwirkung des stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld.
Da ein elektrischer Strom eine Menge bewegter Ladungen darstellt, kann man die Kraft auf eine Ladung Q im magnetischen Feld berechnen; sie beträgt:

$$F = BQv \sin \alpha \tag{55}$$

v Geschwindigkeit, mit der sich die Ladung Q bewegt; α Winkel zwischen der Bewegungsrichtung der Ladung und der Richtung der magnetischen Induktion.

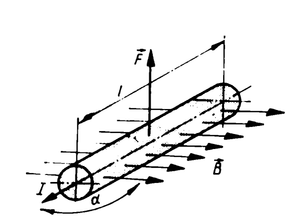


Bild 22. Stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld

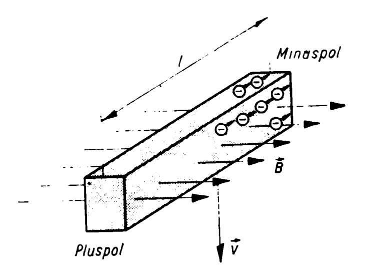


Bild 23. Magnetische Induktionswirkung in einem geradlinigen Leiter

5.1.1.3. Induktion und Induktionsgesetz

Bewegt man einen Leiter durch ein Magnetfeld, oder ändert sich bei ruhendem Leiter das Magnetfeld zeitlich, so werden infolge der gemäß Gl. (55) wirkenden Kräfte auch die freien Ladungsträger (Elektronengas) gegenüber dem magnetischen Feld bewegt. Die Elektronen werden durch diese Kräfte vom zurückbleibenden Ionengerüst getrennt; es entsteht an einem Ende des Leiters ein Elektronenüberschuß (Minuspol) und am anderen Ende ein Elektronenmangel (Pluspol). Im Leiter wird also eine Spannung induziert; man nennt diese magnetisch-elektrische Wechselwirkung *magnetische Induktion* (Bild 23).
Hat der Leiter die Form einer Schleife, so umfaßt diese im magnetischen Feld einen bestimmten sich zeitlich ändernden Fluß Φ. Die induzierte Spannung ist gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Flusses:

$$u_{\text{ind}} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t \tag{56}$$

Sind mehrere Windungen N mit dem Fluß „verkettet", so addieren sich die induzierten Spannungen, und das Induktionsgesetz lautet:

$$u_{\text{ind}} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(N\Phi)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{57}$$

Mit ψ, dessen Wert sich nach der Gleichung:

$$\psi = N\Phi \tag{58}$$

errechnet, bezeichnet man den *verketteten magnetischen Fluß*. Das Minuszeichen in den Gln. (56) und (57) deutet darauf hin, daß eine positiv definierte Spannung gleich der zeitlichen Abnahme des verketteten Flusses ist. Diese Tatsache findet in der LENZ*schen Regel* ihren Niederschlag:

Der durch die induzierte Spannung verursachte Strom ist stets so gerichtet, daß seine magnetischen Kraftwirkungen denen des ursprünglichen Magnetfelds entgegengesetzt gerichtet sind, so daß er die Bewegung, die ihn hervorrief, zu hindern sucht.

Damit ist nach dem *Energieerhaltungsgesetz* mechanische Arbeit nötig, um die Bewegung aufrechtzuerhalten, die eine elektrische Energie hervorbringt. Bewegt man den Leiter senkrecht zur Feldrichtung, und befindet sich ein Stück der Länge l wiederum senkrecht zu B im Magnetfeld (Bild 23), so beträgt die Größe der induzierten Spannung:

$$u_{\text{ind}} = Bvl \tag{59}$$

Um eine große Spannung zu erhalten, sind in einem *Generator* neben starken Magnetfeldern große Geschwindigkeiten (hohe Drehzahlen) und lange Leiter (gewickelte Spulen) erforderlich. Das Prinzip des *Transformators* beruht auch auf der Induktionswirkung im magnetischen Feld. Während durch die Primärwicklung ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld aufgebaut wird, ist die Sekundärwicklung ein ruhender Leiter, in dem eine Spannung induziert wird.

5.1.2. Magnetfeld in magnetischen Stoffen

Bringt man in den felderfüllten Raum irgendwelche Materialien, so wird die Ausbildung des magnetischen Flusses in charakteristischer Weise beeinflußt. Die Anwesenheit von Kupfer, Silber, Wasser oder Quecksilber z. B. hat eine magnetische Induktion zur Folge, die kleiner ist als die magnetische Induktion, die sich bei der gleichen Feldstärke im Vakuum ausbildet. Diese Stoffe sind *diamagnetisch* ($\mu_r < 1$). Bei *paramagnetischen* Stoffen, z. B. Aluminium, Luft oder Sauerstoff, ist $\mu_r > 1$. Der Unterschied zwischen μ_r und 1 ist jedoch in beiden Fällen sehr gering. Besondere Bedeutung haben die *ferromagnetischen* Werkstoffe mit $\mu_r \gg 1$ erlangt, und zwar in erster Linie Eisen, Kobalt und Nickel. Sie werden wegen ihrer guten magnetischen Leitfähigkeit hauptsächlich zum Bau elektrischer Maschinen, Apparate und Geräte verwendet.

Bei den ferromagnetischen Materialien besteht zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke kein eindeutiger Zusammenhang mehr, wie ihn Gl. (50) angibt. Die Abhängigkeit $\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{H})$ wird hier durch die Magnetisierungskurve dargestellt (Bild 24). Handelt es sich um noch nicht magnetisiertes Material, so wird bei Veränderung der magnetischen Feldstärke zuerst die *Neukurve* durchfahren, für weitere Änderungen der magnetischen Feldstärke erfolgt der Durchlauf in der durch Pfeile angedeuteten Weise. Ist $H = 0$, so bleibt eine Restinduktion B_r, die *Remanenz*. Zu ihrer Beseitigung ist eine Feldstärke H_K in entgegengesetzter Richtung notwendig, die *Koerzitivkraft*.

Für technische Belange wird die Magnetisierungskurve nur in einer einfachen Linie angegeben (Bild 25). Diese Linie verbindet die Umkehrpunkte aller Hystereseschleifen und wird *Kommutierungskurve* genannt (Bild 26). Bildet man in einem Punkt der Kommutierungskurve das Verhältnis:

$$\mu = \mu_0\mu_r = B/H \tag{60}$$

und trägt es über H auf, so ergibt sich die in Bild 27 dargestellte Beziehung. Daraus ist zu entnehmen, daß man bei der Konstruktion elektrischer Maschinen die Feldstärke nicht unbegrenzt erhöhen kann, weil damit μ wieder absinkt. Man befindet sich dann im Sättigungsgebiet der Magnetisierungskurve (oberer flacher Teil in Bild 25).

Neben *weichmagnetischen Werkstoffen* (schmale Hystereseschleife) für den Bau von elektrischen Maschinen und Apparaten werden für elektrische Meßinstrumente u. a. *hartmagnetische* Materialien gebraucht. Diese *Dauermagnete* haben eine Hystereseschleife mit großem Flächeninhalt, ihre Wirkung beruht auf

dem durch mehrmalige Magnetisierung erhaltenen Restmagnetismus (Remanenz). Wegen der besseren magnetischen Leitfähigkeit der ferromagnetischen Stoffe schirmen Kapselungen aus solchen Stoffen ihren inneren Raum gegen Magnetfelder ab (Bild 28). Diese Tatsache findet z. B. Anwendung bei empfindlichen Meßinstrumenten.

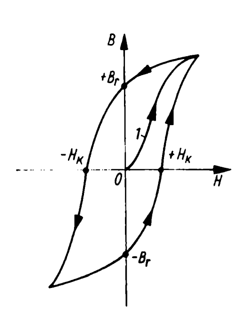


Bild 24. Magnetisierungskurve (Hystereseschleife). *1* Neukurve

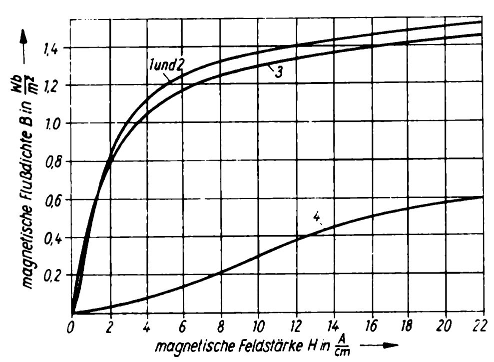


Bild 25. Magnetisierungskurve von normalem Dynamoblech (*1*), Stahlguß (*2*), legiertem Blech (*3*) und Grauguß (*4*)

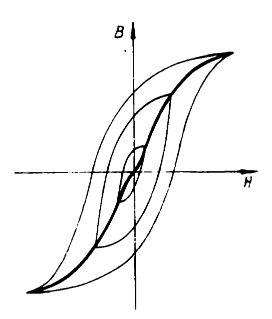


Bild 26. Kommutierungskurve

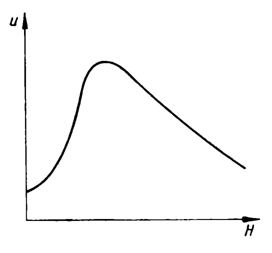


Bild 27. Permeabilität μ in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke

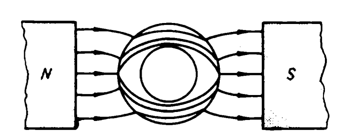


Bild 28. Magnetische Abschirmung

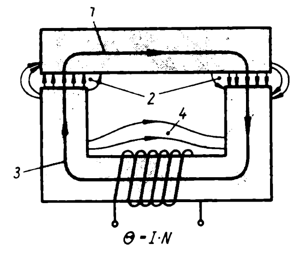


Bild 29. Magnetischer Kreis. *1* Nutzfluß im Joch; *2* Nutzfluß im Luftspalt; *3* Nutzfluß im Schenkel; *4* Streufluß

5.1.3. Magnetischer Kreis

Durch Verwendung magnetischer Werkstoffe läßt sich nicht nur die magnetische Wirkung verstärken, sondern der magnetische Fluß kann auch über einen vorgeschriebenen Weg geleitet werden. Dabei durchquert er eine Anzahl magnetischer Materialien und auch Luft auf einer geschlossenen Bahn, die man den *magnetischen Kreis* nennt. Vom Gesamtfluß Φ kann im allgemeinen nur ein Teil für einen beabsichtigten Zweck nutzbringend verwendet werden (z. B. zum Heben von Lasten, Induzieren von Spannungen usw.). Dieser Teil wird als *Nutzfluß* bezeichnet, während der vorbeistreuende Teil (Bild 29) *Streufluß* genannt wird. Dabei ist zu beachten, daß in Bild 29 alle Feldlinien zum Nutzfluß beitragen.

In vielen Fällen interessiert der Zusammenhang von Luftspaltinduktion und Erregerdurchflutung Θ. Der Streufluß ist oft sehr klein, so daß er vernachlässigt werden kann, und der gesamte Fluß ist gleich dem Nutzfluß. Er durchläuft längs des magnetischen Kreises Teilabschnitte mit verschiedenen Längen und Querschnitten. Es gilt daher für jeden Teilabschnitt i:

$$B_i = \Phi/A_i \tag{61}$$

Zu B_i kann man H_i aus der Magnetisierungskennlinie (Bild 25), für Luftstrecken aus $H_i = B_i/\mu_0$ bestimmen. Das Durchflutungsgesetz (51) besagt jetzt, daß Θ alle magnetischen Spannungsabfälle im magnetischen Kreis decken muß:

$$\Theta = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_i l_i + \cdots + H_n l_n \tag{62}$$

l_i mittlere Kraftlinienlänge im Abschnitt i, $\sum l_i$ gesamte mittlere Feldlinienlänge

Beispiel. Im Luftspalt eines gegebenen magnetischen Kreises sei eine Induktion von $1\ \text{T} = 1\ \text{Wb/m}^2$ gefordert.
Die geometrischen Abmessungen des Kreises sind in Bild 30 angegeben. Es ist die notwendige Durchflutung der Erregerwicklung zu bestimmen, wenn erfahrungsgemäß mit 10% Streufluß zu rechnen ist.
Der Fluß im Luftspalt berechnet sich zu:

$\Phi_L = BA_L = 1\ \text{Wb/m}^2 \cdot 4\ \text{cm}^2 = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$

In den Schenkeln addiert sich zum Luftspaltfluß der Streufluß. Die weitere Rechnung ist tabellarisch zusammengestellt (Tabelle 4).
Die Erregerdurchflutung muß zu $\Theta_{err} = 4187$ A ausgeführt werden. Den Strom bestimmt man nach Gl. (51) durch Division der Durchflutung (Amperewindungen) durch die ausgeführte Windungszahl N.

Tabelle 4

Abschnitt	Werkstoff	Fluß Φ in 10^{-8} Wb	Querschnitt A in cm²	Induktion B in Wb/m²	Feldstärke H in A/cm	Weglänge l in cm	Durchflutung Θ in A
1 Joch	Dyn.-Bl.	4,44	4	1,11	3,9	4	15,6
2 Schenkel	Dyn.-Bl.	4,44	4	1,11	3,9	23,5	91,6
3 Luftspalt	Luft	4,0	4	1,00	8160	0,5	4080,0
							$\sum$ 4187,2

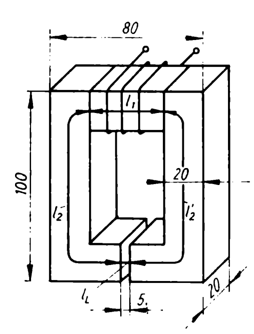


Bild 30. Beispiel eines magnetischen Kreises

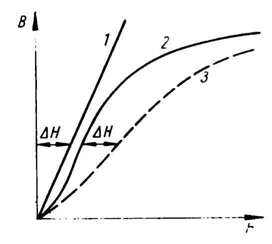


Bild 31. Einfluß des Luftspalts auf die Magnetisierungskurve (Scherung). *1* Luftspaltgerade ($B = \mu_0 H$); *2* Magnetisierungskurve; *3* linearisierte Magnetisierungskurve

An Hand des Beispiels ist zu erkennen, daß der Luftspalt mit seinem hohen magnetischen Widerstand den Hauptteil der Durchflutung aufnimmt, deshalb sind unnötige Luftspalte in magnetischen Kreisen unbedingt zu vermeiden; z. B. werden die Eisenpakete von Leistungstransformatoren an den Stoßstellen (Ecken) überlappt geschichtet. Durch Einfluß eines Luftspalts wird die Magnetisierungskennlinie (Bild 31) linearisiert. Man nennt diesen Vorgang auch *Scherung*. Für Drosselspulen und schwachstromtechnische Übertrager ist dieser Einfluß erwünscht. In einer Eisendrossel bleibt dadurch in Abhängigkeit vom Strom die Induktivität annähernd konstant, weil μ nahezu konstant bleibt, und im Übertrager werden die nichtlinearen Verzerrungen verringert.

Bei Dauermagnetkreisen ist zu beachten, daß eine zusätzliche Vergrößerung des Luftspalts (wie sie z. B. bei Demontage auftritt) unbedingt zu vermeiden ist, weil dadurch der Dauermagnet entmagnetisiert wird. Deshalb z. B. keine Lautsprechermagnete öffnen, um sie etwas „aufzumagnetisieren". Beim Auseinandernehmen von permanenterregten Gleichstrommotoren (Tachodynamo) gleichzeitig mit der Entnahme des Ankers einen Eisenzylinder (auch Rohr) einschieben.

5.2. Langsam veränderliches Magnetfeld

Elektrostatisches und elektromagnetisches Feld treten nicht in Wechselwirkung. Erst bei zeitlich schnell veränderlichen und räumlich ausgedehnten Feldern sind die Feldgrößen beider Felder miteinander verknüpft. Dazwischen stehen die langsam veränderlichen Felder, bei denen die Wechselwirkung vernachlässigt werden kann.

5.2.1. Grundbegriffe

5.2.1.1. Selbstinduktion und Gegeninduktion

Befinden sich in der Umgebung eines stromführenden Leiters nur nichtmagnetische Stoffe oder solche mit konstanter Permeabilität, dann gilt, daß der mit dem Leiter verkettete Fluß ψ proportional dem Augenblickswert des Stroms ist:

$$\psi = Li \tag{63}$$

L als Proportionalitätsfaktor wird *Induktivität* genannt und hängt von der Geometrie der Leiteranordnung bzw. von der Permeabilität ab. Einheit der Induktivität ist das *Henry* (1 H = 1 V · s/A = 1 Wb/A).
Ändert sich nun der Strom i, so ändert sich auch der verkettete Fluß. Das ist nach Gl. (56) gleichbedeutend mit der Induktion einer Spannung im Leiter infolge der eigenen Feldänderung. Man spricht daher von der *Selbstinduktion:*

$$u_{\text{ind}} = -(\text{d}\psi/\text{d}t) = -L(\text{d}i/\text{d}t) \tag{64}$$

Die Gleichung gilt in dieser Form jedoch nur für Gebiete konstanter Permeabilität, also nicht für Eisenkreise.
Die Erscheinung der Selbstinduktion äußert sich z. B. beim Abschalten von Stromkreisen mit hoher Induktivität (Gleichstromnebenschlußmotoren u. ä.) durch Abschaltfunken. Um evtl. Wicklungsdurchschläge zu vermeiden, sind Kurzschlußkontakte u. dgl. anzubringen.

Ist ein Stromkreis 1 mit einem Teilfluß ψ_{21} eines zweiten Kreises verkettet (Bild 32), und ändert sich ψ_{21} zeitlich, so wird im Stromkreis 1 eine Spannung induziert (*Transformatorprinzip*):

$$u_{\text{ind}\,1} = -\text{d}\psi_{21}/\text{d}t \tag{65}$$

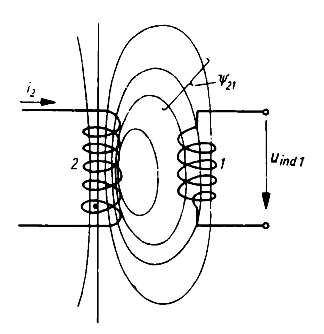


Bild 32. Induktiv gekoppelte Kreise

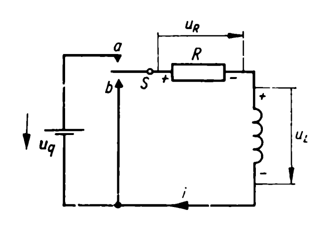


Bild 33. Schaltvorgänge an einer Induktivität

Für den Teilfluß ψ_{21} und den Strom i_2, der ihn hervorruft, besteht unter den gleichen Voraussetzungen wie für L Proportionalität, so daß gilt:

$$u_{\text{ind}\,1} = -M(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t) \quad (66)$$

Diese Erscheinung ist unter dem Namen *Gegeninduktion* bekannt. M als Proportionalitätsfaktor ist die *Gegeninduktivität* der Anordnung.

5.2.1.2. Induktivität

Die Ermittlung der Induktivität ist einfach bei magnetischen Kreisen mit bekanntem magnetischem Widerstand R_m. Es gelten die Gln. (51), (53) und (59), und daraus folgt:

$$\psi/I = N^2/R_\mathrm{m} = N^2\Lambda \quad (67)$$

oder

$$L = N^2\mu_0\mu_\mathrm{r}A/l \quad (68)$$

Ein- und Ausschalten einer Induktivität bei Gleichspannung (Bild 33)

Der Spannungsabfall an der Induktivität u_L ist der Spannung der Selbstinduktion im Vorzeichen entgegengesetzt:

$$u_L = -u_\text{ind} = L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t) \quad (69)$$

Für das *Einschalten* gilt:

$$u_\mathrm{q} = u_L + u_R \quad (70)$$

$$u_\mathrm{q} = L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t) + iR \quad (71)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$i = (u_\mathrm{q}/R)\,[1 - \mathrm{e}^{-(t/\tau)}] \quad (72)$$

$$u_L = L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t) = u_\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{-(t/\tau)} \quad (73)$$

$\tau = L/R$ ist die *Zeitkonstante*.
Beim *Ausschalten* ergibt sich:

$$L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t) + iR = 0 \quad (74)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$i = (u_\mathrm{q}/R)\,\mathrm{e}^{-(t/\tau)} \quad (75)$$

Die Spannung an der Induktivität beträgt:

$$u_L = -u_\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{-(t/\tau)} \quad (76)$$

Für die zeitlichen Verläufe gilt im Prinzip Bild 19.

5.2.1.3. Kraft und Energie

Hat sich z. B. in einer Spule ein magnetisches Feld aufgebaut, so beträgt die darin gespeicherte *Energie:*

$$W = LI^2/2 = \psi I/2 \quad (77)$$

Die Gl. (77) wird auch zur Bestimmung der Induktivität benutzt, wenn die Energie und der Strom bekannt sind.

Die Kräfte in magnetischen Feldern sind bedeutend größer als die in elektrischen Feldern. Sie finden breite Anwendung in der Elektrotechnik, z. B. in Meßinstrumenten, Elektromagneten, elektrischen Maschinen und Apparaten und in Wirbelstrombremsen. Weiterhin bilden magnetische Kräfte die Grundlage für Relais, für das Magnetron (Laufzeitröhre), für Schwingkontaktgleichrichter usw.

Kraftwirkung zwischen zwei parallelen langen Leitern

Zwischen zwei Leitern der Länge l und dem gegenseitigen Abstand a entsteht bei den Strömen I_1 und I_2 durch die Leiter die Kraft

$$F = \mu l I_1 I_2 / 2\pi a \tag{78}$$

5.2.2. Wirbelströme

Befinden sich elektrisch leitende Materialien in einem sich zeitlich ändernden Magnetfeld (magnetisches Wechselfeld), so werden in ihnen nach dem Induktionsgesetz Spannungen induziert, die Ströme auf z. T. unkontrollierbaren Bahnen erzeugen. Solche Ströme werden als *Wirbelströme* bezeichnet. Bei großen Eisenquerschnitten (geringer Widerstand) werden zuweilen so große Wirbelströme induziert, daß sie die Eisenmasse erwärmen und dadurch zusätzliche Verluste verursachen. Die Verluste steigen mit dem Quadrat der Frequenz. Man stellt deshalb Eisenkerne für Wechselstromwicklungen aus dünnen, gegeneinander isolierten Dynamoblechen her, die in Richtung der Wirbelstrombahnen einen hohen elektrischen Widerstand haben.
Auch im Leiter selbst werden durch das magnetische Feld des Leiterstroms Wirbelströme hervorgerufen. Der Gesamtstrom verteilt sich dadurch ungleichmäßig über den Leiterquerschnitt, man spricht von einer *Stromverdrängung*. Diese macht sich besonders bei großen Querschnitten und bei hochfrequenten magnetischen Wechselfeldern bemerkbar. Man paßt sich diesem als *Skineffekt* bezeichneten Umstand an, indem man die Leiter entweder hohl ausführt, weil im Innern der Strom verdrängt ist, oder die Leiteroberfläche versilbert.
Bei elektrischen Leitern, die in Nuten eines Eisenkörpers eingebettet sind, ist die Stromverdrängung infolge der ungleichmäßigen Verkettung des Streuflusses mit den Strombahnen einseitig. Dieser Effekt wird beim Bau der sogenannten Hochstabläufer und Doppelnutläufer zur Anlaufstrombegrenzung ausgenutzt.

6. Wechselstrom

6.1. Grundbegriffe

Der große Vorteil des *Wechselstroms* besteht darin, daß man ihn ohne größere Verluste vom Erzeuger zum Verbraucher transportieren kann, indem man die Wechselspannung fast beliebig hochtransformiert und dadurch zur Leistungsübertragung geringe Ströme (kleine Leiterquerschnitte) benötigt. Eine große Bedeutung haben Wechselströme auf dem Gebiet der Nachrichtentechnik erlangt, denn sie sind die Voraussetzung für die gesamte Fernmelde- sowie die Funk- und Fernsehtechnik.

6.1.1. Kennzeichen einer sinusförmigen Wechselgröße

Der Augenblicks- oder *Momentanwert* $y(t)$ einer sinusförmigen Wechselgröße stellt in Abhängigkeit von der Zeit t eine Sinusfunktion mit dem Argument $(\omega t + \varphi)$ und dem *Maximalwert* (Scheitelwert, Amplitude) $\hat{Y}$ dar (Bild 34):

$$y(t) = \hat{Y} \sin(\omega t + \varphi) \tag{79}$$

Derartige Wechselgrößen können in der Elektrotechnik Strom, Spannung, Leistung, elektrische bzw. magnetische Feldstärke, magnetischer Fluß usw. sein. Charakteristisch für den sinusförmigen Verlauf ist die Wiederholung des Momentanwertverlaufs nach der *Periodendauer* T; es ist:

$$\sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = \sin(\omega t + \varphi) \tag{80}$$

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \tag{81}$$

f Frequenz, ω Kreisfrequenz

Wechselströme zur Leistungsübertragung haben eine Frequenz von 50 Hz (auch 42 Hz und 60 Hz üblich). Bei elektrischen Bahnen werden 16 2/3 (= 50/3), 25 und 60 Hz verwendet. Tonfrequenzen liegen im Hörbereich von 16 Hz bis 16 kHz.

Die Größe φ legt den Wert der Wechselgröße zur Zeit $t = 0$ fest; sie heißt *Anfangswinkel* (Anfangsphase). Zwei Wechselgrößen gleicher Frequenz mit den Anfangswinkeln φ_1 und φ_2 sind gegeneinander um den Phasenwinkel $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ phasenverschoben. Ist $\varphi_1 = \varphi_2$, so sind beide Wechselgrößen „in Phase". Andernfalls spricht man von *Phasenvoreilung* bzw. *-nacheilung*.
Geeignete Kennwerte über das Gesamtverhalten der sinusförmigen Wechselgröße in einer halben bzw. ganzen Periode stellen der arithmetische Mittelwert $\overline{Y}$ und der Effektivwert Y dar (Bild 34). Für den *arithmetischen Mittelwert* gilt:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\omega t=0}^{\pi} y(\omega t)\, \mathrm{d}(\omega t) = \frac{2}{\pi} \hat{Y} = 0{,}637\hat{Y} \tag{82}$$

Größere Bedeutung hat der *Effektivwert* (quadratischer Mittelwert) in der Form:

$$Y_{\mathrm{eff}} = Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega t=0}^{2\pi} y^2(\omega t)\, \mathrm{d}(\omega t)} = \frac{\hat{Y}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\hat{Y} \tag{83}$$

z. B. $U_{\mathrm{eff}} = U = \hat{U}/\sqrt{2} = 0{,}707\hat{U}$ oder $I_{\mathrm{eff}} = I = \hat{I}/\sqrt{2} = 0{,}707\hat{I}$.
Dem Effektivwert eines Wechselstroms ist ein Gleichstrom derselben Wärmewirkung äquivalent.
Der *Scheitelfaktor* einer sinusförmigen Wechselgröße ist:

$$\sigma = \hat{Y}/Y = \sqrt{2} = 1{,}414 \tag{84}$$

Die Größe des *Formfaktors* (Maß für die Kurvenform) ist:

$$\xi = Y/\overline{Y} = \pi/2\sqrt{2} = 1{,}11 \tag{85}$$

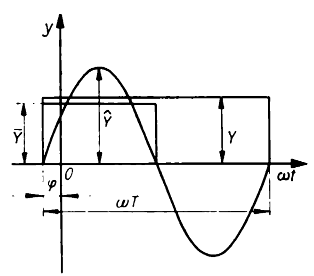


Bild 34. Liniendiagramm einer sinusförmigen Wechselgröße ($\varphi > 0$)

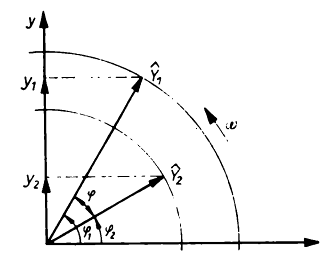


Bild 35. Zeigerdiagramm der Wechselgrößen $y_1 = \hat{Y}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = \hat{Y}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

6.1.2. Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen durch Zeiger und komplexe Zahlen

Für sinusförmige Wechselgrößen ist die Darstellung im *Zeigerdiagramm* sehr bequem und anschaulich (Bild 35). Zur Zeit $t = 0$ soll sich der Zeiger $\hat{Y}_1$ entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz ω zu drehen beginnen. Nach der Zeit $t = \varphi/\omega$ beginnt der Zeiger $\hat{Y}_2$ seine Rotation und folgt Zeiger $\hat{Y}_1$ mit der Phasenverschiebung φ. Die Projektion der Zeiger auf die y-Achse gibt die jeweiligen Augenblickswerte der betrachteten sinusförmig veränderlichen Wechselgrößen y_1 und y_2 an. Damit können in einem Zeigerdiagramm alle Bestimmungsstücke ($\hat{Y}$, ω, φ) einer sinusförmigen Wechselgröße dargestellt werden. Man darf jedoch nur Zeiger mit der gleichen Kreisfrequenz in ein Diagramm einzeichnen. Entsprechend



den in der Elektrotechnik vorkommenden Größen gibt es Stromzeiger, Spannungszeiger, Leistungszeiger, Flußzeiger usw. Als Länge der Zeiger kann der Effektivwert, der Scheitelwert oder der arithmetische Mittelwert aufgetragen werden. Summen und Differenzen von Zeigern erhält man durch *geometrische Addition* und *Subtraktion.*
Die Übertragung dieser Zeigerdarstellung in die GAUSSsche Zahlenebene*) ergibt die sinusförmigen Wechselgrößen in *komplexer Form.* Für die *Komponentenform* einer komplexen Zahl gilt:

$$\underline{y} = \mathrm{Re}\,(\underline{y}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,(\underline{y}) \tag{86}$$

Die *Polarform* hat folgende Form:

$$\underline{y} = \hat{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \hat{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} \tag{87}$$

Nach der EULERschen Beziehung ist $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$, und daraus folgt:

$$\underline{y} = \hat{Y}\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{j}\hat{Y}\sin(\omega t + \varphi) \tag{88}$$

Durch Vergleich der Gln. (86) und (88) wird folgender Zusammenhang ersichtlich:

$$\mathrm{Re}\,(\underline{y}) = \hat{Y}\cos\alpha = \hat{Y}\cos(\omega t + \varphi) \tag{89}$$

$$\mathrm{Im}\,(\underline{y}) = \hat{Y}\sin\alpha = \hat{Y}\sin(\omega t + \varphi) \tag{90}$$

Umgekehrt ergibt sich die Polarform aus der Komponentenform:

$$\hat{Y} = \sqrt{\mathrm{Re}^2\,(\underline{y}) + \mathrm{Im}^2\,(\underline{y})} \tag{91}$$

$$\tan\alpha = \mathrm{Im}\,(\underline{y})/\mathrm{Re}\,(\underline{y}) \tag{92}$$

Diese Gleichungen gelten natürlich auch für den Effektivwert Y einer sinusförmigen Wechselgröße. Die Übertragung der Wechselgrößen in die GAUSSsche Ebene und ihre Berechnung nach den Regeln der komplexen Zahlen nennt man *symbolische Methode.*

6.1.3. Wechselstromleistung

Die Gesetze für Gleichstrom gelten auch für die Augenblickswerte der Wechselgrößen. Die *Augenblicksleistung* berechnet sich daher aus:



$$p = ui \tag{93}$$

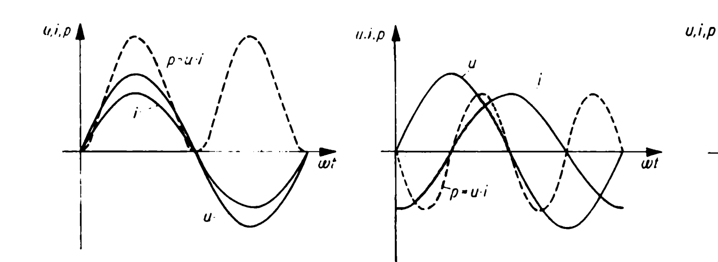


Bild 36. Leistung im Wirkwiderstand

Bild 37. Leistung im induktiven Blindwiderstand

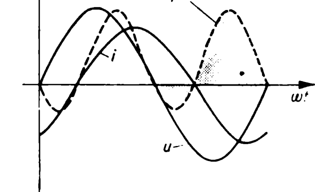


Bild 38. Leistung im allgemeinen Verbraucher

In Bild 36 ist das Liniendiagramm der Leistung eines Wirkwiderstands (Strom und Spannung in Phase) aufgetragen. Die Leistung ist immer positiv, da Strom und Spannung infolge der fehlenden Phasenverschiebung ständig gleichzeitig positiv oder negativ sind; sie schwingt jedoch mit der doppelten Frequenz. Die mittlere Leistung (*Wirkleistung*) während einer Periode berechnet sich aus den Effektivwerten von Strom und Spannung:

$$P = UI \tag{94}$$

Für eine reine *induktive Belastung* z. B. hat die Momentanleistung einen Verlauf, wie ihn Bild 37 zeigt. Hier wechselt das Vorzeichen der Leistung, d. h., der Verbraucher nimmt in

*) s. Abschn. MATHEMATIK, Komplexe Zahlen und deren Rechengesetze

einer Viertelperiode Leistung auf, gibt sie aber in der nächsten Viertelperiode zur Quelle zurück. Dieser Vorgang erklärt sich dadurch, daß z. B. zum Feldaufbau der Induktivität Energie benötigt wird, die beim Feldabbau wieder zurückgeliefert wird. Die mittlere Leistung ist in diesem Fall gleich Null. Bei einem Kondensator sind die Verhältnisse analog, auch hier wechselt die Energie zwischen Quelle und Verbraucher. In beiden Fällen ist die gesamte Leistung die *Blindleistung* (i_b Blindstrom):

$$q = ui_b \tag{95}$$

Im allgemeinen sind Spannung und Strom im Wechselstromkreis phasenverschoben, und es herrschen die in Bild 38 angedeuteten Verhältnisse. Das Vorzeichen der Leistung wechselt auch hier, jedoch wird nur ein Teil der Energie zwischen Verbraucher und Quelle ausgetauscht. Die *Wirkleistung* als Mittelwert erhält man aus den Effektivwerten als:

$$P = UI_w = UI \cos \varphi \tag{96}$$

wobei φ der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung ist. Das gleiche Ergebnis hätte man auch bei Stromvoreilung erhalten. Die Einheit der Wirkleistung ist Watt (W).
Das Produkt:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{97}$$

wird als *Scheinleistung* bezeichnet. Die Einheit der Scheinleistung ist Voltampere (VA). Der Ausdruck:

$$Q = UI_b = UI \sin \varphi \tag{98}$$

beschreibt den ausgetauschten Anteil der Leistung, die *Blindleistung*. Die Einheit der Blindleistung ist Voltampere reaktiv (var).
Weiterhin bezeichnet man als *Leistungsfaktor:*

$$\cos \varphi = P/S \tag{99}$$

$$\tan \varphi = Q/P \tag{100}$$

In den Verbindungsleitungen zwischen Quelle und Verbraucher legt der Scheinstrom den Querschnitt fest. Er wird aber im Verbraucher je nach dessen Charakter zur Leistungsgewinnung nicht voll ausgenutzt. Ein möglichst geringer Blindstrom ist daher wünschenswert, d. h., es muß ein großer Betrag von $\cos \varphi$ erreicht werden. Eine *Kompensierung des Blindstroms* und damit der Blindleistung ist für induktive Verbraucher am einfachsten durch Parallelschaltung von Kondensatoren möglich, da diese voreilenden Strom aufnehmen, d. h. nacheilenden Strom abgeben, so daß der Blindstromaustausch zwischen Quelle und Verbraucher unterbunden wird. Die erforderliche kapazitive Blindleistung läßt sich auch durch übererregte Synchronmaschinen, die man als *Phasenschieber* bezeichnet, erzeugen.

6.2. Elektrischer Wechselstrom in linearen Netzen

6.2.1. Sinusförmiger Strom in Widerständen, Spulen und Kondensatoren

In einem *Widerstand R* gilt für die Augenblickswerte von Strom und Spannung das Ohmsche Gesetz:

$$i = u/R \tag{101}$$

Ist u eine sinusförmige Wechselspannung der Form $u = \hat{U} \sin (\omega t + \varphi_u)$, so beträgt der Augenblickswert des Stroms:

$$i = (\hat{U}/R) \sin (\omega t + \varphi_i) = \hat{I} \sin (\omega t + \varphi_i) \tag{102}$$

Eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung tritt nicht auf ($\varphi_u = \varphi_i$), d. h., Stromzeiger und Spannungszeiger fallen im Zeigerdiagramm aufeinander; wir nennen einen solchen Widerstand *Wirkwiderstand*. Aus Gl. (102) entsteht nach Division beider Seiten durch $\sqrt{2}$ der Ausdruck für die Effektivwerte:

$$I = U/R \tag{103}$$

Infolge der Beziehungen:

$$u = \text{Im}\,(\underline{u}) = \text{Im}\,[\hat{U}\,e^{j(\omega t+\varphi)}] = \text{Im}\,(\hat{U}\,e^{j\varphi}\,e^{j\omega t}) \qquad (104)$$

und

$$i = \text{Im}\,(\underline{i}) = \text{Im}\,[\hat{I}\,e^{j(\omega t+\varphi)}] = \text{Im}\,(\hat{I}\,e^{j\varphi}\,e^{j\omega t}) \qquad (105)$$

wird:

$$u = \text{Im}\,(\underline{\hat{U}}\,e^{j\omega t}) \qquad (106)$$

$$i = \text{Im}\,(\underline{\hat{I}}\,e^{j\omega t}) \qquad (107)$$

wobei $\underline{\hat{U}} = \hat{U}\,e^{j\varphi}$ und $\underline{\hat{I}} = \hat{I}\,e^{j\varphi}$ die komplexen *Amplituden* bzw. $\underline{U} = U\,e^{j\varphi}$ und $\underline{I} = I\,e^{j\varphi}$ die komplexen *Effektivwerte* sind; so ergibt sich aus Gl. (103):

$$\underline{I} = \underline{U}/R \qquad (108)$$

Damit sind die Strom-Spannungs-Verhältnisse in einem Wirkwiderstand durch komplexe Effektivwerte darstellbar.

In einer *Spule* mit der Induktivität L gilt für die Augenblickswerte von Strom und Spannung die Gleichung:

$$u = L(\text{d}i/\text{d}t) \qquad (109)$$

Für einen durch die Spule fließenden sinusförmigen Wechselstrom $i = \hat{I}\sin\omega t$ erhält man bei Anwendung von Gl. (109):

$$u = \omega L\hat{I}\cos\omega t = \hat{U}\sin[\omega t + (\pi/2)] \qquad (110)$$

Es tritt eine Phasenvoreilung der Spannung um $(\pi/2)$ (Viertelperiode) gegenüber dem Strom auf. Aus Gl. (110) berechnet sich der Effektivwert der Spannung:

$$U = \omega L I \qquad (111)$$

In *komplexer Schreibweise* gilt unter Beachtung der Phasenvoreilung der Spannung $e^{j(\pi/2)}$:

$$U = j\omega L\underline{I} \qquad (112)$$

Bei einem *Kondensator* besteht für die Augenblickswerte von Strom und Spannung die Gleichung:

$$i = C(\text{d}u/\text{d}t) \qquad (113)$$

Liegt am Kondensator (der Wirkwiderstand wird vernachlässigt) eine sinusförmige Spannung $u = \hat{U}\sin\omega t$, dann berechnet sich der Strom zu:

$$i = \omega C\hat{U}\cos\omega t = \hat{I}\sin[\omega t + (\pi/2)] \qquad (114)$$

Im Kondensator eilt der Strom der Spannung um $(\pi/2)$ (Viertelperiode) vor. Die Effektivwerte genügen der Beziehung:

$$I = \omega C U \qquad (115)$$

bzw. in komplexer Form unter Beachtung der Phasenvoreilung des Stroms $[e^{j(\pi/2)}]$:

$$I = j\omega C\underline{U} \qquad (116)$$

Beispiel. Ein Wechselstrommotor hat an seiner Welle eine Leistung von 10 kW zur Verfügung, sein Wirkungsgrad beträgt 86%, sein Leistungsfaktor ist $\cos\varphi = 0{,}72$. Der Motor wird mit einer Spannung $U = 220$ V bei $f = 50$ Hz betrieben. Welche Kapazität muß zum Zwecke einer Phasenkompensation parallelgeschaltet werden, damit ein $\cos\varphi' = 0{,}85$ (allg. gesetzliche Forderung) erreicht wird?
Der Motor nimmt eine elektrische Leistung $P = P_{\text{mech}}/\eta = 10\text{ kW}/0{,}86 = 11{,}63$ kW auf.
Der zu kompensierende Blindstrom beträgt $I_b = (P/U)(\tan\varphi - \tan\varphi') = (11\,630\text{ W}/220\text{ V})\cdot(0{,}965 - 0{,}618) = 18{,}4$ A.
Nach Gl. (67) ist $C = I_b/U\omega = 18{,}4\text{ A}/220\text{ V}\cdot 314\text{ s}^{-1} = 2{,}66\cdot 10^{-4}\text{ F} = 266\ \mu\text{F}$.
Aus dem Netz werden nun noch $I = P/U\cos\varphi' = 11\,630\text{ W}/220\text{ V}\cdot 0{,}85 = 62{,}4$ A entnommen. Eine Kompensation des Leistungsfaktors größer 0,85 ··· 1 ist unwirtschaftlich.

6.2.2. Reihenschaltung verschiedener Widerstände

Wirkwiderstand und induktiver Widerstand

Nach Bild 39 ergibt sich mit Anwendung des 2. KIRCHHOFFschen Gesetzes:

$$u = u_R + u_L = iR + L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t) \tag{117}$$

Fließt durch die Reihenschaltung ein sinusförmiger Strom $i = \hat{I} \sin \omega t$, so kann man zur Zeigerdarstellung oder zur komplexen Darstellung übergehen.

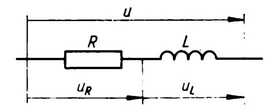


Bild 39. Reihenschaltung von Spule und Widerstand

In der Zeigerdarstellung (Bild 40) ist die *geometrische* Summe der Spannungsabfälle an Widerstand und Spule gleich dem Effektivwert der anliegenden Spannung U, wenn die Effektivwerte für die Zeigerlänge aufgetragen werden. Die Spannung an der Spule U_L eilt dem Strom I um den Phasenwinkel $\pi/2$ vor, die Spannung U_R am Widerstand ist mit dem Strom in Phase. Der Zeiger der Gesamtspannung U eilt dem Stromzeiger um den Winkel φ voraus. Weil sich alle Phasenlagen auf den Stromzeiger I beziehen, wird er bei Reihenschaltung oft als *Bezugszeiger* gewählt. Die geometrische Summe der beiden Spannungszeiger U_R und U_L errechnet sich aus (Lehrsatz des PYTHAGORAS):

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{118}$$

Damit ergibt sich als neue Widerstandsgröße:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \tag{119}$$

der *Scheinwiderstand* (Impedanz). Für die Phasenverschiebung zwischen Spannung U und Strom I gilt:

$$\tan \varphi = U_L/U_R = \omega L/R = U_\mathrm{b}/U_\mathrm{w} \tag{120}$$

Die Komponenten des Scheinwiderstands werden als *Wirkwiderstand* (Resistanz) R und als *induktiver Blindwiderstand* (Reaktanz) $X_L = \omega L$ bezeichnet. Analog dazu ist für U_R auch *Wirkspannung* U_w und für U_L *Blindspannung* U_b üblich.
Die Schreibweise wird vereinfacht durch Anwendung der komplexen Darstellung (Bild 41). Die Gesamtspannung $\underline{U}$ ermittelt man aus:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{I}(R + \mathrm{j}\omega L) \tag{121}$$

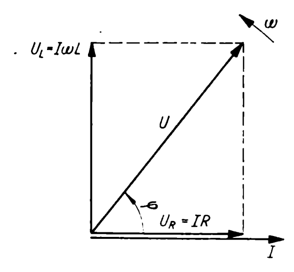


Bild 40. Spannungszeigerdiagramm der Reihenschaltung von Spule und Widerstand

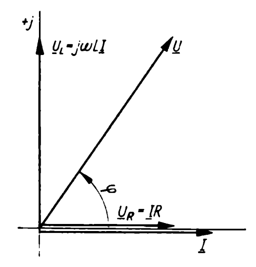


Bild 41. Spannungszeiger der Reihenschaltung von Spule und Widerstand in der komplexen Ebene

Der *Scheinwiderstand* erscheint in komplexer Form als:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = R + \mathrm{j}X_L \tag{122}$$

Er ist ein *Widerstandsoperator*, d. h., er stellt keine Zeitfunktion wie die Größen $\underline{U}$ oder $\underline{I}$ dar, sondern ist lediglich eine Rechengröße. Die Polarform des komplexen Scheinwiderstands lautet:

$$\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \exp\left(\mathrm{j} \cdot \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \tag{123}$$

Eine Drosselspule besteht meist aus mehreren Windungen Kupferdraht. Sie besitzt daher neben ihrem induktiven Widerstand auch einen ohmschen Widerstand. Beide kann man sich als Reihenschaltung gemäß Bild 39 vorstellen, das damit als Ersatzschaltung für eine Drosselspule gelten kann.

Wirkwiderstand und kapazitiver Widerstand

Aus Bild 42 ist für die Anordnung Widerstand und Kondensator in Reihe zu entnehmen:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{I}[R - (\mathrm{j}/\omega C)] \tag{124}$$

Der komplexe *Scheinwiderstand* beträgt:

$$\underline{Z} = R - (\mathrm{j}/\omega C) = R - \mathrm{j}X_C \tag{125}$$

$X_C = 1/\omega C$ ist der *kapazitive Blindwiderstand.*

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \exp\left(-\mathrm{j} \cdot \arctan \frac{1}{\omega RC}\right) \tag{126}$$

In einem Kondensator finden beim Betrieb mit Wechselspannung ständig *Umladungsvorgänge* statt, wobei auch ein Wirkstrom auftritt. Daher kann für einen solchen verlustbehafteten Kondensator eine *Ersatzschaltung* angenommen werden, die einer Reihenschaltung von Kondensator und Verlustwiderstand gleichkommt, wie sie Bild 42 zeigt. Der Strom eilt der Spannung nicht, wie es Gl. (114) aussagt, um $\pi/2$ vor, sondern um einen geringen Betrag, den sogenannten Verlustwinkel δ, weniger:

$$\delta = (\pi/2) - \varphi \tag{127}$$

Dieser Winkel wird bei Isolierstoffen zur Qualitätsangabe benutzt und aus den Größen der Ersatzschaltung bestimmt:

$$\tan \delta = \omega RC \tag{128}$$

Der $\tan \delta$ üblicher Ioslierstoffe liegt in der Größenordnung von $10^{-3} \cdots 10^{-4}$ und hängt von Frequenz, Spannung und Temperatur ab.

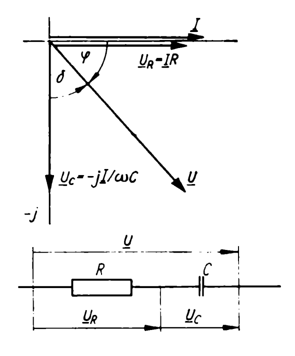


Bild 42. Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand und Darstellung in der komplexen Ebene

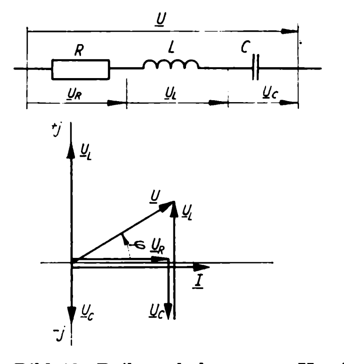


Bild 43. Reihenschaltung von Kondensator, Spule und Widerstand und Darstellung in der komplexen Ebene

Wirkwiderstand, induktiver und kapazitiver Widerstand

Wie aus den Gln. (121) und (124) ersichtlich ist, müssen das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz und das OHMsche Gesetz auch in komplexer Form gelten. Die folgenden Darstellungen beweisen, daß auch das 1. KIRCHHOFFsche Gesetz im Komplexen seine Gültigkeit behält. Mit dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz erhält man nach Bild 43:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}[R + \mathrm{j}(\omega L - 1/\omega C)] \tag{129}$$

Als *Scheinwiderstand* erscheint:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}[\omega L - (1/\omega C)] = R + \mathrm{j}(X_L - X_C) = R + \mathrm{j}X \tag{130}$$

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{131}$$

mit $$\varphi = \arctan[(\omega^2 LC - 1)/\omega RC] \tag{132}$$

Wie Bild 43 zeigt, läßt sich durch Veränderung von L oder C erreichen, daß die Phasenverschiebung φ zwischen Gesamtspannung U und Strom I gleich Null wird. Man spricht dann von *Reihenresonanz* oder *Spannungsresonanz*. Dieser Zustand tritt ein, wenn der induktive Blindwiderstand gleich dem kapazitiven Blindwiderstand ist:

$$X_L = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = X_C \tag{133}$$

Der gesamte Stromkreis verhält sich bei konstanter Gesamtspannung so, als ob nur der Wirkwiderstand R vorhanden sei, und der Strom erreicht in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω ein Maximum (Bild 44). Die *Resonanzfrequenz* ist zu berechnen aus:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \tag{134}$$

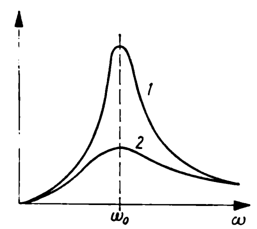


Bild 44. Resonanzkurven des Reihenschwingkreises. *1* kleiner Wirkwiderstand; *2* großer Wirkwiderstand

Praktische Anwendungsfälle der Reihenresonanz sind die „9-kHz-Sperre" in Rundfunkempfängern, die einen Überlagerungston der Frequenz 9 kHz kurzschließt, und die „Saugkreise", mit denen man in Gleichrichterschaltungen die Oberwellenspannungen beseitigt. Der so bezeichnete Reihenschwingkreis ist nur für die Resonanzfrequenz sehr niederohmig, für alle anderen Frequenzen dagegen hochohmig.

Beispiel. Ein unbekannter Scheinwiderstand läßt bei einer Netzspannung von 220 V einen um 30° nacheilenden Strom von 1 A fließen. Um wieviel Ohm ist dieser Scheinwiderstand zu vergrößern, damit der gesamte Widerstand im Kreis $\underline{Z} = (200 + \mathrm{j} \cdot 150)\ \Omega$ beträgt, und wie groß ist die neue Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung?
Aus $\underline{Z}_1 = \underline{U}/\underline{I} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}/I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 220 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}\ \Omega$ wird der unbekannte Scheinwiderstand errechnet. Um den Zusatzwiderstand ermitteln zu können, ist Z_1 in die Komponentenform umzuwandeln:

$\underline{Z}_1 = Z(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi) = 200\ \Omega(\cos 30° + \mathrm{j} \cdot \sin 30°) = (190{,}5 + \mathrm{j} \cdot 110)\ \Omega.$

Damit ergibt sich der gesuchte Zusatzwiderstand als $\underline{Z}_2 = \underline{Z} - Z_1 = (9{,}5 + \mathrm{j} \cdot 40)\ \Omega$, und die neue Phasenverschiebung berechnet sich aus $\tan\varphi = \mathrm{Im}(\underline{Z})/\mathrm{Re}(\underline{Z}) = 150\ \Omega/200\ \Omega = 0{,}75$, d. h. $\varphi = 36°52'$.

6.2.3. Parallelschaltung verschiedener Widerstände

Wirkwiderstand und induktiver Widerstand

Da die KIRCHHOFFschen Gesetze im Komplexen ebenfalls gelten, ist (Bild 45):

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{U}[(1/R) - (\mathrm{j}/\omega L)] = \underline{U}\,\underline{Y} \tag{135}$$

$\underline{Y}$ ist der komplexe *Scheinleitwert:*

$$\underline{Y} = (1/R) - (\mathrm{j}/\omega L) = G + \mathrm{j}B_L \tag{136}$$

$$\underline{Y} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}} \cdot \exp\left(-\mathrm{j} \cdot \arctan \frac{R}{\omega L}\right) \tag{137}$$

Er kann wieder in einen *Wirkleitwert* (G) und einen *Blindleitwert* (B_L) zerlegt werden. Infolgedessen fließen auch ein *Wirkstrom* $\underline{I}_R = \underline{I}_w$ und ein Blindstrom $\underline{I}_L = \underline{I}_b$.

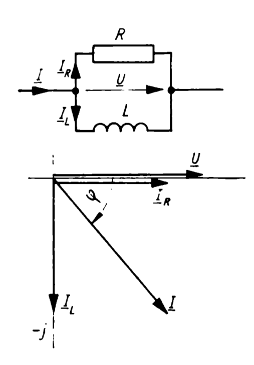


Bild 45. Parallelschaltung von Spule und Widerstand und Darstellung in der komplexen Ebene

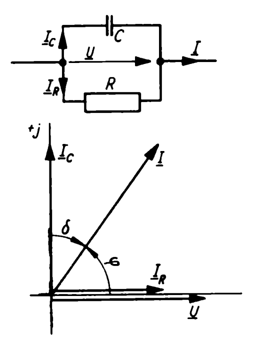


Bild 46. Parallelschaltung von Kondensator und Widerstand und Darstellung in der komplexen Ebene

Wirkwiderstand und kapazitiver Widerstand

Nach Bild 46 ist:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \underline{U}[(1/R) + \mathrm{j}\omega C] = \underline{U}\,\underline{Y} \tag{138}$$

Der *Scheinleitwert* hat die Form:

$$\underline{Y} = (1/R) + \mathrm{j}\omega C = G + \mathrm{j}B_C \tag{139}$$

$$\underline{Y} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \cdot \exp(\mathrm{j} \cdot \arctan \omega RC) \tag{140}$$

G Wirkleitwert, B_C kapazitiver Blindleitwert

Diese Schaltungsart dient bevorzugt als Ersatzschaltbild für einen verlustbehafteten Kondensator. Der $\tan \delta$ berechnet sich aus den Größen der Ersatzschaltung:

$$\tan \delta = 1/\omega RC \tag{141}$$

Wirkwiderstand, induktiver Widerstand und kapazitiver Widerstand

Der Gesamtstrom ermittelt sich aus:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{U}\left[\frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right] = \underline{U}\,\underline{Y} \tag{142}$$

Der komplexe *Scheinleitwert* ist:

$$\underline{Y} = (1/R) + \mathrm{j}[\omega C - (1/\omega L)] = G + \mathrm{j}B \tag{143}$$

$$\underline{Y} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \cdot \exp\left(\mathrm{j} \cdot \arctan \frac{R\omega^2 LC - R}{\omega L}\right) \tag{144}$$

Induktiver und kapazitiver Scheinwiderstand

Nach Bild 47 ist:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \underline{U}\underline{Y} \tag{145}$$

Mit $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega L$ und $\underline{Z}_2 = R_2 - (\mathrm{j}/\omega C)$ ergeben sich aus $\underline{Y} = G + \mathrm{j}B$ der *Wirkleitwert:*

$$G = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} \tag{146}$$

und der *Blindleitwert:*

$$B = \frac{(1/\omega C)}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} - \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \tag{147}$$

Die Gleichung für den *Phasenwinkel* ist:

$$\varphi = \arctan (B/G) \tag{148}$$

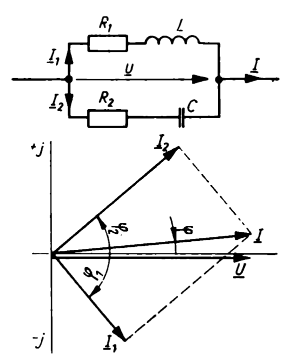
Auch bei diesem Schaltungsaufbau läßt sich prinzipiell erreichen, daß Gesamtstrom und Spannung in Phase sind, d. h. der Phasenwinkel φ gleich Null wird. Dieser Fall ist als *Parallelresonanz* oder *Stromresonanz* bekannt. In diesem Schaltungszustand ist der Blindleitwert gleich Null, also:

$$\frac{(1/\omega C)}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \tag{149}$$

Daraus bestimmt sich die *Resonanzkreisfrequenz:*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\left(R_1^2 - \frac{L}{C}\right) \Big/ \left(R_2^2 - \frac{L}{C}\right)} \tag{150}$$

Eine praktische Anwendung der Parallelresonanz ist der Selektivverstärker, in dem ein Parallelschwingkreis als Anodenwiderstand eingebaut ist, der wegen seines hohen Widerstands im Resonanzfall nur die Resonanzfrequenz verstärkt. Für alle anderen Frequenzen ist der Kreis nicht so hochohmig. Weiterhin wird auch in der Starkstromtechnik die gleiche Eigenschaft eines derartigen Schwingkreises ausgenutzt, indem parallel zur Erdkapazität einer Leitung eine Erdschlußspule (PETERSEN-Spule) gelegt wird. Bei Erdschluß verhindert der hohe Resonanzwiderstand einen großen Strom, und der Lichtbogen kommt leicht zum Erlöschen.



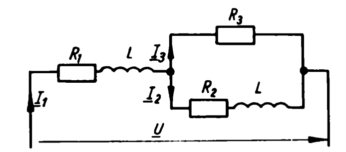


Bild 48. HUMMEL-Schaltung

Bild 47. Parallelschaltung von Spule und Kondensator und Darstellung in der komplexen Ebene

Beispiel. In der Schaltung (Bild 48) ist der Widerstand R_3 so zu dimensionieren, daß zwischen Gesamtspannung $\underline{U}$ und dem Strom $\underline{I}_2$ eine Phasenverschiebung von 90° ($\hat{=}\ \pi/2$) entsteht. Diese Schaltung wird als HUMMEL-Schaltung bezeichnet und findet in der elektrischen Meßtechnik Anwendung. Die Spulen L_1 und L_2 können analog den Kondensatoren als verlustbehaftet aufgefaßt werden und erscheinen daher mit einem Reihenwiderstand.

Auf Grund der KIRCHHOFFschen Gesetze gilt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \qquad \text{(I)}$$

$$\underline{U} = \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_3 R_3 \qquad \text{(II)}$$

$$\underline{I}_3 R_3 = \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) \qquad \text{(III)}$$

Durch Zusammenfassung von (I), (II) und (III) entsteht

$$\underline{U} = \underline{I}_2\left[\left(\frac{R_1R_2}{R_3} + R_1 + R_2 - \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R_3}\right) + j\omega\left(\frac{L_2R_1}{R_3} + \frac{L_1R_2}{R_3} + L_1 + L_2\right)\right].$$

Soll eine Phasenverschiebung von 90° erreicht werden, so muß die Wirkkomponente in der Klammer entfallen, d. h., es gilt

$$R_1R_2/R_3 + R_1 + R_2 - (\omega^2 L_1 L_2/R_3) = 0.$$

Für die Dimensionierung von R_3 erhält man daraus die Bedingung:

$$R_3 = (\omega^2 L_1 L_2 - R_1 R_2)/(R_1 + R_2)$$

6.3. Drehstrom

6.3.1. Grundbegriffe

Bringt man in einem Wechselstromgenerator anstelle einer Wicklung drei je um 120° räumlich versetzte Wicklungen unter, so entstehen bei Drehung des Rotors (Bild 49) in den Wicklungen

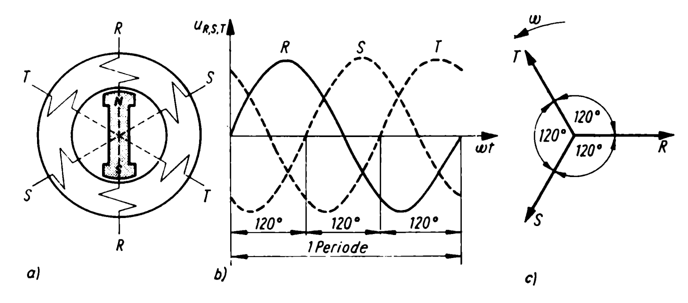


Bild 49. Erzeugung von Drehstrom. a) Schema des Drehstromgenerators; b) Liniendiagramm; c) Zeigerdiagramm

unabhängig voneinander Quellenspannungen, die zeitlich um 120° gegeneinander phasenverschoben sind. Ihre Augenblickswerte sind:

$$u_R = U_R \sin(\omega t)$$
$$u_S = U_S \sin(\omega t - 120°) \qquad (151)$$
$$u_T = U_T \sin(\omega t + 120°)$$

Am Drehstromverbraucher fallen drei zeitlich verschobene Spannungen ab, die als *Phasenspannungen* bezeichnet werden.
Man könnte also jeden Wicklungsstrang des Generators mit jedem Wicklungsstrang des Verbrauchers durch zwei Leitungen verbinden und benötigte dafür sechs Leitungen (Bild 50a).

Dreieckschaltung

Aus Bild 49 erkennt man, daß im Liniendiagramm die Summe aller drei Spannungen u_R, u_S, u_T stets gleich Null ist, was bedeutet, daß die drei Stränge zu einer Masche zusammengeschaltet werden können (2. KIRCHHOFFsches Gesetz). Diese Schaltungsanordnung heißt

Dreieckschaltung oder *Summenreihenschaltung*, man spricht von einer *Verkettung* der Stränge (Bild 50b). Bei der Dreieckschaltung ist die Phasenspannung U_P gleich der Leiterspannung U. Dagegen setzt sich der Leiterstrom geometrisch aus den Phasenströmen zusammen (Bild 51). Es ist allgemein:

$$I = 2I_P \cdot \cos 30° = \sqrt{3}\, I_P \tag{152}$$

Die drei Leiterströme (I_R, I_S, I_T) eines Generators z. B. sind bei symmetrischer Belastung gleich groß und eilen den Phasenströmen um 30° voraus.

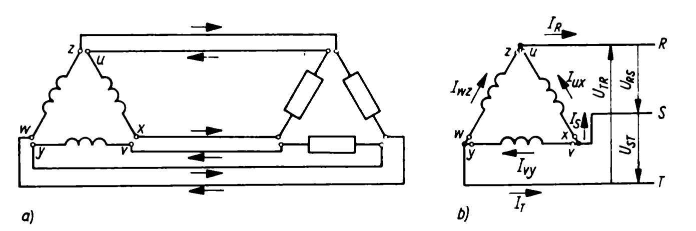


Bild 50. Dreieckschaltung. a) vor der Verkettung; b) nach der Verkettung. u, v, w Wicklungsanfänge; x, y, z Wicklungsenden

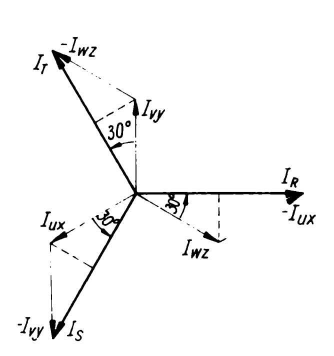


Bild 51. Zeigerdiagramm der Ströme bei Dreieckschaltung

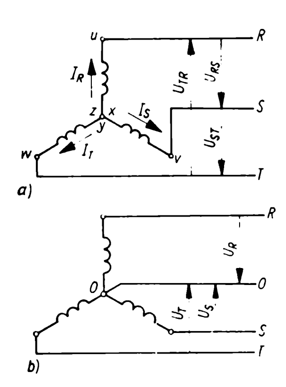


Bild 52. Sternschaltung. a) ohne Nullleiter; b) mit Nulleiter. u, v, w Wicklungsanfänge; x, y, z Wicklungsenden

Sternschaltung

Das Liniendiagramm in Bild 49 hat in seiner allgemeinen Form auch für die Phasenströme Berechtigung. Das bedeutet, daß man die drei Stränge in einem Knoten (1. KIRCHHOFFsches Gesetz) zusammenschalten kann, da die Summe der Phasenströme in jedem Augenblick gleich Null ist. Diese Schaltungsart heißt *Sternschaltung* oder *Gegenreihenschaltung* (Bild 52). Bei der Sternschaltung ist der Leiterstrom gleich dem Phasenstrom, die Phasenspannungen (U_R, U_S, U_T) setzen sich jedoch geometrisch zur Leiterspannung (U_{RS}, U_{ST}, U_{TR}) analog dem Zeigerdiagramm in Bild 51 zusammen. Es gilt allgemein:

$$U = 2U_P \cdot \cos 30° = \sqrt{3}\, U_P \tag{153}$$

Führt man den Sternpunkt in Bild 52b heraus, so hat man in Drehstrom-Niederspannungsnetzen zwei Spannungen („Beleuchtung" und „Kraft") zur Verfügung. Zwischen dem Außenleiter und dem Nulleiter liegt dann die Phasenspannung (z. B. 220 V), und zwischen den Außenleitern besteht die verkettete Spannung (z. B. 380 V). Durch ungleichmäßige Verteilung der Verbraucher zwischen Phase und Nulleiter entsteht „Schieflast", und der Nulleiter führt einen Differenzstrom, den man am einfachsten grafisch mit Hilfe des Zeigerdiagramms ermittelt.



Beim Anlassen von Kurzschlußläufermotoren*) schaltet man zuerst die Ständerwicklung in „Stern" und hat damit eine $1/\sqrt{3}$fach niedrigere Spannung an einem Wicklungsstrang und somit einen kleineren Anlaufstrom. Nach Abklingen der Anlaufstromspitze schaltet man die Ständerwicklung auf „Dreieck" um und erreicht damit die volle Netzspannung an einem Wicklungsstrang und gleichzeitig auch ein höheres Drehmoment des Motors. Der dazu notwendige Umschalter ist der bekannte *Stern-Dreieck-Schalter.*

6.3.2. Drehstromleistung

Die Wirkleistung eines Strangs berechnet sich mit der schon angeführten Gl. (96). Für drei gleich belastete Phasen gilt daher:

$$P = 3U_\mathrm{p}I_\mathrm{p}\cos\varphi \tag{154}$$

Die Wirkleistung in den beiden Schaltungsarten berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} &\textit{Dreieckschaltung:}\quad P = 3U(I/\sqrt{3})\cos\varphi = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi \\ &\textit{Sternschaltung:}\quad P = 3(U/\sqrt{3})\,I\cos\varphi = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi \end{aligned} \tag{155}$$

Die Wirkleistung ist also unabhängig von der Schaltungsart. Es ist zu beachten, daß sich der Phasenwinkel φ auf die Phasengrößen bezieht. Scheinleistung und Blindleistung berechnen sich entsprechend den Gln. (97) und (98).

6.4. Mehrwellige periodische Ströme

6.4.1. Darstellung

Ein großer Teil von Strömen und Spannungen, die in der Elektrotechnik auftreten, weicht von der reinen Sinusform ab. Als Beispiel soll der Strom durch eine Spule mit Eisenkern dienen, der auf Grund der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie verzerrt wird. Jede periodische Funktion läßt sich nun nach FOURIER als eine Summe reiner Sinus- und Cosinusfunktionen mit den Amplituden a_n und b_n und den Frequenzen $n\omega$ darstellen**):

$$\begin{aligned} a(\omega t) = {} & a_0 + a_1\sin\omega t + a_2\sin 2\omega t + \cdots + a_n\sin n\omega t \\ & + \cdots + b_1\cos\omega t + b_2\cos 2\omega t + \cdots + b_n\cos n\omega t \end{aligned} \tag{156}$$

Der Koeffizient a_0 (Gleichstromglied) ist:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T a(\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{157}$$

Für die Amplituden der Sinus- und Cosinusschwingungen gilt:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(\omega t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \tag{158}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(\omega t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \tag{159}$$

Der Strom mit der Frequenz ω ist die *Grundwelle* oder *erste Harmonische.* Die restlichen Ströme, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache (n) der Grundfrequenz sind, nennt man *Oberwellen* oder *n-te Harmonische.*

*) s. Fachwissen des Ingenieurs, Band 5, Elektrische Maschinen

**) s. Abschn. MATHEMATIK, FOURIER-Reihen

Wechselstromgrößen mit Symmetrie bezüglich der Ordinate (Bild 53a) enthalten keine Sinusglieder, Wechselstromgrößen mit Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs (Bild 53b) enthalten keine Cosinusglieder, und solche mit Symmetrie bezüglich der Abszisse (Bild 53c) enthalten nur harmonische Schwingungen mit ungeradem n, also z. B. die dritte, die fünfte usw. Oberwelle.

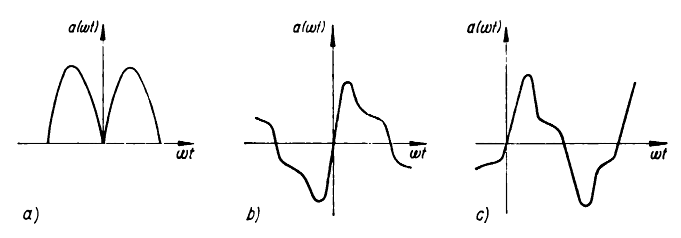


Bild 53. Verschiedene Formen mehrwelliger Ströme. a) Symmetrie bezüglich der Ordinate; b) Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs; c) Symmetrie bezüglich der Abszisse

6.4.2. Effektivwert, Leistungs- und Klirrfaktor

Der *Effektivwert* ist genau wie in Gl. (83) definiert und ergibt sich aus:

$$Y = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \cdots + Y_n^2} \tag{160}$$

Dabei sind unter Y_i die Effektivwerte der einzelnen Teilschwingungen zu verstehen. Sind Strom- und Spannungskurve verzerrt, so gilt für die *Wirkleistung:*

$$P = U_1 I_1 \cos(\varphi_1 - \psi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2 - \psi_2) + \cdots + U_n I_n \cos(\varphi_n - \psi_n) \tag{161}$$

und für die *Blindleistung:*

$$Q = U_1 I_1 \sin(\varphi_1 - \psi_1) + U_2 I_2 \sin(\varphi_2 - \psi_2) + \cdots + U_n I_n \sin(\varphi_n - \psi_n) \tag{162}$$

Es werden also die Einzelleistungen der Teilschwingungen gleicher Frequenz addiert. φ_n sei die Phasenverschiebung der Spannungswelle und ψ_n die der Stromwelle gegen einen gemeinsamen Bezugspunkt. Die *Scheinleistung* berechnet sich nach:

$$S = UI \tag{163}$$

wobei unter U bzw. I die Effektivwerte gemäß (160) zu verstehen sind. Bei verzerrten Strömen und Spannungen ist die Gl. (97) ungültig. Der *Leistungsfaktor* $\cos\varphi$ ist hier in der Form nach Gl. (99) nur als Verhältniszahl zu betrachten, er hat keine Beziehung zu den Winkelfunktionen mehr.

Der *Klirrfaktor* ist ein Maß für den Verzerrungsgrad einer nicht-sinusförmigen Kurve und stellt das Verhältnis des Effektivwerts der Oberwellen zum Effektivwert der gesamten verzerrten Kurve dar:

$$k = \left(\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \cdots + Y_n^2}\right)/Y \tag{164}$$

Literaturverzeichnis

[1] *Lunze, K.:* Einführung in die Elektrotechnik. 6. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978
[2] *Mierdel, G.:* Elektrophysik. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1972
[3] *Philippow, E.:* Grundlagen der Elektrotechnik. 4. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1975

Weiterführende Literatur

[4] *Autorenkollektiv:* Halbleiterelektronik, Arbeitsbuch. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1977
[5] *Autorenkollektiv:* Taschenbuch Elektrotechnik, Band 1: Allgemeine Grundlagen. — Berlin: VEB Verlag Technik 1976
[6] *Bitterlich, W.:* Einführung in die Elektronik. — Wien, New York: Springer-Verlag 1967
[7] *Buckel, W.:* Supraleitung. — Berlin: Akademie-Verlag 1973
[8] *Claussnitzer, H.:* Einführung in die Elektrotechnik. 7. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[9] *Drachsel, R.:* Grundlagen der elektrischen Meßtechnik. 6. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1979

[10] *Grafe, H., Loose, J., Kühn, H.:* Grundlagen der Elektrotechnik, 2 Bände. 9. bzw. 8. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[11] *Jötten, R., Zürneck, H.:* Einführung in die Elektrotechnik, 2 Bände. — Braunschweig: Vieweg 1975, 1972
[12] *Jüttemann, H.:* Grundlagen der Elektrotechnik. 2. Aufl. — Düsseldorf: VDI-Verlag 1971
[13] *Kretzmann, R.:* Handbuch der Elektronik. — Berlin-Borsigwalde: Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GmbH 1968
[14] *Küpfmüller, K.:* Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 10. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1973
[15] *Lunze, K., Wagner, E.:* Einführung in die Elektrotechnik, Arbeitsbuch. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[16] *Möschwitzer, A.:* Elektronische Halbleiterbauelemente. Reihe: Informationselektronik. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978
[17] *Möschwitzer, A.:* Halbleiterelektronik — Wissensspeicher. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1979
[18] *Möschwitzer, A., Lunze, K.:* Halbleiterelektronik — Lehrbuch. 3. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1979
[19] *Müller, R.:* Grundlagen der Halbleiter-Elektronik. 3. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1979
[20] *Paul, R.:* Transistoren und Thyristoren. — Berlin: VEB Verlag Technik 1977
[21] *Paul, R.:* Halbleiterdioden. — Berlin: VEB Verlag Technik 1976
[22] *Pfeifer, H.:* Elektronik für den Physiker, 7 Bände. — Berlin: Akademie-Verlag
[23] *Reth, J., Kruschwitz, H., Müllenborn, D.:* Grundlagen der Elektrotechnik. 6. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1978
[24] *Reusch, K., Hoschke, G., Scholz, J.:* Lehrbuch elektrischer Systeme, 3 Bände. — Berlin: VEB Verlag Technik 1971, 1972
[25] *Rumpf, K.-H.:* Bauelemente der Elektronik. 10. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1980
[26] *Rumpf, K.-H., Pulvers, M.:* Transistor-Elektronik. 7. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1979
[27] *Semrad, H., Otto, W.:* Grundlagen der Elektronik. Wissensspeicher. 7. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1976
[28] *Völz, H.:* Elektronik für Naturwissenschaftler. 3. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1981
[29] *Weiss, A. v.:* Allgemeine Elektronik, 2 Bände. 6. bzw. 5. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1976, 1973
[30] *Lindner, H., Brauer, H., Lehmann, C.:* Elektrotechnik—Elektronik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1983



Ch Chemie

Von Dr. rer. nat. Gerhard Ludwig, Leipzig (Abschn. 4.), *Studiendirektor Karl-Heinz Näser †, Leipzig* (Abschn. 1. und 2.), *und Fachschuldozent Werner Schröter, Leipzig* (Abschn. 3.)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Die *Chemie* ist ein Teilgebiet der Naturwissenschaften und beschäftigt sich mit dem Aufbau, den Eigenschaften und den Umwandlungen der Stoffe. Die Chemisierung der Volkswirtschaft erfordert, daß jeder Ingenieur, unabhängig von seiner speziellen Fachrichtung, Grundkenntnisse auf diesem Wissenszweig besitzt. Für weiterführende Studien sind die entsprechenden Literaturhinweise zu beachten.
Die Chemie unterteilt man in folgende Hauptgebiete:

Allgemeine Chemie: Die allgemeine Chemie erforscht die Möglichkeit und den Verlauf physikalischer und chemischer Vorgänge mit physikalischen und chemischen Hilfsmitteln und erarbeitet die mathematischen Formulierungen chemischer Gesetzmäßigkeiten. Sie beschäftigt sich mit dem Aufbau der Atome und Moleküle und den sich daraus ergebenden Gesetzmäßigkeiten. Sie ist die Grundlage der gesamten Chemie und hat in den letzten Jahren in der Ausbildung und Anwendung zunehmend an Bedeutung gewonnen.

Anorganische Chemie: Sie beschäftigt sich mit dem Vorkommen, der Gewinnung, den Eigenschaften und der Verwendung der Elemente und ihrer Verbindungen mit Ausnahme der Stoffe, die zur organischen Chemie gehören.

Organische Chemie: Sie ist die Chemie der Kohlenstoffverbindungen, wobei allerdings einige einfache Verbindungen traditionsgemäß in der anorganischen Chemie behandelt werden (Kohlensäure, Karbonate, Zyanide usw.).

Analytische Chemie: Sie beschäftigt sich mit der Aufklärung der qualitativen und quantitativen Zusammensetzung der Stoffe. Dabei bedient sie sich vor allem der physikalisch-chemischen Meßmethoden.

2. Allgemeine Chemie

2.1. Grundbegriffe

Die *Chemie* ist die Lehre von den Stoffen und den Stoffumwandlungen. Sie beschäftigt sich mit den Gesetzen für die Bildung von Verbindungen aus den Elementen, mit den wechselseitigen Umwandlungen der Verbindungen und mit dem Zerfall der Verbindungen in die Elemente.
Ein *Stoff* ist eine spezielle, konkrete Erscheinungsform der Materie. Er besitzt eine Masse und nimmt einen Raum ein. Alle Stoffe teilt man in *reine Stoffe* und in *Stoffgemenge* ein. Ein homogenes oder heterogenes Stoffgemenge besteht aus zwei oder mehreren reinen Stoffen. Letztere unterteilt man in *Atome* und *Verbindungen.*
Ein chemisches *Element* ist eine Atomsorte mit bestimmter Kernladungszahl (Ordnungszahl).

Die systematische Einteilung der Elemente erfolgt im Periodensystem (s. 2.4.). Bei dieser Definition ist zu beachten, daß ein Element kein Stoff ist, sondern eine Atomsorte.
Atome sind die kleinsten Masseteilchen, die man auf chemischem Wege nicht teilen kann. Atome des gleichen Elements besitzen die gleiche Kernladungszahl. Durch Abgabe oder Aufnahme von Elektronen entstehen aus den Atomen die *Ionen*, die man in Kationen (positiv geladen) und Anionen (negativ geladen) unterteilt. (Über den Aufbau der Atome s. 2.3.)
Eine chemische *Verbindung* entsteht durch die Vereinigung von zwei oder mehreren Atomen. Dabei können es Atome des gleichen Elements (der gleichen Atomsorte) oder verschiedener Elemente sein:

$$2\,Cl \rightarrow Cl_2, \qquad H + Cl \rightarrow HCl$$

Die *Moleküle* sind die kleinsten Masseteilchen einer chemischen Verbindung. Dabei ist zu beachten, daß auch chemische Verbindungen, wie die Salze, aus Ionen aufgebaut sein können. Der Molekülbegriff ist streng nur auf Gase anwendbar, wenn die kleinsten Teilchen des Gases aus mehreren Atomen bestehen. Es ist somit unsinnig, von einem Natriumchloridmolekül zu sprechen.
Ein chemisches Element kennzeichnet man durch ein *Symbol*. Dabei hat dieses eine qualitative und eine quantitative Bedeutung:

qualitativ: Ausdruck für das Element (Atomsorte)

quantitativ: a) ein Atom des betreffenden Elements
b) ein Mol des betreffenden Elements

Eine chemische Verbindung kennzeichnet man durch eine *Formel*. Dabei unterscheidet man zwischen folgenden Möglichkeiten:

empirische Formel: Angabe des Verhältnisses der in der Verbindung enthaltenen Elemente, z. B. $(CH_2O)_n$

Molekularformel (Summenformel): genaue Angaben über die Größe n, z. B. $n = 6$ ergibt $C_6H_{12}O_6$

Strukturformel: Formel zur Kennzeichnung der Bindungsverhältnisse und der Anordnung der Atome in einem Molekül (Näheres s. 4.).

Die Einheit für die Stoffmenge ist das *Mol*. Als gesetzliche Einheit wird es wie folgt definiert: Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus so vielen Elementarteilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffisotops ^{12}C enthalten sind. Dabei muß die Art der Elementarteilchen (Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen usw.) jeweils angegeben werden. Die Anzahl dieser Elementarteilchen ist zahlenmäßig gleich der AVOGADRO-Konstanten $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. Wird die AVOGADRO-Konstante auf das molare Normvolumen ($V_0 = 0{,}022414\ m^3/mol$ bei 273,15 K und 101,325 kPa) bezogen, so ergibt sich die LOSCHMIDT-Konstante $N_L = 2{,}6867 \cdot 10^{25}\ m^{-3}$.
Die Masse von 1 mol Atomen bezeichnet man als *Atommasse* mit der Maßeinheit kg mol^{-1}. Die Zahlenangaben (multipliziert mit 10^3) ohne Maßeinheit bezeichnet man als *relative Atommasse*. Bei Molekülen spricht man von der *Molmasse* (molare Masse) und der *relativen Molmasse*.
Die Division der relativen Molmasse oder Atommasse durch die Wertigkeit (bzw. die Ladungsänderung) ergibt die *relative Äquivalentmasse*. Diese Größe spielt vor allem in der Maßanalyse eine entscheidende Rolle. Das Verhältnis der Masse eines Stoffs zu seiner Äquivalentmasse ergibt die Anzahl Grammäquivalente (val). Bei einer chemischen Reaktion ist diese Anzahl bei allen Reaktionspartnern gleich groß.
Bei den *Zustandsänderungen* eines Systems unterscheidet man zwischen den *physikalischen* und den *chemischen Vorgängen.*

Bei einem physikalischen Vorgang bleiben die beteiligten Stoffe mit ihren chemischen Eigenschaften erhalten. Es treten keine stofflichen Veränderungen auf.
Bei einem chemischen Vorgang oder einer Reaktion entstehen stets neue Stoffe.

Der Aufbau einer chemischen Verbindung aus einfacheren Ausgangsstoffen wird als *Synthese* bezeichnet. Die entgegengesetzte Operation ist eine *Analyse*. Über Reaktionstypen s. 2.5.5.

Eine chemische Reaktion kennzeichnet man durch eine *chemische Gleichung*. Dabei muß die Anzahl der Atome aller beteiligten Elemente auf beiden Seiten gleich groß sein. Bei vollständig verlaufenden Reaktionen schreibt man dazwischen einen Pfeil und bei Gleichgewichtsreaktionen einen Doppelpfeil:

$$S + O_2 \rightarrow SO_2, \qquad N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$$

Die erste Gleichung besagt:

qualitativ: Aus Schwefel und Sauerstoff entsteht Schwefeldioxid.

quantitativ: Aus 1 mol Schwefel und 1 mol molekularem Sauerstoff entsteht 1 mol Schwefeldioxid.

2.2. Grundgesetze

Ein *Gesetz* ist ein bestimmter notwendiger und wesentlicher Zusammenhang zwischen den Dingen und Erscheinungen in der Natur, der sich unter wesentlich gleichen Bedingungen stets wiederholt. Die Gesetze in der Chemie sind objektiv, d. h., der Mensch kann sie erkennen und ausnutzen, aber nicht nach Belieben ändern.

Gesetz von der Erhaltung der Masse und Energie: Bei jeder chemischen Reaktion bleibt die Summe von Masse und Energie konstant. Voraussetzung ist, daß die Reaktion in einem abgeschlossenen System (s. 2.8.1.) abläuft.

Gesetz der konstanten Proportionen: Die Elemente und Verbindungen reagieren stets in ganz bestimmten, festen Massenverhältnissen miteinander. Die Zusammensetzung einer chemischen Verbindung ist daher unabhängig von den Versuchsbedingungen.

Gesetz von den multiplen Proportionen: Bilden zwei Stoffe A und B mehrere Verbindungen miteinander, so stehen die Massen von B, die sich mit gleichen Mengen von A verbinden, im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.

Gesetz von den äquivalenten Proportionen: Die chemischen Elemente vereinigen sich stets im Verhältnis ihrer Äquivalentmassen zu chemischen Verbindungen. Bei einer chemischen Reaktion ist die Anzahl Grammäquivalente aller beteiligten Stoffe stets gleich (Grundgesetz der Maßanalyse). Dabei ist zu beachten, daß die Äquivalentmasse eines Stoffs nicht konstant ist, sondern von der Reaktionsart und seinem Reaktionspartner abhängt.

Beispiel. Eisen kann in mehreren Wertigkeitsstufen auftreten, bzw. seine Verbindungen können die verschiedensten Reaktionen eingehen.
Die relative Äquivalentmasse $M_{\text{Ä}}$ des Eisens hat in den folgenden Reaktionen die angegebenen Werte:

$$FeCl_2 + CrCl_3 \rightarrow FeCl_3 + CrCl_2 \qquad M_{\text{Ä,Fe}} = 55{,}85$$

$$Fe + Cl_2 \rightarrow FeCl_2 \qquad M_{\text{Ä,Fe}} = 27{,}92$$

$$2Fe + 3Cl_2 \rightarrow 2FeCl_3 \qquad M_{\text{Ä,Fe}} = 18{,}62$$

Gesetz der Volumenproportionen: Ideale Gase verbinden sich bei konstantem Druck und konstanter Temperatur immer in einfachen, ganzzahligen Volumenverhältnissen. Ist die Verbindung auch gasförmig, so steht auch ihr Volumen in einem einfachen Zahlenverhältnis zu denen ihrer Bestandteile. Dies wird durch das *Gesetz von* Avogadro begründet:

In gleichen Volumina aller idealen Gase sind bei gleichem Druck und gleicher Temperatur stets gleich viele Moleküle vorhanden.

Bei den realen Gasen sind diese Gesetze nicht anwendbar, da durch die gegenseitigen Wechselwirkungen das Gesetz von Avogadro nicht erfüllt wird. Aus diesem Gesetz ergibt sich eine Erweiterung des Begriffs Molekül, der auch auf Elemente ausgedehnt wird. Danach ist das *Molekül* das kleinste frei bewegliche Teilchen einer Verbindung oder eines Elements. Es ist somit auch sinnvoll, den Atommassen und den Molmassen die gleiche Einheit „kg/mol" zu geben.

2.3. Atombau*)

2.3.1. Atomkern

Das Atom besteht aus dem *Atomkern* und der *Elektronenhülle*. Der Durchmesser liegt in der Größenordnung von 10^{-10} m, während der Atomkern einen Durchmesser von etwa 10^{-15} m besitzt. Die Masse des Atoms ist fast vollständig im Kern konzentriert.
Die Bausteine der Atomkerne bezeichnet man als *Nukleonen*. Es sind dies die Protonen und die Neutronen:

Ein *Proton* (Symbol p) besitzt die gleiche elektrische Ladung wie ein Elektron, und zwar $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. Seine Masse ist $1{,}67265 \cdot 10^{-27}$ kg und seine Molmasse $1{,}00728 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. Die Anzahl der Protonen in einem Atom bezeichnet man als *Kernladungszahl* oder als *Ordnungszahl*. Sie ist gleich der Anzahl der Elektronen in der Elektronenhülle. Da diese die gleiche, aber entgegengesetzte elektrische Ladung besitzen, ist das Atom elektrisch neutral.
Ein *Neutron* (Symbol n) ist elektrisch neutral, besitzt die Masse $1{,}67495 \cdot 10^{-27}$ kg und die Molmasse $1{,}00866 \cdot 10^{-3}$ $kgmol^{-1}$. Die Summe der Protonenanzahl und der Neutronenanzahl bezeichnet man als *Massenzahl*.

Zur Kennzeichnung des Atomaufbaus schreibt man die Massenzahl links oben neben das Elementsymbol und die Protonenanzahl (= Ordnungszahl) links unten.

Beispiel. Das Atom $^{39}_{19}K$ ist ein Kaliumatom mit der Kernladungszahl 19. Es besitzt 39 Nukleonen, die gleich seiner Massenzahl sind. Diese setzen sich aus 19 Protonen und 20 Neutronen zusammen. Die Anzahl der Elektronen beträgt damit auch 19.

Alle Atome eines chemischen Elements haben die gleiche Protonenanzahl, können sich aber in der Neutronenanzahl unterscheiden.
Ein *Reinelement* besteht nur aus Atomen mit gleicher Massenzahl, d. h. gleicher Neutronenanzahl. Diese Elemente haben außer Beryllium eine ungerade Ordnungszahl.

Ein *Mischelement* besteht aus Atomen mit verschiedener Massenzahl. Man bezeichnet Atome mit gleicher Ordnungszahl, aber verschiedener Massenzahl als *Isotope*. Die Gesamtheit der Isotopen eines Elements ergibt eine *Plejade*.

Das Maximum stellt Zinn dar, dessen Plejade 10 Isotope umfaßt. Es gibt weit über 1000 Isotope, aber gegenwärtig sind nur 107 Elemente bekannt.

Zwei Atome, die die gleiche Massenzahl haben, sich aber in der Ordnungszahl unterscheiden, bezeichnet man als *Isobare*. Nach einer *Regel von* MATTAUCH gibt es kein Isobarenpaar, dessen Kernladung sich nur um 1 unterscheidet und das stabil ist.

Von den drei Isobaren $^{40}_{18}Ar$, $^{40}_{19}K$ und $^{40}_{20}Ca$ ist das mittlere nicht stabil, sondern radioaktiv.

Isotone sind Atome, die die gleiche Neutronenanzahl besitzen, sich aber durch ihre Protonenanzahl unterscheiden.

Isomere sind Atome, die den gleichen Aufbau besitzen, sich aber im Energiezustand unterscheiden.

2.3.2. Elektronenhülle

Ein *Elektron* (Symbol e^- oder ⊖) ist ein Elementarteilchen, dem sowohl Korpuskular- als auch Wellencharakter zukommt. Es hat eine Masse von $9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ kg, eine negative elektrische Ladung von $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C (Elementarladung) und eine Molmasse von $5{,}49 \cdot 10^{-7}$ kg/mol. In einem Atom ist die Anzahl der Elektronen gleich der Anzahl der Protonen und damit gleich der Ordnungszahl. Ein Atom ist nach außen elektrisch neutral.

Aufbau der Elektronenhülle nach BOHR:

Aus den Atomspektren ergibt sich, daß die Elektronen sich in ihrem Energiegehalt unterscheiden und nur ganz bestimmte Energieniveaus einnehmen können. Nach der Frequenz-

*) siehe auch Abschn. PHYSIK, Quanten- und Atomphysik

bedingung oder dem 1. BOHRschen *Postulat* ist die Differenz zwischen zwei Energiezuständen eines Atoms gleich dem Produkt $h\nu$. Die Anzahl der Elektronen, mit denen die einzelnen Energieniveaus besetzt sein können, beträgt maximal $2n^2$, wobei n die Nummer des Energieniveaus ist. Diese Größe bezeichnet man auch als *Hauptquantenzahl*. Die einzelnen Energieniveaus kennzeichnet man durch die Buchstaben K, L, ..., Q.

Dies ergibt folgende maximalen Elektronenbesetzungen:

$n = 1$:	K-Schale	$2 \cdot 1^2 = 2$ Elektronen
$n = 2$:	L-Schale	$2 \cdot 2^2 = 8$ Elektronen
$n = 3$:	M-Schale	$2 \cdot 3^2 = 18$ Elektronen
$n = 4$:	N-Schale	$2 \cdot 4^2 = 32$ Elektronen
$n = 5$:	O-Schale	$2 \cdot 5^2 = 50$ Elektronen
$n = 6$:	P-Schale	$2 \cdot 6^2 = 72$ Elektronen
$n = 7$:	Q-Schale	$2 \cdot 7^2 = 98$ Elektronen

Eine volle Besetzung der letzten drei Energieniveaus wird nicht erreicht.
Für die *Dichteverteilung der Elektronen* innerhalb eines Energieniveaus (Elektronenschale) gibt es verschiedene Möglichkeiten. Legen wir einen Schnitt durch ein Atom, so kann die Dichteverteilung kreisförmig oder elliptisch mit verschiedener Exzentrizität erfolgen. Dies bringt man nach SOMMERFELD durch die *Nebenquantenzahl* l zum Ausdruck. $l = 0$ bedeutet Kreisbahn, $l = n - 1$ größte Exzentrizität.

Die Nebenquantenzahl l kennzeichnet man auch durch kleine Buchstaben, die sich aus der Spektroskopie ergeben:

$l = 0$: s (sharp ⇒ scharf)
$l = 1$: p (principal ⇒ hauptsächlich)
$l = 2$: d (diffus ⇒ weitverbreitet)
$l = 3$: f (fundamental ⇒ wesentlich)

Bei gleicher Form der Elektronendichteverteilung können die Elektronen sich in ihrem Energieinhalt durch die räumliche Lage unterscheiden. Dies zeigt sich vor allem in einem elektrischen oder magnetischen Feld. Zur Kennzeichnung dient die *magnetische Quantenzahl* m. Diese besitzt die Werte:

$$l, (l-1), (l-2), \ldots, 0, \ldots, (-l+1), -l$$

Für $l = 3$ sind dies die Werte:

$$3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$$

Dies sind $(2l + 1)$ verschiedene Bahnlagen bei gleicher Bahnform.

Die „Eigenrotation der Elektronen um ihre Achse“ bezeichnet man als *Spin*, wobei dieser gleich oder entgegengesetzt der Umlaufrotation sein kann. Als Kennzeichen dient die *Spinquantenzahl* s (nicht zu verwechseln mit der Nebenquantenzahl s), die die Werte $+1/2$ oder $-1/2$ einnehmen kann.
Nach dem PAULI-*Prinzip* gibt es in einem Atom nicht zwei Elektronen, die in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen. Jede mögliche Kombination kann nur einmal vorkommen. Daraus ergibt sich das Fassungsvermögen der einzelnen Elektronenschalen (s. oben).
Die Reihenfolge der Besetzung der einzelnen Energieniveaus durch die Elektronen ergibt sich durch die drei *Regeln von* HUND:

1. Die Elektronen bauen sich so in eine Schale ein, daß der Gesamtimpuls dem Betrag nach möglichst groß ist.
2. Der Gesamtbahnimpuls soll möglichst groß sein.
3. Die Summe der Bahn- und Spinimpulse der betreffenden Elektronen soll möglichst klein sein.

Das BOHR-SOMMERFELDsche Atommodell ist durch die Wellenmechanik erweitert und verfeinert worden, wobei man dabei den Wellencharakter der Elektronen berücksichtigte.

2.4. Periodensystem der Elemente

2.4.1. Aufbau des Periodensystems

Das *Periodensystem* ist eine Anordnung der chemischen Elemente nach ihrer Ordnungszahl (Kernladungszahl). Es wurde 1869 von D. I. MENDELEJEW und L. MEYER unabhängig voneinander aufgestellt. Im Anhang ist als Beilage ein Periodensystem der Elemente beigefügt.

Für jedes Element ist ein Kästchen vorgesehen, wobei oben links die Ordnungszahl und rechts daneben das Elementsymbol angegeben sind. Darunter steht die relative Atommasse, bezogen auf das ^{12}C-Isotop. Die Klammern beziehen sich auf die relative Atommasse des stabilsten Isotops.

Die Gesamtheit der Elemente in einer Zeile bezeichnet man als *Periode*. Die gemeinsame Eigenschaft ist die Anzahl der Elektronenschalen. Bei allen Elementen der 3. Periode z. B. befinden sich die Elektronen in der K-, L- und M-Schale.
Die Elemente in einer Spalte bezeichnet man als *Gruppe*. Sie haben die gleiche Anzahl von Außenelektronen bzw. die gleiche Konfiguration der beiden äußeren Schalen. Eine Besonderheit zeigen die Aktiniden und die Lanthaniden (s. 2.4.4.).
Die Elemente der Gruppen unterteilt man in *Hauptgruppenelemente* (s. 2.4.2.) und *Nebengruppenelemente* (s. 2.4.3.).

2.4.2. Hauptgruppenelemente

Bei den Hauptgruppenelementen vollzieht sich der Aufbau der äußersten Elektronenschale bis zu 8 Elektronen. Es gibt somit 8 Hauptgruppen. Dabei werden die äußeren Bahnen mit den Nebenquantenzahlen s und p gefüllt. Die Anzahl der s- und p-Elektronen ergibt die *Gruppennummer* (römische Zahlzeichen). Dabei wird vorausgesetzt, daß alle niederen Niveaus voll besetzt sind.

Beispiel. Die Elemente der IV. Hauptgruppe haben im Ruhezustand folgenden Elektronenaufbau in der äußeren Schale:

Kohlenstoff:	$2s^2$	$2p^2$	2. Periode
Silizium:	$3s^2$	$3p^2$	3. Periode
Germanium:	$4s^2$	$4p^2$	4. Periode
Zinn:	$5s^2$	$5p^2$	5. Periode
Blei:	$6s^2$	$6p^2$	6. Periode

Hinweis zur Schreibweise: Die zweite Zeile als Beispiel bedeutet, daß Silizium zur 3. Periode des Periodensystems der Elemente gehört. Die Hauptquantenzahl ist 3. Auf der M-Schale als äußerster Schale befinden sich 2 s-Elektronen und 2 p-Elektronen. Germanium hat den gleichen Aufbau auf der N-Schale wie Silizium auf der M-Schale, wobei beim Germanium die M-Schale mit 18 Elektronen abgesättigt ist.

Die *Wertigkeit* der Hauptgruppenelemente gegenüber Sauerstoff ist gleich der Gruppennummer. Ausnahmen bilden Sauerstoff, Fluor und die Edelgase. Gegenüber Wasserstoff nimmt die Wertigkeit bis zur IV. Hauptgruppe von 1 bis 4 zu, um dann stufenweise wieder abzunehmen. Bei der VII. Hauptgruppe ist der Wert 1 erreicht.
Innerhalb einer Periode nimmt der *Metallcharakter* von links nach rechts ab und der *Nichtmetallcharakter* zu. In einer Gruppe nehmen die metallischen Eigenschaften von oben nach unten zu. Die typischen *Nichtmetalle* stehen im Periodensystem rechts oben und die Metalle links unten. Zwischen beiden Eigenschaften gibt es stetige Übergänge. Für die Elemente Bor, Silizium, Arsen und Tellur gibt es keine eindeutige Zuordnung.
In dem Periodensystem sind die basenbildenden, die säurebildenden und die amphoteren Elemente enthalten. Die letzteren sind in der Lage, sowohl Säuren als auch Basen zu bilden.

Beispiel. Aluminiumhydroxid kann als Säure oder als Base reagieren:

als Säure: $Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4]$

als Base: $Al(OH)_3 + 3HCl \rightarrow AlCl_3 + 3H_2O$

Die Elemente der 2. Periode zeigen eine Besonderheit, die man als *Schrägbeziehung* bezeichnet. In ihren Eigenschaften ähneln sie mehr den schräg rechts unter ihnen stehenden Elementen als den direkt unter ihnen stehenden. Es gehören dazu: Lithium und Magnesium, Beryllium und Aluminium sowie Bor und Silizium. Weniger deutlich ist dies bei dem Paar Kohlenstoff und Phosphor ausgeprägt.

Doppelbindungsregel: Eine Doppelbindung (s. 2.5.) gehen nur Elemente der 2. Periode ein. Die übrigen Elemente bevorzugen andere Bindungsarten (z. B. Polymerisation des Schwefels). Dadurch ergeben sich wesentlich höhere Schmelz- und Siedepunkte.

Eine Besonderheit zeigt das Element Wasserstoff, das zur 1. Periode gehört, sich aber nicht einer bestimmten Hauptgruppe zuordnen läßt. Das Wasserstoffatom hat ein Außenelektron wie die Elemente der I. Hauptgruppe, ähnelt aber in seinen physikalischen Eigenschaften den Elementen der VII. Hauptgruppe.

2.4.3. Nebengruppenelemente

Bei den Nebengruppenelementen bleiben die Außenelektronen des vorangegangenen Hauptgruppenelements erhalten. Es erfolgt jetzt der Aufbau der zweitäußeren Schale von 9 bis zu 18 Elektronen. Es handelt sich hierbei um die Nebenquantenzahl d. Die Kennzeichnung der Nebengruppen erfolgt durch arabische Zahlen. Die Elemente der 2. Nebengruppe haben folgenden Aufbau in den beiden äußeren Schalen:

Zink	$3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2$	4. Periode
Kadmium	$4s^2\ 4p^6\ 4d^{10}\ 5s^2$	5. Periode
Quecksilber	$5s^2\ 5p^6\ 5d^{10}\ 6s^2$	6. Periode

Die Nebengruppenelemente sind alle *Metalle.* Die Höchstwertigkeit gegenüber Sauerstoff entspricht der Nebengruppennummer. Allerdings erreichen nicht alle Metalle diesen Wert (z. B. Eisen). Andere, wie Kupfer, Silber und Gold, können auch in höheren Wertigkeiten auftreten. Allgemein gilt, daß die meisten Nebengruppenelemente in mehreren *Wertigkeitsstufen* auftreten können.

Mit Wasserstoff bilden die Nebengruppenelemente keine *Hydride* mit definierter Zusammensetzung. Labile Anlagerungsverbindungen treten auf und spielen auch bei katalytischen Vorgängen eine wichtige technologische Rolle (z. B. katalytische Hydrierungen).

In ihrem chemischen Verhalten ähneln die Nebengruppenelemente untereinander mehr, als dies bei den Hauptgruppenelementen einer Gruppe der Fall ist.

Auch die Ähnlichkeit der Eigenschaften der Elemente einer Periode ist bei den Nebengruppenelementen stärker ausgeprägt als bei den Elementen der Hauptgruppen.

2.4.4. Lanthaniden und Aktiniden

Bei den Lanthaniden und den Aktiniden wird die drittäußere Elektronenschale von 19 bis zu 32 Elektronen aufgebaut. Dies betrifft die Elektronenschalen N bzw. O und die Nebenquantenzahl f, die 14 Möglichkeiten besitzt. Daraus folgt, daß es 14 Lanthaniden und 14 Aktiniden gibt. Die Anordnung erfolgt in der 6. bzw. 7. Periode.

Der Name der Elementgruppen ergibt sich aus den vorangegangenen Elementen *Lanthan* bzw. *Aktinium.* Da die beiden äußeren Elektronenschalen gleich aufgebaut sind, unterscheiden sie sich physikalisch und chemisch nur wenig. Die Trennung ist somit wesentlich schwieriger als bei anderen Elementgruppen.

Die Elemente nach dem Uran bezeichnet man als *Transurane.* Sie kommen in der Natur nicht vor und werden künstlich hergestellt. Sie sind alle radioaktiv und von nur geringer Lebensdauer. Ihre Anzahl wird sicher mit der wachsenden Entwicklung auf dem Gebiet der Teilchenbeschleuniger (z. B. Forschungsinstitut Dubna, UdSSR) zunehmen.

2.5. Chemische Bindung

Unter der *chemischen Bindung* versteht man alle Kräfte zwischen Atomen, Molekülen und Ionen, die das chemische und physikalische Verhalten der Stoffe beeinflussen. Bis zur Anwendung der Wellenmechanik auf chemische Probleme war die Elektronentheorie der Valenz von KOSSEL und LEWIS die Grundlage der chemischen Bindungslehre. Nach dieser Theorie haben alle Atome das Bestreben, eine abgeschlossene Achterschale (*Oktettregel*) auf der äußersten Elektronenbahn zu bilden. Aus der Art der Realisierung ergeben sich die Bindungsarten, die allerdings nur idealisierte Grenzfälle darstellen, da zwischen ihnen stetige Übergänge bestehen.

2.5.1. Atombindung

Atombindung oder homöopolare Bindung entsteht dadurch, daß Atome von (gleichen oder verschiedenartigen) chemischen Elementen, die im Periodensystem rechts stehen, gemeinsame Elektronenpaare bilden, um die erstrebte Achterschale zu erreichen. Die Anzahl der bindenden Elektronenpaare ergibt die *Bindigkeit* oder die Bindungswertigkeit. Zur Kennzeichnung schreibt man einen Strich zwischen den Elementsymbolen und erhält so die *Valenzstrichformeln,* die vor allem in der organischen Chemie angewendet werden.

Beispiele. HCl $H-Cl$, H_2O $H-O-H$, CO_2 $O=C=O$

Im festen Zustand bilden diese Stoffe ein *Molekülgitter,* wobei der Zusammenhalt durch die VAN-DER-WAALSschen Kräfte bewirkt wird. Bei Atomen des gleichen Elements spricht man von einem *Atomgitter* (Diamant, Graphit usw.). Im Falle des Diamanten ergibt sich der Aufbau aus reinen Atombindungen. Beim Graphit sind daneben noch VAN-DER-WAALSsche Kräfte zwischen den einzelnen Schichten (Schichtengitter) wirksam.

2.5.2. Ionenbeziehung

Ein im Periodensystem links stehendes (elektropositives) Element kann an ein rechts stehendes (elektronegatives) Element Elektronen abgeben. Dadurch entstehen elektrisch geladene Teilchen, die man *Ionen* nennt. Die Bindung zwischen ihnen bezeichnet man als *Ionenbeziehung* oder als heteropolare Bindung.

Beispiel. $Li + F \rightarrow Li^+ + F^-$

Im Gegensatz zur Atombindung treten hier keine gerichteten Kräfte auf. Die elektrischen Ladungen wirken nach allen Seiten im Raum. Man kann bei diesen Verbindungen nicht von Molekülen (außer im Gaszustand) sprechen, da eine Zuordnung eines Ions zu einem bestimmten, anders geladenen Ion nicht möglich ist. Die Anzahl der aufgenommenen bzw. abgegebenen Elektronen bezeichnet man als *Wertigkeit* des Ions.

Im Lithiumfluorid sind die beiden Ionen einwertig, aber null-bindig, da sie kein bindendes Elektronenpaar besitzen. Zwischen Bindigkeit und Wertigkeit ist daher klar zu unterscheiden. Der Wasserstoff ist in einem Wasserstoffmolekül H_2 null-wertig und besitzt die Bindigkeit 1.

Als Maß für die Neigung der Atome, Ionen zu bilden, dient die *Elektronenaffinität,* die gleich der Energie ist, die bei der Anlagerung oder Abspaltung von einem Elektron an ein Atom frei oder verbraucht wird.

Elektropositive Elemente sind die Metalle, die bei der Elektronenabgabe Kationen bilden.
Elektronegative Elemente sind die Nichtmetalle, die bei der Elektronenaufnahme Anionen bilden.

Im festen Zustand bilden die entstehenden Verbindungen ein *Ionengitter,* bei dem auf den einzelnen Gitterplätzen die Kationen und Anionen sitzen und durch die gegenseitigen elektrostatischen Anziehungs- und Abstoßungskräfte (bedingt durch die gleiche elektrische Ladung der Elektronenhüllen) der feste Zusammenhalt bewirkt wird.

2.5.3. Metallbindung

Der feste Zusammenhalt der Metalle wird durch die *Metallbindung* bewirkt. Beim Einbau der Metallatome in das Metallgitter geben diese ihre Außenelektronen ab. Diese bilden gleichsam ein „Elektronengas", das für den Zusammenhalt sorgt. Die Anzahl der abgegebenen Elektronen ist gleich der Metallwertigkeit. Aus diesem Aufbau ergeben sich die besonderen physikalischen und chemischen Eigenschaften der Metalle.

2.5.4. Wellenmechanische Deutung der Atombindung

Die drei Bindungsarten (Atombindung, Ionenbeziehung und Metallbindung) sind idealisierte Grenzzustände, die sich aus der Theorie von Kossel und Lewis ableiten. Eine tiefergehende Betrachtung ergibt sich aus der Anwendung der Wellenmechanik, die von London und Heitler erstmalig durchgeführt wurde.
Die Ursache für die Atombindung ist die maximale Überlappung der beteiligten Orbitale zu Molekülorbitalen und damit der Übergang zu einem energieärmeren Zustand. Der Energiegewinn ist gleich der Bindungsenergie. Zur Erreichung dieses Zustands verändern sich die Orbitale durch *Hybridisierung*. Die Ursache dafür sind der Energieausgleich und die Möglichkeit für die Abgabe einer maximalen Bindungsenergie infolge maximaler Überlappung.

2.5.5. Übergangsbindungen

Eine reine Atombindung existiert nur zwischen Atomen des gleichen chemischen Elements im Ruhezustand. Die Daseinsform der Materie ist aber die Bewegung. Daraus folgt, daß die Bindung zwischen zwei Atomen nichts Starres ist, sondern einen Vorgang darstellt, den man durch eine Formel nicht exakt beschreiben kann.
Verbinden sich zwei Atome verschiedenartiger Elemente, wird sich das bindende Elektronenpaar mehr auf der Seite des Atoms mit der größeren *Elektronenaffinität* befinden. Man versteht darunter das Bestreben der Atome, durch Anlagerung von Elektronen Anionen zu bilden. Die Folge ist, daß das Molekül ein *Dipolmoment* besitzt bzw. teilweisen Ionencharakter aufweist. Es liegt ein Übergang zur Ionenbeziehung vor.

Beispiele. H—F (+) (−) H—Cl (+) (−) H—Br (+) (−)

Das Dipolmoment ist das Produkt aus der Ladung und dem Abstand der Ladungsschwerpunkte und dient zur Abschätzung des Ionenanteils an einer Bindung.
Eine weitere Möglichkeit besteht in der Anwendung der *Elektronegativitäten*, die von Pauling eingeführt wurden. Diese sind Zahlenwerte, die proportional der Summe aus der Elektronenaffinität und der Ionisierungsenergie sind. Die letztere Größe ist die Energie, die nötig ist, um ein Elektron aus einem Atom oder Molekül abzuspalten.

2.5.6. Wasserstoffbrückenbindung

Die Verbindungen des Wasserstoffs mit den stark elektronegativen Elementen (Fluor, Sauerstoff, Stickstoff und Schwefel) besitzen einen stark polaren Charakter, der von der Differenz der Elektronegativitäten abhängig ist. Dabei stellt stets der Wasserstoff den positiven Pol dar. Damit ist er in der Lage, andere elektronegative Atome anzuziehen und mit ihnen eine besondere Bindungsart einzugehen, die man als *Wasserstoffbrückenbindung* bezeichnet. Diese ist vor allem in der organischen Chemie sehr häufig anzutreffen. Der Wasserstoff gehört dabei gleichsam beiden Atomen an, indem er eine Brücke zwischen beiden bildet, obwohl er stets

nur einbindig auftritt. Die Festigkeit ist wesentlich geringer als bei einer normalen Atombindung. Zur Kennzeichnung dienen mehrere Punkte.

Beispiele. F—H···F—H H—O—H···O(H)(H)

Verbindungen mit Wasserstoffbrückenbindung zeigen sich durch eine Erhöhung des Schmelzpunkts, des Siedepunkts und der Verdampfungswärme.

2.5.7. Koordinative Bindung

Die koordinative oder semipolare Bindung entsteht dadurch, daß das bindende Elektronenpaar von einem Partner geliefert wird. Rein formal kann man diese Bindungsart als eine Kombination der Atombindung und der Ionenbeziehung betrachten. Es entstehen dabei in jedem Falle stark polare Substanzen. Das elektronenliefernde Atom heißt *Donator*, das elektronenaufnehmende Atom heißt *Akzeptor*. Auf dieser Bindungsart beruhen die Komplexverbindungen, die man auch als Verbindungen höherer Ordnung bezeichnet.

2.6. Stoffklassen und Reaktionstypen der anorganischen Chemie

2.6.1. Oxide

Ein Oxid ist eine chemische Verbindung eines Elements mit Sauerstoff. Es ist somit eine binäre, d. h. aus zwei Elementen bestehende Verbindung.

Darstellung eines Oxids

1. *Direkte Vereinigung der Elemente:* Dieser Vorgang ist eine Oxydation, in vielen Fällen spricht man auch von einer Verbrennung des Elements, da hierbei Energie in Form von Wärme oder Licht frei wird.

   Beispiele. $C + O_2 \rightarrow CO_2$

   $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

2. *Thermische Dissoziation* (s. 2.7.2.) *von Hydroxiden:* Beim Erhitzen von Hydroxiden (s. 2.6.2.) bilden sich Oxide und Wasser.

   Beispiele. $Cu(OH)_2 \rightarrow CuO + H_2O$

   $2Al(OH)_3 \rightarrow Al_2O_3 + 3H_2O$

3. *Erhitzen von Salzen mit flüchtigem Säureanhydrid* (Sulfate, Karbonate, Nitrate, Sulfite usw.): Es bilden sich dabei das Oxid und das Säureanhydrid (Verbindung, die aus einer Säure nach Abspaltung von Wasser entsteht).

   Beispiele. $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$

   $CuSO_4 \rightarrow CuO + SO_3$

Bezeichnung der Oxide

1. Existiert von dem betreffenden Element nur eine Sauerstoffverbindung, ergibt sich der Name aus dem Element und dem Wort „Oxid".

   Beispiele. Na_2O Natriumoxid

   Al_2O_3 Aluminiumoxid

2. Bei mehreren Möglichkeiten schreibt man die Oxydationszahl des Elements in römischen Zahlzeichen in Klammern.

   Beispiele. Fe_2O_3 Eisen(III)-oxid

   CrO_3 Chrom(VI)-oxid

3. Die stöchiometrische Zusammensetzung der Verbindung wird durch griechische Zahlwörter vor dem Namen der Bestandteile gekennzeichnet.

Beispiele. Cl_2O_7 Dichlorheptoxid

N_2O_3 Distickstofftrioxid

2.6.2. Basen

Für die Definition einer Base gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten.
Eine Base ist eine chemische Verbindung, die in wäßriger Lösung oder in der Schmelze in positiv geladene Kationen und negativ geladene Hydroxidionen OH^- dissoziiert. Kationen sind dabei die Metallionen oder in der anorganischen Chemie das Ammoniumion NH_4^+. Die wäßrigen Lösungen einer Base werden als *Lauge* bezeichnet.

Beispiel. NaOH als fester Stoff: Natriumhydroxid; in wäßriger Lösung: Natronlauge

Darstellung einer Base

1. Reaktion eines Metalloxids (Basenanhydrid) mit Wasser;

Beispiel. $CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$

2. Reaktion eines unedlen Metalls mit Wasser unter Bildung einer Base und Wasserstoff;

Beispiel. $2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$

3. Oxydation eines Metalls in Gegenwart von Wasser;

Beispiel. $4Fe + 3O_2 + 6H_2O \rightarrow 4Fe(OH)_3$

Alle Basen zeigen zwei typische Eigenschaften. Infolge der elektrolytischen Dissoziation (s. 2.7.3.) reagieren die wäßrigen Lösungen einer Base stets *alkalisch* (basisch).

Beispiel. $KOH \rightarrow K^+ + OH^-$

Da die meisten Basen echte Elektrolyte sind, liegen sie in der Schmelze und in einer wäßrigen Lösung stets in *Ionenform* vor. Der Dissoziationsgrad beträgt somit 1 (s. 2.7.3.).

Alle Basen bilden mit Säuren (s. 2.6.3.) *Salze.* Diesen Vorgang bezeichnet man als *Neutralisation.*

Eine Besonderheit unter den anorganischen Stoffen zeigen Ammoniak und seine Derivate. Dieses Gas reagiert beim Einleiten in Wasser unter Bildung von Ammoniumionen und Hydroxidionen:

$$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$$

Zur Unterscheidung von den Basenanhydriden (Metalloxiden) bezeichnet man solche Stoffe als *Anhydrobasen.* In einer wäßrigen Lösung von Ammoniak liegen physikalisch gelöste Ammoniakmoleküle und durch die obige Reaktion Ammoniumionen vor. Ammoniak gehört somit zu den potentiellen Elektrolyten (s. 2.7.3.). Die gleiche Erscheinung zeigen die meisten organischen Basen (Amine usw.).

2.6.3. Säuren

Für die Säuren gilt das gleiche wie für die Basen, eine exakte Definition dieses Begriffs ist hier nicht möglich.
Eine Säure ist eine chemische Verbindung, die in wäßriger Lösung in positiv geladene Wasserstoffionen und negativ geladene Säurerestionen (Anionen) dissoziiert. Säuren sind somit *potentielle Elektrolyte.*

Darstellung einer Säure

1. Reaktion eines Nichtmetalloxids (Säureanhydrid) mit Wasser;

   Beispiel. $SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$

2. Reaktion eines Nichtmetalls mit Wasserstoff;

   Beispiel. $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2\,HCl$

3. Reaktion eines höherwertigen Metalloxids mit Wasser;

   Beispiel. $Mn_2O_7 + H_2O \rightarrow 2\,HMnO_4$

4. Hydrolyse (s. 2.6.5.2.) des Salzes einer schwachen Säure oder einer schwachen Base;

   Beispiel. $KCN + H_2O \rightleftharpoons HCN + KOH$

Alle Säuren bilden mit Basen *Salze*, wobei Wasser abgespalten wird.

Beispiel. $H_2SO_4 + 2\,NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\,H_2O$

Die wäßrigen Lösungen der Säuren reagieren infolge der elektrolytischen Dissoziation *sauer*. Enthält eine Säure mehrere Wasserstoffatome, erfolgt die Dissoziation stufenweise:

Beispiel. $H_2SO_3 \rightleftharpoons H^+ + HSO_3^-$

$HSO_3^- \rightleftharpoons H^+ + SO_3^{2-}$

Man bezeichnet diese Säuren als *mehrwertige* oder *mehrbasische Säuren*.

2.6.4. Salze

Ein Salz ist eine chemische Verbindung, die aus einem Kation (außer dem Wasserstoffion) und einem Anion (außer dem Hydroxidion) besteht. Alle Salze gehören zu den *echten Elektroyten* (s. 2.7.3.).

Darstellung eines Salzes

1. Reaktion einer Säure mit einer Base (Neutralisation);

   Beispiel. $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$

2. Reaktion eines Metalloxids mit einer Säure;

   Beispiel. $CuO + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O$

3. Reaktion eines Metalls mit einer Säure;

   Beispiel. $Zn + 2\,HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2$

4. Reaktion einer Base mit einem Nichtmetalloxid (Säureanhydrid);

   Beispiel. $Ba(OH)_2 + CO_2 \rightarrow BaCO_3 + H_2O$

5. Reaktion eines Metalls mit einem Nichtmetall;

   Beispiel. $2\,Na + Cl_2 \rightarrow 2\,NaCl$

6. Reaktion eines Salzes mit einem anderen Salz (doppelte Umsetzung);

   Beispiel. $CuSO_4 + Na_2S \rightarrow CuS + Na_2SO_4$

7. Reaktion einer Base mit einem Nichtmetall;

   Beispiel. $2\,NaOH + Cl_2 \rightarrow NaCl + NaClO + H_2O$

8. Reaktion eines amphoteren Metalls mit einer Base;

   Beispiel. $2\,Al + 2\,NaOH + 6H_2O \rightarrow 2\,Na[Al(OH)_4] + 3\,H_2$

In einem neutralen Salz sind alle Wasserstoffionen der beteiligten Säure durch Metallkationen ersetzt bzw. alle Hydroxidionen der Base durch Säureanionen. Saure Salze enthalten Wasserstoffionen, die durch Metall noch nicht ersetzt sind.

Beispiele. $NaHSO_4$ Natriumhydrogensulfat, KH_2PO_4 Kaliumdihydrogenphosphat

Basische Salze enthalten Hydroxidionen, die durch Säurereste noch nicht ersetzt sind.
Doppelsalze sind aus verschiedenen Kationen und einem Anion aufgebaut, gemischte Salze aus einem Kation und verschiedenen Anionen.

2.6.5. Reaktionstypen der anorganischen Chemie

Die Einteilung der chemischen Reaktionen kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. Die wichtigsten Reaktionstypen der anorganischen Chemie sind in den folgenden Abschnitten zusammengestellt, für organisch-chemische Reaktionen s. Abschnitt 4.

2.6.5.1. Redoxreaktionen

Die *Oxydation* ist

— die Vereinigung eines Stoffs mit Sauerstoff,
— die Abgabe von Wasserstoff,
— die Elektronenabgabe eines Stoffs,
— die Zunahme der Oxydationszahl.

Die *Reduktion* ist

— die Vereinigung eines Stoffs mit Wasserstoff,
— die Abgabe von Sauerstoff,
— die Elektronenaufnahme eines Stoffs,
— die Abnahme der Oxydationszahl.

Ein *Oxydationsmittel* ist ein Stoff, der bei einer chemischen Reaktion oxydierend wirkt und dabei selbst reduziert wird.
Ein *Reduktionsmittel* ist ein Stoff, der bei einer chemischen Reaktion reduzierend wirkt und dabei selbst oxydiert wird.

Beide Vorgänge, Reduktion und Oxydation, verlaufen stets gleichzeitig. Wenn ein Stoff Elektronen abgibt, muß ein anderer Stoff diese aufnehmen. Man faßt deshalb beide Vorgänge zusammen und spricht von einer *Redoxreaktion*.

Zu den Redoxreaktionen gehören:

1. *Bildungsreaktionen:* chemische Reaktionen zwischen Atomen oder Molekülen zum Aufbau einer chemischen Verbindung.

   Beispiel. $2\,Na + Cl_2 \rightarrow 2\,NaCl$

2. *einfache Umsetzungen:* Reaktionen, bei denen ein Element einer chemischen Verbindung durch ein anderes ersetzt wird.

   Beispiel. $CuSO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + Cu$

3. *thermische Dissoziationen:* Durch Zufuhr von Energie wird eine chemische Verbindung in Atome oder Moleküle gespalten. Allerdings gehören nicht alle thermischen Dissoziationen zu den Redoxreaktionen.

   Beispiel. $2\,HCl \rightarrow H_2 + Cl_2$

Hinweis: Die Zersetzung von Kalziumkarbonat in Kalziumoxid und Kohlendioxid ist eine thermische Dissoziation, aber kein Redoxvorgang, da sich die Oxydationszahlen der beteiligten Elemente nicht ändern.

2.6.5.2. Austauschreaktionen

Bei den Austauschreaktionen findet keine Änderung der Oxydationszahl statt. Die wichtigsten Reaktionstypen sind:

1. *Neutralisation:* Die Neutralisation ist die Vereinigung einer Säure und einer Base zu einem Salz und Wasser. Die entstehende Lösung reagiert nur dann neutral (s. 2.7.3.), wenn das Salz nicht hydrolysiert.

   Beispiel. $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$

2. *doppelte Umsetzung:* In einer Lösung mehrerer Stoffe werden bei einer doppelten Umsetzung je nach Löslichkeit die Kationen und Anionen gegenseitig vertauscht.

   Beispiel. $BaCl_2 + H_2SO_4 \rightarrow BaSO_4 + 2\,HCl$

3. *elektrolytische Dissoziation:* Die elektrolytische Dissoziation ist der reversible Zerfall einer chemischen Verbindung in elektrisch geladene Teilchen, die man Ionen nennt. In den meisten Fällen handelt es sich um eine Reaktion mit Wassermolekülen bzw. mit den Molekülen des Lösungsmittels. Die bei der elektrolytischen Dissoziation einer Säure entstehenden Wasserstoffionen (Protonen) können in einer Lösung nicht allein existieren und werden vom Wasser hydratisiert. Die Schreibweise für die Wasserstoffionen H^+ ist eine allgemein übliche Vereinfachung, die ihre Berechtigung darin findet, daß auch alle anderen Ionen in wäßriger Lösung mehr oder weniger stark hydratisiert vorliegen.

   Beispiel. $HCl \rightleftharpoons H^+ + Cl^-$

   exakter: $HCl + x\,H_2O \rightleftharpoons H^+(H_2O)_x + Cl^-$

4. *Hydrolyse:* Die Hydrolyse ist die chemische Reaktion des Wassers mit den Ionen des gelösten Elektrolyten. Die Lösung reagiert durch die Bildung einer Säure oder einer Base sauer oder alkalisch. (Näheres s. 2.7.3.3.)

   Beispiele. $KCN + H_2O \rightleftharpoons HCN + KOH$ Lösung reagiert alkalisch

   $NH_4Cl + H_2O \rightleftharpoons NH_4OH + HCl$ Lösung reagiert sauer

2.6.5.3. Einteilung nach der Reaktionswärme

Jede chemische Reaktion ist mit einer Energieänderung der beteiligten Stoffe verbunden. (Näheres s. 2.8.)

Exotherme Reaktionen: Bei einer exothermen Reaktion sind die Endprodukte energieärmer als die Ausgangsstoffe. Es wird somit Energie „frei", die an die Umgebung abgegeben wird. Dabei kann dies in Form von Wärme, Licht, elektrischer Energie usw. erfolgen. Typische Beispiele sind die Verbrennungen und die meisten Bildungsreaktionen (s. 2.6.5.1.).

Endotherme Reaktionen: Bei einer endothermen Reaktion sind die Endprodukte energiereicher als die Ausgangsstoffe. Es wird somit bei der Reaktion Energie „verbraucht", die von der Umgebung entnommen wird. Typische Beispiele sind die thermische Dissoziation und die Elektrolyse.

2.6.5.4. Einteilung nach der Reaktionsphase

Unter einer *Phase* versteht man die physikalisch einheitliche Erscheinungsform eines Stoffs oder eines Gemisches. Eine Phase besitzt eine Grenzfläche, an der sich die chemischen und physikalischen Eigenschaften sprunghaft verändern.

Homogene Reaktionen: Eine chemische Reaktion verläuft homogen, wenn sich alle Reaktionspartner in einer Phase befinden. Es gehören dazu alle *Gasreaktionen* und *Lösungsreaktionen.* Alle homogenen Reaktionen sind Gleichgewichtsreaktionen, d. h., sie führen zu einem chemischen Gleichgewicht (s. 2.7.).

Heterogene Reaktionen: Eine chemische Reaktion verläuft heterogen, wenn die Reaktionspartner sich in verschiedenen Phasen befinden. Eine heterogene Reaktion führt nur dann zu einem chemischen Gleichgewicht, wenn sich die Anzahl der Phasen während der Reaktion nicht verändert.

Beispiele.

$C + O_2 \rightarrow CO_2$	feste und gasförmige Phase
$CaO + CO_2 \rightarrow CaCO_3$	feste und gasförmige Phase
$H_2O + Cl_2 \rightarrow HCl + HClO$	flüssige und gasförmige Phase
$2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$	feste, flüssige und gasförmige Phase

2.6.5.5. Einteilung nach dem Reaktionsmechanismus

Ionenreaktionen: sind chemische Reaktionen, an denen Ionen beteiligt sind. Das typische Kennzeichen ist, daß es sich um Momentanreaktionen handelt, d. h., sie verlaufen sehr schnell. Zur Vereinfachung der Schreibweise formuliert man die chemische Gleichung unter Weglassung der nichtbeteiligten Ionen (in Ionenschreibweise).

Beispiel. $Ag^+ + Cl^- \rightleftharpoons AgCl$

Reaktionen zwischen Atomen und Molekülen: sind in der Regel typische Zeitreaktionen, d. h. verlaufen wesentlich langsamer als Ionenreaktionen. Die beteiligten Atome und Moleküle müssen erst durch Aktivierung in einen reaktionsfähigen Zustand versetzt werden.

Beispiel. $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$

Kettenreaktionen: bestehen stets aus drei Teilschritten. Bei der *Startreaktion* bilden sich reaktionsfähige Teilchen (Atome, Ionen oder Radikale), die nicht existenzfähig sind und sofort weiter reagieren. Es schließt sich die *Reaktionskette* an, die durch die *Abbruchsreaktion* abgeschlossen wird. Typische Beispiele für Kettenreaktionen sind die Explosionen und die Detonationen.

Beispiel.

Startreaktion: $Cl_2 \rightleftharpoons 2Cl$

Reaktionskette: $H_2 + Cl \rightarrow HCl + H$

$H + Cl_2 \rightarrow HCl + Cl$ usw.

Abbruchsreaktion: $H + Cl \rightarrow HCl$

2.6.6. Oxydationszahl

Im Abschnitt 2.5. wurde zwischen Bindigkeit und Wertigkeit unterschieden. Zur Kennzeichnung eines Atoms in einer chemischen Verbindung dient die *Oxydationszahl*, die vor allem bei der Aufstellung von Redoxgleichungen erhebliche Vorteile bietet.

Die *Oxydationszahl* gibt an, welche Ladung (positiv oder negativ) ein Element in einer bestimmten Verbindung oder einem Ion tragen würde, wenn alle am Aufbau beteiligten Elemente in Form von Ionen vorliegen würden. Es handelt sich somit um eine sehr wichtige Rechengröße.

Für die Ermittlung der Oxydationszahlen dienen die *Regeln nach* Seel, die in der angegebenen Reihenfolge anzuwenden sind:

1. Alle Elemente, die atomar oder molekular vorliegen (H_2, O_2, K, Fe usw.), erhalten die Oxydationszahl 0.
2. Alle Metalle, Bor und Silizium erhalten stets positive Oxydationszahlen.
3. Fluor, das sich mit einem anderen Element verbunden hat, wird stets die Oxydationszahl -1 zugeordnet.
4. Wasserstoff erhält die Oxydationszahl $+1$ und Sauerstoff -2, soweit sich nicht durch 1., 2. oder 3. eine andere Oxydationszahl ergibt.
5. Die übrigen Halogene erhalten die Oxydationszahl -1, soweit sich nicht durch 1. bis 4. schon eine andere Oxydationszahl ergibt.

6. Die Summe der Oxydationszahlen in einem elektrisch neutralen Molekül ist stets gleich 0.
7. Die Summe der Oxydationszahlen in einem Komplexion ist stets gleich der Ladung, die das Komplexion trägt.
8. Bei der Oxydation nimmt die Oxydationszahl des betreffenden Elements zu.
9. Bei der Reduktion nimmt die Oxydationszahl des betreffenden Elements ab.
10. Die Summe der Oxydationszahlen muß bei einer Redoxgleichung auf beiden Seiten gleich groß sein.

Die Oxydationszahlen schreibt man bei einer Redoxgleichung über das Symbol des betreffenden Elements.

Beispiel.

$$2\,\overset{+4}{S}\,\overset{-2}{O_2} + \overset{0}{O_2} \rightarrow 2\,\overset{+6}{S}\,\overset{-2}{O_3}$$

2.7. Chemisches Gleichgewicht

2.7.1. Massenwirkungsgesetz

Die chemischen Reaktionen werden in homogene und heterogene Reaktionen eingeteilt. Bei einer *homogenen Reaktion* liegen die Ausgangs- und die Endstoffe in der gleichen Phase vor (Gas- und Lösungsreaktionen). Bei einer *heterogenen Reaktion* liegen mehrere Phasen vor.
Alle *homogenen Reaktionen* verlaufen niemals vollständig, sondern führen zu einem dynamischen Gleichgewichtszustand, bei dem die Ausgangs- und Endstoffe in endlichen Mengen vorhanden sind. Für heterogene Reaktionen gilt das gleiche Prinzip, wenn sich im Verlaufe der Reaktion die Anzahl der Phasen nicht verändert.
Als Kennzeichen eines *chemischen Gleichgewichts* gelten folgende Kriterien:

1. Stoffzusatz oder -entzug führt zu weiterer Reaktion.
2. In der Regel ist das chemische Gleichgewicht gegen Änderung des Drucks und der Temperatur empfindlich.
3. Ein chemisches Gleichgewicht ist von beiden Seiten (im Sinne der chemischen Gleichung) einstellbar.

Das Verhältnis der Gleichgewichtskonzentrationen ist durch das *Massenwirkungsgesetz* (MWG), aufgestellt von GULDBERG und WAAGE, gegeben. Für die allgemeine Reaktion

$$x\mathrm{A} + y\mathrm{B} \rightleftharpoons z\mathrm{C}$$

lautet es:

$$K_a = \frac{a_C{}^z}{a_A{}^x \cdot a_B{}^y} \qquad (1)$$

K_a thermodynamische Gleichgewichtskonstante,
A, B, C Formeln der Ausgangs- bzw. Endstoffe,
x, y, z Koeffizienten der chemischen Gleichung,
a_A, a_B, a_C Gleichgewichtsaktivitäten der beteiligten Stoffe

Das Verhältnis der Produkte der Gleichgewichtsaktivitäten ist bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck konstant.
Bei der Aufstellung und Anwendung des Massenwirkungsgesetzes muß man folgende Punkte beachten:

1. Die Stoffe der rechten Seite der chemischen Gleichung kommen stets in den Zähler und die Stoffe der linken Seite in den Nenner.
2. Vorkommende Koeffizienten der chemischen Gleichung erscheinen im Massenwirkungsgesetz stets als Exponenten der Gleichgewichtsaktivitäten.
3. In das Massenwirkungsgesetz sind stets die Gleichgewichtsaktivitäten und nicht die Ausgangsmengen einzusetzen.
4. Aus der thermodynamischen Ableitung ergeben sich folgende Festlegungen für die Konzentrationen und damit auch Aktivitäten:

Gase	Partialdruck p_i in Pa
Gelöste Stoffe	Molarität c_i in mol/m³
Lösungsmittel	Molenbruch x_i
Festkörper	Molenbruch x_i

In jeder Phase bestehen zwischen den Molekülen oder Ionen Wechselwirkungskräfte auf Grund ihrer Masse und ihrer Ladung. Dies führt zu einer gegenseitigen Behinderung der freien Beweglichkeit. Unter der *Aktivität* versteht man die frei wirksame Konzentration. Sie ergibt sich als Produkt aus der Gesamtkonzentration c und dem *Aktivitätskoeffizienten* f:

$$a = fc \tag{2}$$

oder bei Gasen:

$$a = fp \tag{3}$$

Der Aktivitätskoeffizient f ist bei chemischen Reaktionen gleich oder kleiner als 1. Er ist abhängig vom Druck (bei Gasen), von der Konzentration und von der Temperatur.

Die *thermodynamische Gleichgewichtskonstante* K_a ist eine Funktion des Drucks und der Temperatur. Bei idealen Gasen ist sie druckunabhängig ($f_i = 1$).
Für die Beeinflussung der Gleichgewichtslage gilt das *Prinzip vom kleinsten Zwang*, aufgestellt von LE CHATELIER und BRAUN:
Ändert man eine der das Gleichgewicht beeinflussenden Größen, so verlagert es sich derart, daß dadurch die Wirkung der Änderung verkleinert wird.

1. Erhöht man bei einer Gasreaktion den Druck, so verschiebt sich das Gleichgewicht (d. h. die Gleichgewichtsaktivität) nach der Seite der kleineren Stoffmenge.

   Die Synthese von Ammoniak wird man also stets unter hohem Druck durchführen.

   $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$

   Bei dieser Reaktion entstehen aus 4 mol Gasen nur 2 mol des Endprodukts.

2. Erhöht man bei einem chemischen Gleichgewicht die Temperatur, so verschiebt sich das Gleichgewicht unter Energieverbrauch. Bei einer exothermen Reaktion wird die Ausbeute kleiner, bei einer endothermen Reaktion größer.
3. Erhöht man in einem Reaktionsgemisch die Konzentration eines Stoffs, so wird das chemische Gleichgewicht so verlagert, daß dabei dieser Stoff verbraucht wird. Erniedrigt man die Konzentration eines Stoffs, so verlagert sich das Gleichgewicht unter Bildung dieses Stoffs. Bei gegebener Gesamtkonzentration erhält man die maximale Ausbeute, wenn man die Ausgangsstoffe entsprechend der chemischen Gleichung in stöchiometrischen Mengen einsetzt. Unter dem Begriff „*stöchiometrische Mengen*“ versteht man Stoffmengen, die der chemischen Gleichung entsprechen.

2.7.2. Gasgleichgewichte

Die meisten *Gasreaktionen* sind thermische Dissoziationen oder deren Umkehrungen. Die *thermische Dissoziation* ist der reversible Zerfall einer Verbindung in einen Stoff oder mehrere andere elektrisch neutrale Stoffe. Die Umkehrung ist die Bildung eines Stoffs aus gasförmigen, elektrisch neutralen Stoffen. Beide Reaktionen führen zu dem gleichen Gleichgewichtszustand (s. 2.7.1.).
Thermische Dissoziation des Chlorwasserstoffs: $2HCl \rightleftharpoons H_2 + Cl_2$
Bildung des Chlorwasserstoffs: $H_2 + Cl_2 \rightleftharpoons 2HCl$
Als Maß für den thermischen Zerfall dient der *Dissoziationsgrad*, der wie folgt definiert wird:

$$\alpha = \frac{\text{Anzahl der zerfallenen Moleküle}}{\text{Anzahl der Moleküle vor dem Zerfall}} \tag{4}$$

Der Dissoziationsgrad ist eine Funktion des Drucks und der Temperatur. Mit steigendem Druck nimmt der Dissoziationsgrad ab (Prinzip von LE CHATELIER), wenn sich bei der Dis-

soziation die Stoffmenge vergrößert. Bei gleichbleibender Stoffmenge ist der Dissoziationsgrad unabhängig vom Druck.
Die thermische Dissoziation ist ein *endothermer Prozeß*. Folglich muß der Dissoziationsgrad mit steigender Temperatur zunehmen. Die Gleichgewichtskonstante bei einer thermischen Dissoziation bezeichnet man als *Dissoziationskonstante.*
Bei einer heterogenen Gasreaktion liegen mehrere Phasen vor. Es kommt zu einem chemischen Gleichgewicht, wenn sich die Anzahl der Phasen nicht verändert.

Beispiele. 1. Bei der Verbrennung von Kohlenstoff kann es zur Bildung von Kohlendioxid und von Kohlenmonoxid kommen. Beide Gase bilden mit dem Kohlenstoff ein chemisches Gleichgewicht (BOUDOUARD-Gleichgewicht):

$$C + CO_2 \rightleftharpoons 2CO$$

Das Massenwirkungsgesetz lautet:

$$K_a = \frac{a_{CO}^2}{a_C \cdot a_{CO_2}}$$

Kohlenstoff ist ein Festkörper, als Einheit für die Aktivität ist der Molenbruch einzusetzen (s. 2.7.1.), der bei einem reinen Stoff stets gleich 1 ist. Unter der Annahme, daß die beiden Gase sich als ideal verhalten, ergibt dies:

$$K_a = \frac{p_{CO}^2}{p_{CO_2}}$$

2. Zur Darstellung von Kalziumoxid wird Kalziumkarbonat hoch erhitzt (Kalkbrennen):

$$CaCO_3 \rightleftharpoons CaO + CO_2$$

Kalziumkarbonat und Kalziumoxid sind Festkörper, deren Molenbruch im reinen Zustand gleich 1 ist. Für das Massenwirkungsgesetz erhalten wir damit:

$$K_a = \frac{a_{CaO} \cdot a_{CO_2}}{a_{CaCO_3}} = p_{CO_2}$$

Dabei nehmen wir an, daß sich Kohlendioxid als *ideales Gas* verhält. Sein Partialdruck ist somit nur von der Temperatur abhängig.

2.7.3. Elektrolytgleichgewichte

Die *elektrolytische Dissoziation* ist der reversible Zerfall einer chemischen Verbindung, bei dem elektrisch geladene Teilchen entstehen (Ionen). Die positiv geladenen Ionen sind die *Kationen*, die negativ geladenen die *Anionen*. Dabei muß in der Lösung stets Elektroneutralität herrschen, d. h., die Konzentration der Kationen ist stets gleich der Konzentration der Anionen. Als Maß für die elektrolytische Dissoziation dient der *Dissoziationsgrad* α, Gl. (4). Der Dissoziationsgrad ist eine Funktion der Konzentration und der Temperatur. Mit steigender Konzentration nimmt der Dissoziationsgrad ab (Prinzip von LE CHATELIER). Die elektrolytische Dissoziation kann exotherm oder endotherm sein. Da die *Dissoziationsenthalpie* meist klein ist, gilt dies auch für die Temperaturabhängigkeit des Dissoziationsgrades.

Die Elektrolyte werden wie folgt eingeteilt:

1. *Echte Elektrolyte* sind im festen Zustand und in Lösung nur aus Ionen aufgebaut. Ihr Dissoziationsgrad ist daher stets gleich 1. Es gehören dazu die meisten Salze und die Hydroxide.
2. *Potentielle Elektrolyte* können als Moleküle oder im dissoziierten Zustand als Ionen auftreten. Der Dissoziationsgrad ist stets kleiner als 1. Es gehören dazu die Säuren, Ammoniak und die meisten organischen Basen.
3. *Schwache Elektrolyte* sind chemische Verbindungen, die nur gering dissoziieren oder deren Lösungen nur wenig Ionen enthalten.
   Es gehören dazu die meisten organischen Säuren, schwerlösliche Salze und alle stark verdünnten Elektrolytlösungen.



4. *Starke Elektrolyte* sind chemische Verbindungen, die in wäßriger Lösung praktisch vollständig dissoziieren und daher ionenreiche Lösungen bilden. Es gehören dazu fast alle Salze und die starken Säuren und Basen bei entsprechenden Konzentrationen.

Die Einordnung der Elektrolyte in diese vier Gruppen erfolgt mit Hilfe des *Dissoziationsgrads* (echt oder potentiell) und der *elektrischen Leitfähigkeit* (stark oder schwach).
Die Anwendung des Massenwirkungsgesetzes auf die elektrolytische Dissoziation der potentiellen Elektrolyte liefert die *Dissoziationskonstante.* Diese ist bei den schwachen, potentiellen Elektrolyten eine Funktion der Konzentration und des Dissoziationsgrads. Für den Elektrolyten AB erhalten wir:

$$AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$$

$$K_D = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \cdot c \tag{5}$$

Diese Beziehung bezeichnet man als OSTWALD*sches Verdünnungsgesetz.*

2.7.3.1. Eigendissoziation des Wassers

Das wichtigste Lösungsmittel der anorganischen Chemie ist das *Wasser.* Es dissoziiert nach der Gleichung:

$$H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$$

Die Anwendung des Massenwirkungsgesetzes liefert:

$$K_{H_2O} = \frac{a_{H^+} \cdot a_{OH^-}}{a_{H_2O}}$$

Da der Molenbruch des Lösungsmittels in verdünnten Lösungen praktisch gleich 1 ist, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$K_{H_2O} = a_{H^+} \cdot a_{OH^-}$$

Diese Beziehung bezeichnet man als das *Ionenprodukt des Wassers.* Bei verdünnten Lösungen kann man die Aktivitäten durch die molaren Konzentrationen ersetzen. Der Zahlenwert des Ionenprodukts des Wassers beträgt bei 20 °C 10^{-8} mol² m⁻⁶. In reinem Wasser sind die Konzentrationen der beiden Ionenarten gleich groß, die Flüssigkeit reagiert *neutral.* Überwiegen die Wasserstoffionen, liegt eine *saure* Lösung vor. Im entgegengesetzten Fall reagiert die Lösung *alkalisch*:

$a_{H^+} > a_{OH^-}$	Lösung reagiert sauer
$a_{H^+} = a_{OH^-}$	Lösung reagiert neutral
$a_{H^+} < a_{OH^-}$	Lösung reagiert alkalisch

Um das oft umständliche Rechnen mit Zehnerpotenzen zu ersparen, führte SÖRENSEN ein neues Maß für die Wasserstoffionenaktivität ein, den *p*H-*Wert.* Er ist gleich dem negativen dekadischen Logarithmus der Wasserstoffionenaktivität:

$$pH = -\lg \frac{a_{H^+} \cdot m^3}{1000\ mol} \tag{6}$$

Eine Änderung des *p*H-Werts um 1 bedeutet eine Änderung der Wasserstoffionenaktivität um eine Zehnerpotenz. Der *p*H-Wert schwankt bei verdünnten wäßrigen Lösungen zwischen 0 und 14.

2.7.3.2. Löslichkeitsprodukt

In einer gesättigten Lösung liegt ein Gleichgewicht zwischen dem festen Elektrolyten als Bodenkörper (Niederschlag) und der Lösung vor. Es handelt sich hierbei um ein *heterogenes Gleichgewicht* (s. 2.7.1.). Für die gesättigte Lösung des Elektrolyten AB gilt:

$$AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$$

$$L_a = a_{A^+} \cdot a_{B^-} \qquad (7)$$

Für die Aktivität des Bodenkörpers ist der Molenbruch einzusetzen, der bei einem reinen festen Stoff gleich 1 ist. Die Größe L_a wird als *Löslichkeitskonstante* oder als *Löslichkeitsprodukt* bezeichnet. Der Unterschied in beiden Größen bezieht sich auf das Konzentrationsmaß. Bei der Löslichkeitskonstanten rechnet man mit Aktivitäten, bei dem Löslichkeitsprodukt mit molaren Konzentrationen.
Das *Löslichkeitsprodukt* besagt:

Das Produkt der Ionenkonzentrationen eines Stoffs über seinem Niederschlag ist bei gegebener Temperatur konstant.

Zwischen der Löslichkeit c und dem Löslichkeitsprodukt L_a besteht folgender Zusammenhang:

Elektrolyt AB: $$c = \sqrt{L_a} \qquad (8)$$

Elektrolyt A_mB_n: $$c = \sqrt[m+n]{\frac{L_a}{m^m \cdot n^n}} \qquad (9)$$

Für die Löslichkeit eines Elektrolyten gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Durch *gleichionigen Zusatz* verringert sich die Löslichkeit. Das Maximum der Löslichkeit liegt bei äquivalenten Mengen beider Ionenarten vor.
2. Durch *fremdionigen Zusatz* erhöht sich die Löslichkeit eines Stoffs, da entsprechend der Löslichkeitskonstanten die Aktivitäten konstant bleiben, aber die Aktivitätskoeffizienten sich verringern. Die Folge ist eine Vergrößerung der molaren Konzentration.

2.7.3.3. Hydrolyse

Die Hydrolyse ist die chemische Reaktion des Wassers mit den Ionen eines gelösten Elektrolyten. Die Gleichgewichtskonstante für diesen Vorgang bezeichnet man als Hydrolysenkonstante K_H und den Bruchteil der hydrolysierten Ionen als *Hydrolysengrad* β:

$$\beta = \frac{\text{hydrolysierte Menge}}{\text{Gesamtkonzentration}} \qquad (10)$$

Bei einer Hydrolyse reagiert das Anion bzw. das Kation des Salzes mit dem Wasser unter Bildung von Hydroxid- bzw. Wasserstoffionen:

$K^+ + H_2O \rightleftharpoons KOH + H^+$ Lösung reagiert sauer

$A^- + H_2O \rightleftharpoons HA + OH^-$ Lösung reagiert alkalisch

Diese Erscheinung zeigen alle Salze von schwachen Säuren mit starken Basen und alle Salze von schwachen Basen mit starken Säuren. Das Salz einer schwachen Säure und einer schwachen Base reagiert in wäßriger Lösung praktisch neutral.
Im erweiterten Sinn versteht man in der Chemie unter *Hydrolyse* allgemein die chemische Reaktion mit Wasser. Es gehören dazu auch die Verseifung eines Esters (s. 4.):

$$\text{Ester} + \text{Wasser} \rightleftharpoons \text{Alkohol} + \text{Säure}$$

oder die Aufspaltung der Halogenide der Nichtmetalle; z. B.:

$$PCl_3 + 3\,H_2O \rightleftharpoons 3\,HCl + H_3PO_3$$



2.7.3.4. Pufferlösungen

Zur Aufrechterhaltung eines möglichst konstanten *p*H-Werts dienen *Pufferlösungen.* Dies sind Lösungen, die eine schwache Säure oder Base und eines ihrer Salze in vergleichbaren Mengen enthalten. Der *p*H-Wert einer Pufferlösung ist vom Verhältnis der Konzentration der beiden Komponenten abhängig:

$$a_{H^+} = K_a \frac{c_{\text{Säure}}}{c_{\text{Salz}}}$$
$$a_{OH^-} = K_a \frac{c_{\text{Base}}}{c_{\text{Salz}}} \qquad (11)$$

Pufferlösungen spielen nicht nur in der Technik, sondern auch in allen biologischen Systemen eine große Rolle. Weiterhin werden sie zur Eichung von *p*H-Meßgeräten benötigt. Dazu dienen die *Standardpufferlösungen,* die bei konstanten Konzentrationsverhältnissen einen bestimmten, genau bekannten *p*H-Wert besitzen.

2.8. Chemische Thermodynamik

2.8.1. Grundbegriffe

Die *Thermodynamik* untersucht die Zusammenhänge zwischen Zustandsänderungen und energetischen Veränderungen eines Systems. Die Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse auf chemische Reaktionen ist Aufgabengebiet der *chemischen Thermodynamik.*
Unter dem *Zustand* eines Systems versteht man die Gesamtheit der meßbaren Eigenschaften der betreffenden Stoffe. Als Meßgrößen dienen die *Zustandsgrößen* oder die *Zustandsvariablen.* Dies sind: Druck, Volumen, Temperatur, Konzentration, innere Energie, Enthalpie, Entropie, thermodynamisches und chemisches Potential. Es gehören dazu *nicht*: Farbe, Kristallform usw.
Eine *Zustandsvariable* ist eine meßbare Größe, deren Wert unabhängig vom Wege ist, auf dem dieser Zustand erreicht wurde. Diese Variablen sind voneinander abhängig und ergeben in ihrer mathematischen Verknüpfung die *thermodynamische Zustandsgleichung.* Die Aufgabe der Thermodynamik besteht in der Aufstellung dieser Zustandsgleichungen und ihrer praktischen Anwendung:
Die zu betrachtenden Systeme werden wie folgt eingeteilt:

1. *abgeschlossene Systeme:* kein Stoff- oder Energieaustausch mit der Umgebung,
2. *adiabatisch abgeschlossene Systeme:* kein Stoff- oder Wärmeaustausch mit der Umgebung, andere Energiearten sind zugelassen,
3. *geschlossene Systeme:* kein Stoffaustausch mit der Umgebung,
4. *offene Systeme:* Stoff- und Energieaustausch sind gestattet.

Grundvoraussetzung für die thermodynamische Betrachtung eines Systems ist die zeitliche Konstanz aller meßbaren Eigenschaften. Das System muß sich in einem *thermodynamischen Gleichgewicht* befinden. Dazu gehören:

1. *thermisches Gleichgewicht:* Es herrscht überall die gleiche Temperatur.
2. *mechanisches Gleichgewicht:* Es herrscht überall der gleiche Druck.
3. *chemisches Gleichgewicht:* Die Differenz der chemischen Potentiale der beteiligten Stoffe ist Null.

Die Grundlage der Thermodynamik sind 4 *Hauptsätze,* die sich ohne Beweisführung aus der Erfahrung ergeben. Es sind dies:

0. Hauptsatz der Thermodynamik: Zwei Systeme sind im thermischen Gleichgewicht, wenn sie dieselbe Temperatur haben.
Der Satz besagt nicht, daß zwei Stoffe mit gleicher Temperatur ein Gleichgewicht bilden.

1. Hauptsatz der Thermodynamik: Die Änderung der inneren Energie ist gleich der Summe der dem System in Form von Arbeit und Wärme zu- oder abgeführten Energie.

Dabei ist auf die Vorzeichengebung zu achten: Alle zugeführten Energiebeträge erhalten ein (+) und alle abgeführten ein (−).
Eine andere Formulierung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik geht von der Tatsache aus, daß die innere Energie als Summe aller Energiearten eines Systems eine Zustandsgröße ist. Dann ist die Änderung der inneren Energie ein totales Differential.
Jeder physikalische oder chemische Vorgang kann bei konstantem Druck oder bei konstantem Volumen durchgeführt werden:

1. *isochore Vorgänge:* Die Wärmemenge dient nur zur Erhöhung der inneren Energie. Erwärmt man 1 mol eines Stoffs um 1 K, so ist dazu eine Wärmemenge C_v nötig, die man molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen nennt.
2. *isobare Vorgänge:* Die Wärmemenge dient zur Erhöhung der inneren Energie und zur Volumenarbeit. Um 1 mol um 1 K zu erwärmen, benötigt man die Wärmemenge C_p, die man molare Wärmekapazität bei konstantem Druck nennt. Für ideale Gase gilt der Zusammenhang:

$$C_p = C_v + R \tag{12}$$

C_p molare Wärmekapazität bei konstantem Druck, C_v molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen, R universelle Gaskonstante

Die Zusammenfassung der inneren Energie und der Volumenarbeit, die bei isobaren Vorgängen auftritt, ergibt die *Enthalpie.* Sie ist gleich dem Energieinhalt bei konstantem Druck. Die Änderung dieser Größe ist gleich der bei konstantem Druck zu- oder abgeführten Wärme.
Für die Änderung der Enthalpie gilt die Gleichung:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V \qquad (p \text{ konst.}) \tag{13}$$

$\mathrm{d}H$ Änderung der Enthalpie, $\mathrm{d}U$ Änderung der inneren Energie, p Druck, $\mathrm{d}V$ Änderung des Volumens

Als gesetzliche Einheit für alle energetischen Größen (Wärme, Arbeit, elektrische Energie usw.) ist das *Joule* (J) festgelegt worden.

2.8.2. Reaktionswärme

Jede chemische Reaktion ist mit einer Änderung der inneren Energie und der Enthalpie der beteiligten Stoffe verbunden. Bei einer exothermen Reaktion sind die Endprodukte energieärmer als die Ausgangsprodukte. Bei einer endothermen Reaktion sind die Endprodukte energiereicher. Die Änderung des Energieinhalts der an der Reaktion beteiligten Stoffe bezieht man stets auf eine bestimmte Temperatur und auf einen *Formelumsatz.* Man versteht darunter den Stoffumsatz entsprechend der chemischen Gleichung, wobei diese mit den kleinsten ganzzahligen Koeffizienten zu formulieren ist. Ausnahmen sind die Verbrennungswärme und die Bildungswärme, die man stets auf 1 mol bezieht.
Die Energieänderung, die bei einer chemischen Reaktion bei einem Formelumsatz auftritt, nennt man *Reaktionswärme.* Dabei unterscheidet man zwischen der Reaktionsenthalpie (Reaktionswärme bei konstantem Druck) und der Reaktionsenergie (Reaktionswärme bei konstantem Volumen). Beide unterscheiden sich durch die Volumenarbeit:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta nRT \tag{14}$$

ΔH Reaktionsenthalpie, ΔU Reaktionsenergie, Δn Differenz der Stoffmengen der gasförmigen End- und Ausgangsprodukte

Die Grundlage zur Berechnung der Reaktionswärme ist das Gesetz der konstanten Wärmesummen oder der *Satz von* Hess:

Die von einem chemischen System aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge ist unabhängig vom Wege der Reaktion. Die Reaktionswärme ist somit eine Zustandsvariable.

Die *Bildungsenthalpie* ΔH_B ist die Reaktionsenthalpie, die beim Aufbau von 1 mol der Verbindung aus den Elementen umgesetzt wird. Um vergleichbare Werte zu erhalten, muß ein bestimmter Normzustand festgelegt werden. Man bezieht sich auf den Aggregatzustand (bzw. Modifikation), den die betreffenden Stoffe bei 298 K und 101,3 kPa (= 1 atm) besitzen. Bei den Gasen muß man noch auf ideales Verhalten interpolieren. Die so erhaltenen Werte bezeichnet man als *Standardbildungsenthalpien* $\Delta H_{B,298}$.
Die Normalbildungsenthalpien der anorganischen und organischen Verbindungen sind tabelliert.
Die Bildungsenthalpien ergeben sich rechnerisch aus den *Verbrennungsenthalpien* der Verbindung und der beteiligten Elemente. Die Verbrennungsenthalpie ist die Reaktionsenthalpie bei der Verbrennung von 1 mol der Verbindung oder des Elements. Nähere Angaben über die Meßmethodik bei der Bestimmung von kalorischen Größen (Heizwert, Molwärmen, Verbrennungsenthalpie, Verdampfungsenthalpie, Neutralisationsenthalpie usw.) s. Literatur.
Die Bildungsenthalpie ist gleich der Differenz zwischen der Summe der Verbrennungsenthalpien der Elemente und der Verbrennungsenthalpie der Verbindung:

$$\Delta H_B = \sum \Delta H_{Elem} - \Delta H_{Verb} \qquad (15)$$

Mit Hilfe der Bildungsenthalpien aller an der Reaktion beteiligten Stoffe berechnet man die *Reaktionsenthalpie.* Die Reaktionsenthalpie bei 298 K und 101,3 kPa ist gleich der Differenz der Standardbildungsenthalpien der Endprodukte und der Ausgangsprodukte. Da die Bildungsenthalpien nur für 1 mol gelten, sind die Stoffmengen der beteiligten Stoffe entsprechend der chemischen Gleichung zu berücksichtigen.

$$\Delta H_{298} = \sum_E n \, \Delta H_{B,298} - \sum_A n \, \Delta H_{B,298} \qquad (16)$$

n Stoffmenge der beteiligten Stoffe, E Endprodukte, A Ausgangsprodukte

Die so aus tabellierten Werten ermittelten Reaktionsenthalpien gelten für 25 °C = 298 K. Für die Umrechnung auf andere Temperaturen gilt der *Satz von* KIRCHHOFF:
Der Temperaturkoeffizient der Reaktionswärme ist gleich der Differenz der molaren Wärmekapazitäten der End- und Ausgangsstoffe der betreffenden Reaktion:

$$\frac{d\,\Delta H}{dT} = \Delta n_i C_{p,i} \qquad (p \text{ konst.}) \qquad (17)$$

n_i Stoffmenge des Stoffs i, $C_{p,i}$ molare Wärmekapazität bei konstantem Druck des Stoffs i

Damit kann man bei bekannten Molwärmen und Bildungsenthalpien (beide sind tabelliert) die Reaktionsenthalpie einer chemischen Reaktion bei jeder beliebigen Temperatur berechnen.

2.8.3. Reaktionsentropie

Jeder freiwillig verlaufende Vorgang hat eine bestimmte Richtung und verläuft daher *irreversibel,* d. h. nicht umkehrbar. Bei einem umkehrbaren oder *reversiblen* Vorgang wird eine unendliche Reihe von Gleichgewichtszuständen durchlaufen. Das System befindet sich stets im Gleichgewicht. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Möglichkeiten liegt in der Arbeit.

Die bei reversibler Führung geleistete Arbeit stellt das Maximum und die aufzuwendende Arbeit das Minimum dar. Beide sind dem Betrag nach gleich groß. Bei einem irreversiblen Vorgang ist die aufzuwendende Arbeit größer und die geleistete Arbeit kleiner als bei einem reversiblen Vorgang. Der Unterschied ergibt sich durch Energieverluste, wie Widerstände, Strahlungsverluste, Wärmeableitungen usw. Jeder in der Praxis mit endlicher Geschwindigkeit verlaufende Vorgang ist daher mehr oder weniger irreversibel. Der einzige völlig reversibel verlaufende Vorgang ist das *chemische Gleichgewicht.*

Zur Unterscheidung zwischen einem reversiblen und einem irreversiblen Vorgang dient die *Entropie S,* die wie die Enthalpie und die innere Energie eine Zustandsgröße ist.

Der *2. Hauptsatz der Thermodynamik* lautet:

Bei einem von selbst verlaufenden Vorgang in einem abgeschlossenen System erhöht sich stets die Entropie des Systems und strebt einem Höchstwert zu. Im Gleichgewichtszustand ist die Entropieänderung gleich Null:

$$dS \geqq 0 \tag{18}$$

Die *Entropie* ist ein Maß für die Unordnung eines Systems. Die größte Entropie besitzen die idealen Gase, da die Gasmoleküle sich völlig frei und unbehindert bewegen können und damit einen Zustand völliger Unordnung bewirken. Die kleinste Entropie haben die Kristalle, da sich die Bausteine, Atome oder Moleküle, auf bestimmten Gitterplätzen befinden und nur um ihre Ruhelage schwingen können.

Das ist der *3. Hauptsatz der Thermodynamik*:

Die Entropie jedes festen reinen Stoffes strebt beim absoluten Nullpunkt dem Werte Null zu:

$$\lim_{T \to 0} S = 0 \tag{19}$$

Die Entropieänderung bei einer chemischen Reaktion bezeichnet man als *Reaktionsentropie*. Zur Berechnung dienen die Standardentropien der beteiligten Stoffe. Mit Hilfe des 3. Hauptsatzes der Thermodynamik kann man die Entropie jedes Stoffs berechnen. Um vergleichbare Werte zu erhalten, bezieht man sich auf die Temperatur 298 K und einen Druck von 101,3 kPa.

Die Reaktionsentropie bei 298 K und 101,3 kPa ist gleich der Differenz zwischen den Standardentropien der Endstoffe und der Ausgangsstoffe. Dabei müssen selbstverständlich die Stoffmengen der beteiligten Stoffe berücksichtigt werden:

$$\Delta S_{298} = \sum_{E} nS_{298} - \sum_{A} nS_{298} \tag{20}$$

ΔS_{298} Reaktionsentropie bei 298 K, E Endprodukte, A Ausgangsprodukte, S_{298} Standardentropie, n Stoffmengen der beteiligten Stoffe

Die so ermittelte Reaktionsentropie gilt für 298 K. Zur Umrechnung auf andere Temperaturen muß der Temperaturkoeffizient der Reaktionsentropie berücksichtigt werden. Er beträgt:

$$\frac{d\,\Delta S}{dT} = \frac{\Delta n_i C_{p,i}}{T} \quad (p \text{ konst.}) \tag{21}$$

n_i Stoffmenge des Stoffs i, $C_{p,i}$ molare Wärmekapazität bei konstantem Druck des Stoffs i

2.8.4. Reaktionsnutzarbeit

Zur Berechnung des Gleichgewichtszustands in einem nicht abgeschlossenen System dient die Änderung des *thermodynamischen Potentials* ΔG. Diese Größe bezeichnet man bei chemischen Reaktionen als *Reaktionsnutzarbeit*.

Das thermodynamische Potential genügt der Gleichung:

$$G = H - TS \tag{22}$$

oder die Änderung dieser Größe bei konstanter Temperatur:

$$dG = dH - T\,dS \tag{23}$$

Jeder freiwillig verlaufende isotherm-isobare Vorgang ist mit einer Abnahme des thermodynamischen Potentials verbunden. Im Gleichgewichtszustand ist die Änderung dieser Funktion gleich Null, sie besitzt im Gleichgewicht ein Minimum. Das thermodynamische Potential ist der Teil der Enthalpie, der bei einem

reversiblen Vorgang in jede beliebige Energieform verwandelbar ist. Es ist der Teil, der maximal äußere Arbeit leisten kann.

Für die Änderung des thermodynamischen Potentials gilt somit:

$\Delta G = 0$ Gleichgewichtsbedingung,

$\Delta G < 0$ freiwilliger Ablauf der Reaktion,

$\Delta G > 0$ freiwilliger Ablauf der Gegenreaktion

Die Reaktionsnutzarbeit ist damit ein Maß für die Triebkraft einer chemischen Reaktion, d. h. für die *Affinität.* Unter der Affinität einer chemischen Reaktion versteht man die negative Reaktionsnutzarbeit, die bei der Umsetzung je Formelumsatz gewonnen wird. Bei chemischen Reaktionen beträgt diese:

$$\Delta G = \Delta H - T\,\Delta S \tag{24}$$

ΔH Reaktionsenthalpie, ΔS Reaktionsentropie

Die Reaktionsnutzarbeit ist eine Funktion des Drucks, der Temperatur und der Aktivitäten der Ausgangs- und Endstoffe. Sind die Aktivitäten aller beteiligten Stoffe gleich 1, so ist die Reaktionsnutzarbeit gleich der *Grundreaktionsnutzarbeit* ΔG_0, die man auch als thermodynamisches Standardpotential der Reaktion bezeichnet. Sie dient zur Berechnung der thermodynamischen Gleichgewichtskonstanten K_a:

$$\Delta G_0 = -RT \ln K_a \tag{25}$$

mit $\Delta G_0 = \Delta G$ für $a_i = 1$

Zur Berechnung eines chemischen Gleichgewichts benötigt man die Gleichgewichtskonstante K_a. Man erhält diese auf folgendem Rechenweg:

1. Mit Hilfe von Gl. (16) ermittelt man aus den tabellierten Standardbildungsenthalpien die Reaktionsenthalpie ΔH_{298}. Unter Berücksichtigung der molaren Wärmekapazitäten kann man diese Größe für jede beliebige Temperatur berechnen.
2. Mit Hilfe von Gl. (20) ermittelt man aus den tabellierten Standardentropien die Reaktionsentropie ΔS_{298}. Auch diesen Wert kann man mit den molaren Wärmekapazitäten der beteiligten Stoffe auf jede gewünschte Temperatur umrechnen.
3. Mit Hilfe von Gl. (24) berechnet man die Reaktionsnutzarbeit ΔG, die in diesem Falle gleich der Grundreaktionsnutzarbeit ist (die tabellierten Werte gelten für die Aktivität 1).
4. Aus Gl. (25) ergibt sich die gesuchte Gleichgewichtskonstante K_a.

2.9. Elektrochemie

2.9.1. Grundbegriffe

Die *Elektrochemie* befaßt sich mit den Beziehungen zwischen elektrischer und chemischer Energie. Die Umwandlung von chemischer in elektrische Energie erfolgt in den galvanischen Elementen oder galvanischen Ketten (s. 2.9.2.). Die Umwandlung elektrischer in chemische Energie bezeichnet man als *Elektrolyse* (s. 2.9.3.).
Ein *Elektrolyt* ist ein Stoff, der in wäßriger Lösung oder in einer Schmelze völlig oder teilweise in Ionen zerfällt und damit in der Lage ist, den elektrischen Strom zu leiten. Beim Anlegen einer Spannung an eine solche Lösung oder Schmelze bildet sich zwischen den Elektroden ein elektrisches Feld. In diesem wandern die positiv geladenen Kationen zur negativen Katode und die negativ geladenen Anionen zur positiven Anode. Dort erfolgt ein Elektronenaustausch. Die Kationen nehmen Elektronen auf und werden dadurch reduziert. Die Anionen geben Elektronen ab und werden oxydiert:

Beispiel. $H^+ + \ominus \rightarrow H$ Reduktion

$Cl^- \rightarrow Cl + \ominus$ Oxydation

Da beide Vorgänge stets gemeinsam erfolgen, bezeichnet man die gesamte Reaktion als *Redoxvorgang.* Bei diesem Elektronenaustausch bilden sich *Radikale* (Atome oder Atomgruppen), die unbeständig sind und in einer zweiten Stufe weiterreagieren. Die beiden Schritte nennt man Primär- und Sekundärvorgang. Für den Primärvorgang gelten die beiden FARADAY*schen Gesetze:*

1. Die abgeschiedene Stoffmenge m ist proportional der Elektrizitätsmenge Q, die durch den Leiter geflossen ist:

$$m = kQ = kIt \qquad (\text{für } I \text{ konst.}) \tag{26}$$

2. Durch gleiche Elektrizitätsmengen werden stets äquivalente Stoffmengen aus verschiedenen Elektrolyten abgeschieden:

$$\frac{m}{M_{\text{Ä}}} = \frac{It}{F} \tag{27}$$

m abgeschiedene Stoffmenge, $M_{\text{Ä}}$ Äquivalentmasse, I Stromstärke, t Zeit, F FARADAYsche Konstante ($= 9{,}6484 \cdot 10^4$ C mol^{-1})

Äquivalente Mengen liegen vor, wenn die Anzahl der Grammäquivalente gleich groß ist. Diese Anzahl berechnet man aus dem Verhältnis der Masse zur Äquivalentmasse. Die Äquivalentmasse ist das Verhältnis der Molmasse zur Ladungsänderung bei dem betreffenden elektrochemischen Vorgang.

Die FARADAYschen Gesetze gelten exakt nur für den *Primärvorgang.* Sie können auch auf den Sekundärvorgang übertragen werden, wenn dieser eindeutig verläuft und sich nur ein Stoff an der betreffenden Elektrode abscheidet. Als *Sekundärvorgänge* kommen in Frage:

Reaktion der entladenen Teilchen untereinander,
Reaktion mit dem Lösungsmittel,
Reaktion mit der Elektrode,
Reaktion mit dem Elektrolyten und
Reaktion mit besonders zugesetzten Stoffen.

Verlaufen mehrere Sekundärvorgänge nebeneinander, ergibt dies eine *Stromausbeute* kleiner als 1. Unter Stromausbeute versteht man das Verhältnis der tatsächlich abgeschiedenen zur theoretisch errechneten Stoffmenge bei konstanter Strommenge:

$$\eta = \frac{m_{\text{tats.}}}{m_{\text{theor.}}} \qquad (It \text{ konst.}) \tag{28}$$

Betrachtet man eine bestimmte Menge des abgeschiedenen Stoffs, so ist die Stromausbeute das Verhältnis der theoretischen zur tatsächlichen Strommenge:

$$\eta = \frac{(It)_{\text{theor.}}}{(It)_{\text{tats.}}} \qquad (m \text{ konst.}) \tag{29}$$

Zur Erzielung einer hohen Stromausbeute muß die *Stromdichte* (Verhältnis der Stromstärke zur Elektrodenoberfläche) möglichst klein sein. Es gibt allerdings technologische Verfahren, bei denen man bewußt bei hohen Stromdichten arbeitet. Dazu gehört die technische Darstellung von Ammoniumperoxodisulfat.

2.9.2. Elektrochemische Vorgänge in galvanischen Elementen

Ein *galvanisches Element* besteht aus zwei Halbelementen, die so verbunden werden, daß zwischen ihnen eine Ionenwanderung möglich ist*). Jedes Halbelement besteht aus einer Elektrode und einer Elektrolytlösung. Das elektrochemische Potential der Elektrode muß von der Aktivität der Elektrolytlösung abhängig sein.

*) siehe auch Abschn. ELEKTROTECHNIK UND ELEKTRONIK

Die Metallionen in der Lösung und die Metallatome haben das Bestreben, miteinander ein Gleichgewicht zu bilden:

$$Me \rightleftharpoons Me^{z+} + z\ominus$$

Dadurch bildet sich an der Grenzfläche zwischen der Elektrode und der Lösung eine elektrische Doppelschicht und damit ein *elektrochemisches Potential.* Die Differenz der beiden Elektrodenpotentiale in einem galvanischen Element bezeichnet man als *Urspannung* oder *Quellenspannung.* Dabei besitzt die Katode stets das größere und die Anode das kleinere Potential:

$$U_E = E_K - E_A \tag{30}$$

Um vergleichbare Werte zu erhalten, bezieht man sich auf die *Standardwasserstoffelektrode,* der man das Potential Null erteilt. Diese Elektrode besteht aus einer Platinelektrode, die von reinem Wasserstoff mit dem Druck von 101,3 kPa umspült wird und die in eine Chlorwasserstoffsäure mit der Aktivität 10^3 mol/m^3 taucht. Die so erhaltenen Vergleichswerte für die einzelnen Halbelemente bezeichnet man als *Einzelpotential.*

Das *Einzelpotential* ist eine Funktion der Aktivität, der Temperatur und des Drucks (bei Gasen). Nach NERNST gilt für eine Metallelektrode die Gleichung:

$$E = E_0 + \frac{RT}{zF} \ln a_{Me^{z+}} \cdot \frac{m^3}{kmol} \tag{31}$$

E Einzelpotential, E_0 Normal- oder Standardpotential, z Ladungsänderung, F FARADAYsche Konstante, $a_{Me^{z+}}$ Aktivität der Metallionen mit der Wertigkeit $+z$

Das *Normal-* oder *Standardpotential* E_0 ist gleich dem Einzelpotential bei einer Aktivität von 10^3 mol m^{-3}. Diese Werte sind tabelliert, ihre Zusammenfassung ergibt die *elektrochemische Spannungsreihe.*

Die Anordnung der Standardpotentiale in der elektrochemischen Spannungsreihe erfolgt stets nach steigendem positivem Wert. Oben stehen die Metalle mit dem negativsten Standardpotential und unten mit dem positivsten. Dadurch ergeben sich folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Je negativer das Standardpotential ist, um so stärker wirkt das Metall als Reduktionsmittel. In einem galvanischen Element ist es somit die Anode.
2. Je positiver das Standardpotential ist, um so stärker wirken die Ionen als Oxydationsmittel. Diese Elektrode bildet in einem galvanischen Element die Katode.
3. Elektronen fließen in dem äußeren Leiterkreis stets von der Anode zur Katode.

Die *Katode* ist die Elektrode mit dem größeren Potential. Sie stellt die negative Elektrode dar, denn zu ihr wandern die Kationen. An der Katode erfolgen stets Reduktionsvorgänge. Kationen werden abgeschieden, Nichtmetalle gehen als Anionen in Lösung, oder Oxydationsmittel werden reduziert.
Die *Anode* ist die Elektrode mit dem negativeren (d. h. kleineren) Potential. Sie stellt die positive Elektrode dar, denn zu ihr wandern die Anionen. An der Anode erfolgen stets Oxydationsvorgänge. Anionen werden abgeschieden, Metalle gehen als Kationen in Lösung, oder Reduktionsmittel werden oxydiert.

Bekannte galvanische Elemente: Bleiakkumulator, Eisen-Nickel-Akkumulator, Kadmium-Nickel-Akkumulator.

2.9.3. Elektrolyse

Elektrolyse ist die Einwirkung von elektrischer Energie auf Elektrolytlösungen oder Schmelzen zur Herbeiführung einer chemischen Veränderung. Es wird dabei elektrische in chemische Energie umgewandelt.

Hinweis: Die Zerlegung einer chemischen Verbindung durch den elektrischen Strom ist nur ein Spezialfall. Durch eine Elektrolyse kann man auch durch entsprechende Primär- und Sekundärvorgänge eine chemische

Verbindung synthetisieren. Beispiele: Darstellung von Natriumhydroxid, Aufladung eines Bleiakkumulators, Darstellung von Ammoniumperoxodisulfat, Synthesen von organischen Verbindungen.

Bei jeder Elektrolyse wird durch die zugeführte elektrische Energie ein Vorgang erzwungen ($\Delta G > 0$), der ohne diesen Zwang in der entgegengesetzten Richtung verlaufen würde. Durch die von außen angelegte Spannung bildet sich eine Gegenspannung, die man *Polarisationsspannung* nennt. Diese Erscheinung bezeichnet man als *galvanische Polarisation.* Die entsprechenden Elektroden sind polarisierbar. Die Polarisationsspannung wächst mit der angelegten Spannung bis zu einem Maximalwert, der *Zersetzungsspannung.* Da beide Spannungen gegeneinander wirken, kann bis dahin kein Strom fließen. Erst bei Überwindung der Zersetzungsspannung beginnt die Elektrolyse. Die benötigte Spannung hat somit zwei Aufgaben zu erfüllen, Überwindung der Zersetzungsspannung und des Widerstands der Elektrolytlösung:

$$U = RI + E_z \quad (32)$$

$$E_z = E_{z,A} - E_{z,K} \quad (33)$$

Die Ursache für die galvanische Polarisation ist die Bildung einer *galvanischen Kette* durch die Elektrolyse, deren Urspannung der angelegten Spannung entgegenwirkt. Die Katode der Elektrolysezelle ist gleich der Anode des gebildeten galvanischen Elements, die Anode wird zur Katode. Würde man die äußere Stromquelle entfernen, flösse Strom in der entgegengesetzten Richtung, da jetzt das entstandene galvanische Element wirksam wird.

Beispiel. Elektrolysiert man eine Chlorwasserstoffsäure mit Platinelektroden, werden sich an den Elektroden folgende Vorgänge abspielen:

Katode: $H^+ + \ominus \rightarrow H \qquad 2H \rightarrow H_2$

Anode: $Cl^- \rightarrow Cl + \ominus \qquad 2Cl \rightarrow Cl_2$

Die Wasserstoff- und Chlormoleküle werden vom Platin adsorbiert und bilden dadurch eine Wasserstoff- und eine Chlorelektrode. Es bildet sich eine galvanische Kette (Chlorknallgaskette), die aus einer Wasserstoff- und einer Chlorelektrode besteht. Als Elektrolyt dient Chlorwasserstoffsäure. Dieses galvanische Element besitzt eine bestimmte Urspannung, die der angelegten Spannung entgegenwirkt. Die Wasserstoff- und Chlormoleküle haben das Bestreben, wieder als Ionen in Lösung zu gehen. Eine Elektrolyse kann somit nur stattfinden, wenn diese Gegenspannung überwunden wird. Dies ist bei Überschreiten der Zersetzungsspannung der Fall.

Die galvanische Polarisation kann reversibel oder irreversibel (s. 2.8.3.) sein. Bei einer reversiblen Polarisation kann man bei Umkehrung des Vorgangs die benötigte Energie wieder zurückgewinnen. Bei einer irreversiblen Polarisation ist dies nicht möglich. Es gibt folgende Arten von galvanischen Polarisationen:

1. *Reversible Polarisation*
   a) *chemische Polarisation:* Durch die Elektrolyse kommt es zu einer chemischen Veränderung der Elektrode und damit zum Aufbau eines galvanischen Elements. Beispiel s. oben.
   b) *Konzentrationspolarisation:* Ursache ist die Konzentrationsänderung im Katoden- bzw. Anodenraum. Durch die ständige Abscheidung eines Kations an der Katode muß dort die Konzentration gegenüber der übrigen Lösung abnehmen. Es bilden sich im Verlauf der Elektrolyse Konzentrationsunterschiede aus, die Anlaß zur Bildung einer Konzentrationskette bilden. Die Konzentrationen haben das Bestreben, sich durch Diffusion wieder auszugleichen. Dieser Gegenstrom wird als *Diffusionsstrom* bezeichnet. Zur Vermeidung sind entsprechende technologische Maßnahmen erforderlich (Erhöhung der Temperatur, fließende Anordnung des Elektrolyten, Einbau eines Rührers, Verringerung des Elektrodenabstands, Arbeiten mit konzentrierten Lösungen usw.).

2. *Irreversible Polarisation*

   Bei dieser Polarisationsart handelt es sich um die Überwindung einer Hemmungserscheinung, die einen bestimmten Spannungsbetrag erforderlich macht.

Die *Zersetzungsspannung* setzt sich somit aus einem reversiblen und einem irreversiblen Anteil zusammen. Den letzteren bezeichnet man als *Überspannung* η:

$$E_z = E_{\text{rev.}} + E_{\text{irr.}} = E_{\text{rev.}} + \eta \qquad (34)$$

Der gesamte Elektrodenvorgang setzt sich aus einer Reihe von Teilschritten zusammen, die mit verschiedener Geschwindigkeit ablaufen. Dabei bestimmt grundsätzlich der langsamste Schritt die Gesamtgeschwindigkeit. Zur Beschleunigung benötigt man einen Mehrbetrag an Energie, der sich zahlenmäßig in der Überspannung äußert. Es ist Aufgabe der Elektrochemiker, die Ursachen zu erforschen und entsprechende Betriebsbedingungen zu entwickeln. Es gibt allerdings elektrochemische Verfahren, bei denen man die Überspannung bewußt ausnutzt (Galvanotechnik, Darstellung von Natriumhydroxid usw.).

3. Anorganische Chemie

3.1. Wasserstoff

3.1.1. Allgemeines

Symbol: H [hydrogenium (lat.) Wasserbildner]; Wertigkeiten: +1, selten −1

Isotope: ^{1}H = Protium (leichter Wasserstoff; 99,984%)
D = ^{2}H = Deuterium (schwerer Wasserstoff; 0,016%)
T = ^{3}H = Tritium (überschwerer Wasserstoff; Spuren; auf der Erde insgesamt 2 kg)

Vorkommen: häufigstes Element des Weltalls (Fixsterne, interstellare Materie). Auf der Erde kommt Wasserstoff fast nur chemisch gebunden vor, frei in den höchsten Stratosphärenschichten, hier z. T. ionisiert.

3.1.2. Elementarer Wasserstoff (H_2)

Herstellung:

- aus verdünnten Säuren und Metallen (außer Kupfer und Edelmetallen); z. B. $Zn + 2HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2$,
- durch Reduktion von Wasser mit sehr unedlen Metallen:
  flüssiges Wasser reagiert mit Alkali- und einigen Erdalkalimetallen, z. B. $Ca + 2H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + H_2$,
  heißer Wasserdampf wird auch von Magnesium, Zink und Eisen reduziert,
- technisch durch Reduktion von Wasserdampf mit Koks oder Kohle bei Temperaturen über 1000°C, z. B. im WINKLER-Generator; in endothermer Reaktion entsteht *Wassergas* (Kohlenmonoxid + Wasserstoff): $H_2O + C \rightarrow CO + H_2$. Wassergas dient als Heizgas, für chemische Synthesen und Hydrierungen sowie zur technischen Herstellung von Wasserstoff.
  Die Isolierung des Wasserstoffs erfolgt durch „*Konvertierung*" (katalytische Umsetzung mit Wasserdampf bei 500°C: $CO + H_2O \rightleftharpoons CO_2 + H_2$) und Auswaschen des entstandenen Kohlendioxids mit Wasser.
- technisch durch katalytische Reaktion zwischen Erdgas oder gas- bzw. dampfförmigen Erdölprodukten und Wasserdampf,
- durch Elektrolyse verdünnter Alkalilauge oder Schwefelsäure; auch bei der Alkalichloridelektrolyse (s. S. 35) entsteht Wasserstoff als Nebenprodukt.

Physikalische Eigenschaften: farb-, geruch- und geschmackloses Gas; rund 14mal leichter als Luft (Dichte: 0,09 kg/m^3 im Normzustand) und damit leichtester Stoff überhaupt; nächst Helium am zweitschwersten zu verflüssigen; Schmelzpunkt: −259,5°C; Siedepunkt: −252,8°C; in Wasser sehr wenig löslich, leicht dagegen in manchen Metallen (Platin, Palladium); im Stahl bewirkt er die bei der Säurebeize oft auftretende „Wasserstoffsprödigkeit".

Chemische Eigenschaften: bei gewöhnlicher Temperatur sehr beständig; an der Luft und in Chlorgas brennbar: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$; (schwach blaue, fast unsichtbare Flamme) bzw. $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$. Gemische mit Luft, Sauerstoff oder Chlor sind explosiv (*Knallgas* bzw. *Chlorknallgas*). Auch mit anderen Nichtmetallen vereinigt er sich beim Erhitzen, z. B. $H_2 + S \rightarrow H_2S$. Wasserstoff reduziert in der Hitze viele Metalloxide, z. B. $WO_3 + 3H_2 \rightarrow W + 3H_2O$ (techn. Wolframherstellung). *Hydrierung* ist die Anlagerung von Wasserstoff, *Dehydrierung* das Gegenteil.

Verwendung: für Synthesen und Hydrierungen (Ammoniak, Chlorwasserstoff, Benzin u. a.); ferner zum Füllen von Ballons und zur Erzeugung hoher Temperaturen im Knallgasgebläse (z. B. für synthetische Edelsteine). Wasserstoff ist Bestandteil von Leucht-, Kokerei-, Schwel- und Wassergas. Er kommt in Stahlflaschen (rote Kennzeichnung; Linksgewinde) mit ≈ 15 MPa Druck in den Handel.

3.1.3. Hydride

Hydride sind binäre Verbindungen des Wasserstoffs.

— *Salzartige Hydride* enthalten das Wasserstoffanion (Hydridion) H^-. Dazu gehören Alkali- und Erdalkalihydride, z. B. *Kalziumhydrid* CaH_2, sog. „fester Wasserstoff" (1 kg ergibt mit Wasser etwa 1 m³ Wasserstoff: $CaH_2 + 2H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + 2H_2$).
— *Komplexe Hydride* enthalten das Hydrid-Ion H^- als Liganden, z. B. *Natriumtetrahydridoaluminat* (*Natriumalanat*) $Na[AlH_4]$.
— *Metallartige Hydride* enthalten das Elektron des H-Atoms im Elektronengas des Metalls. Legierungsartige Schwermetallhydride sind z. B. Platin- und Palladiumwasserstoff.
— *Flüchtige Hydride* enthalten Wasserstoff in Atombindung, z. B. die *Nichtmetallhydride*, wie Halogenwasserstoffe, Kohlenwasserstoffe usw.

3.1.4. Wasser

Formel: H_2O; die Moleküle sind assoziiert; $(H_2O)_x$; daher der höhere Schmelz- und Siedepunkt des H_2O im Vergleich zu H_2S.

Reines Wasser: geruch- und geschmacklos; unter normalem Luftdruck bei 100 °C siedend; bei 0 °C unter Ausdehnung um 1/11 seines Volumens zu Eis erstarrend; größte Dichte (1 g · cm⁻³) bei +4 °C; sehr geringe elektrische Leitfähigkeit.

Natürliches Wasser ist stets verunreinigt. Regenwasser und Schnee enthalten Staub, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlendioxid und Spuren von Ammoniumnitrat; *Quell-*, *Fluß-* und *Grundwasser* enthalten 0,01 ··· 0,2% gelöste Stoffe, z. B. Kalzium- und Magnesiumsalze („Härtebildner", s. S. 42). Im *Meerwasser* sind etwa 3,5% Salze gelöst.

Trinkwasser ist aufbereitetes natürliches Wasser. Es soll klar, farb- und geruchlos, sauerstoffreich sowie frei von krankheitserregenden Bakterien sein.

— *Entkeimung:* durch Einblasen von Chlorgas („Chlorung") oder ozonreichem Sauerstoff („Ozonierung"); durch Filtration über Kies, der mit einem Bakterienrasen bedeckt ist,
— *Enteisenung:* durch Versprühen und Verdüsen unter Zuführung von viel Luft, evtl. nach Zugabe von Kalkmilch: $4Fe(HCO_3)_2 + O_2 + 2H_2O \rightarrow 4Fe(OH)_3\downarrow + 8CO_2$. Das ausfallende braune Hydroxid wird durch Kiesfiltration entfernt.
— *Entmanganung:* erfolgt gleichzeitig mit der Enteisenung,
— *Entsäuerung* (von überschüssiger Kohlensäure, die Rohrleitungen angreift): durch Filtration über Marmorkalk oder „Dekarbolith" ($MgO + CaCO_3$),
— *Desodorierung* (Entfernung unangenehmer Geruchs- und Geschmacksstoffe): durch Filtration über Aktivkohle,
— *Fluoridierung:* wird zur Bekämpfung der Zahnkaries durchgeführt; Zugabe von Natriumhexafluorosilikat $Na_2[SiF_6]$.

Nachweis: durch Blaufärbung entwässerten Kupfersulfats.

3.1.5. Wasserstoffperoxid (Wasserstoffsuperoxid, H_2O_2)

Herstellung:

— aus Bariumperoxid und Schwefelsäure: $BaO_2 + H_2SO_4 \rightarrow BaSO_4 + H_2O_2$,
— technisch durch Elektrolyse von mittelkonzentrierter Schwefelsäure mit hohen Stromdichten und Vakuumdestillation der entstehenden Lösung: $2SO_4^{2-} - 2e \rightarrow S_2O_8^{2-}$; $S_2O_8^{2-} + 2H^+ \rightarrow H_2S_2O_8$; $H_2S_2O_8 + 2H_2O \rightarrow H_2O_2 + 2H_2SO_4$.

Eigenschaften: in wasserfreiem Zustand farblos, ölig, sehr explosibel; die im Handel befindlichen 30%igen („*Perhydrol*") und 3%igen Lösungen werden durch Licht und Katalysatoren (Staub, Blut, Braunstein, Platin) leicht zersetzt: $2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2$. Starkes Oxydationsmittel. 30%iges H_2O_2 erzeugt auf der Haut brennende, weiße Flecke, die nach einiger Zeit wieder verschwinden.

Verwendung: als Bleich- (Haare, Baumwolle) und Desinfektionsmittel.



3.1.6. Deuterium, schweres Wasser, Tritium

Deuterium, *schwerer Wasserstoff,* Symbol D oder ^2H, hat die Massenzahl 2 (Atommasse 2,0147). Freies Deuterium D_2, doppelt so schwer wie $^1H_2$, ergibt die gleichen Reaktionen, jedoch meist mit geringerer Geschwindigkeit.

Schweres Wasser, *Deuteriumoxid,* D_2O, das im natürlichen Wasser im Massenverhältnis 1:5500*) enthalten ist, reichert sich im Rückstand der Elektrolyse wäßriger Lösungen an, ist auf Grund verminderter Lösefähigkeit giftig und wird als Moderator in Kernreaktoren verwendet. Schmelzpunkt +3,8 °C; Siedepunkt 101,4 °C; Dichte 1,105 g · cm⁻³. — *Halbschweres Wasser* ist HDO.

Tritium, *überschwerer Wasserstoff,* Symbol T oder ^3H, ist im Gegensatz zu Deuterium radioaktiv, wird in Kernreaktoren aus ^6Li hergestellt, entsteht auch in der Hochatmosphäre durch die Höhenstrahlung und zerfällt unter β-Strahlung (Halbwertszeit 12 Jahre) zu ^3He; Gesamtmenge auf der Erde: ≈ 2 kg.

3.2. Elemente der I. Hauptgruppe (Alkalimetalle)

3.2.1. Allgemeines

Elemente: Lithium (Li), Natrium (Na), Kalium (K), Rubidium (Rb), Zäsium (Cs) und Franzium (Fr).
Franzium ist radioaktiv (Halbwertszeit 21 min) und kommt in der Natur nur in Spuren vor; im folgenden wird es nicht berücksichtigt.
Eigenschaften der Alkalimetalle: sehr leicht; sehr weich; von allen Metallen am reaktionsfähigsten. Ihr sehr starker Silberglanz verschwindet an der Luft sofort. Wasser wird in stark exothermer Reaktion zersetzt, z. B. $2K + 2H_2O \rightarrow 2KOH + H_2$; der frei werdende Wasserstoff entzündet sich bei Na oft, bei K, Rb und Cs stets. Aufbewahrung unter luftabschirmenden Schutzflüssigkeiten, z. B. Petroleum, Paraffinöl.
Alkalimetall-Ionen: Diese, z. B. Na^+ oder K^+, sind farblos, demzufolge auch die Alkaliverbindungen, sofern kein farbiges Säurerest-Ion (wie MnO_4^-, CrO_4^{2-}, $Cr_2O_7^{2-}$) vorhanden ist.
Alkalihydroxide sind starke Basen und sehr leicht in Wasser löslich. Die Basenstärke nimmt vom LiOH bis zum CsOH zu.
Nachweis: Flammenfärbung, Spektralanalyse.

Tabelle 1. Alkalimetalle

	Lithium	Natrium	Kalium	Rubidium	Zäsium
Symbol	Li	Na	K	Rb	Cs
Kernladungszahl	3	11	19	37	55
Relative Atommasse	6,94	22,90	39,10	85,47	132,90
Schmelzpunkt in °C	179	97,7	63,5	39,0	28,5
Siedepunkt in °C	1372	883	776	713	690
Dichte bei 20 °C in g·cm⁻³	0,534	0,97	0,86	1,532	1,90
Härte	weich	abnehmend →			
Wertigkeit	+1	+1	+1	+1	+1
Reaktionsfähigkeit	zunehmend →				
Basenstärke	zunehmend →				
Flammenfärbung	karminrot	gelb	blauviolett	blauviolett	blauviolett

3.2.2. Lithium und Lithiumverbindungen

Symbol: Li [lithos (grch.) Stein]; *Wertigkeit:* +1.
Vorkommen: in Gesteinen (nicht in Salzlagern!) verbreitet, doch nur in geringer Menge; in einigen Mineralwässern („Lithiumwässer").

*) Bei dieser Angabe wird vereinfacht angenommen, daß alles Deuterium als D_2O vorliegt. In Wirklichkeit verteilt es sich auf D_2O und HDO!

Minerale: *Spodumen* $LiAlSi_2O_6$; *Lepidolith* (Lithionglimmer) K-, OH-, F-haltiges Li—Al-Silikat.
Herstellung: durch Elektrolyse einer LiCl—KCl-Schmelze.
Eigenschaften: leichtestes Metall; unter Petroläther aufzubewahren, da es auf Benzin schwimmt; verbrennt mit karminroter Flamme zu weißem Oxid: $4Li + O_2 \rightarrow 2Li_2O$.
Verwendung: als Legierungszusatz, zur Herstellung metallorganischer Katalysatoren.
Lithiumverbindungen: meist farblos und wasserlöslich (unlöslich: LiF, Li_2CO_3, Li_3PO_4); färben die Flamme intensiv karminrot (Nachweis!).

3.2.3. Natrium und Natriumverbindungen

Allgemeines

Symbol: Na [neter (hebr.) Soda]; *Wertigkeit:* +1.
Vorkommen: nur chemisch gebunden in Mineralen (z. B. in Salzlagern), natürlichem Wasser und in Organismen.
Minerale: *Steinsalz* (Halit) NaCl; *Natronsalpeter* (Chilesalpeter) $NaNO_3$; *Kryolith* (Eisstein) Na_3AlF_6; *Natronfeldspat* (Albit) $NaAlSi_3O_8$.
Nachweis: intensiv gelbe Flammenfärbung, die durch Kobaltglas verschluckt (absorbiert) wird.

Metallisches Natrium

Herstellung: durch Schmelzelektrolyse von Natriumhydroxid.
Eigenschaften: stark silberglänzendes, weiches, mit dem Messer schneidbares Metall, das an der Luft unter Bildung von Natriumhydroxid und -karbonat rasch anläuft. Mit Wasser reagiert es heftig zu Natronlauge und Wasserstoff: $2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$. An der Luft erhitzt, verbrennt es mit gelber Flamme zu Natriumperoxid: $2Na + O_2 \rightarrow Na_2O_2$. Mit Quecksilber entsteht unter Feuererscheinung *Natriumamalgam.*
Verwendung: für Natriumdampflampen; zur Herstellung von Natriumzyanid, -peroxid, Indigo und Tetraäthylblei; als Trockenmittel für Äther und andere halogenfreie organische Flüssigkeiten.

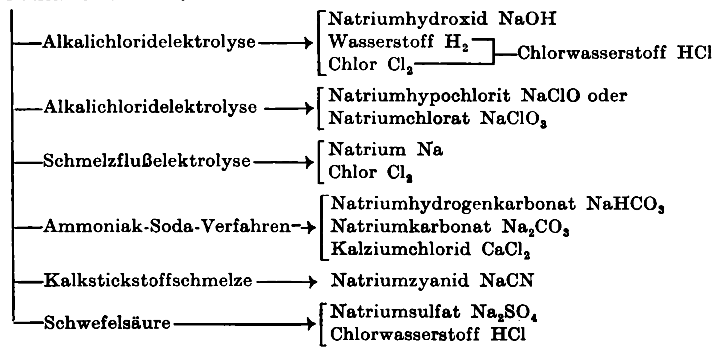
Natriumchlorid (NaCl)

Vorkommen: als Steinsalz (*Halit*) in Salzlagern, -solen, Meerwasser, Salzkohle; in Organismen.
Gewinnung:
- aus Salzlagern durch Sprengung oder Aussolung (Lösen unter Tage, Hochpumpen der Salzsole und Eindampfen),
- aus Salzsole durch Eindampfen in Siedepfannen,
- aus Meerwasser durch Verdunsten oder Ausfrieren („Seesalz").

Eigenschaften: farblose Kristallwürfel, die bei 801 °C schmelzen und in heißem wie in kaltem Wasser nahezu gleich gut löslich sind. Die gesättigte Lösung (bei 20 °C 35,8 g NaCl enthaltend) siedet bei 109 °C. — NaCl ist nicht hygroskopisch, während Kochsalz infolge eines geringen Gehalts an Magnesiumchlorid leicht feucht wird. — Schwere flüchtige Säuren, z. B. Schwefelsäure, reagieren mit NaCl (evtl. beim Erhitzen) unter Bildung von Chlorwasserstoff: $2NaCl + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2HCl$.
Verwendung: Rohstoff für die Herstellung fast aller Natrium- und Chlorverbindungen.

Verwendung von Natriumchlorid

Natriumchlorid NaCl





Natriumhydroxid (NaOH)

Trivialnamen: NaOH = Ätznatron; wäßrige Lösung = Natronlauge.

Technische Herstellung:

- aus Natriumchloridlösung durch Elektrolyse („Alkalichloridelektrolyse"). 2 Verfahren:
  Quecksilberverfahren: An einer fließenden Quecksilberkatode (auf dem schwach geneigten Boden der Elektrolysezelle) wird Na^+ reduziert: $Na^+ + e^- \rightarrow Na$; das entstehende Natrium löst sich im Quecksilber zu Natriumamalgam $NaHg_x$, welches in einem Zersetzer mit Wasser zu sehr reiner (chloridfreier) Natronlauge reagiert (Katalysator: Aktivkohle): $2NaHg_x + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2 + 2xHg$. Das Quecksilber wird in die Elektrolysezelle zurückgeführt. — Anode (Kohle): $2Cl^- - 2e^- \rightarrow Cl_2$.
  Diaphragmaverfahren: Katoden- und Anodenraum sind, um eine Vermischung der Reaktionsprodukte zu verhindern, durch eine poröse Wand (Diaphragma) getrennt. An der Eisen-Katode wird H^+ (aus dem Wasser gemäß $H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$ entstanden) reduziert: $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$. Dadurch bleiben OH^- zusammen mit Na^+ zurück, d. h., es liegt Natronlauge vor.
- aus Natriumkarbonat durch „*Kaustifizierung*". Gemäß $Na_2CO_3 + Ca(OH)_2 \rightarrow 2NaOH + CaCO_3$ entsteht mit Ätzkalk ein Niederschlag von Kalziumkarbonat. Die Lösung enthält Natronlauge.

Eigenschaften: weiße, kristalline, hygroskopische, stark ätzende Masse, die aus der Luft CO_2 bindet und daher verschlossen aufbewahrt werden muß. In Wasser unter Erwärmung sehr leicht löslich; die entstehende Natronlauge reagiert sehr stark alkalisch. Sie muß in Flaschen mit Gummistopfen aufbewahrt werden, da Glasstopfen festbacken und Korkstopfen zerstört werden. — NaOH macht schwächere und flüchtige Basen aus ihren Salzen frei, z. B. $NaOH + NH_4Cl \rightarrow NH_3 + H_2O + NaCl$. Aluminium und Zink werden leicht, Blei und Zinn schwerer, die meisten übrigen Metalle nicht angegriffen.
Verwendung: zur Herstellung vieler Natriumsalze (Nitrat, Sulfit, Phosphate, Natronbleichlauge, Wasserglas, Fluorid, organische Salze); zur Herstellung von Viskoseseide und -zellwolle, Seife, synthetischen Waschmitteln, Farbstoffen, von Aluminiumoxid aus Bauxit, von Phenolen aus Mineralölen; zur Bereitung von Brünierbädern und Metallentfettungsmitteln; als Beizmittel für Aluminium [z. B. vor dem Aloxydieren (Eloxieren)].

Natriumkarbonat (Na_2CO_3)

Trivialnamen: Na_2CO_3 [wasserfreie (kalzinierte) Soda]; $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ [Kristallsoda (Natriumkarbonat-10-Wasser)].

Technische Herstellung:

- aus Natriumchlorid und Kalziumkarbonat nach dem *Ammoniak-Soda-Verfahren* (SOLVAY-Verfahren); seit 1864.
  Durch Einleiten von Ammoniak und Kohlendioxid (durch Brennen von Kalkstein erzeugt) in gesättigte Natriumchloridlösung fällt Natriumhydrogenkarbonat aus:
  $$\underbrace{NH_3 + H_2O + CO_2}_{NH_4HCO_3} + NaCl \rightarrow NaHCO_3\downarrow + NH_4Cl$$
  Durch Erhitzen in Drehrohröfen entsteht daraus Natriumkarbonat:
  $$2NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2$$

Da Kohlendioxid in den Prozeß zurückgeführt und auch Ammoniak gemäß $2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2 + 2NH_3 + 2H_2O$ zurückgewonnen wird, ist der Prozeß sehr wirtschaftlich.

Eigenschaften: wasserfrei weißes Pulver; wasserhaltig farblose Kristalle, die an der Luft „verwittern" (Kristallwasser abgeben). Beide Formen geben mit Wasser eine alkalische Lösung. — Bei Einwirkung fast aller anderen Säuren geht Soda in deren Natriumsalze über, wobei unter Aufbrausen CO_2 entweicht.

Beispiele: $Na_2CO_3 + 2HNO_3 \rightarrow 2NaNO_3 + CO_2 + H_2O$
$Na_2CO_3 + 2CH_3COOH \rightarrow 2CH_3COONa + CO_2 + H_2O$

Verwendung: zur Herstellung von Glas, Seife, synthetischen Waschmitteln, verschiedenen anderen Natriumverbindungen, Email; zur Wasserenthärtung; zur Metallentfettung in Abkochlaugen.

Weitere Natriumverbindungen

Natriumperoxid Na_2O_2: blaßgelbes Pulver; technisch hergestellt durch Verbrennung von Natrium; für Bleichlösungen und für Atmungspatronen (Aufnahme von Kohlendioxid, dafür Abgabe von Sauerstoff: $2Na_2O_2 + 2CO_2 \rightarrow 2Na_2CO_3 + O_2$).

Natriumsulfat Na_2SO_4: kristallwasserhaltig *Glaubersalz*, $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$, hergestellt aus Natriumchlorid + Schwefelsäure, leicht wasserlöslich, dient zur Herstellung von Glas, Natriumsulfid, Ultramarin und ist Bestandteil von Wasch- und Spülmitteln.

Natriumsulfid $Na_2S \cdot 9H_2O$: farblose, wasserlösliche Kristalle; hergestellt durch Glühen von Natriumsulfat mit Kohle: $Na_2SO_4 + 4C \rightarrow Na_2S + 4CO$. *Verwendung:* in der Gerberei; zur Herstellung von und zur Färbung mit Schwefelfarbstoffen.

Natriumsulfit Na_2SO_3; **Natriumhydrogensulfit** $NaHSO_3$; **Natriumdisulfit** $Na_2S_2O_5$: farblose Salze, die aus Natriumhydroxid- oder -karbonatlösung durch Einleiten von Schwefeldioxid entstehen; sie ergeben mit Säuren wieder SO_2. *Verwendung:* als Bleich- und Desinfektionsmittel; als Zusatz zu fotografischen Entwicklern und Fixierbädern.

Natriumthiosulfat, *Fixiernatron,* $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$: farblose Kristalle, deren Lösungen beim Abkühlen zur Übersättigung neigen. Herstellung durch Kochen von Natriumsulfitlösung mit Schwefel: $Na_2SO_3 + S \rightarrow Na_2S_2O_3$. Silberchlorid und andere schwerlösliche Silbersalze werden durch Thiosulfat komplex gelöst; daher Anwendung als wirksamer Bestandteil der fotografischen Fixierbäder. *Weitere Verwendung:* als „Antichlor" nach der Chlorbleiche (Papierindustrie); in der Maßanalyse zur Titration von Jod: $2Na_2S_2O_3 + J_2 \rightarrow Na_2S_4O_6$ (*Natriumtetrathionat*) $+ 2NaJ$.

Natriumnitrat, *Natronsalpeter,* $NaNO_3$: weiße, hygroskopische, in Wasser leicht lösliche Kristalle, die sich bei 380 °C in Nitrit und Sauerstoff zersetzen: $2NaNO_3 \rightarrow 2NaNO_2 + O_2$. Beim Erhitzen mit konz. Schwefelsäure destilliert Salpetersäure über: $2NaNO_3 + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2HNO_3$. Natriumnitrat kommt in großen Mengen im *Chilesalpeter* („Caliche") vor, wird in Europa jedoch aus Salpetersäure und Natriumhydroxid oder -karbonat erzeugt. *Verwendung:* als Düngesalz; als Bestandteil von Explosivstoffen.

Natriumnitrit $NaNO_2$: weiße, giftige Kristalle. Mit Säuren entstehen nitrose Gase. *Verwendung:* für Azofarbstoffe und Brünierbäder ($NaOH + NaNO_2 + NaNO_3$).

Natriumhydrogenkarbonat $NaHCO_3$ (früher: „doppeltkohlensaures Natron"): weißes, nicht hygroskopisches, mäßig wasserlösliches Kristallpulver, das bei 300 °C zu Karbonat und Kohlendioxid zerfällt: $2NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2$. Herstellung s. Natriumkarbonat. *Verwendung:* für Waschmittel, Feuerlöscher, Back- und Limonadenpulver (z. B. im Gemisch mit Wein- oder Zitronensäure); Mittel zur Neutralisation der Magensäure.

3.2.4. Kalium und Kaliumverbindungen

Allgemeines

Symbol: K [al kalja (arab.) Pflanzenasche]; *Wertigkeit:* +1.
Vorkommen: chemisch gebunden in Mineralen, im Meerwasser und in Organismen.
Minerale: *Sylvin* KCl, *Carnallit* $KCl \cdot MgCl_2 \cdot 6H_2O$, *Kainit* $KCl \cdot MgSO_4 \cdot 3H_2O$, *Kalifeldspat* (Orthoklas) $KAlSi_3O_8$.
Nachweis: blauviolette Flammenfärbung (auch durch Kobaltglas sichtbar).

Metallisches Kalium

Herstellung:

— durch Schmelzelektrolyse von Kaliumhydroxid,
— durch Erhitzen von Kaliumfluorid mit Kalziumkarbid: $2KF + CaC_2 \rightarrow 2K + 2C + CaF_2$.

Eigenschaften: reaktionsfähiger als Natrium. Auf Wasser geworfen, entzündet sich der entwickelte Wasserstoff sofort und verbrennt mit violetter Flamme. An der Luft erhitzt, verbrennt Kalium zu orangefarbenem Kaliumhyperoxid KO_2.

Kaliumhydroxid (KOH)

Trivialnamen: KOH = Ätzkali; KOH-Lösung = Kalilauge.
Herstellung: analog NaOH durch Elektrolyse von KCl-Lösung nach dem Quecksilber- oder Diaphragmaverfahren.
Eigenschaften: weiße, kristalline, hygroskopische, stark ätzende Masse, die aus der Luft CO_2 bindet. KOH löst sich sehr leicht in Wasser unter Erwärmung; die entstehende Kalilauge reagiert sehr stark alkalisch.
Verwendung: zur Herstellung anderer Kaliumsalze sowie von Seife (Schmierseife) und Farbstoffen; als Ätzmittel in der Chirurgie; als Elektrolyt in Nickel-Kadmium-Akkumulatoren. Im allgemeinen bevorzugt man die preiswertere Natronlauge.

Kaliumnitrat (KNO_3)

Trivialname: „Salpeter" (Kalisalpeter).
Herstellung:

— aus Kaliumhydroxid oder -karbonat und Salpetersäure,
— durch „Konversion" gemäß $NaNO_3 + KCl \rightarrow NaCl + KNO_3$.

Eigenschaften: farblose, kühlend-bitter schmeckende, nicht hygroskopische Kristalle, die sich in der Hitze leicht, in der Kälte wesentlich weniger in Wasser lösen. Das Salz schmilzt bei 337 °C und zersetzt sich bei weiterem Erhitzen in Nitrit und Sauerstoff: $2KNO_3 \rightarrow 2KNO_2 + O_2$.
Verwendung: für Schwarzpulver (75% Kaliumnitrat + 15% Holzkohle + 10% Schwefel), das heute nur noch zur Sprengung weicher Minerale (Salze, Schiefer) benutzt wird; weiter in der Pyrotechnik und in Düngesalzen.

Kaliumkarbonat (K_2CO_3)

Trivialname: Pottasche (das Salz wurde früher durch Auslaugen von Holzasche und Eindampfen in eisernen „Pötten" gewonnen).
Herstellung: aus Kaliumhydroxid und Kohlendioxid.
Eigenschaften: weißes, hygroskopisches, sehr leicht in Wasser lösliches Pulver; die Lösung reagiert infolge Hydrolyse alkalisch. Mit Säuren entstehen unter Kohlendioxidentwicklung die entsprechenden Kaliumsalze.
Verwendung: zur Herstellung von Kaligläsern, Seifen, Kaliumpolysulfid, fotografischen Entwicklern; als Treibmittel für Backwaren (Lebkuchen).

Weitere Kaliumverbindungen

Kaliumchlorid KCl: farblose, scharf salzig schmeckende, wasserlösliche Kristalle; hergestellt aus Kalirohsalz durch Flotation oder Löse- und Kristallisationsprozesse; Rohstoff für fast alle anderen K-Verbindungen; wesentlicher Bestandteil vieler Kalidüngesalze.

Kaliumbromid KBr: farblose Kristallwürfel; leichter löslich als KCl; Verwendung als verzögerndes und schleierverhütendes Mittel in fotografischen Entwicklern; zur Herstellung von Silberbromid; als Beruhigungsmittel.

Kaliumjodid KJ: farblose, sehr leicht lösliche Kristallwürfel; die Lösung löst Jod mit brauner Farbe zu $KJ \cdot J_2$ („*Jodjodkaliumlösung*"). — *Verwendung* zur Herstellung von Silberjodid; zum Jodieren von Speisesalz; für Pharmazeutika.

Kaliumsulfat K_2SO_4: farblose, leicht lösliche Kristalle; für Düngesalze, Kaliwasserglas und Alaune.

Kaliumpolysulfid K_2S_2 bis K_2S_6: ist in der sog. „Schwefelleber" enthalten, die aus Kaliumkarbonat und Schwefel bei 250 °C entsteht und zum Braun- und Schwarzfärben von Kupfer, Messing und Silber dient, wobei die Metalloberflächen in Sulfide umgewandelt werden.

3.2.5. Rubidium, Zäsium und ihre Verbindungen

Symbole: Rb [rubidus (lat.) dunkelrot]; Cs [caesius (lat.) himmelblau]; benannt nach Spektrallinien; ***Wertigkeit:*** +1.
Vorkommen: Begleiter des Kaliums in Mineralquellen, Salzlagern und Gesteinen, jedoch nur in geringer Menge.
Herstellung: aus den Chloriden durch Erhitzen mit Kalzium im Vakuum oder durch Schmelzelektrolyse.
Eigenschaften: reaktionsfähigste Metalle! An der Luft entsteht sofort eine graue Oxidhaut; selbst bei großen Stücken tritt Selbstentzündung ein. Mit Wasser erfolgt Reaktion unter Aufglühen. Rb und Cs strahlen bei Lichteinwirkung Elektronen aus („fotoelektrischer Effekt").
Verwendung: Rb für wissenschaftliche Zwecke; Cs für Fotozellen und spezielle Infrarotstrahler.
Verbindungen: starke Ähnlichkeit mit K-Verbindungen; geringe Anwendung.

3.3. Elemente der II. Hauptgruppe (Berylliumgruppe)

3.3.1. Allgemeines

Elemente: Beryllium (Be), Magnesium (Mg), Kalzium (Ca), Strontium (Sr), Barium (Ba) und Radium (Ra); letzteres ist radioaktiv. Unter „Erdalkalimetallen" versteht man nur Ca, Sr, Ba und Ra.
Allgemeine Eigenschaften: etwas schwerer, härter, höher schmelzend und weniger reaktionsfähig als die Alkalimetalle. Gegenüber kaltem Wasser sind Be und Mg beständig, während die übrigen vom Ca bis zum Ra mit zunehmender Heftigkeit reagieren; das entsprechende Verhalten zeigt sich gegenüber Luft.

Hydroxide: schwächere Basen als die entsprechenden Hydroxide der I., jedoch stärkere Basen als die der III. Hauptgruppe. Dementsprechend werden sie ebenso wie die Salze mit flüchtigen Säureanhydriden (Karbonate, Sulfite, Sulfate) beim Erhitzen leichter zersetzt als die analogen Alkaliverbindungen.

Löslichkeit von Salzen

leicht löslich: Chloride, Bromide, Jodide, Sulfide, Nitrate, Nitrite, Zyanide, Azetate;
schwer löslich: Fluoride (außer Be), Sulfate (außer Be und Mg), Phosphate, Karbonate, Silikate, Borate.

Tabelle 2. Berylliumgruppe

	Beryllium	Magnesium	Kalzium	Strontium	Barium	Radium
Symbol	Be	Mg	Ca	Sr	Ba	Ra
Kernladungszahl	4	12	20	38	56	58
Relative Atommasse	9,01	24,30	40,08	87,62	137,34	226,02
Schmelzpunkt in °C	1 280	657	850	757	710	700
Siedepunkt in °C	2 967	1 102	1 439	1 364	1 638	1 140
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	1,85	1,74	1,55	2,6	3,75	≈ 5
Härte	abnehmend	⟶				
Wertigkeit	+2	+2	+2	+2	+2	+2
Reaktionsfähigkeit	zunehmend	⟶				
Basenstärke	zunehmend	⟶				
Löslichkeit der Hydroxide	zunehmend	⟶				
Flammenfärbung	—	—	orange	zinnoberrot	hellgrün	karminrot

3.3.2. Beryllium und Berylliumverbindungen

Symbol: Be (nach dem Edelstein „Beryll"); *Wertigkeit:* +2.
Vorkommen: sehr selten; nur gebunden.
Wichtigstes Mineral: *Beryll* ($Be_3Al_2Si_6O_{18}$), farblos. *Smaragd* ist ein durch 0,3% Cr_2O_3 grün, *Aquamarin* ein durch Fe-Verbindungen hellblaugrün gefärbter Beryll.
Eigenschaften: silberweißes, hartes, in nicht extrem reinem Zustand sprödes Metall; löslich in verdünnten Säuren.
Verwendung: als Reflektormaterial für Neutronen in Atomreaktoren; als Legierungsmetall, z. B. mit Kupfer legiert, für funkenfreie Werkzeuge (Berylliumbronze); für Röntgenfenster (Be läßt Röntgenstrahlen besser durch als Al).
Berylliumverbindungen: giftig, oft süß schmeckend. **Berylliumhydroxid** $Be(OH)_2$ ist amphoter. — **Berylliumoxid** BeO dient als hochfeuerfester Werkstoff, z. B. für Verbrennungskammern in Raketen.

3.3.3. Magnesium und Magnesiumverbindungen

Allgemeines

Symbol: Mg (von Magnesia: Stadt in Kleinasien); *Wertigkeit:* +2.
Vorkommen: chemisch gebunden in Mineralen, Meerwasser und Organismen. Auch das Chlorophyll der grünen Pflanzen ist eine Magnesiumverbindung. Im Wasser wirken Mg^{2+} als Härtebildner.
Minerale: Dolomit $CaCO_3 \cdot MgCO_3$, Magnesit $MgCO_3$, Kieserit $MgSO_4 \cdot H_2O$, Carnallit $KCl \cdot MgCl_2 \cdot 6H_2O$, Kainit $KCl \cdot MgSO_4 \cdot 3H_2O$, Bittersalz (Epsomit) $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ sowie die Silikate Talk, Meerschaum, Asbest, Olivin, Serpentin.
Nachweis: keine Flammenfärbung! Nach Abtrennung der Schwermetalle, des Aluminiums und der Erdalkalimetalle entsteht durch Zugabe von $NH_3 + NH_4Cl + Na_2HPO_4$ eine weiße, kristalline Fällung von $Mg(NH_4)PO_4 \cdot 6H_2O$.

Metallisches Magnesium

Herstellung: durch Schmelzelektrolyse von $MgCl_2$ (mit Zusätzen anderer Chloride) bei 740 °C mit Stahlkatoden und Kohleanoden. Katodische Reaktion: $Mg^{2+} + 2e^- \rightarrow Mg$.



Eigenschaften: silberweiß, sehr leicht, weich und dehnbar: durch Legierung widerstandsfähiger. An der Luft Oxidschutzschicht; beim Erhitzen, z. B. bei unsachgemäß erfolgender spanender Bearbeitung, Verbrennung mit sehr hellem, weißem, UV-reichem Licht zum Oxid MgO. Mg-Brände nicht mit Wasser oder feinem Sand, sondern am besten mit Graugußspänen oder Abdecksalzen löschen. In Säuren, auch schwachen, löst sich Mg leicht, dagegen nicht in Alkalilaugen (Gegensatz zu Al!). Mg ist sehr unedel und kann elektrolytisch aus wäßriger Lösung nicht abgeschieden werden.
Verwendung: legiert als Konstruktionsmaterial im Flugzeug- und Fahrzeugbau (leichtestes Gebrauchsmetall!); für Al-Legierungen; rein für Blitzlichtpulver, Leuchtkugeln u. dgl.

Magnesiumverbindungen

Magnesiumoxid MgO, „*Magnesia*": weißes Pulver oder gesinterte weiße Masse; schmilzt bei etwa 2600 °C, hergestellt durch Glühen von Magnesiumkarbonat. *Verwendung* für feuerfeste Steine und Geräte; als mildes Neutralisationsmittel (z. B. für Magensäure); für Magnesiazement.

Magnesiabinder (Sorelzement): entsteht durch Verrühren von MgO mit konzentrierter $MgCl_2$-Lösung; der Brei erstarrt nach wenigen Stunden unter Wasserbindung zu einer festen, marmorharten, weißen Masse aus Magnesiumhydroxidchlorid. *Steinholz* ist Magnesiabinder mit Sägespänen; Verwendung für Fußböden.

Magnesiumsulfat $MgSO_4$: kristallisiert aus warmem Wasser mit 1 H_2O als *Kieserit*, aus kaltem Wasser mit 7 H_2O als *Bittersalz*; beide schmecken bitter und sind leicht wasserlöslich. — Kieserit ist Rohstoff für Mg-Düngesalze; Bittersalz findet medizinische Anwendung.

Magnesiumhydroxid $Mg(OH)_2$: weißes, in Wasser nur sehr wenig lösliches Pulver; fällt als flockiger Niederschlag aus Mg-Salzlösungen durch Natronlauge aus ($MgSO_4 + 2NaOH \rightarrow Mg(OH)_2 + Na_2SO_4$).

Magnesiumkarbonat $MgCO_3$: kommt als Magnesit vor; ergibt beim Erhitzen Magnesiumoxid („magnesia usta").

Magnesiumchlorid $MgCl_2$: kristallisiert aus wäßriger Lösung mit $6H_2O$. Weißes, sehr hygroskopisches Kristallpulver. *Verwendung:* zur Herstellung von Magnesium, Magnesiazement, Kältemischungen. — **Carnallit** $KCl \cdot MgCl_2 \cdot 6H_2O$ wird auch künstlich erzeugt und als Staubbinde-, Auftau- und Badesalz verwendet.
Über **Magnesiumsilikate** (z. B. Talk, Asbest) s. S. 51.

3.3.4. Kalzium und Kalziumverbindungen

Allgemeines

Symbol: Ca [calx (lat.) = Kalkstein; Stein]; *Wertigkeit:* +2.
Vorkommen: in Gesteinen, Böden, Organismen und Gewässern weitverbreitet. Ca^{2+}-Ionen wirken als Härtebildner.

Minerale:

Karbonate: Kalzit (Kalkspat, Kalkstein, Marmor, Kreide) $CaCO_3$; Dolomit $CaCO_3 \cdot MgCO_3$
Sulfate: Anhydrit $CaSO_4$; Gips $CaSO_4 \cdot 2H_2O$
Fluorid: Flußspat (Fluorit) CaF_2
Silikate: Kalkfeldspat (Anorthit) $CaAl_2Si_2O_8$ und viele andere
Phosphate: Apatite: Hydroxylapatit (Phosphorit) $Ca_5(PO_4)_3(OH)$; Apatit $Ca_5(PO_4)_3(F,Cl)$

Nachweis: Flammenfärbung orangerot; Ammoniumoxalat fällt weißes Kalziumoxalat $(COO)_2Ca$.

Metallisches Kalzium

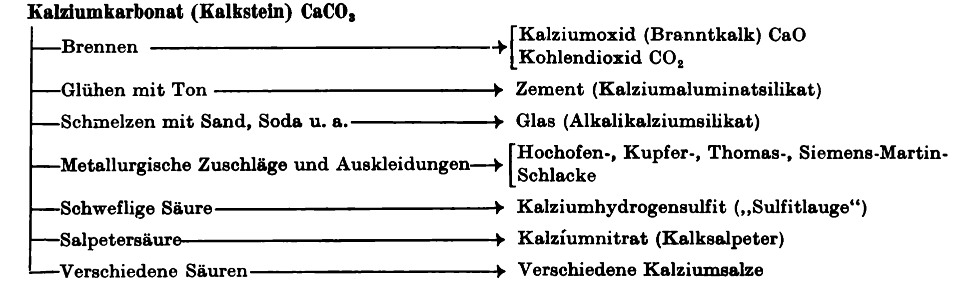
Herstellung: durch Schmelzelektrolyse von Kalziumchlorid mit KCl bei 850 °C an Eisenkatoden.
Eigenschaften: silberweiß, relativ weich, doch zäh, mit dem Messer nicht schneidbar; läuft an der Luft rasch an; verbrennt beim Erhitzen mit hellroter Flamme zu Oxid und Nitrid (Ca_3N_2). Mit Wasser gemäßigtlebhafte Reaktion: $Ca + 2H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + H_2$; das entstehende Kalkwasser trübt sich, sobald es gesättigt ist.
Verwendung: als Legierungsbeimengung, z. B. für Bahnlagermetall (Pb mit 0,73% Ca, 0,55% Na und 0,04% Li); als Absorptionsmittel für Sauerstoff und Stickstoff bei der Edelgasgewinnung.

Kalziumkarbonat ($CaCO_3$)

Vorkommen: sehr rein als *Kalkspat* (z. B. durchsichtiger *isländischer Doppelspat*); weniger rein, meist mit Ton vermengt, als *Kalkstein* (gebirgsbildend; Kalk im Boden); als *Marmor* und *Kreide*. Kalkstein und Kreide sind aus Meeresorganismen entstanden, Marmor ebenfalls durch nachfolgende Umbildung und Kristallisation. *Kalktuff* (*Travertin*) entsteht mit Hilfe von Pflanzenwuchs aus kalkhaltigem Wasser. — *Mergel* = Kalkstein + Ton.

Verwitterung: Durch Wasser und Kohlendioxid (Regen-, Sickerwasser) entsteht allmählich lösliches Kalziumhydrogenkarbonat: $CaCO_3 + H_2O + CO_2 \rightleftharpoons Ca(HCO_3)_2$; daher sind Kalkgebirge zerklüftet und höhlenreich, auch wasserarm, da das Regenwasser ins Innere abfließt. Wenn das kalkhaltige („harte") Wasser an anderen Stellen verdunstet, scheidet sich infolge Störung des chemischen Gleichgewichts wieder Kalkstein ab, z. B. als Tropfstein.
Eigenschaften: farblos oder weiß, sehr schwer löslich; zerfällt bei etwa 900 °C in Kalziumoxid und Kohlendioxid: $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$; reagiert mit Säuren unter CO_2-Entwicklung und Bildung der betreffenden Kalziumsalze.

Verwendung von Kalziumkarbonat



Weitere Verwendung: Doppelspat zur Erzeugung polarisierten Lichts in NICOLschen Prismen; *Kalkstein* und *-tuff* (Travertin) als Baustein, Schotter, Betonzuschlag; *Marmor* für Säulen, Standbilder usw. sowie zur Kohlendioxiderzeugung im Labor; *Schlämmkreide* in der Anstrichtechnik sowie für Glaserkitt (85% $CaCO_3$ + 15% Firnis). *Gefälltes $CaCO_3$* ist in Putzmitteln, Zahnpasten, auch als Füllstoff in Papieren enthalten. Ferner: Dünge- und Futterkalk.

Kalziumoxid (CaO)

Trivialnamen: Branntkalk, Ätzkalk [letzterer Name auch für $Ca(OH)_2$ gebräuchlich!].
Herstellung: durch Glühen von $CaCO_3$ (technisch: Kalkbrennen). Stückiger Kalkstein wird mit Koks unter Luftzufuhr auf 900 ··· 1200 °C erhitzt. Koks verbrennt und erzeugt die erforderliche Wärme.
Eigenschaften: weißes, bei 2500 °C schmelzendes Pulver. Branntkalk: graue bis braune, poröse Stücke. Mit Wasser entsteht unter starker Wärmeentwicklung („*Kalklöschen*") Kalziumhydroxid: $CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$, wobei ein Teil des Wassers verdampft.
Verwendung: siehe Bild 1.

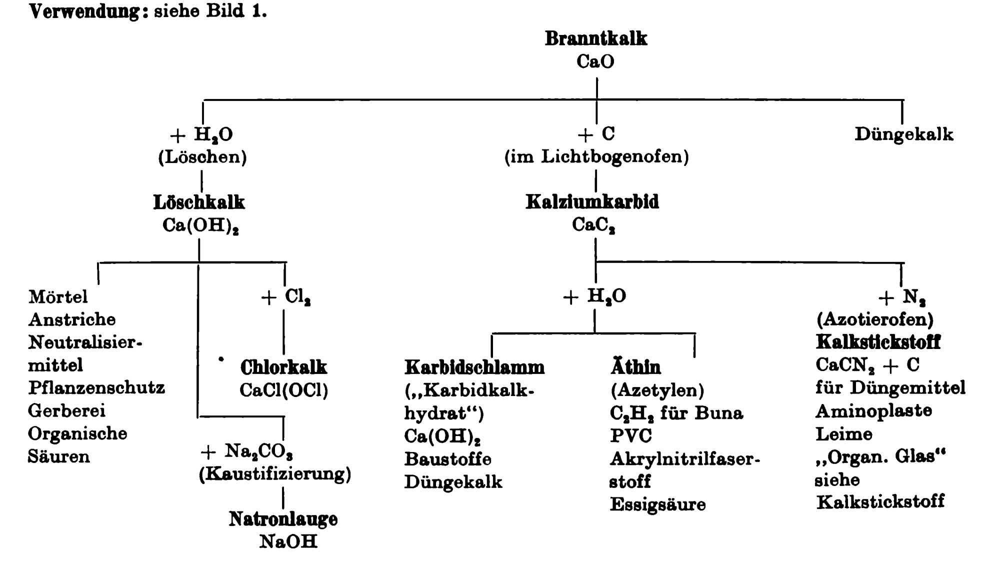


Bild 1. Verwendung von Kalziumoxid (Branntkalk)



Kalziumhydroxid [$Ca(OH)_2$]

Trivialnamen: Löschkalk, Ätzkalk, Kalkhydrat. Kalkbrei ist eine dicke, Kalkmilch eine dünne Aufschlämmung mit Wasser; Kalkwasser ist die klare wäßrige Lösung.

Herstellung: durch Löschen von Branntkalk (s. S. 40).

Eigenschaften: weißes Pulver; in Wasser nur wenig löslich. Kalkwasser reagiert alkalisch und trübt sich an der Luft infolge Ausfällung von Kalziumkarbonat: $Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$. — Beim Einleiten von CO_2 in Kalkwasser löst sich der anfangs ausfallende Niederschlag unter Bildung von Hydrogenkarbonat wieder auf: $CaCO_3 + CO_2 + H_2O \rightleftharpoons Ca(HCO_3)_2$; beim Erwärmen dieser Lösung scheidet sich $CaCO_3$ wieder ab (Umkehrung der Reaktion).

Verwendung: für Kalkmörtel, Chlorkalk, verschiedene Kalziumverbindungen, Pflanzenschutzmittel (Schwefel- und Kupferkalkbrühe); zur Wasserenthärtung; in der Gerberei; zur Neutralisation saurer Abwässer; als Anstrichmittel.

Mörtel: streichbarer, weicher Brei zum Verbinden und Verputzen von Ziegelsteinen und anderen Baumaterialien. Zusammensetzung: Sand + Bindemittel + Wasser. *Luftmörtel* erhärten an der Luft, *Wassermörtel* (hydraulische Mörtel) auch unter Wasser. Erhärten = Abbinden.

Luftmörtel. Als Bindemittel kommen in Frage:

— *Löschkalk:* Kalkmörtel wird aus 10% CaO, 15% H_2O und 75% Sand hergestellt, indem man den Kalkbrei mit 3 Teilen Sand vermengt. Das Abbinden erfolgt chemisch durch Aufnahme von Kohlendioxid aus der Luft: $Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$.

— *Gips:* Gipsmörtel bindet chemisch durch Aufnahme von Wasser ab.

— *Ton:* Lehm ist ein natürlicher Luftmörtel. Das Abbinden erfolgt *physikalisch*; Wasser verdunstet, Sandkörnchen werden durch den Ton verklebt.

Wassermörtel. Bindemittel sind

— *Zement:* Zementmörtel bindet chemisch ab; Aufnahme von Wasser.

— *Hydraulischer Kalk:* (entsteht beim Brennen tonhaltigen Kalksteins unterhalb der Sintergrenze); bindet chemisch vorwiegend durch Wasseraufnahme ab.

— *Mischbinder:* (entstehen durch Vermischen oder Vermahlen hydraulischer Stoffe mit Anregern, z. B. Zement, Braunkohlenflugasche, Gips oder Anhydrit); binden durch Aufnahme von Wasser ab; stehen bezüglich der Festigkeit zwischen hydraulischen Kalken und Zement.

Kalziumsulfat ($CaSO_4$)

Vorkommen: wasserfrei als *Anhydrit*, z. B. unterhalb von Salzlagerstätten; wasserhaltig ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$) als *Gipsstein*, *Alabaster* (schneeweiß, körnig), *Marienglas* (durchsichtig), *Fasergips* (Platten mit Faserung senkrecht zur Plattenebene). Gips ist eines der verbreitetsten Minerale.

Eigenschaften: weißes, in Wasser schwer lösliches Kristallpulver (0,2 g in 100 g Wasser; die Löslichkeit nimmt beim Erhitzen ab!). Aus $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ entsteht beim Erhitzen das „Halbhydrat" (Semihydrat) $CaSO_4 \cdot {}^1/_2 H_2O$ (auch $2CaSO_4 \cdot H_2O$ geschrieben), bei weiterem Erhitzen Anhydrit. Bei Temperaturen über 1000 °C erfolgt Zersetzung in CaO und SO_3.

Gebrannter Gips (*Stuckgips*) wird technisch bei 150 °C hergestellt. Mit Wasser bindet er nach kurzer Zeit in exothermer Reaktion ab: $CaSO_4 \cdot {}^1/_2 H_2O + 1{}^1/_2 H_2O \rightarrow CaSO_4 \cdot 2H_2O$. Bei längerem Erhitzen über 200 °C wird der Gips „totgebrannt"; der entstehende Anhydrit nimmt dann kein Wasser mehr auf.

Verwendung: zur Herstellung von Schwefelsäure und Ammoniumsulfat; als Mörtelbindemittel; gebrannter Gips für Gipsabdrücke, -wände, -verbände usw.

Kalziumkarbid (CaC_2)

Struktur: Kalziumkarbid ist als Kalziumverbindung des Äthins $H-C\equiv C-H$ aufzufassen.

Herstellung: aus Branntkalk und Koks bei 2500 °C im Lichtbogenofen: $CaO + 3C \rightarrow CaC_2 + CO$.

Eigenschaften: technisch graue bis braune Brocken, die 80 ··· 85% CaC_2 enthalten. Mit Wasser entsteht Äthin (Azetylen): $CaC_2 + 2H_2O \rightarrow C_2H_2 + Ca(OH)_2$; dieses riecht infolge Verunreinigung durch PH_3, NH_3 und H_2S unangenehm. Verschlossen aufbewahren, da auch mit dem Wasserdampf der Luft Reaktion erfolgt!

Verwendung: zur Herstellung von Kalkstickstoff, Äthin und deren Folgeprodukten.

Weitere Kalziumverbindungen

Kalziumfluorid CaF_2: weißes, unlösliches Pulver; bildet mit Schwefelsäure Fluorwasserstoff bzw. Flußsäure: $CaF_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + 2HF$. Kommt in der Natur als *Flußspat* (*Fluorit*) vor; große, farblose Kristalle, durch Beimengungen oft gelb, grün, violett. Ausgangssubstanz für die „Fluorchemie"; weitere Verwendung: als Flußmittel in Stahlgießereien und Metallschmelzereien.

Kalziumchlorid $CaCl_2$: sehr hygroskopisch, sehr leicht löslich; dient als Trockenmittel im Labor.

Kalziumnitrat $Ca(NO_3)_2 \cdot 4H_2O$: *Kalksalpeter*, *Mauersalpeter*. Weiß, hygroskopisch; bildet sich z. B. an Kalkwänden in Viehställen.

3.3.5. Wasserhärte

Ursachen: „Härtebildner" sind Ca^{2+}- und Mg^{2+}-Ionen. Je mehr davon natürliches Wasser aus Erdboden und Gesteinen aufgenommen hat (aus Kalkgebirgen, kalk- und gipshaltigen Böden), desto härter ist es. Wasser, das aus Urgesteinen oder anderen wenig verwitterten Silikaten entspringt, ist „weich", ebenso Regenwasser oder das Kondenswasser industrieller Anlagen.

Härtegrade: Zur Angabe von Härtegraden werden der Ca^{2+}- und Mg^{2+}-Gehalt auf CaO umgerechnet. 1° dH (= 1 Grad deutscher Härte) bedeutet einen Gehalt von 10 mg CaO in 1 dm³ Wasser. Dies entspricht 7,19 mg Ca^{2+} bzw. 4,34 mg Mg^{2+}. Man nennt Wasser mit den Härtegraden:

0…4:	sehr weich	12…18:	ziemlich hart
4…8:	weich	18…30:	hart
8…12:	mittelhart	über 30:	sehr hart

Einteilung:

Gesamthärte = temporäre + permanente Härte
= vorübergehende + bleibende Härte
= Karbonat- + Nichtkarbonathärte

— *Temporäre Härte:* verschwindet beim Erhitzen; sie beruht auf dem Gehalt an Kalzium- und Magnesiumhydrogenkarbonat $Ca(HCO_3)_2$ und $Mg(HCO_3)_2$, d. h. also auf dem Anteil Ca^{2+} und Mg^{2+}, der dem Gehalt des Wassers an HCO_3^- entspricht.

— *Permanente Härte:* bleibt beim Erhitzen bestehen; sie beruht auf dem restlichen Gehalt an Ca^{2+} und Mg^{2+}. Als zugehörige Anionen betrachtet man willkürlich die im Wasser vorhandenen Sulfationen SO_4^{2-}, so daß dieser Teil der Härte auf dem Gehalt an $CaSO_4$ und $MgSO_4$ beruht und auch „Sulfathärte" genannt wird.

Auswirkungen:

— *Kesselsteinbildung:*

In Dampfkesseln und Rohrleitungen setzt sich fester, harter Kesselstein ab (vornehmlich Kalziumkarbonat und -sulfat). Da dieser die Wärme schlecht leitet, tritt Überhitzung (Glühen) der Kesselwände ein, welche dadurch rascher korrodieren. Oft löst sich der Stein von den überhitzten Stellen; das Wasser kommt mit der glühenden Kesselwand in Berührung und verdampft explosionsartig. Infolge des starken Druckanstiegs kann der Kessel zerstört werden.

— *Kalkseifenbildung:*

Hartes Wasser erfordert einen erheblichen Mehrverbrauch an Seife, da diese von den Härtebildnern als unlösliche Kalk- bzw. Magnesiumseife ausgefällt und dadurch ihrer Waschwirkung beraubt wird:

$$2\,C_{17}H_{35}COONa + Ca(HCO_3)_2 \rightarrow (C_{17}H_{35}COO)_2Ca\downarrow + 2\,NaHCO_3$$

Die Kalkseife setzt sich auf der Faser ab, adsorbiert den Schmutz, vergilbt und verschmiert die Wäsche und verleiht ihr einen muffigen Geruch. Erst wenn alle Härtebildner ausgefällt worden sind, schäumt das Wasser mit Seife und entfaltet Waschwirkung. Synthetische Waschmittel bilden keine unlöslichen Ca- und Mg-Salze und waschen deshalb auch in hartem Wasser.

Enthärtung (Entfernung der Ca^{2+} und Mg^{2+}):

— durch Erhitzen. Hierbei wird nur die Karbonathärte beseitigt: $Ca(HCO_3)_2 \rightarrow CaCO_3\downarrow + H_2O + CO_2$.

— durch Zusatz niederschlagbildender Chemikalien (Soda, Kalk + Soda, Trinatriumphosphat, Borax), z. B.

$$Ca(HCO_3)_2 + Ca(OH)_2 \rightarrow 2\,CaCO_3\downarrow + 2\,H_2O$$

$$CaSO_4 + Na_2CO_3 \rightarrow CaCO_3\downarrow + Na_2SO_4$$

$$3\,CaSO_4 + 2\,Na_3PO_4 \rightarrow Ca_3(PO_4)_2 + 3\,Na_2SO_4$$

— durch Ionenaustauscher (Natriumwofatit, -permutit). Das Wasser durchläuft ein Gefäß, das mit Ionenaustauscher-Kunstharzen gefüllt ist; dabei werden die Härtebildner gegen Na^+-Ionen ausgetauscht: Na_2-Wofatit + $Ca^{2+} \rightarrow$ Ca-Wofatit + $2\,Na^+$. Von Zeit zu Zeit werden die Austauscher durch konzentrierte Kochsalzlösung regeneriert.

— durch Zusatz von Komplexbildnern oder löslichen Ionenaustausch-Chemikalien (Natriumpolyphosphate, Natriummetaphosphate). Hierbei fällt kein Niederschlag aus, sondern die Härtebildner werden komplex oder nach Art der Ionenaustauscher gebunden. Durch die Komplexbildung werden sie „maskiert", d. h. unwirksam gegenüber Seife.

Vollentsalzung: für Kesselspeisewasser; für Trinkwasser aus Meerwasser;

- durch Destillation,
- durch nacheinander angewandte H^+- und OH^--Ionenaustauscher. H^+-Austauscher ersetzen Metallionen durch H^+; OH^--Austauscher ersetzen Säurerestionen durch OH^-, so daß reines H_2O verbleibt.

3.3.6. Strontium, Barium und ihre Verbindungen

Symbole: Sr (von Strontian: schottischer Ort); Ba [barys (griech.) schwer]. *Wertigkeit:* +2.

Minerale: Strontianit $SrCO_3$, Witherit $BaCO_3$, Zölestin $SrSO_4$, Baryt (Schwerspat) $BaSO_4$

Nachweis: Flammenfärbungen (Sr zinnoberrot, Ba hellgrün); *Fällungsreaktion:* Sulfate und Schwefelsäure fällen auch in Gegenwart von Salzsäure weiße, sehr feinpulvrige Niederschläge von $SrSO_4$ und $BaSO_4$ aus.

Strontium- und Barium-Metall: Die Metalle ähneln dem Kalzium, sind aber reaktionsfähiger. Barium dient als Gettermetall für Elektronenröhren, d. h., es bindet die in den evakuierten Röhren zurückgebliebenen Spuren von Luft zu Oxid und Nitrid, wodurch Hochvakuum erreicht wird.

Strontiumverbindungen: *Strontiumnitrat* $Sr(NO_3)_2$ und *-chlorat* $Sr(ClO_3)_2$ für Rotfeuer; *Strontiumhydroxid* $Sr(OH)_2$ und *-karbonat* $SrCO_3$ zur Entzuckerung von Melasse; *Strontiumsulfid* SrS für Leuchtfarben (blaugrünes Licht).

Bariumhydroxid, „*Ätzbaryt*", $Ba(OH)_2 \cdot 8H_2O$: farblose Kristalle, in Wasser mäßig löslich zu *Barytwasser* (Reagens auf Kohlendioxid).

Bariumperoxid BaO_2: weißes, schwer lösliches Pulver; bildet sich aus Bariumoxid bei 500 °C an der Luft und zerfällt bei stärkerem Erhitzen wieder ($2BaO + O_2 \rightleftharpoons 2BaO_2$). Mit verdünnter Schwefelsäure entsteht Wasserstoffperoxid ($BaO_2 + H_2SO_4 \rightarrow BaSO_4 + H_2O_2$).

Bariumsulfat $BaSO_4$: weißes, sehr schwer lösliches Pulver. Als natürlicher „Schwerspat" Rohstoff für andere Ba-Verbindungen. Gefälltes $BaSO_4$ dient als „blanc fixe" (*Permanentweiß*) für Malerfarben, ist auch im *Lithoponeweiß* ($BaSO_4$ + ZnS) enthalten. *Weitere Verwendung:* Füllstoff für Papier und Kautschuk; Röntgenkontrastmittel (ungiftig, da unlöslich!).

Weitere Bariumverbindungen: *Bariumoxid* BaO wird für Glühkatoden und zur Herstellung von Ferriten verwendet. — *Bariumnitrat* $Ba(NO_3)_2$ und *-chlorat* $Ba(ClO_3)_2$ für Grünfeuer. — *Bariumchlorid* $BaCl_2 \cdot 2H_2O$ dient als Nachweismittel für Sulfate.

3.3.7. Radium

Radium [Symbol Ra; radius (lat.) Strahl] bildet sich über mehrere Zwischenprodukte durch radioaktiven Zerfall von Uran 238 und ist deshalb in geringen Mengen ($1 : 3 \cdot 10^{-7}$) in Uranerzen enthalten. Es zerfällt unter α-Strahlung zunächst in Radon und schließlich in Blei (^{206}Pb). Die frühere Verwendung in der Medizin ist seit Einführung künstlicher radioaktiver Nuklide stark zurückgegangen.

3.4. Elemente der III. Hauptgruppe (Borgruppe)

3.4.1. Allgemeines

Elemente: Bor (B), Aluminium (Al), Gallium (Ga), Indium (In) und Thallium (Tl).
Wertigkeit: hauptsächlich +3; niedere Wertigkeitsstufen werden vom Al bis zum Tl immer beständiger; Tl(I)-Verbindungen sind beständiger als Tl(III)-Verbindungen.
Metallischer Charakter: nimmt vom B bis zum Tl zu. B ist ein typisches Nichtmetall, während elementares Al bereits metallischen Charakter aufweist.
Hydroxide: $B(OH)_3 \triangleq H_3BO_3$ ist eine schwache Säure; die Element(III)-hydroxide von Al, Ga und In sind amphoter; $Tl(OH)_3$ ist eine schwache, Tl(OH) dagegen eine starke Base. Verglichen mit den entsprechenden Verbindungen der II. Hauptgruppe besitzen alle Element(III)-hydroxide schwächer basischen bzw. stärker sauren Charakter.

Löslichkeit

leicht löslich: Chloride, Sulfate, Nitrate der Metalle; Alkaliborate;
schwer löslich: Fluoride, Phosphate, Hydroxide, Oxide der Metalle; alle Borate außer Alkaliboraten.
Die Tl(I)-Verbindungen nehmen bezüglich der Löslichkeit eine Sonderstellung ein.

Tabelle 3. Borgruppe

	Bor	Aluminium	Gallium	Indium	Thallium
Symbol	B	Al	Ga	In	Tl
Kernladungszahl	5	13	31	49	81
Relative Atommasse	10,81	26,98	60,72	114,82	204,37
Schmelzpunkt in °C	≈ 2050	660	29,8	156	303
Dichte in $g \cdot cm^{-3}$	2,34	2,70	5,9	7,31	11,83
Wertigkeit					
beständig	+3	+3	+3	+3	+1 (+3)
unbeständig	—	+1	+1, +2	+1, +2	

3.4.2. Bor und Borverbindungen

Allgemeines

Symbol: B [boron (lat.), buraq (arab.) Salpeter]; *Wertigkeit:* +3; nur chemisch gebunden vorkommend.
Minerale: *Borazit* (Staßfurtit) $MgCl_2 \cdot 5MgO \cdot 7B_2O_3$; *Borax* $Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$; *Kernit* $Na_2B_4O_7 \cdot 4H_2O$.
Nachweis: grüne Flammenfärbung nach Überführung in Borsäure und deren Ester.

Elementares Bor: mehrere Modifikationen. *Amorphes Bor:* braunes, geruchloses, unlösliches Pulver. — *Kristallines Bor:* sehr harte, grauschwarz glänzende Kristalle. — *Verwendung* als Ferrobor (Fe mit 10 bis 20% B) in der Stahlindustrie.

Borsäure, H_3BO_3: weiße, geruchlose, in kaltem Wasser schwer, in heißem leicht lösliche Schuppen. *Herstellung:* aus Borax und Schwefelsäure ($Na_2B_4O_7 + H_2SO_4 + 5H_2O \rightarrow 4H_3BO_3 + Na_2SO_4$). *Verwendung:* als Desinfektionsmittel (Borwasser, Borsalbe); zur Herstellung von Email und wärmewechselbeständigen Gläsern (*Jenaer Glas*); zur Bordüngung. *Nachweis:* Beim Übergießen mit Methanol und Schwefelsäure bildet sich *Trimethylborat* $B(OCH_3)_3$, das mit intensiv grüner Flamme brennt.

Natriumtetraborat, *Borax,* $Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$: ist ein weißes, in kaltem Wasser mäßig, in heißem sehr leicht lösliches Kristallpulver. *Verwendung:* zum Löten (geschmolzener Borax löst Metalloxide!), zur Wasserenthärtung, zur Herstellung von Borsäure, Spezialglas, Glasuren und Email.

Weitere Borverbindungen: *Natriumperborat,* $NaBO_2 \cdot H_2O_2 \cdot 3H_2O$, gibt in „selbsttätigen Waschmitteln" naszierenden Sauerstoff ab und wirkt dadurch bleichend. — *Boroxid,* B_2O_3, ist ein weißes hygroskopisches Pulver. — *Borkarbid,* B_4C, bildet schwarze, diamantharte Kristalle und wird als Schleifmittel verwendet.

3.4.3. Aluminium und Aluminiumverbindungen

Allgemeines

Symbol: Al [alumen (lat.) Alaun]; *Wertigkeit:* +3.
Vorkommen: nur chemisch gebunden, meist in Form von Alumosilikaten.

Minerale:

Silikate: ***Feldspate*** (in Granit, Porphyr, Basalt, Gneis, Schiefer); *Glimmer.* Verwitterungsprodukte dieser Gesteine und Mineralien sind die *Tone.* Reiner Ton = *Kaolin*; unreine Tone: *Mergel, Letten, Lehm.*
Hydroxid: Bauxit, $Al(OH)_3$ bis $AlO(OH)$.
Oxid: Tonerde, Korund, Al_2O_3. Unreiner Korund ist *Schmirgel.* Reines Oxid mit färbenden Beimengungen sind die Edelsteine: ***Rubin*** (mit 0,3% Cr_2O_3); ***Saphir*** (mit 0,2% TiO_2 und wenig FeO).
Fluorid: Kryolith (Eisstein) Na_3AlF_6.

Nachweis:

- Gefälltes $Al(OH)_3$ gibt mit Alizarin-S-Lösung einen roten Farblack.
- Glühen des Hydroxids mit verdünnter Kobaltnitratlösung ergibt blaues Kobaltaluminat (THÉNARDS Blau).

Metallisches Aluminium

Herstellung: technisch seit 1886 nach dem Kryolith-Tonerde-Verfahren (Schmelzelektrolyse). Eine Lösung von Al_2O_3 in geschmolzenem Kryolith (Na_3AlF_6) wird elektrolysiert. Die Temperatur von 950 °C wird durch die Stromwärme aufrechterhalten. — *Katode:* Kohle-Auskleidung des Behälters; Vorgang:

$2\,Al^{3+} + 6e^- \rightarrow 2\,Al$. Al sammelt sich flüssig am Boden an. – *Anoden:* Kohle. Vorgang: $3\,O^{2-} - 6e^- \rightarrow 1^1/_2\,O_2\uparrow$; der Sauerstoff vergast die Anoden langsam zu CO und CO_2. – *Spannung:* etwa 5 V; Stromstärke: 50…80 kA. – Das entstehende 99,9%ige Hüttenaluminium kann in einer Dreischichten-Schmelzelektrolyse zu „Vier-Neuner-Aluminium" (99,99% Al) raffiniert werden.

Physikalische Eigenschaften: silberweißes, stark glänzendes Leichtmetall. Der Glanz läßt an der Luft rasch nach, da sich eine dünne Oxidhaut bildet; bei Glanzeloxierung bleibt er erhalten. Al ist sehr weich und dehnbar, läßt sich zu dünnsten Folien auswalzen (Blattaluminium), leitet den elektrischen Strom sehr gut (63% der Leitfähigkeit des Cu); bei Rotglut schmilzt es.

Chemische Eigenschaften: sehr unedel; läßt sich aus wäßriger Lösung elektrolytisch nicht abscheiden; auch die Reduktion des Oxids mit Kohle gelingt nicht, daher die Herstellung durch Schmelzelektrolyse. Al reagiert heftig mit Salzsäure und Natronlauge, weniger heftig mit Schwefelsäure, während es sich gegenüber Salpetersäure in der Kälte passiv verhält. Die Reaktion mit Natronlauge (amphoterer Charakter!) ergibt Na-Aluminat: $Al + NaOH + 3\,H_2O \rightarrow Na[Al(OH)_4] + 1^1/_2\,H_2$.

Verwendung: legiert als Konstruktionsmaterial, besonders im Fahrzeug- und Flugzeugbau; reinst als Leiter in der Elektrotechnik; Hüttenaluminium für Apparateteile und Gebrauchsgegenstände; Al-Grieß zum Thermitschweißen und zur aluminothermischen Metallgewinnung.

Aluminothermie: Al-Grieß reduziert nach Zündung (Zündgemisch, z. B. $Mg + BaO_2$) viele Metalloxide, z. B. $Cr_2O_3 + 2\,Al \rightarrow 2\,Cr + Al_2O_3$; oder $3\,V_2O_5 + 10\,Al \rightarrow 6\,V + 5\,Al_2O_3$. Hierdurch entstehen sehr reine, insbesondere kohlenstofffreie Metalle (Fe, Cr, Ni, Co, V, Ti, Mn u. a.). Infolge der stark exothermen Reaktion schmelzen die Metalle und sammeln sich unter der Schlacke am Boden des Gefäßes als „Regulus".

Thermit (Thermogen-Schweißgemisch): Fe_3O_4 (oder Fe_2O_3) + Al; das bei der Zündung entstehende flüssige Eisen verschweißt Schienen usw.

Aloxyd-Verfahren (Eloxal-Verfahren → *el*ektrolytische *Ox*ydation des *Al*uminiums): Verfahren zur Erhöhung der Oberflächenhärte sowie der Korrosions- und Verschleißfestigkeit von Al durch anodisches Einbringen der Gegenstände in verdünnte Schwefelsäure (25%). Hierdurch wird die natürliche Oxidschicht des Al von 0,2 auf 20 μm verstärkt. Glanzeloxierung erreicht man durch vorheriges elektrolytisches Polieren (anodisch in 75%iger Phosphorsäure + Chrom(VI)-oxid). Die Schichten können eingefärbt werden.

Aluminiumoxid (Al_2O_3)

Trivialnamen: Tonerde (pulvrig); Korund (grobkristallin).

Herstellung: Da die Gewinnung aus Ton noch nicht wirtschaftlich ist, stellt man Al_2O_3 aus Bauxit her. Beim nassen Aufschluß (BAYER-*Verfahren*) erhitzt man Bauxit 6…8 Stunden mit heißer Natronlauge. Hierbei geht gemäß $Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4]$ Natriumaluminat in Lösung („*Aluminatlauge*"), während *Rotschlamm* (hauptsächlich $Fe(OH)_3$, auch TiO_2) zurückbleibt. Nach Impfen der Aluminatlauge mit kristallinem $Al(OH)_3$ scheidet sich in Umkehrung der Lösungsreaktion das schwerer lösliche Aluminiumhydroxid aus, das schließlich in Drehrohröfen zu „*Tonerde*" zersetzt wird: $2\,Al(OH)_3 \rightarrow Al_2O_3 + 3\,H_2O$.

Beim trockenen Aufschluß glüht man kieselsäurereiche Bauxite mit Natriumkarbonat und Kalziumoxid in Drehrohröfen, laugt das entstandene Aluminat mit Wasser aus und fällt das Hydroxid mit Kohlendioxid.

Eigenschaften: weißes Pulver oder sehr harte, farblose Kristalle; bei 2050 °C schmelzend; nach Glühen in Säuren und Basen unlöslich.

Verwendung: zur Herstellung von Aluminium; als Poliermittel für Metalle („*Poliertonerde*"); als Adsorptionsmittel für die chromatografische Analyse; als Schleifmittel (*Elektrokorund*, seltener natürlicher Korund; unrein als *Schmirgel*).

Künstliche Aluminiumoxid-Edelsteine: Reinstes Al_2O_3-Pulver, vermischt mit farbgebenden Metalloxiden, wird im Knallgasgebläse geschmolzen; die Schmelze tropft auf einen Schamottestift, wo sie kristallin erstarrt (künstliche Rubine, Saphire und andere). Verwendung z. B. für Achslager in Uhren und für Laser.

Weitere Aluminiumverbindungen

Aluminiumhydroxid $Al(OH)_3$: „*Tonerdehydrat*", fällt aus Al-Salzlösungen durch Ammoniak oder Alkalilauge als weißer, schleimiger Niederschlag aus: $AlCl_3 + 3\,NaOH \rightarrow Al(OH)_3 + 3\,NaCl$. Im Überschuß von Natronlauge (nicht Ammoniak) löst es sich zu Natriumaluminat: $Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4]$. Aus Aluminatlösung fällt durch Säure wieder das Hydroxid aus und löst sich im Säureüberschuß zu Aluminiumsalz.

$$\text{Aluminiumsalz} \underset{\text{Säure}}{\overset{\text{Base}}{\rightleftharpoons}} Al(OH)_3 \underset{\text{Säure}}{\overset{\text{Base}}{\rightleftharpoons}} \text{Aluminat}$$

Aluminiumsulfat $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18\,H_2O$: farblos, wasserlöslich, ist das wichtigste Aluminiumsalz. *Verwendung:* als Flockungsmittel zur Wasserreinigung, zum Leimen von Papier (zusammen mit Harzseife), zur Beizen-

färberei). Aus kaliumsulfathaltiger Lösung kristallisiert Kaliumaluminiumsulfat, „*Alaun*", $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$, auch verdoppelt $K_2SO_4 \cdot Al_2(SO_4)_3 \cdot 24H_2O$ geschrieben, als farbloses Doppelsalz; Verwendung wie Aluminiumsulfat; auch als „Rasierstein" zum Blutstillen. Über Alaun s. S. 62.

Aluminiumchlorid $AlCl_3$: ist wasserfrei ein Katalysator für organisch-chemische Synthesen, z. B. nach FRIEDEL-CRAFTS.

Aluminiumazetat $(CH_3COOO)_3Al$ sowie Hydroxidazetat: verwendet man in wäßriger Lösung als „*essigsaure Tonerde*" für entzündungshemmende Umschläge und zum Wasserdichtmachen von Textilien.

Alumosilikate s. S. 51.

3.4.4. Gallium, Indium, Thallium

Gallium (Ga, „Gallien" → Frankreich): sehr selten; wesentlich teurer als Gold. Herstellung aus Bauxiten und aus Mansfelder Kupferschiefer durch Elektrolyse an Hg-Katoden. Silberglänzend; eignet sich wegen seines niedrigen Schmelzpunkts (30 °C) und hohen Siedepunkts (über 2000 °C) zum Füllen von Thermometern; dient auch zum Dotieren von Halbleitern.

Indium (In, von Indigo; benannt nach indigoblauer Spektrallinie): sehr selten; Herstellung aus Zink- und Bleierzen. Silberweiß, stark glänzend, sehr weich (mit dem Messer schneidbar), niedrig schmelzend. Verwendung zum Dotieren von Halbleitern.

Thallium [Tl, thallos (griech.) grüner Zweig; benannt nach grüner Spektrallinie]: Herstellung aus Pyrit oder Mansfelder Kupferschiefer. Bleiähnliches, schweres, weiches Metall, das im Gegensatz zu Ga und In an der Luft rasch anläuft; in HNO_3 und H_2SO_4 leicht löslich; technisch noch ohne Bedeutung. Thalliumverbindungen sind sehr giftig; *Nachweis:* intensiv grüne Flammenfärbung.

3.5. Elemente der IV. Hauptgruppe (Kohlenstoffgruppe)

3.5.1. Allgemeines

Elemente: Kohlenstoff (C), Silizium (Si), Germanium (Ge), Zinn (Sn), Blei (Pb).
Wertigkeit: +4 und +2, seltener −4. Die Beständigkeit der +4wertigen Stufe nimmt vom C zum Pb ab, die der +2wertigen Stufe zu. Pb(II)-Verbindungen sind beständiger als Pb(IV)-Verbindungen.
Metallischer Charakter: nimmt vom C zum Pb zu. C kommt elementar in einer nichtmetallischen (Diamant) und einer halbmetallischen Form (Graphit) vor. Si und Ge sehen metallisch aus, verhalten sich dagegen in ihren Verbindungen überwiegend nichtmetallisch.
Element(IV)-hydroxide: sind bei C und Si zunehmend schwache Säuren [$C(OH)_4$ geht spontan unter H_2O-Abspaltung in H_2CO_3, Kohlensäure, über], bei Ge, Sn und Pb sind es amphotere Stoffe mit überwiegend saurem Charakter; die Hydroxide sind saurer als die entsprechenden Stoffe der III. Hauptgruppe. — Die *Metall(II)-hydroxide,* nur von Ge, Sn und Pb bekannt, sind stärker basisch als die der 4wertigen Metalle, jedoch durchweg noch amphoter.
Wasserstoffverbindungen: Die Beständigkeit nimmt vom C zum Pb ab. Da sich C-Atome praktisch unbegrenzt miteinander verbinden können, existiert eine ebenso unbegrenzte Anzahl von Kohlenwasserstoffen; Siliziumwasserstoffe (Silane) gibt es nur wenige; die Anzahl nimmt zum Pb hin weiter ab. Die Kohlenwasserstoffe sind neutral; vom Si zum Pb nimmt der saure Charakter zu, ist jedoch nur schwach ausgeprägt.

Tabelle 4. Kohlenstoffgruppe

	Kohlenstoff	Silizium	Germanium	Zinn	Blei
Symbol	C	Si	Ge	Sn	Pb
Kernladungszahl	6	14	32	50	82
Relative Atommasse	12,01	28,09	72,59	118,69	207,2
Schmelzpunkt in °C	3850 (subl.)	1414	958	232	327
Dichte in $g \cdot cm^{-3}$	Diamant 3,51 Graphit 2,22	2,33	5,35	7,28	11,34
Wertigkeit	+4	Beständigkeit abnehmend ⟶			

3.5.2. Kohlenstoff und Kohlenstoffverbindungen

Allgemeines

Symbol: C [carboneum; carbo (lat.) Kohle]; *Wertigkeit:* +4, seltener −4; vereinzelt auch Oxydationsstufe 2.
Verbindungsfähigkeit: C-Atome können sich im Gegensatz zu anderen Atomen in praktisch unbegrenztem Maße zu Ketten und Ringen verbinden. Daher existieren weit mehr C-Verbindungen (etwa 5 Millionen) als C-freie Verbindungen (etwa 300000). Die jährliche Zuwachsrate an bekannten C-Verbindungen beträgt gegenwärtig etwa 250000. Die Vielzahl der C-Verbindungen wird in der organischen Chemie behandelt. Lediglich C selbst sowie einige seiner einfachsten Verbindungen (Oxide, Sulfide, Kohlensäure, Karbonate, Karbide und einfache Zyanverbindungen) rechnet man willkürlich zur anorganischen Chemie.
Vorkommen: C ist Bestandteil aller Organismen. In der nichtlebenden Materie kommt C teils frei (Diamant, Graphit), teils gebunden vor (Kohlendioxid, Karbonate, Kohle, Erdöl, Erdgas, Schieferöl, Bitumen). Die in der Luft in Form von CO_2 vorhandene Kohlenstoffmenge ist nur etwa doppelt so groß wie die in der lebenden Materie gebundene.
Karbonat-Minerale: $CaCO_3$: Kalkstein, Kalkspat, Kreide, Marmor; $CaCO_3 \cdot MgCO_3$: Dolomit; $MgCO_3$: Magnesit; $SrCO_3$: Strontianit; $BaCO_3$: Witherit; $ZnCO_3$: Zinkspat; $FeCO_3$: Eisenspat, Spateisenstein; $PbCO_3$: Weißbleierz; $CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$: Malachit; $MnCO_3$: Manganspat, Himbeerspat.

Elementarer Kohlenstoff

Modifikationen: *Diamant* und *Graphit*. Die früher als „*amorpher Kohlenstoff*" bezeichneten Formen *Ruß*, *Retortengraphit*, *Aktivkohle* usw. sind feinkristalline Abarten des Graphits; ihre mechanischen Eigenschaften weichen oft stark von denen des grobkristallinen Graphits ab.
Eigenschaften: C ist in allen Formen geruch- und geschmacklos, löst sich nur in geschmolzenen Metallen und ist bei gewöhnlicher Temperatur sehr reaktionsträge. Der Kohlenstoff verbrennt mit genügend Sauerstoff zu Kohlendioxid CO_2, anderenfalls zu Kohlenmonoxid CO. Mit vielen Metallen und Nichtmetallen entstehen beim Erhitzen Karbide; viele Metalloxide werden in der Hitze zu den Metallen reduziert.

Tabelle 5. Eigenschaften von Diamant und Graphit

Eigenschaft	Diamant	Graphit
Farbe	farblos	grauschwarz
Härte	härtester Stoff	sehr weich
Kristallgitter	regulär	hexagonal
Dichte in $g \cdot cm^{-3}$	3,51	2,22
Elektrische Leitfähigkeit	Nichtleiter	Leiter
Verhalten beim Erhitzen	geht bei 1500 °C in Graphit über	sublimiert oberhalb 3800 °C

Diamant: Edelstein; härtester natürlicher Stoff, nur in seinem eigenen Pulver schleifbar. In reinem Zustand farblos, klar durchsichtig, stark farbstreuend; durch geeigneten Schliff (*Brillanten*) kommt das Farbenspiel zur Geltung. Weniger reine Diamanten sind farbig und trüb. *Technische Verwendung:* für Bohrerspitzen, Glasschneider, Drahtziehösen, Achsenlager für Präzisionsinstrumente. Seit 1955 künstliche Herstellung aus Graphit bei 2000 °C und 5,2 GPa Druck.

Graphit: besteht aus ebenen C-Schichten, die miteinander nur lose verbunden und daher gegeneinander verschiebbar sind (Schichtengitter); ist daher sehr weich, in Blättchen spaltbar, abfärbend; kann aus Kohle auch künstlich gewonnen werden. *Verwendung:* für Schreibstiftminen (mit Ton gepreßt), Graphittiegel (mit Ton gebrannt), Schmiermittel, Rostschutzanstrich; als Moderator in Atomreaktoren.

Ruß: feinste Graphitkriställchen; entsteht bei der unvollständigen Verbrennung von Kohlenstoffverbindungen; wird technisch aus Äthin oder Naphthalin hergestellt. *Verwendung:* wertverbessernder Füllstoff für Gummi (erhöht die Abriebfestigkeit in Autoreifen; etwa 1/3 der Reifenmasse besteht aus Ruß!), für Druckerschwärze, Schuhcreme, Tusche usw.

Aktivkohle: aus organischem Material (Holz, Knochen, Zucker, Blut, Nußschalen) durch Tränken mit Zinkchlorid- oder Kaliumkarbonatlösung und nachfolgendes Erhitzen unter Luftabschluß hergestellte äußerst poren- und deshalb oberflächenreiche Kohle (je Gramm bis 800 m^2 Oberfläche!). Infolge der großen Oberfläche adsorbiert sie viele Gase und gelöste Stoffe. *Verwendung:* zur Reinigung, Isolierung und Wieder-

gewinnung von Gasen und Dämpfen, z. B. von Benzol aus Leuchtgas, von Kohlendisulfid in der Chemiefaserstoffindustrie, von Lösungsmitteln in der Lackindustrie, ferner für Schutzmasken; zur Entfärbung von Zuckerdicksaft; als medizinische Kohle gegen Magen- und Darmstörungen.

Kohlenmonoxid (Kohlenoxid, CO)

Herstellung:

- durch Verbrennung von Kohlenstoff und -verbindungen (z. B. Koks, Kohle, Benzin) oberhalb 1000 °C oder bei Sauerstoffmangel; $2C + O_2 \rightarrow 2CO$; Kohlenmonoxid kommt deshalb in Auspuffgasen von Kraftfahrzeugen und im „Kohlendunst" schlecht ziehender Öfen vor (Vergiftungsgefahr!)
- durch Reduktion von Kohlendioxid mit glühendem Koks (BOUDOUARD-Gleichgewicht, z. B. im Hochofen): $CO_2 + C \rightleftharpoons 2CO$;
- durch Reduktion von Wasserdampf mit glühendem Koks (im Wassergasprozeß): $C + H_2O \rightleftharpoons CO + H_2$.

Eigenschaften: farb- und geruchloses Gas; in Wasser nur wenig löslich; mit blauer Flamme brennbar; fast ebenso schwer wie Luft; Siedepunkt −192 °C; sehr giftig, durch Aktivkohle nicht adsorbierbar. Sehr reaktionsträge, vereinigt sich jedoch katalytisch mit Wasserstoff zu Kohlenwasserstoffen (FISCHER-TROPSCH-Synthese) oder Alkoholen (Methanolsynthese). Mit feinverteilten Metallen entstehen flüchtige, giftige, brennbare *Karbonyle*, z. B. $Ni(CO)_4$, $Co_2(CO)_8$, $Fe(CO)_5$.

Technische kohlenmonoxidhaltige Gase:

- *Luftgas, Generatorgas:* $CO + 2N_2$; genauer: etwa 70% N_2, 25% CO, 4% CO_2, Rest H_2, CH_4, O_2; entsteht in exothermer Reaktion durch Vergasung von Kohle oder Koks mit Luft in Generatoren: $2C + O_2 + 4N_2 \rightarrow 2CO + 4N_2$. Verwendung als Heizgas und zur Ammoniaksynthese.
- *Wassergas:* $CO + H_2$; genauer: etwa 50% H_2, 40% CO, 5% CO_2, ca. 5% N_2, etwas CH_4; entsteht in endothermer Reaktion durch Vergasung von weißglühender Kohle oder von Koks mit Wasserdampf: $C + H_2O \rightarrow CO + H_2$. Verwendung als Heizgas (Heizwert zwischen dem von Luftgas und Leuchtgas); zur Herstellung von Wasserstoff; zur Synthese von Benzin, Paraffin und Methanol.
- *Mischgas:* CO, H_2, N_2; entsteht durch Vergasung von Kohlepulver mit Wasserdampf und sauerstoffangereicherter Luft, z. B. in WINKLER-Generatoren. *Verwendung:* zur Ammoniaksynthese.
- *Kokerei- und Leuchtgas:* H_2, CH_4, CO u. a.; entsteht durch Entgasung (Verkokung) von Kohle. Durch Druckvergasung (2,2 MPa) von Braunkohle mit Wasserdampf und Sauerstoff bildet sich ein ähnliches, jedoch methanärmeres *Druckgas*. *Verwendung:* zu Heiz- und Beleuchtungszwecken.

Bei *Luft-, Wasser- und Mischgas* werden anstatt Kohle bzw. Koks auch Erdöldestillate eingesetzt.

Kohlendioxid (CO_2)

Vorkommen: Luft (0,03 Vol.-%); natürliches Wasser, besonders gewisse Mineralwässer (Sprudel, Säuerlinge); Vulkangase; technische Verbrennungsgase.

Herstellung:

- durch vollständige Verbrennung von Koks: $C + O_2 \rightarrow CO_2$
- als Nebenprodukt beim Kalkbrennen: $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$
- als Nebenprodukt bei der alkoholischen Gärung: $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$
- aus Karbonaten und Säuren, z. B. aus Marmor: $CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$.

Physikalische Eigenschaften: farbloses Gas von schwach säuerlichem Geruch und Geschmack; 1,5mal so schwer wie Luft, nicht brennbar (erstickt eine eingeführte Flamme); in kaltem Wasser reichlich löslich, besonders unter Druck.

Flüssiges und festes Kohlendioxid: Bei 20 °C läßt sich CO_2 durch einen Druck von 5 MPa verflüssigen; in dieser Form kommt es in grauen Stahlflaschen in den Handel. Bei CO_2-Entnahme verdampft eine entsprechende Menge Flüssigkeit, und der Druck bleibt so lange konstant, wie noch flüssiges CO_2 vorhanden ist. Daher kann der Verbrauch nicht am Manometer abgelesen, sondern muß durch Wägung ermittelt werden.

Läßt man flüssiges CO_2 ausströmen, z. B. aus einer geneigten Stahlflasche, tritt infolge der sofortigen Verdampfung so starke Abkühlung ein, daß ein Teil zu einer schneeartigen Masse erstarrt. Dieser „*Kohlendioxidschnee*" kommt gepreßt als „*Trockeneis*" in den Handel; er schmilzt nicht, sondern sublimiert bei −78 °C. Durch Mischen mit Azeton erreicht man Kältegrade von −90 °C.

Chemische Eigenschaften: mit Wasser entsteht Kohlensäure; mit Basen bilden sich Karbonate und Hydrogenkarbonate (Abbinden von Kalkmörtel!).

Nachweis: durch Trübung von Baryt- oder Kalkwasser (Tropfen am Glasstab oder Hindurchleiten des Gases): $Ba(OH)_2 + CO_2 \rightarrow BaCO_3\downarrow + H_2O$.

Verwendung: in Feuerlöschern; als Schutzgas zur Lagerung feuergefährlicher Stoffe sowie zum „CO_2-Schweißen"; in Gießereien zum Härten wasserglashaltigen Formsands; für Getränke; zum Bierausschank; Trockeneis zum Kühlhalten von Lebensmitteln.



Kohlensäure (H_2CO_3)

Kohlensäure ist nur in wäßriger Lösung beständig; hier steht sie sowohl im Gleichgewicht mit ihrem Anhydrid CO_2 als auch mit ihren elektrolytischen Dissoziationsprodukten: $CO_2 + H_2O \rightleftharpoons H_2CO_3 \rightleftharpoons H^+ + HCO_3^- \rightleftharpoons 2H^+ + CO_3^{2-}$. Da das Gleichgewicht fast völlig auf seiten von $CO_2 + H_2O$ liegt (nur 1% CO_2 ist an H_2O gebunden), sind nur wenige H^+-Ionen vorhanden, und Kohlensäure wirkt als schwache Säure. Da sie in Form ihres Anhydrids zudem leicht flüchtig ist, wird sie durch fast alle anderen Säuren aus ihren Salzen in Freiheit gesetzt.

Karbonate

Allgemeines: Karbonate sind Salze (und Ester) der Kohlensäure; bei den Hydrogenkarbonaten (früher „Bikarbonate" genannt) ist nur 1 H-Atom der Säure durch Metall ersetzt.
Wichtige Karbonate: sind neben den auf S. 35 angeführten Karbonatmineralen Na_2CO_3 Soda*); $NaHCO_3$ „Natron", K_2CO_3 Pottasche; NH_4HCO_3 Hirschhornsalz; $2PbCO_3 \cdot Pb(OH)_2$ Bleiweiß.
Verhalten beim Erhitzen: Zerfall in Metalloxid + Kohlendioxid, z. B. $CuCO_3 \rightarrow CuO + CO_2$. Je stärker die Base, desto beständiger ist das Karbonat beim Erhitzen. $Al_2(CO_3)_3$ zerfällt bereits bei gewöhnlicher Temperatur.
Verhalten gegenüber Säuren: Da Kohlensäure in Form ihres Anhydrids leicht flüchtig ist, werden Karbonate durch nahezu alle Säuren unter Kohlendioxidentwicklung zersetzt, z. B. $Na_2CO_3 + 2HCl \rightarrow 2NaCl + H_2O + CO_2$.
Nachweis: Das durch Säuren unter Aufbrausen entstehende CO_2 wird mit Barytwasser nachgewiesen.

Karbide

Karbide sind Verbindungen zwischen Kohlenstoff und einem metallischeren Element. Manche Karbide ergeben mit Wasser oder Säuren Kohlenwasserstoffe: *Kalziumkarbid* CaC_2 ergibt Äthin (Azetylen); *Aluminiumkarbid* Al_4C_3 ergibt Methan. Andere Karbide explodieren beim Erhitzen, z. B. *Silber-* und *Kupfer(I)-karbid*, Ag_2C_2 bzw. Cu_2C_2; hierbei zerfallen sie in die Elemente.
Durch besondere Härte zeichnen sich aus: *Borkarbid* B_4C, *Siliziumkarbid* SiC und *Wolframkarbid* W_2C. — Im Stahl tritt auf: *Eisenkarbid, Zementit*, Fe_3C.

Kohlendisulfid (Schwefelkohlenstoff, CS_2)

Herstellung: aus Schwefeldampf und Braunkohlenschwelkoks: $C + 2S \rightarrow CS_2$.
Physikalische Eigenschaften: farblose, giftige, stark farbstreuende, nach Rettich riechende Flüssigkeit; in Wasser unlöslich (sinkt unter); siedet bei 46 °C; verdunstet bereits bei gewöhnlicher Temperatur sehr stark; ist ein gutes Lösungsmittel für Phosphor, Schwefel, Jod, Fette, Harze und Kautschuk.
Chemische Eigenschaften: sehr feuergefährlich; bei der Verbrennung (blaue Flamme) entstehen Schwefel- und Kohlendioxid: $CS_2 + 3O_2 \rightarrow CO_2 + 2SO_2$.
Verwendung: zur Herstellung von Zellwolle, Viskoseseide, Flotationshilfsmitteln (Xanthogenate), Tetrachlormethan; zur Bodendesinfektion.

Zyan und Zyanverbindungen

Zyan, *Dizyan* $(CN)_2$: Struktur $N{\equiv}C{-}C{\equiv}N$. Farbloses, giftiges Gas; entsteht durch Erhitzen von Quecksilber(II)-zyanid $Hg(CN)_2$. Es verbrennt mit rotvioletter, sehr heißer Flamme.

Zyanwasserstoff, *Blausäure*, HCN: farblose, bereits bei 26 °C siedende, leicht wasserlösliche, äußerst giftige Flüssigkeit von charakteristischem Geruch. Blausäure bildet sich aus Zyaniden durch Säuren, ist Zwischenprodukt bei der Herstellung von „organischem Glas" und dient als Schädlingsbekämpfungsmittel.

Zyanide: Salze der Blausäure, z. B. *Natriumzyanid* NaCN oder *Kaliumzyanid* KCN, beide leicht lösliche, sehr giftige Salze (tödliche Dosis: 150 mg), die bereits durch Luftkohlensäure zersetzt werden und deshalb nach Blausäure riechen: $2KCN + H_2O + CO_2 \rightarrow K_2CO_3 + 2HCN$. *Verwendung:* für galvanische Elektrolyte; zur Zyanidlaugerei (Gold- und Silbergewinnung); zur Erzeugung von Blausäure, Blutlaugensalzen, Berliner Blau und anderen Zyaniden.

Komplexe Zyanide sind z. B. *Kaliumhexazyanoferrat(II)* (*Gelbes Blutlaugensalz*) $K_4[Fe(CN)_6]$, *Kaliumhexazyanoferrat(III)* (*Rotes Blutlaugensalz*) $K_3[Fe(CN)_6]$ und *Berliner Blau* $Fe_4[Fe(CN)_6]_3$.

Rhodan und -verbindungen: Freies *Rhodan* $(SCN)_2$, farblose Kristalle, ist ein sehr unbeständiges Pseudohalogen. *Rhodanide* (*Thiozyanate*) sind die Salze der *Rhodanwasserstoffsäure* (*Thiozyansäure*) HSCN; sie entstehen durch Kochen von Zyanidlösungen mit Schwefel; $KCN + S \rightarrow KSCN$. *Kaliumrhodanid* KSCN, farblos, ist ein Reagens auf Fe^{3+}-Ionen (ergibt blutrote Färbung von *Eisen(III)-rhodanid*, $Fe(SCN)_3$).

---

*) „Soda" bedeutet in Getränken Kohlendioxid.

Weitere Zyanverbindungen: *Zyansäure* HOCN; Salze: *Zyanate.* — *Knallsäure* HONC; Salze: *Fulminate,* z. B. *Knallquecksilber = Quecksilberfulminat* $Hg(ONC)_2$. — *Zyanamid* $N{\equiv}C{-}NH_2$ und *Dizyandiamid* („Didi") $H_2N{-}C({=}NH){-}NH{-}CN$ werden für Aminoplaste verwendet. — *Kalkstickstoff* $Ca{=}N{-}C{\equiv}N$.

3.5.3. Silizium und Siliziumverbindungen

Allgemeines

Symbol: Si [silex (lat.) Kieselstein]; *Wertigkeit:* +4, (−4).
Vorkommen: chemisch gebunden in den meisten Gesteinen und deren Verwitterungsprodukten, und zwar als Oxid und in Form von Silikaten; beide machen zusammen fast 90% der Erdkruste aus.

Elementares Silizium

Herstellung: aus Quarz und Koks (oder Kalziumkarbid) im elektrischen Ofen: in kleinen Mengen auch aluminothermisch. Sehr reine Siliziumkristalle werden nach dem Zonenschmelzverfahren erzeugt.
Eigenschaften: dunkelgraue, schwach metallisch glänzende, harte, spröde Kristalle; Halbleiter; in Säuren unlöslich (nur feinverteiltes, sog. „amorphes" Si löst sich in Flußsäure); mit warmen Alkalilaugen entstehen unter Wasserstoffentwicklung Silikate: $Si + 2NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + 2H_2$.
Verwendung: zur Herstellung von Silikonen; extrem rein als Halbleiter für Transistoren und Sonnenbatterien; mit Eisen legiert als „Ferrosilizium" für Siliziumstähle.

Siliziumdioxid (SiO_2)

Vorkommen:

- kristallin als *Quarz,* der den Hauptbestandteil des Granits, der Gneise, des Seesands und Sandsteins bildet;
- gutausgebildete Quarzkristalle, häufig mit färbenden Beimengungen, sind: *Bergkristall* (farblos), *Rauchquarz = Rauchtopas* (grau bis braun), *Rosenquarz* (rosa), *Amethyst* (violett), *Zitrin* (gelb);
- erdig als *Kieselgur* (Infusorien-, Diatomeenerde aus den Panzern von Kieselalgen);
- schwach wasserhaltig als *Opal, Chalzedon* (*Achat, Karneol, Jaspis*) und *Feuerstein.*

Eigenschaften: weißes Pulver oder farblose Kristalle; schmilzt bei 1750 °C; die Schmelze erstarrt zu einem amorphen Glas (*Quarzglas*). Als einzige Säure greift Flußsäure an (Bildung von SiF_4 und $H_2[SiF_6]$); in geschmolzenen Alkalihydroxiden und -karbonaten löst es sich leicht zu Silikaten.
Verwendung: *Quarzsand* für Quarzglas (durchsichtig) und Quarzgut (durchscheinend), Glas, Wasserglas, Porzellan, Mörtel; als Formsand in Gießereien; zur Herstellung von Silizium. — *Bergkristall* als Schmuckstein und für optische Instrumente; *Kieselgur* infolge ihres Saugvermögens als Verpackungsmaterial für Säureflaschen, als schall- und wärmeisolierendes Material. *Quarz*kristalle auch für Quarzuhren sowie als Schwingquarz zur Erzeugung von Ultraschall.

Quarzglas: temperatur-, temperaturwechsel- und chemikalienbeständiger als gewöhnliches Glas; ist im Gegensatz zu diesem auch durchlässig für Ultraviolettstrahlung, Verwendung für chemische Geräte und UV-Lampen (Höhensonnen, Elektronenblitzgeräte).

Kieselsäure

Herstellung:

- aus Alkalisilikatlösungen (z. B. Wasserglaslösung) durch stärkere Säuren;
- aus Siliziumtetrachlorid durch Wasser: $SiCl_4 + 4H_2O \rightarrow H_4SiO_4 + 4HCl$.

Formeln und Eigenschaften: *Orthokieselsäure* $H_4SiO_4 = Si(OH)_4 = SiO_2 \cdot 2H_2O$ ist nicht beständig; ihre Moleküle treten spontan unter Wasserabspaltung und Bildung von $-\overset{|}{\underset{|}{Si}}-O-\overset{|}{\underset{|}{Si}}-O-$-Ketten zu höhermolekularen, schließlich kolloiden Aggregaten zusammen; es entstehen Molekülnetzwerke, die viel Wasser sorbieren und einschließen. Ein Gemisch aus verdünnter Wasserglaslösung und Salzsäure wird dabei immer dickflüssiger („viskoser") und erstarrt schließlich zu einer farblosen Gallerte („*Kieselgel*") der allgemeinen Formel $SiO_2 \cdot nH_2O$. Beim Stehen an der Luft entstehen unter weiterer Wasserabgabe (n wird stetig kleiner) trübe, weiße, äußerst poröse Massen („*Silikagel*"), die wie Aktivkohle als Adsorptionsmittel Verwendung finden.
Salze: Die Salze leiten sich formal von Kieselsäuren der allgemeinen Formel $m SiO_2 \cdot n H_2O$ (m und n ganzzahlig) ab, z. B. von:

$SiO_2 \cdot 2H_2O$ (H_4SiO_4) → **Orthokieselsäure:** *Orthosilikate*
$SiO_2 \cdot H_2O$ (H_2SiO_3) → **Metakieselsäure:** *Metasilikate*
$2SiO_2 \cdot 3H_2O$ ($H_6Si_2O_7$) → **Ortho-dikieselsäure:** *Ortho-disilikate.*

Natürliche Silikate

Vorkommen: Silikate, hauptsächlich von K, Na, Ca, Mg, Al und Fe, bilden die Hauptmasse der Gesteine und ihrer festen Verwitterungsprodukte.

Beispiele für Silikatgesteine:

Granit = Feldspat + Quarz + Glimmer (Hauptbestandteile!).
Gneis = Feldspat + Quarz + Glimmer mit meist streifigem, schiefrigem Gefüge (durch Belastungsdruck umgewandelter Granit).

Wichtige Silikatminerale: (die Bruttoformeln werden meist zu den übersichtlicheren „Oxidformeln" auseinandergezogen)

— *Feldspat* (Kalifeldspat = *Orthoklas*): $KAlSi_3O_8$ oder $K_2Al_2Si_6O_{16}$ ($K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 6SiO_2$); außerdem gibt es Natron- (*Albit*) und Kalkfeldspäte (*Anorthit*), auch Kalknatronfeldspat (*Plagioklas*). Die Feldspäte machen massenmäßig 60% aller Minerale der Erdkruste aus.
— *Tone:* entstehen bei der Verwitterung des Feldspats; hierbei wird Wasser aufgenommen, während lösliche Kaliumverbindungen abgegeben werden. Die Tone werden häufig weggeschwemmt und als Sedimente wieder abgelagert. — *Lehm* ist sand- und eisen(III)-oxidhaltiger Ton; *Mergel* ist kalkhaltiger Ton. — Besonders reiner Ton heißt *Kaolin* („Porzellantonerde").
— *Glimmer:* farblos bis schwarz, durchsichtig, leicht in Blättchen spaltbar, kann als Hauptbestandteil *Muskovit* $KAl_2(OH)_2AlSi_3O_{10}$ oder *Biotit* $K(Mg,Fe)_3(OH)_2AlSi_3O_{10}$ enthalten; Verwendung als Elektroisoliermaterial.
— *Talk* (*Talkum, Speckstein*): $3MgO \cdot 4SiO_2 \cdot H_2O$ ist sehr weich und fühlt sich fettig an. *Verwendung* als Puder in der Gummiindustrie und Körperpflege, als Papierfüllstoff und als Trägerstoff für Schädlingsbekämpfungsmittel.
— *Asbest:* meist $3MgO \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$, besitzt fasrige Struktur; *Verwendung* als wärme- und chemikalienbeständiger Faserstoff, z. B. für Feuerschutzanzüge, Asbestdrahtnetze, technische Diaphragmen u. a.
— *Weitere Silikate* sind z. B. Olivin, Meerschaum, Topas, Granat, Beryll, Smaragd, Zirkon, Serpentin, Permutit.

Künstliche Silikate

Übersicht:

Wasserglas: Alkalisilikat (meist Na-Silikat), *Glas und Email:* Alkali-kalzium-silikat (oft mit weiteren Bestandteilen), *keramische Massen:* Aluminiumsilikat mit Zusätzen, *Zement und Beton:* Kalzium-aluminat-silikat, *Ultramarin:* schwefelhaltiges Natrium-aluminat-silikat.

Wasserglas: Gemisch verschiedener Natrium- oder Kaliumsilikate („Natron-" bzw. „Kaliwasserglas"). Graue, glasartige Stücke, die beim Erhitzen mit Wasser unter Druck zähflüssige Lösungen ergeben. — *Verwendung von Wasserglaslösung:* Flammschutzmittel für Holz und Gewebe; Klebstoff für Porzellan, Glas und andere Silikate; Kernbindemittel in Metallgießereien; Zusatz zu Anstrichfarben und Waschmitteln.

Glas: aus dem Schmelzfluß amorph erstarrtes Gemisch verschiedener Silikate, hauptsächlich Alkalikalzium-silikate.
Chemische Eigenschaften: sehr widerstandsfähig, wird nur von Flußsäure und Alkalihydroxidschmelzen rasch angegriffen. Zum Glasätzen dienen Flußsäure, Fluorwasserstoff und Hydrogenfluoride.
Herstellung: durch Zusammenschmelzen der Rohstoffe, im einfachsten Fall Quarzsand, Kalk ($CaCO_3$) und Soda, in Glashäfen oder Wannenöfen; Beheizung mit Generatorgas. Die Reaktionen sind vom Typ $Na_2CO_3 + SiO_2 \rightarrow Na_2SiO_3 + CO_2$; es findet Gasentwicklung statt.
Formung: durch Blasen, Gießen, Walzen, Ziehen (z. B. für Glasseide), Pressen, Verdüsen (für Glasfaser). Wichtig ist i. allg. gleichmäßige, langsame Abkühlung zur Vermeidung innerer Spannungen.

Wichtige Glasarten:

— *Natron-Kalk-Glas:* aus Quarzsand, Kalk und Soda (oder statt Soda auch Natriumsulfat + Kohle). Billiges, leicht schmelzbares „*Normalglas*", z. B. für Fenster.
— *Kali-Kalk-Glas:* aus Quarzsand, Kalk und Pottasche. Schwerer schmelzbar; „*böhmisches Kristallglas*", „*Kronglas*" für optische Zwecke.
— *Kali-Blei-Glas:* aus Quarzsand, Mennige und Pottasche. Schwer schmelzbar, stark farbstreuend. Optisches Glas; als „*Bleikristall*" (jedoch amorph!) Schmuckglas; als „*Straß*" (gefärbt) Edelsteinimitation.
— *Borat-Aluminat-Glas:* ein Teil des SiO_2 ist durch B_2O_3 und Al_2O_3 (in die Schmelze eingeführt als Borsäure oder Borax bzw. Kaolin oder Feldspat) ersetzt, z. B. *Jenaer Glas* für Chemie und Haushalt; sehr temperaturwechselbeständig.

Email („Emaille“): auf Metalle aufgeschmolzenes, meist getrübtes, oft farbiges, leicht schmelzbares Glas; meist auf Eisen als Korrosionsschutz, seltener auf Edelmetallen, Kupfer oder Tombak als Schmuckemail (auch für Plaketten und Abzeichen).

Keramische Massen [keramos (grch.) Ton]: durch Brennen (Erhitzen) von geformtem, feuchtem Ton, evtl. mit Zuschlägen von Quarzsand und Feldspat, bis zum Sintern (nicht Schmelzen) erzeugte Materialien, die in der Hauptsache aus Aluminiumsilikat (*Mullit* $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$) bestehen. Je nach Grad der Sinterung unterscheidet man:

Irdengut (Tongut): Brenntemperatur niedrig (900 ··· 1200 °C); Scherben porös (klebt an der Zunge), wasserdurchlässig (durch Glasur wasserdicht), nicht durchscheinend, durch Stahl leicht ritzbar. — *Ziegelware:* Mauer-, Dachziegel, Dränrohre. Die rote Farbe mancher Ziegel beruht auf Fe_2O_3. Stärker, bis zur Sinterung gebrannte Ziegel → *Klinker.* — *Feuerfeste Baustoffe:* Schamottesteine. — *Gemeines Geschirr:* Blumentöpfe, Töpfergeschirr, Ofenkacheln. — *Weißes Geschirr: Steingut,* z. B. Waschbecken, Sanitärkeramik; aus reineren Rohstoffen; doppelter Brand, dazwischen Glasur und evtl. Färbung.

Sintergut (Tonzeug): Brenntemperatur hoch (1200 ··· 1500 °C); Scherben dicht, wasserundurchlässig, mit Stahl kaum ritzbar. — *Steinzeug:* Scherben nicht durchscheinend; aus Ton, Kaolin, Quarz und Feldspat, z. B. Ausgußbecken, Kanalisationsrohre, Fliesen, chemische Gefäße; doppelter Brand; Zwischenglasur. — *Porzellan:* Scherben durchscheinend, weiß, hart, klingend. Edelstes keramisches Erzeugnis; auch als elektrisches Isoliermaterial verwendet. Ausgangsstoffe: reiner, geschlämmter Kaolin, Quarzsand und Feldspat (2:1:1). Nach einjähriger Lagerung wird die Masse auf der Drehscheibe oder durch Gießen in Gipsformen geformt, langsam getrocknet, in Porzellanöfen bei 900 °C rohgebrannt, in Glasurflüssigkeit (Aufschlämmung von Kalk + Feldspat + Kaolin) getaucht und dann bei 1500 °C gargebrannt (glattgebrannt).

Zement: graues Pulver aus Kalzium-aluminat-silikat, das angefeuchtet unter chemischer Bindung von Wasser zu einer steinharten Masse erstarrt. Da hierbei kein Kohlendioxid benötigt wird, kann Zement auch unter Wasser verwendet werden. — *Portlandzement:* bezüglich der Festigkeitseigenschaften am hochwertigsten; hergestellt durch Brennen feingemahlener Gemenge aus Kalkstein und Ton bei 1450 °C in Drehrohröfen; die zu Zementklinkern gesinterte Masse wird feingemahlen. — Auch beim Gips-Schwefelsäure-Verfahren entsteht ein dem Portlandzement ähnliches Produkt. *Eisenportlandzement:* mind. 70% Portlandzementklinker + granulierte, abgeschreckte Hochofenschlacke, gemeinsam vermahlen.
Beton → Zementmörtel (Zement + Sand + Wasser) mit grobem Kies und Steinsplitt. *Eisenbeton* enthält Stahlstäbe, -bleche, -gitter; *Schaumbeton* ist sehr porös. Beton ist empfindlich gegenüber sauren, auch stark kohlensauren Wässern.

Weitere Siliziumverbindungen

Siliziumtetrafluorid SiF_4: farbloses Gas; bildet sich aus Silikaten und Flußsäure. Mit überschüssiger Flußsäure entsteht die nur in wäßriger Lösung bekannte *Hexafluorokieselsäure* $H_2[SiF_6]$, eine starke, Glas nicht ätzende Säure. Ihre Salze heißen *Hexafluorosilikate.* Lösliche Fluorosilikate dienen zur Härtung und Dichtung kalkhaltiger Baustoffe (*Fluatieren*); das entstehende *Kalziumfluorosilikat* $CaSiF_6$ verstopft hierbei die Poren.

Siliziumkarbid, *Karborundum,* SiC: sehr harte, meist graue, trübe Kristalle; hergestellt aus Kohle und Sand im elektrischen Ofen. Verwendung als Schleif- und Poliermittel sowie als elektrischer Heizwiderstand (Silitstäbe).

3.5.4. Germanium

Symbol: Ge (von Germanien, Deutschland); *Wertigkeit:* +4, (+2).
Vorkommen: weit verbreitet, jedoch in sehr geringer Konzentration; fast immer als Begleiter anderer Minerale (Mansfelder Kupferschiefer, Freiberger Zinkblende), auch in Steinkohlenflugasche.
Elementares Germanium: sprödes, silberglänzendes Metall; an der Luft sehr beständig; elektrischer Halbleiter; Verwendung für Transistoren und andere Halbleiterbauelemente.

3.5.5. Zinn und Zinnverbindungen

Symbol: Sn [stannum (lat.); vgl. Stanniol]; *Wertigkeit:* +2, +4.
Vorkommen: recht selten; nur chemisch gebunden. Einzig wichtiges Mineral: *Zinnstein* (Kassiterit) SnO_2.
Herstellung: technisch aus Zinnstein durch Erhitzen mit Kohle im Flammofen bei 1000 °C: $SnO_2 + 2C \rightarrow Sn + 2CO$. Das Rohzinn wird elektrolytisch oder durch Seigern gereinigt. (*Seigern* = Ablaufenlassen

geschmolzenen Metalls auf einer geneigten Eisenplatte. Reines Metall rinnt ab, während schwerer schmelzbare Legierungen körnig zurückbleiben.)
Eigenschaften: an der Luft sehr beständig; unterhalb 13 °C allmählicher Zerfall zu grauem, pulvrigem α-Zinn („Zinnpest"); in Salz- und Schwefelsäure langsam zu Zinn(II)-salzen löslich; mit Salpetersäure entsteht weiße, unlösliche „Zinnsäure"; mit warmer Natronlauge Natriumstannat(II) und -stannat(IV).
Verwendung: für Weißblech (verzinntes Eisen, z. B. für Konservendosen, da Zinn schwer angegriffen wird und Zinnverbindungen praktisch ungiftig sind); für sonstige Verzinnung (galvanisch oder durch *Feuerverzinnen* = Tauchen in Zinnschmelze); für Weichlot und andere Legierungen.

Legierungen:

Weichlot = 2···90% Sn + 98···10% Pb (Schmelzbereich 185···310 °C); *Britanniametall* = 70···90% Sn + Cu + Sb; *Zinnbronze* = 80···90% Cu + 20···10% Sn; ferner Rotguß, Schriftmetalle, Lagermetalle.

Zinnverbindungen: Zinn(II)-verbindungen gehen leicht in Zinn(IV)-verbindungen über; sie wirken dadurch reduzierend. Die meisten Zinnverbindungen sind farblos. — *Zinn(II)-chlorid* $SnCl_2 \cdot 2H_2O$: weiße Kristalle, die nur in Gegenwart freier Säure in Wasser klar löslich sind, anderenfalls Niederschläge von Hydroxidsalzen, z. B. Sn(OH)Cl, ergeben. — *Zinn(IV)-chlorid* $SnCl_4$: farblose, an der Luft rauchende Flüssigkeit; entsteht aus Zinn + Chlor, z. B. bei der Entzinnung von Weißblechabfällen. — *Zinnoxide: Zinn(II)-oxid* SnO: blauschwarzes Pulver; *Zinn(IV)-oxid* SnO_2: weißes Pulver. — *Stannate(II)*, früher *Stannite*, entstehen aus dem amphoteren Zinn(II)-hydroxid oder aus Zinn durch Auflösen in Natronlauge, z. B. $Na_2[Sn(OH)_4]$. — *Stannate(IV)* entstehen ebenso aus Zinn(IV)-hydroxid bzw. Zinnsäure, z. B. $Na_2[Sn(OH)_6]$. — *Zinnsäure* ist $SnO_2 \cdot xH_2O$, oft als H_2SnO_3 formuliert.

3.5.6. Blei und Bleiverbindungen

Symbol: Pb [plumbum (lat.); daher auch „Plombe"]; *Wertigkeit:* +2, +4.
Minerale: Bleiglanz (*Galenit*) PbS (meist Ag-haltig!); Weißbleierz (*Zerussit*) $PbCO_3$.

Herstellung:

- *Röstreduktionsverfahren:* Nach Anreicherung durch Flotation wird Bleiglanz an der Luft geröstet ($2PbS + 3O_2 \rightarrow 2PbO + 2SO_2$). Durch Reduktion des Oxids im Schachtofen mit Koks und Kohlenmonoxid ($PbO + CO \rightarrow Pb + CO_2$) entsteht „Werkblei", das entsilbert sowie von Cu, Fe, Sn, As und Sb befreit wird.
- *Röstreaktionsverfahren:* Besonders reine Erze röstet man nur teilweise ab; dann erfolgt beim Erhitzen die Reaktion: $PbS + 2PbO \rightarrow 3Pb + SO_2$.

Eigenschaften: schweres, bläulichweißes, sehr weiches Metall; an der Luft, in hartem Wasser und in Schwefelsäure sehr beständig (Ausbildung unlöslicher Oxid-, Karbonat- bzw. Sulfatdeckschichten), nicht dagegen in weichem Wasser mit viel CO_2 (Bildung von löslichem Bleihydrogenkarbonat, $Pb(HCO_3)_2$). Leicht löslich in Salpetersäure: $3Pb + 8HNO_3 \rightarrow 3Pb(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O$.
Verwendung: für Kabelmäntel, Akkumulatoren, Verchromungsanoden, Bleiauskleidungen als Schutz gegen Schwefelsäure; für Lot-, Schrift-, Lagermetalle und andere Legierungen; zur Herstellung von Tetraäthylblei.

Legierungen:

Hartblei: Pb mit 7% Sb (für Akkus und Anoden). *Schriftmetalle* (Monometall, Letternmetall): Pb mit 12···28% Sb und 3···5% Sn. *Lagermetalle* (Weißmetalle): Pb mit Sb, Sn und Cu; das *Bahnmetall* für Achsenlager der Eisenbahn besteht aus Pb mit geringen Mengen Natrium, Kalzium und Lithium.

Bleiverbindungen: Blei(IV)-verbindungen gehen leicht in die beständigeren Blei(II)-verbindungen über. *Blei(II)-oxid, Bleiglätte,* PbO: bildet sich auf geschmolzenem Blei an der Luft; gelbes Pulver, auch in einer roten Form erhältlich; dient zur Herstellung von Mennige. — *Blei(II, IV)-oxid, Tribleitetroxid, Bleimennige,* Pb_3O_4: hochrotes Pulver; aus PbO an der Luft bei 500 °C; für Rostschutzanstriche und Bleiglas. — *Blei(IV)-oxid* PbO_2: dunkelbraun, bildet sich beim Aufladen von Blei-Akkumulatoren auf den positiven Platten. — *Blei(II)-hydroxid* $Pb(OH)_2$: fällt aus Bleisalzlösungen durch Alkalilaugen als weißer Niederschlag; im Überschuß der Lauge zu *Plumbat(II)* löslich: $Pb(OH)_2 + 2NaOH \rightarrow Na_2[Pb(OH)_4]$. — *Bleinitrat* $Pb(NO_3)_2$: farblos, leicht löslich, zerfällt beim Erhitzen gemäß: $2Pb(NO_3)_2 \rightarrow 2PbO + 4NO_2 + O_2$. *Bleisulfat* $PbSO_4$: ist schwer löslich und fällt beim Auflösen von Bleisalzen in Leitungswasser als Trübung aus. — *Tetraäthylblei* $Pb(C_2H_5)_4$: farblose, sehr giftige Flüssigkeit; dient als Antiklopfmittel zum „Verbleien" von Benzin.

3.6. Elemente der V. Hauptgruppe (Stickstoffgruppe)

3.6.1. Allgemeines

Elemente: Stickstoff (N), Phosphor (P), Arsen (As), Antimon (Sb), Wismut (Bi).
Wertigkeit: +5, +3, −3. Die Beständigkeit der +5- und −3wertigen Stufe nimmt vom N zum Bi ab, die der +3wertigen dagegen zu.
Metallischer Charakter: nimmt vom N zum Bi zu. P, As und Sb existieren in metallischen und nichtmetallischen Modifikationen, während N nur als Nichtmetall, Bi nur als Metall vorkommt.
Hydroxide: Die *Element(V)-hydroxide* sind in wasserärmeren Formen durchweg Säuren, deren Stärke von HNO_3 über H_3PO_4, H_3AsO_4, H_3SbO_4 zu $HBiO_3$ abnimmt. Die *Element(III)-hydroxide* sind schwächer sauer bzw. stärker basisch als die entsprechenden (V)-Verbindungen; HNO_2 und H_3PO_3 sind schwache Säuren. $As(OH)_3$ und $Sb(OH)_3$ sind amphoter, und $Bi(OH)_3$ ist eine Base. Verglichen mit den entsprechenden Verbindungen der IV. Hauptgruppe haben alle Hydroxide der V. Gruppe stärker sauren, verglichen mit denen der VI. Hauptgruppe schwächer sauren Charakter.
Hydride: Die Beständigkeit der Wasserstoffverbindungen nimmt vom N zum Bi ab. NH_3 ergibt mit Säuren Ammoniumsalze, PH_3 unbeständigere Phosphoniumsalze.

Tabelle 6. Stickstoffgruppe

	Stickstoff	Phosphor	Arsen	Antimon	Wismut
Symbol	N	P	As	Sb	Bi
Kernladungszahl	7	15	33	51	83
Relative Atommasse	14,007	30,97	74,92	121,75	208,98
Schmelzpunkt in °C	−210	weiß: 44,1	817*)	630	271
Siedepunkt in °C	−196	weiß: 280	633*)	1640	1560
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	(0,96)**)	weiß: 1,82	5,72	6,69	9,80
Wertigkeiten	+5	Beständigkeit abnehmend →			
	+3	Beständigkeit zunehmend →			
	−3	Beständigkeit abnehmend →			

*) Bei Normaldruck sublimiert As bei 633 °C; unter einem Druck von etwa 4 MPa schmilzt es bei 817 °C,
**) bezieht sich auf festen Stickstoff beim Schmelzpunkt

3.6.2. Stickstoff und Stickstoffverbindungen

Allgemeines

Symbol: N [nitrogenium (lat.) Salpeterbildner]; *Wertigkeit* (Oxydationsstufen): +1 bis +5; −3.
Vorkommen: frei als Hauptbestandteil der Luft (78 Vol.-%); anorganisch gebunden im *Natronsalpeter* ($NaNO_3$; Vorkommen als Chilesalpeter) und *Kalisalpeter* (KNO_3) sowie im *Ammoniak* (Fäulnisprodukt); *organisch gebunden* in sämtlichen Organismen (in den *Eiweißstoffen*, den *Nukleinsäuren* und in den Stoffwechselendprodukten *Harnstoff* und *Harnsäure*) sowie in der Kohle.

Elementarer Stickstoff (N_2)

Herstellung: chemisch rein durch Erhitzen von Ammoniumnitrit: $NH_4NO_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O$, als „*Luftstickstoff*" (edelgashaltig) nach dem LINDE-Verfahren (fraktionierte Kondensation und Destillation von Luft bei tiefen Temperaturen).
Eigenschaften: farb-, geruch- und geschmackloses Gas; im Gegensatz zu Sauerstoff auch im flüssigen und festen Zustand farblos. Stickstoff ist sehr reaktionsträge; er verbindet sich bei gewöhnlicher Temperatur nur mit Lithium, bei höherer auch mit einigen anderen Elementen, z. B. Ca und Mg, zu Nitriden, z. B. gemäß $3Mg + N_2 \rightarrow Mg_3N_2$.
Verwendung: N_2 wird mit 15 MPa Druck in grün gekennzeichneten Stahlflaschen gehandelt. Schutzgas für Lagerung, Transport und chemische Umsetzungen feuergefährlicher oder sauerstoffempfindlicher Stoffe.

Ammoniak (NH_3)

Herstellung:

- durch „Verdrängen" aus Ammoniumsalzen mit weniger flüchtigen Basen, z. B. Alkalihydroxiden: $NH_4Cl + KOH \rightarrow KCl + H_2O + NH_3$;
- technisch in kleinen Mengen aus dem Gaswasser der Kokereien und Gaswerke, in sehr großen Mengen durch Synthese ($N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$) nach dem HABER-BOSCH-Verfahren: Man erzeugt zunächst in mehrstufigen Verfahren aus Kohle bzw. Erdöl, Wasser und Luft ein entschwefeltes Synthesegas, bestehend aus Stickstoff und Wasserstoff im Volumenverhältnis 1:3. Das Synthesegas setzt sich im Ammoniakreaktor (bis 60 m hoch) in Berührung mit einem Katalysator bei 500 °C und 25 MPa gemäß $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$ in exothermer Reaktion zu einem Gasgemisch mit etwa 12% Ammoniak um. Dieses wird durch Tiefkühlung verflüssigt und abgezogen; das Restgas wird, ergänzt durch Frischgas, erneut dem Reaktor zugeführt. Aus dem Kreislaufgas läßt sich Argon gewinnen.

Eigenschaften: farbloses, stechend riechendes, außerordentlich leicht wasserlösliches, hygroskopisches Gas; läßt sich bei Normaltemperatur durch 0,85 MPa Druck verflüssigen. NH_3 brennt nur in reinem Sauerstoff oder beim Einblasen in eine andere Flamme. Es bildet mit Wasser Ammoniumhydroxid und mit Säuren Ammoniumsalze (z. B. $NH_3 + HCl \rightarrow NH_4Cl$).

Verwendung: für chemische Synthesen, z. B. von Salpetersäure und deren Folgeprodukten (Düngesalze, Explosivstoffe, Farbstoffe usw.), von Ammoniumsalzen, Harnstoff, Blausäure; vgl. auch das Ammoniak-Soda-Verfahren. NH_3 dient weiterhin als Umlaufstoff in Kühlaggregaten, als hochwertiges Stickstoffdüngemittel und zum Entwickeln von Lichtpausen.

Ammoniumverbindungen

Allgemeines: Ammoniumverbindungen enthalten das farblose Ion NH_4^+ (*Ammoniumion*). Die NH_4-Salze ähneln stark den K-Salzen, zersetzen sich jedoch beim Erhitzen unter Bildung von Ammoniak; mit Alkalilaugen wird Ammoniak frei.

Ammoniakwasser, *Salmiakgeist:* Lösung von NH_3 in Wasser. In der Lösung besteht folgendes Gleichgewicht:

$$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons (NH_4OH) \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$$

Ammoniakwasser enthält also die Ionen des als Molekül nicht existenzfähigen *Ammoniumhydroxids* NH_4OH und wirkt als schwache Base, von der sich die Ammoniumsalze ableiten. *Verwendung:* zum Neutralisieren von Säuren; als CuO-lösliches Mittel in Metallputzmitteln; als Düngemittel; als linderndes Mittel bei Insektenstichen.

Ammoniumchlorid, *Salmiak, Salmiaksalz,* NH_4Cl: hergestellt aus Ammoniak und Salzsäure; zerfällt beim Erhitzen in Umkehrung der Bildungsreaktion gemäß: $NH_4Cl \rightarrow NH_3 + HCl$; beim Abkühlen erfolgt die rückläufige Reaktion, so daß eine Sublimation vorgetäuscht wird. Verwendung als Lötsalz (wandelt das Oxid in leichtflüchtiges Chlorid um, so daß das Lot haften kann); für Trockenbatterien (LECLANCHÉ-Element — Zink-Salmiak-Kohle-Element); als Düngemittel.

Ammoniumsulfat, $(NH_4)_2SO_4$: in großen Mengen hergestelltes Düngesalz („*schwefelsaures Ammoniak*"). Herstellung durch Einleiten von CO_2 in eine ammoniakalische Aufschlämmung Gips oder Anhydrit: I. $2NH_3 + CO_2 + H_2O \rightarrow (NH_4)_2CO_3$; II. $(NH_4)_2CO_3 + CaSO_4 \rightarrow CaCO_3\downarrow + (NH_4)_2SO_4$. — Das ausfallende Kalziumkarbonat wird abfiltriert, die Sulfatlösung eingedampft.

Ammoniumnitrat, *Ammonsalpeter,* NH_4NO_3: hergestellt aus Ammoniak und Salpetersäure; ergibt beim Erhitzen „Lachgas" N_2O. Verwendung als Bestandteil von Düngesalzen und Explosivstoffen.

Ammoniumhydrogenkarbonat, NH_4HCO_3: ist neben *Ammoniumkarbaminat* $NH_2-CO-ONH_4$ im *Hirschhornsalz* vorhanden. Letzteres wurde früher aus Hirschgeweih erzeugt, heute jedoch aus $NH_3 + CO_2 + H_2O$ synthetisiert. Hirschhornsalz zersetzt sich an der Luft allmählich gemäß $NH_4HCO_3 \rightarrow NH_3 + H_2O + CO_2$ und ist deshalb in verschlossenen Gefäßen aufzubewahren. Verwendung als Backpulver.

Oxide des Stickstoffs

Allgemeines: In den Oxiden hat Stickstoff die Oxydationsstufen +1, +2, +3, +4 und +5. — Nur N_2O_3 und N_2O_5 sind Säureanhydride; N_2O_4 verhält sich wie ein „gemischtes" Säureanhydrid. — Unter „*nitrosen Gasen*" versteht man NO, NO_2 und N_2O_4.

Distickstoffmonoxid, „*Lachgas*", N_2O: farblos, schwach angenehm (leicht süßlich) riechend; entsteht durch Erhitzen von Ammoniumnitrat: $NH_4NO_3 \rightarrow N_2O + 2H_2O$.

Stickstoffmonoxid NO: farbloses, in Wasser unlösliches Gas, das an der Luft in braunes NO_2 übergeht: $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$. Es entsteht aus Salpetersäure und Metallen, z. B. Cu.

Distickstofftrioxid N_2O_3: Anhydrid der salpetrigen Säure; tiefblaue Flüssigkeit; zerfällt oberhalb 0 °C in $NO + NO_2$; ergibt mit Wasser salpetrige Säure und mit Basen Nitrite.

Stickstoffdioxid NO_2: rotbraunes, eigenartig riechendes, sehr giftiges Gas; Hauptbestandteil der „nitrosen Gase", die bei der Einwirkung von Salpetersäure auf Metalle und beim Erhitzen von Schwermetallnitraten entstehen. NO_2 steht stets im Gleichgewicht mit farblosem *Distickstofftetroxid* N_2O_4 (gemäß $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$); bei 64 °C ist die Hälfte des N_2O_4 zerfallen, bei höheren Temperaturen mehr.

Distickstoffpentoxid, *Stickstoff(V)-oxid,* N_2O_5: Anhydrid der Salpetersäure; farblose, explosible Kristalle, die mit Wasser stürmisch Salpetersäure ergeben: $N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3$.

Salpetersäure (HNO_3) und Nitrate

Herstellung: durch katalytische Oxydation von Ammoniak (OSTWALD-Verfahren). Ein Ammoniak-Luft-Gemisch wird durch Platin-Rhodium-Netzkatalysatoren geleitet. Bei 700 °C entsteht gemäß $4NH_3 + 5O_2 \rightarrow 4NO + 6H_2O$ Stickstoffmonoxid, das beim Abkühlen mit überschüssigem Sauerstoff gemäß $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$ zu Stickstoffdioxid und dann in Rieseltürmen mit Wasser gemäß $4NO_2 + O_2 + 2H_2O \rightarrow 4HNO_3$ zu Salpetersäure reagiert.

Eigenschaften: Wasserfreie Salpetersäure ist eine farblose, infolge geringfügiger Zersetzung meist gelb gefärbte, rauchende Flüssigkeit, die bei 86 °C siedet. „Rote rauchende Salpetersäure" enthält überschüssige Stickoxide (N_2O_4, NO_2, N_2O_5). Die handelsübliche „konzentrierte Salpetersäure" ist 68%ig und siedet bei 122 °C.

Konzentrierte Salpetersäure wirkt (infolge ihres Gehalts an nichtdissoziierten HNO_3-Molekülen) unter Bildung nitroser Gase stark oxydierend, z. B. auf viele Metalle (auch Kupfer, Quecksilber und Silber), z. B.

$$\begin{array}{l} 3Cu + 2HNO_3 \rightarrow 3CuO + 2NO + H_2O \\ 3CuO + 6HNO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 3H_2O \\ \hline 3Cu + 8HNO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O \end{array}$$

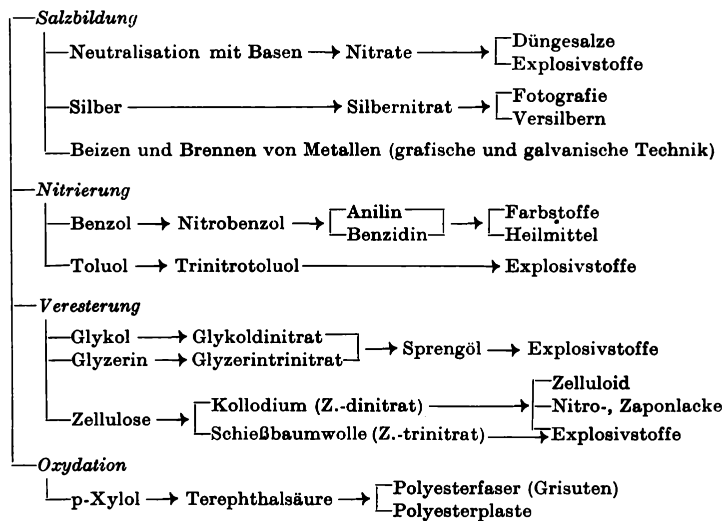
Keine Reaktion tritt ein mit Gold und Platin; diese werden jedoch durch *Königswasser* (HCl und HNO_3 im Verhältnis 3:1) angegriffen. Infolge „Passivierung" verhalten sich auch Aluminium und Eisen gegenüber kalter, Chrom auch gegenüber heißer Salpetersäure resistent.

Stark verdünnte Salpetersäure enthält kaum noch Moleküle und greift deshalb Kupfer und edlere Metalle nicht an; infolge ihres Gehalts an H^+-Ionen löst sie unter Wasserstoffentwicklung unedle Metalle zu Nitraten auf, z. B. $Zn + 2HNO_3 \rightarrow Zn(NO_3)_2 + H_2$.

Verwendung: Salpetersäure ist einer der wichtigsten Grundstoffe der chemischen Industrie.

Verwendung von Salpetersäure

Salpetersäure HNO_3



Nitrate: Salze der Salpetersäure. Alle Metallnitrate sind leicht löslich. Verhalten beim Erhitzen:

- *Alkalinitrate* ergeben Nitrit und Sauerstoff: $2KNO_3 \rightarrow 2KNO_2 + O_2$.
- *Ammoniumnitrat* ergibt Distickstoffmonoxid und Wasser: $NH_4NO_3 \rightarrow N_2O + 2H_2O$.
- Die *übrigen Nitrate* ergeben Metalloxid, Stickstoffdioxid und Sauerstoff, z. B. $2Pb(NO_3)_2 \rightarrow 2PbO + 4NO_2 + O_2$.

Wichtige Nitrate sind:

KNO_3 Kalisalpeter, $Ca(NO_3)_2$ Kalksalpeter, $NaNO_3$ Natronsalpeter, $AgNO_3$ Höllenstein, NH_4NO_3 Ammonsalpeter.

Weitere Stickstoffverbindungen

Salpetrige Säure HNO_2: ist nur in verdünnter wäßriger Lösung beständig; beim Konzentrieren zerfällt sie in H_2O, NO und NO_2. Ihre Salze, die *Nitrite*, sind leicht wasserlöslich, giftig und ergeben mit stärkeren Säuren braune nitrose Gase, z. B. $2NaNO_2 + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + H_2O + NO + NO_2$.

Kalkstickstoff: Gemisch aus *Kalziumzyanamid* $CaCN_2$, Struktur $Ca{=}N{-}C{\equiv}N$, und Kohlenstoff. Graues Pulver; entsteht aus Kalziumkarbid und Stickstoff bei 900 °C: $CaC_2 + N_2 \rightarrow CaCN_2 + C$; dient zur Herstellung von *Dizyandiamid* („Didi“, s. S. 50), $H_2N{-}C({=}NH){-}NH{-}CN$, *Melamin* und den Blutlaugensalzen.

3.6.3. Phosphor und Phosphorverbindungen

Allgemeines

Symbol: P [*phosphoros* (grch.) Lichtträger]; *Wertigkeit:* +5, +3, −3.
Vorkommen: chemisch gebunden in Organismen und Mineralen. Die Organismen enthalten P in Form von Phosphatiden (z. B. Lezithin in Nerven- und Gehirnsubstanz), Phosphorproteiden (Fermente), verschiedenen Phosphorsäureestern und Kalziumphosphat (in Knochen und Zähnen).

Minerale:

Phosphorit $Ca_3(PO_4)_2 \cdot Ca(OH)_2$, Apatit $3Ca_3(PO_4)_2 \cdot Ca(F,Cl,OH)_2$

Elementarer Phosphor

Modifikationen: weißer, roter und schwarzer Phosphor.

Tabelle 7. Phosphor

Eigenschaft	P *weiß*	P *rot*	P *schwarz*
Farbe	weiß	rot bis violett	schwarz
Charakter	nichtmetallisch	nichtmetallisch	metallisch
Schmelzpunkt	44 °C	beide nur unter Druck schmelzbar	
Siedepunkt	280 °C	oberhalb 280 °C Übergang in gasförmigen weißen Phosphor	
Härte	wachsweich	hart	ziemlich weich
Dichte (20 °C)	$1{,}82\ g \cdot cm^{-3}$	$2{,}36\ g \cdot cm^{-3}$	$2{,}70\ g \cdot cm^{-3}$
Reaktionsfähigkeit	stark	gering	mittel
Geruch	knoblauchartig	geruchlos	geruchlos
Giftigkeit	sehr giftig	ungiftig	ungiftig
Lumineszenz	vorhanden	—	—
Entzündungstemperatur	≈ 60 °C	oberhalb 400 °C	oberhalb 400 °C
Löslichkeit	in Wasser schwer, in CS_2 leicht	unlöslich	unlöslich

Weißer Phosphor:

- *Herstellung:* aus Rohphosphat durch Erhitzen mit Sand und Koks: $Ca_3(PO_4)_2 + 3SiO_2 + 5C \rightarrow 3CaSiO_3 + 2P + 5CO$. Der gasförmig entweichende Phosphor wird unter Wasser kondensiert.
- *Eigenschaften:* Weißer Phosphor besteht aus Molekülen P_4. Das grünliche, im Dunkeln wahrnehmbare Leuchten an der Luft beruht auf langsamer Oxydation zu P_2O_3; die dabei entwickelte Wärme bringt den Phosphor zum Schmelzen und zur Entzündung (daher unter Wasser aufbewahren!). Beim Verbrennen entsteht ein weißer Rauch von Phosphor(V)-oxid: $P_4 + 5O_2 \rightarrow 2P_2O_5$. Brennenden Phosphor nicht mit Wasser löschen, sondern mit Sand abdecken!
- *Verwendung:* Zur Herstellung von rotem Phosphor, Phosphorsäuren und Phosphaten.

Roter Phosphor: stabiler als weißer. An sich ungiftig, jedoch kann ein im Handelsphosphor vorhandener Gehalt an weißem Phosphor Giftigkeit bewirken. *Herstellung:* durch Erhitzen von weißem Phosphor unter Luftabschluß.

Zündhölzer: Die Reibflächen enthalten roten Phosphor mit Glaspulver und Dextrin, die Zündköpfe Kaliumchlorat und Antimon(V)-sulfid. Beim Reiben oxydiert das Chlorat den Phosphor unter Entzündung des Antimonsulfids und des mit Paraffin getränkten Holzes.

Phosphorsäuren und Phosphate

Phosphor(V)-oxid, *Diphosphorpentoxid,* P_2O_5 (genauer P_4O_{10}): Anhydrid der Phosphorsäure; hygroskopisches, weißes Pulver, das heftig mit Wasser zu verschiedenen Säuren reagiert (s. u.). *Verwendung:* als Trockenmittel.

Phosphorsäuren: P_2O_5 vereinigt sich mit Wasser zu *Metaphosphorsäure:* $P_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HPO_3$ [genauer $(HPO_3)_x$], *Diphosphorsäure:* $P_2O_5 + 2H_2O \rightarrow H_4P_2O_7$, *Orthophosphorsäure:* $P_2O_5 + 3H_2O \rightarrow 2H_3PO_4$. Diphosphorsäure wurde früher auch als *Pyrophosphorsäure* bezeichnet.

Orthophosphorsäure, *Phosphorsäure,* H_3PO_4: farblose Kristalle; bereits mit wenig Wasser entstehen sirupartige, ungiftige Lösungen. *Verwendung:* zur Herstellung von Phosphaten; zum Phosphatieren von Eisen und Zink; für elektrolytische und chemische Polierlösungen für Metalle (mit Schwefel- oder Chromsäure).

Orthophosphate, *Phosphate:* 3 Reihen von Salzen; z. B. Natriumdihydrogenphosphat: NaH_2PO_4 (primäres Phosphat), Dinatriumhydrogenphosphat: Na_2HPO_4 (sekundäres Phosphat), Trinatriumphosphat: Na_3PO_4 (tertiäres Phosphat).
Die Kalziumsalze haben die Formeln: Kalziumdihydrogenphosphat: $Ca(H_2PO_4)_2$, Kalziummonohydrogenphosphat: $CaHPO_4$, Trikalziumphosphat: $Ca_3(PO_4)_2$.

Kondensierte Phosphate enthalten als Anionen

$$\cdots-\underset{\displaystyle O^-}{\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{\underset{|}{P}}}}-O-\underset{\displaystyle O^-}{\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{\underset{|}{P}}}}-O-\cdots$$

-Ketten und Ringe. Hochmolekulares *Natriumpolyphosphat,* fälschlich auch als *Natriumhexametaphosphat* bezeichnet, vermag in Lösung Ca^{2+} und Mg^{2+} nach Art eines Ionenaustauschers zu binden und wird deshalb als Enthärtungs- und Waschhilfsmittel verwendet.

Phosphatieren: Umwandlung von Metalloberflächen (Eisen, Zink, Aluminium) in Phosphate als Korrosionsschutz von begrenzter Wirkung oder als Haftgrund für nachfolgende Anstriche. Die Metalle werden in Lösungen erhitzt, die Zink- oder Mangan(II)-dihydrogenphosphat, $Zn(H_2PO_4)_2$ bzw. $Mn(H_2PO_4)_2$, neben freier Phosphorsäure und evtl. beschleunigend wirkenden Zusätzen enthalten.

3.6.4. Arsen und Arsenverbindungen

Symbol: As. — *Wertigkeit:* +5, +3, −3.
Vorkommen: meist gebunden als Begleiter sulfidischer Erze, auch als Mineral Arsenkies FeAsS. — *Modifikationen:* gelbes (sehr unbeständig), graues und schwarzes Arsen. *Graues Arsen:* graue, metallisch glänzende, spröde Kristalle.

Arsenverbindungen: *Arsen(III)-oxid, Arsenik,* As_2O_3: weißes, sehr giftiges, wasserlösliches Pulver. — *Arsenige Säure* H_3AsO_3; Salze: *Arsenite.* — *Arsensäure* H_3AsO_4; Salze: *Arsenate.*

3.6.5. Antimon und Antimonverbindungen

Symbol: Sb (stibium = schwarze Grauspießglanzschminke). *Wertigkeit:* +5, +3, −3. — *Mineral:* Antimonit (Grauspießglanz) Sb_2S_3.

Elementares Antimon: wichtigste Modifikation, glänzend silberweiß, sehr spröde, unlöslich in Salz- und Schwefelsäure, löslich in Salpetersäure; Verwendung als Legierungszusatz (Hartblei, Schriftmetalle, Lagermetalle).

Antimonverbindungen: *Antimon(III)-oxid* Sb_2O_3; weißes Pulver. — *Antimon(III)-hydroxid* $Sb(OH)_3$ ist amphoter; Salze: *Antimonate(III)* (früher: *Antimonite*). — *Antimonsäure* H_3SbO_4: weißes Pulver; Salze: *Antimonate(V)* (früher: *Antimonate*). — *Kaliumantimonotartrat, Brechweinstein,* $K[C_4H_2O_6Sb(OH)_2]\cdot{}^1/_2H_2O$, wird in der Färberei und Medizin verwendet.

3.6.6. Wismut und Wismutverbindungen

Symbol: Bi (bismutum). — *Wertigkeit:* +3, (+5), (−3). — *Vorkommen:* in Bleierzen; *Mineral: Wismutglanz* Bi_2S_3.

Elementares Wismut: rötliches silberglänzendes, diamagnetisches Metall; Schmelzpunkt 271 °C; edler als Wasserstoff; löslich in Salpetersäure; Anwendung für niedrigschmelzende Legierungen, z. B. WOOD*sches Metall* [Schmelzpunkt 70 °C]: 7⋯8 Teile Bi + 4 Pb + 2 Sn + 1⋯2 Cd.

Wismutverbindungen: *Wismutoxid* (*Wismutocker*) Bi_2O_3: gelbes Pulver; *Wismuthydroxid* $Bi(OH)_3$: weiß, nicht amphoter; *Wismutnitrat* $Bi(NO_3)_3 \cdot 5H_2O$: wichtigstes Salz; farblos, wasserlöslich; mit viel Wasser entsteht *Wismutoxidnitrat* $BiONO_3$ als weißer, pulvriger Niederschlag.

3.7. Elemente der VI. Hauptgruppe (Chalkogene)

3.7.1. Allgemeines

Elemente: Sauerstoff (O), Schwefel (S), Selen (Se), Tellur (Te), Polonium (Po). „Chalkogene" -> Erzbildner.
Wertigkeit: Sauerstoff tritt nur −2wertig auf; die übrigen Elemente sind hauptsächlich +6-, +4- und −2wertig. Die Beständigkeit der +6wertigen Stufe nimmt vom S bis Po ab, die der +4wertigen zu; vom Po existiert außerdem noch die unbeständige Wertigkeit +2.
Metallischer Charakter: nimmt vom O bis Po zu. O und S sind Nichtmetalle; Se existiert metallisch und nichtmetallisch; beim Te ist die nichtmetallische Form nur im Gaszustand bekannt; Po ist ein Metall.
Hydroxide: Die *Element(VI)-hydroxide* sind (z. T. in wasserärmeren Formen) durchweg Säuren, deren Stärke von H_2SO_4 über H_2SeO_4 zu H_6TeO_6 abnimmt; eine entsprechende Po-Verbindung ist nicht bekannt. Die *Element(IV)-hydroxide* sind von H_2SO_3 über H_2SeO_3 zu H_2TeO_3 ebenfalls Säuren abnehmender Stärke, jedoch schwächer als die (VI)-Verbindungen. $Po(OH)_4$ ist bereits eine Base; $Po(OH)_2$ eine stärkere Base.
Verglichen mit den entsprechenden Verbindungen der V. Hauptgruppe haben alle Hydroxide der VI. Hauptgruppe stärker sauren, verglichen mit denen der VII. Hauptgruppe schwächer sauren Charakter.
Hydride: Die Beständigkeit der Chalkogenwasserstoffe (H_2O, H_2S usw. bis H_2Po) nimmt vom O zum Po ab, die Säurestärke dagegen zu; H_2O ist neutral; die Stärke von H_2Te entspricht etwa der der Phosphorsäure. Die Chalkogenwasserstoffe sind stärker sauer als die entsprechenden Verbindungen der V., jedoch schwächer sauer als die der VII. Gruppe.

Tabelle 8. Chalkogene

	Sauerstoff	Schwefel	Selen	Tellur	Polonium
Symbol	O	S	Se	Te	Po
Kernladungszahl	8	16	34	52	84
Relative Atommasse	15,9994	32,06	78,96	127,60	210
Schmelzpunkt in °C	−219	119	220	452	252
Siedepunkt in °C	−183	445	688	1390	962
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	(1,27)*)	2,1	4,8**)	6,2	9,3
Wertigkeiten					
+6		Beständigkeit abnehmend →			
+4		Beständigkeit zunehmend →			
−2	Beständigkeit abnehmend →				

*) fester Sauerstoff beim Schmelzpunkt, **) metallisches Selen

3.7.2. Sauerstoff und Sauerstoffverbindungen

Allgemeines

Symbol: O [*oxygenium* (lat.) Säurebildner]; *Wertigkeit:* **−2.**
Vorkommen: häufigstes Element der Erdkruste (46,6 Massen-%; 55,1 Atom-%). Freier Sauerstoff findet sich in Luft und natürlichem Wasser; der weitaus meiste Sauerstoff ist in Form von Wasser, Silikaten, Quarz und anderen Mineralen sowie in Organismen gebunden.
Modifikationen: *Disauerstoff, gewöhnlicher Sauerstoff,* O_2. — *Trisauerstoff, Ozon,* O_3.
Luft: Die atmosphärische Luft (Gesamtmenge $5 \cdot 10^{18}$ kg) ist ein Gemisch aus Stickstoff (78,09 Vol.-%, 75,51 Massen-%), Sauerstoff (20,95 Vol.-%, 23,15 Massen-%), Argon (0,93 Vol.-%, 1,28 Massen-%), Kohlendioxid (0,03 Vol.-%, 0,046 Massen-%), ferner: H_2O (maximal bis 4 Vol.-%), Ne, He, CH_4, Kr, Stickoxide, Xe und Spuren weiterer Stoffe.
Die Dichte der Luft beträgt im Normzustand 1,293 kg/m³.

Disauerstoff (Gewöhnlicher Sauerstoff)

Formel: O_2; *Struktur:* $:\dot{\underset{\cdot}{O}}::\dot{\underset{\cdot}{O}}:$ bzw. O=O

Herstellung:

- technisch aus Luft durch fraktionierte Kondensation und Destillation (LINDE-Verfahren);
- durch Erhitzen sauerstoffreicher Salze, z. B. von *Chloraten* ($2KClO_3 \rightarrow 2KCl + 3O_2$, am besten mit Braunstein als Katalysator); von *Nitraten* ($2KNO_3 \rightarrow 2KNO_2 + O_2$); von *Permanganaten* ($2KMnO_4 \rightarrow K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2$, oder bei höherer Temperatur: $4KMnO_4 \rightarrow 2K_2O + 4MnO_2 + 3O_2$).
- durch katalytische Zersetzung von Wasserstoffperoxid, z. B. mit Braunstein: $2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2$.

Physikalische Eigenschaften: farb-, geruch- und geschmackloses Gas; in Wasser mäßig löslich, jedoch reichlicher als Stickstoff; daher enthält in Wasser gelöste Luft 36 Vol.-% Sauerstoff. Flüssiger und fester Sauerstoff sehen hellblau aus. Sauerstoff ist paramagnetisch; hierauf beruhen technisch-analytische Bestimmungsverfahren.
Chemische Eigenschaften: bei gewöhnlicher Temperatur verhältnismäßig reaktionsträge; bei höherer sehr reaktionsfähig. Die chemische Vereinigung mit Sauerstoff heißt *Oxydation*; sie kann langsam oder rasch erfolgen. Langsame Oxydationen sind z. B. das Rosten des Eisens, der Abbau der Nahrungsmittel im Organismus, das Altern des Gummis, das Festwerden von Ölfarbe. Rasche, unter Flammenerscheinung verlaufende Oxydationen werden *Verbrennungen* genannt. In reinem (auch flüssigem) Sauerstoff brennen die Stoffe mit intensiverem Licht als an der Luft, z. B. flammt ein glimmender Holzspan auf. Durch Oxydation entstehen aus Elementen und zahlreichen Verbindungen Oxide, z. B. $S + O_2 \rightarrow SO_2$; $2H_2S + 3O_2 \rightarrow 2H_2O + 2SO_2$.
Verwendung: O_2 kommt mit 15 MPa Druck in blau gekennzeichneten Stahlflaschen in den Handel (metallische Teile wegen Entzündungs- und Explosionsgefahr nicht fetten!). Verwendung zum Schweißen und Schneiden von Metallen, für Atemgeräte, zum Raketenantrieb, für viele chemisch-technische Prozesse.

Flüssige Luft: hellblaue Flüssigkeit, die allmählich verdampft (Aufbewahrung in Thermosgefäßen, die nicht fest verschlossen werden dürfen). Die Farbtiefe nimmt beim Stehen zu, da der farblose Stickstoff bevorzugt verdampft. — Gemische aus flüssiger Luft mit Aktivkohle, Holzmehl u. dgl. sind explosibel (Verwendung z. T. für Flüssigluftsprengstoffe).

Trisauerstoff (Ozon, O_3)

Entstehung: Ozon bildet sich in Sauerstoff oder Luft durch Funkenüberschlag, stille elektrische Entladungen oder Einwirkung ultravioletter Strahlen gemäß $3O_2 \rightarrow 2O_3$. Auch der bei der Elektrolyse von verdünnter Schwefelsäure anodisch entwickelte Sauerstoff enthält Ozon.
Eigenschaften: hellblaues, beim Erhitzen explodierendes Gas von intensivem, „elektrischem" Geruch [ozo (grch.) ich rieche]. Stärkstes Oxydationsmittel; ergibt z. B. mit Silber schwarzes Silberperoxid und entzündet Äther und Alkohol sofort.
Verwendung: zur Desinfektion von Trinkwasser und Krankenhausluft, zur Entgiftung industrieller Abwässer.

Oxide und Hydroxide

Herstellung der Oxide: durch Reaktion von Elementen mit Sauerstoff („Oxydation"), z. B. bei der Verbrennung; durch Erhitzen von Hydroxiden (und Oxidhydraten), z. B. $Cu(OH)_2 \rightarrow CuO + H_2O$; durch Erhitzen von Salzen mit flüchtigem Säureanhydrid (Karbonate, Sulfate, Sulfite, Nitrate u. a.), z. B. $CuCO_3 \rightarrow CuO + CO_2$; $Cu(NO_3)_2 \rightarrow CuO + 2NO_2 + {}^1/_2O_2$.



Eigenschaften der Oxide: Die meisten *Nichtmetalloxide* (Ausnahmen: CO, NO, N_2O) sind Säureanhydride, d. h., sie ergeben mit Wasser Säuren, z. B. $SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$. — Auch *Metalloxide mit 5- bis 7wertigem Metall* sind Säureanhydride, z. B. $CrO_3 + H_2O \rightarrow H_2CrO_4$ (Chromsäure). — *Metalloxide mit 1- bis 4wertigem Metall* sind Basenanhydride, z. B. $CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$.

Hydroxide: Hydroxide enthalten die Gruppe —OH. Je nach Bindung an Metall oder Nichtmetall liegt eine Base, eine Säure oder ein amphoterer Stoff vor. Die meisten *Metallhydroxide* fallen aus, wenn man eine Salzlösung mit einer Alkalilauge versetzt, z. B. $CuSO_4 + 2NaOH \rightarrow Cu(OH)_2\downarrow + Na_2SO_4$. Sie bilden dann schleimige oder flockige, oft farbige Niederschläge, die meist mehr Wasser gebunden enthalten als ihrer Formel entspricht und dann besser als *Oxidhydrate* bezeichnet werden.

Peroxide leiten sich vom Wasserstoffperoxid H—O—O—H ab, enthalten also die *Disauerstoffkette* —O—O—. Wichtig sind *Natrium-* und *Bariumperoxid* Na_2O_2 bzw. BaO_2.

3.7.3. Schwefel und Schwefelverbindungen

Allgemeines

Symbol: S [*sulfur* (lat.) Schwefel]; *Wertigkeit:* +6, +4, −2.
Vorkommen: teils frei (in vulkanischen Gebieten), teils chemisch gebunden in Sulfiden und Sulfaten, in Kohle, Erdöl und den Eiweißstoffen.

Minerale:

— *Sulfide* (*Kiese:* hell, metallisch glänzend; *Glanze:* dunkel, metallisch glänzend; *Blenden:* dunkel, nicht metallisch glänzend, oft auch hell, durchscheinend): Pyrit (*Schwefelkies, Eisenkies*) FeS_2, Kupferkies $CuFeS_2$, Arsenkies FeAsS, Bleiglanz PbS, Kupferglanz Cu_2S, Molybdänglanz MoS_2, Silberglanz Ag_2S, Grauspießglanz Sb_2S_3, Zinkblende ZnS, Zinnober HgS, Realgar As_4S_4.
— *Sulfate:* Gips $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, Anhydrit $CaSO_4$, Kieserit $MgSO_4 \cdot H_2O$, Kainit $KCl \cdot MgSO_4 \cdot 3H_2O$, Schwerspat (Baryt) $BaSO_4$, Zölestin $SrSO_4$.

Elementarer Schwefel

Herstellung:

— durch Ausschmelzen gediegenen Schwefels aus Gestein, z. B. mit Wasserdampf; Reinigung des Rohschwefels durch Destillation; bei rascher Abkühlung der Dämpfe entsteht sublimierter Schwefel als feines Pulver (*Schwefelblume, Schwefelblüte*).
— durch Entschweflung der Ver- und Entgasungsprodukte der Kohle (Wasser-, Luft-, Leuchtgas), z. B. mit Luft und katalytisch wirkender Aktivkohle: $2H_2S + O_2 \rightarrow 2H_2O + 2S$, oder mit $Fe(OH)_3$-haltigen Gasreinigungsmassen.

Modifikationen: Da Schwefel in verschiedenen Molekülgrößen existiert (S_∞, S_{12}, S_8, S_6, S_2) und die Moleküle verschieden angeordnet sein können, gibt es mehrere Modifikationen. Bei gewöhnlicher Temperatur ist α-Schwefel (*rhombisch*) in Form gelber, spröder, geruch- und geschmackloser, ungiftiger Kristalle beständig, die sich nicht in Wasser, dagegen leicht in Kohlendisulfid (Schwefelkohlenstoff) lösen.
Chemische Eigenschaften: S verbrennt mit blauer Flamme zu Schwefeldioxid SO_2 und kleinen Mengen Schwefeltrioxid SO_3. Bei höherer Temperatur reagiert er mit Metallen zu Sulfiden, mit Wasserstoff zu Schwefelwasserstoff H_2S.
Verwendung: zur Herstellung von Kohlendisulfid, Schwefelsäure, Natriumthiosulfat, Schwefelfarbstoffen, Ultramarinblau; zur Vulkanisation des Kautschuks; in der Medizin.

Schwefelwasserstoff (H_2S)

Vorkommen: in Schwefelquellen, Vulkan- und Erdgasen; bei faulenden Eiweißstoffen.

Herstellung:

— in der Technik durch Isolierung aus Wasser-, Leucht- und Kokereigas, z. B. nach dem *Alkazidverfahren:* Natriumsalze von Aminosäuren nehmen H_2S in der Kälte auf und geben es in der Wärme wieder ab.
— im Labor aus Eisen(II)-sulfid und Salzsäure: $FeS + 2HCl \rightarrow FeCl_2 + H_2S$.

Eigenschaften: sehr giftiges, farbloses, nach faulen Eiern riechendes Gas, das mit blauer Flamme verbrennt: $2H_2S + 3O_2 \rightarrow 2H_2O + 2SO_2$. H_2S ist in Wasser nur mäßig löslich; das „Schwefelwasserstoffwasser" trübt sich an der Luft allmählich infolge Ausscheidung von Schwefel; es ist eine sehr schwache Säure (Salze: *Sulfide*).
Sulfide: Salze des Schwefelwasserstoffs. *Schwermetallsulfide* sind wichtige Erze. Nur die *Alkali-* und *Erdalkalisulfide* sowie *Ammoniumsulfid* sind in Wasser löslich; die übrigen werden aus den Metallsalzlösungen durch Ammoniumsulfidlösung, einige extrem schwerlösliche sogar durch Schwefelwasserstoff aus saurer Lösung als charakteristisch gefärbte Niederschläge ausgefällt.

Schwefeldioxid (SO_2)

Vorkommen: in Vulkangasen; in Abgasen von Kohlefeuerungen.
Herstellung: durch Verbrennen von Schwefel ($S + O_2 \rightarrow SO_2$) oder Schwefelwasserstoff; aus Sulfiten durch stärkere Säuren: $Na_2SO_3 + 2HCl \rightarrow 2NaCl + H_2O + SO_2$; technisch durch Rösten sulfidischer Erze (z. B. von Pyrit: $4FeS_2 + 11O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$); technisch auch durch thermische Zersetzung von Gips oder Anhydrit (Erhitzen mit Koksgrus, Sand und Ton: $2CaSO_4 + C \xrightarrow{1300\,°C} 2CaO + 2SO_2 + CO_2$; CaO + Sand (SiO_2) + Ton (Al-Silikat) $\rightarrow$ Zement (Ca-Al-Silikat).
Eigenschaften: farbloses, schweres, stechend riechendes, hustenreizendes Gas, das bereits bei $-10\,°C$ flüssig wird, nicht brennbar ist und sich sehr leicht in Wasser löst. SO_2 wirkt bleichend auf viele Farbstoffe.
Verwendung: als Zwischenprodukt zur Herstellung von Schwefelsäure und anderen S-Verbindungen; zum Bleichen von Papier, Stroh und Wolle; zum Ausschwefeln von Weinfässern; für die Sulfochlorierung von Paraffin; flüssig zum Reinigen von Erdöl.

Schwefelsäure (H_2SO_4)

Herstellung:

Erzeugung von Schwefeldioxid (siehe oben), anschließend *Oxydation von Schwefeldioxid zu Schwefeltrioxid bzw. Schwefelsäure.*

- *Kontaktverfahren:* SO_2 wird bei 450 °C mit sauerstoffangereicherter Luft über Vanadinpentoxid-Katalysatoren (V_2O_5) geleitet; gemäß $2SO_2 + O_2 \rightleftharpoons 2SO_3$ entstehen weiße Nebel von *Schwefeltrioxid.* Diese werden von konz. Schwefelsäure zu *Dischwefelsäure* $H_2S_2O_7$ gebunden, die beim Verdünnen in Schwefelsäure übergeht: $H_2S_2O_7 + H_2O \rightarrow 2H_2SO_4$.
- *Nitroseverfahren* (auch *Turmverfahren*): SO_2 wird durch nitrose Gase gemäß $NO_2 + SO_2 \rightarrow NO + SO_3$ oxydiert; das Stickoxid NO geht durch spontane Sauerstoffaufnahme wieder in NO_2 über. SO_3 ergibt mit H_2O Schwefelsäure.

Physikalische Eigenschaften: farblose, ölige, geruchlose Flüssigkeit (Dichte $1{,}84\,g \cdot cm^{-3}$ bei 20 °C), die bei 338 °C unter Bildung hustenreizender SO_3-Nebel siedet. Sie ist sehr hygroskopisch; beim Verdünnen tritt starke Erwärmung auf (Hydratbildung, z. B. zu $H_2SO_4 \cdot H_2O$); deshalb:

Verdünnungsregel für Schwefelsäure:

Stets unter Umrühren Säure zu Wasser gießen, nie umgekehrt!

Chemische Eigenschaften: sehr starke, zweiwertige Säure (Salze: *Sulfate*); schon bei mäßiger Verdünnung ist sie in der 1. Stufe praktisch vollständig dissoziiert: $H_2SO_4 \rightleftharpoons H^+ + HSO_4^-$; die Hydrogensulfationen sind z. T. weiterdissoziiert: $HSO_4^- \rightleftharpoons H^+ + SO_4^{2-}$. — Da die Säure schwer flüchtig und sehr stark ist, verdrängt sie viele andere Säuren aus ihren Salzen. *Beispiele:*

$$CaF_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + 2HF$$

$$2CH_3COONa + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2CH_3COOH$$

Im Gegensatz zu verdünnter Säure greift die aus Molekülen bestehende *konzentrierte Säure* Metalle erst beim Erhitzen an; sie wirkt dann wie HNO_3 oxydierend (auch auf Cu, Hg und Ag) und wird dabei zu schwefliger Säure bzw. Schwefeldioxid reduziert; z. B. $Cu + 2H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2 + 2H_2O$. — Verdünnte Säure entwickelt mit unedlen Metallen Wasserstoff. — Konzentrierte Säure entzieht vielen organischen Stoffen die Elemente O und H in Form von Wasser; sie wird deshalb bei Veresterungen, Verätherungen, Nitrierungen u. a. als wasserentziehender Hilfsstoff verwendet.
Verwendung: H_2SO_4 gehört zu den wichtigsten chemisch-technischen Grundchemikalien. Sie dient zur Erzeugung von Chemiefaserstoffen, Düngesalzen, Explosivstoffen, Wasch-, Netz- und Emulgiermitteln, Teerfarbstoffen, Arzneimitteln, Sulfaten, Äthern, Estern, Säuren (Flußsäure, Weinsäure u. a.), zur Raffination von Mineralölen, zum Beizen von Metallen, für galvanische Elektrolyte (Verchromung, Aloxydierung u. a.), für Bleiakkumulatoren und für viele andere Zwecke.

Sulfate

Übersicht:

Glaubersalz $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$, Bittersalz $MgSO_4 \cdot 7H_2O$, Ammonsulfat $(NH_4)_2SO_4$, ferner die Minerale: Gips, Anhydrit, Kieserit, Schwerspat, Zölestin.

- *Vitriole* sind kristallwasserhaltige Sulfate 2wertiger Metalle: Eisenvitriol $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ (grün), Kupfervitriol $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ (blau), Nickelvitriol $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ (smaragdgrün), Kobaltvitriol $CoSO_4 \cdot 7H_2O$ (himbeerrot), Zinkvitriol $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ (farblos).
- *Alaune* sind Doppelsulfate der allgemeinen Formel $Me_2^{I}SO \cdot Me_2^{III}(SO_4)_3 \cdot 24H_2O$ (Me^{I} = 1wertiges Metall: K, NH_4, Rb, Cs); [Me^{III} = 3wertiges Metall: Cr, Al, Fe, V(III)].

Beispiele:

„Alaun" (Kaliumaluminiumsulfat) $K_2SO_4 \cdot Al_2(SO_4)_3 \cdot 24H_2O$
„Chromalaun" (Kaliumchromsulfat) $K_2SO_4 \cdot Cr_2(SO_4)_3 \cdot 24H_2O$

Löslichkeit: Die Sulfate von Pb, Ca, Sr und Ba sind in Wasser schwer löslich bis praktisch unlöslich; die meisten übrigen lösen sich leicht in Wasser.

Weitere Schwefelverbindungen

Schweflige Säure H_2SO_3: steht stets im Gleichgewicht mit ihren Zerfallsprodukten ($SO_2 + H_2O \rightleftharpoons H_2SO_3$) und ist daher nur in wäßriger Lösung existenzfähig. Schwache bis mittelstarke Säure; Salze: *Sulfite.*

Sulfite: In Wasser leicht löslich sind nur die Alkalisulfite; sie gehen beim Kochen mit Schwefel in Thiosulfate über. Alle Sulfite werden durch stärkere oder weniger flüchtige Säuren unter Schwefeldioxidentwicklung zersetzt. Wichtige Sulfite sind: *Natriumsulfit* Na_2SO_3 und *Natriumhydrogensulfit* $NaHSO_3$. Eine Lösung von *Kalziumhydrogensulfit* $Ca(HSO_3)_2$, aus Kalkstein, Schwefeldioxid und Wasser gewonnen, dient als *„Sulfitlauge"* zum Herauslösen des Lignins aus Holz bei der Zellstoffgewinnung.
Schwefeltrioxid SO_3: *Herstellung* durch katalytische Oxydation von Schwefeldioxid; *Eigenschaften:* 3 Modifikationen; die bekannteste bildet seidenglänzende Nadeln, die bei 40 °C zu schmelzen beginnen, an der Luft stark rauchen und mit Wasser explosionsartig heftig zu Schwefelsäure reagieren.
Thioschwefelsäure $H_2S_2O_3$: nur bei sehr tiefen Temperaturen beständig. Ihre Salze, die *Thiosulfate,* bilden sich beim Kochen von Sulfitlösungen mit Schwefel: $Na_2SO_3 + S \rightarrow Na_2S_2O_3$.
Über *Natriumthiosulfat* s. unter Natrium.
Dithionige Säure $H_2S_2O_4$ ist in freiem Zustand nicht bekannt. Wichtig ist *Natriumdithionit* $Na_2S_2O_4$: sehr starkes Reduktionsmittel, das in der Küpenfärberei, im Ätzdruck und in Entfärbern verwendet wird.

3.7.4. Selen, Tellur, Polonium

Selen [Symbol Se; *selene* (grch.) Mond]: begleitet Schwefel in sulfidischen Erzen; wird z. B. aus dem Anodenschlamm der elektrolytischen Kupferraffination gewonnen. — 2 Modifikationen: *metallisches (graues) Selen* ist eine graue, schwach glänzende Masse, deren elektrische Leitfähigkeit mit zunehmender Belichtung ansteigt; Anwendung für Fotozellen und Gleichrichter. *Rotes Selen* ist nichtmetallisch und löst sich z. B. in Kohlendisulfid. Beide Formen verbrennen zu einem weißen Rauch von *Selendioxid* SeO_2.
Tellur [Symbol Te; *tellus* (lat.) Erde]: silberweiß-metallische, weiche, jedoch spröde Kristalle; Halbleiter.
Polonium [Symbol Po; nach Polen]: radioaktives, äußerst seltenes Metall; ohne technische Verwendung.

3.8. Elemente der VII. Hauptgruppe (Halogene)

3.8.1. Allgemeines

Elemente: Fluor (F), Chlor (Cl), Brom (Br), Jod (J), Astat (At). *„Halogene"* → Salzbildner.
Wertigkeit: F tritt nur −1wertig auf; die übrigen Elemente sind hauptsächlich −1- und +7wertig. Zunehmend unbeständiger sind die Wertigkeitsstufen +5, +3 und +1.
Metallischer Charakter: Die Elemente sind durchweg Nichtmetalle, doch machen sich in Richtung zum At zunehmend metallische Eigenschaften bemerkbar.
Hydroxide: Die Element(VII)-hydroxide sind (in wasserärmeren Formen) nur von Cl und J bekannt. Analog zu den Verhältnissen in der VI. Gruppe nimmt die Säurestärke vom Cl zum J ab: $HClO_4$ [$=Cl(OH)_7 - 3H_2O$] ist die stärkste Sauerstoffsäure; H_5JO_6 ist nur schwach sauer. — Mit abnehmender positiver Wertigkeit nimmt auch ihre Säurestärke ab, so sinkt sie z. B. in der Reihenfolge $HClO_4$; $HClO_3$, $HClO_2$, $HClO$. — Verglichen mit den entsprechenden Verbindungen der VI. Gruppe haben alle Säuren der VII. Gruppe stärker sauren Charakter.
Hydride: Die wäßrigen Lösungen der Halogenwasserstoffe sind Säuren; ihre Stärke nimmt vom HF (mittel) bis HJ (sehr stark) zu (HAt ist noch zu wenig untersucht); dagegen nimmt ihre Beständigkeit gegenüber Oxydation vom HF zum HJ ab. Die Halogenwasserstoffsäuren sind stärker sauer als die Chalkogenwasserstoffsäuren.
Verdrängungsreaktionen: Die Reaktionsfähigkeit der Halogene gegenüber Metallen und Wasserstoff nimmt vom F zum J ab; gegenüber Sauerstoff nimmt sie zu. Entsprechend verdrängt das jeweils reaktionsfähigere Halogen das weniger reaktionsfähige aus seiner Verbindung, z. B. $2KJ + Cl_2 \rightarrow 2KCl + J_2$ (Ionengleichung: $2J^- + Cl_2 \rightarrow J_2 + 2Cl^-$); andererseits: $2KClO_3 + J_2 \rightarrow 2KJO_3 + Cl_2$.

Tabelle 9. Halogene*)

	Fluor	Chlor	Brom	Jod
Symbol	F	Cl	Br	J
Kernladungszahl	9	17	35	53
Relative Atommasse	19,00	35,45	79,91	126,90
Schmelzpunkt in °C	−218	−102,4	−7,3	+113,7
Siedepunkt in °C	−187,9	−34,0	+58,8	+184,5
Dichte in g · cm^{-3} (flüssig)	1,11**)	1,57**)	3,14***)	4,94***)
Farbe (gasförmig)	schwach gelblich-grün	gelblichgrün	rotbraun	violett

*) ohne Astat, **) für die flüssige Phase beim Siedepunkt, ***) bei 20 °C und Normaldruck

3.8.2. Fluor und Fluorverbindungen

Allgemeines

Symbol: F [*fluere* (lat.) fließen]; *Wertigkeit:* −1.
Vorkommen: nur chemisch gebunden, hauptsächlich in den Mineralen: Flußspat (*Fluorit*) CaF_2, Eisstein (*Kryolith*) $Na_3[AlF_6]$, Fluorapatit $3Ca_3(PO_4)_2 \cdot CaF_2 \triangleq Ca_5(PO_4)_3F$.

Elementares Fluor (F_2)

Herstellung: durch Elektrolyse von KF in flüssigem Fluorwasserstoff mit Spezialkohle- oder Nickelanoden in Geräten aus Mg oder Cu (bilden Fluoridschutzschicht).
Eigenschaften: schwach gelblich-grünes Gas mit durchdringend chlorähnlichem Geruch. Reaktionsfähigstes Nichtmetall; verbindet sich mit fast allen anderen Elementen (auch einigen Edelgasen) zu Fluoriden: reagiert mit H_2 selbst unterhalb −200 °C noch explosionsartig; verdrängt die übrigen Halogene und auch Sauerstoff aus ihren Verbindungen mit Wasserstoff und den Metallen, zersetzt z. B. Wasser gemäß: $2H_2O + 2F_2 \rightarrow 4HF + O_2$.
Verwendung: zur Herstellung spezieller F-Verbindungen, z. B. von UF_6 zur Isotopentrennung des Urans.

Fluorverbindungen

Fluorwasserstoff HF (im Gleichgewicht mit H_2F_2): farbloses, an feuchter Luft Nebel bildendes giftiges Gas von stechendsaurem Geruch, das bei 19,6 °C flüssig wird.
Herstellung: aus Fluoriden (technisch Flußspat) durch konz. Schwefelsäure: $CaF_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + 2HF$. Fluorwasserstoff ätzt Glas und andere Silikate unter Bildung des gasförmigen SiF_4: $SiO_2 + 4HF \rightarrow SiF_4 + 2H_2O$. *Verwendung:* zum Mattätzen von Glas und zur Herstellung anderer F-Verbindungen.

Flußsäure ist die wäßrige Lösung von HF (handelsübliche Konzentrationen: 72%ig, 50%ig, 40%ig). Mittelstarke Säure; *Salze:* Fluoride. Aufbewahrung in Polyäthylen- oder PVC-Flaschen. Flußsäure ist giftig und besonders schädlich für Schleimhäute und verletzte Haut. *Verwendung:* zum Blankätzen von Glas, zum Beizen von Gußeisen, zur Herstellung anderer F-Verbindungen.

Fluoride: Salze der Flußsäure. *Natriumfluorid* NaF ist giftig, schützt Holz vor Fäulnis und dient in kleinen Dosen zum Fluoridieren von Trinkwasser zur Bekämpfung der Zahnkaries. — *Kalziumfluorid* CaF_2, in der Natur als „Flußspat" vorkommend, ist schwer löslich und dient in der Metallurgie als Flußmittel (erniedrigt den Schmelzpunkt von Schlacken). — *Natriumhexafluoroaluminat* $Na_3[AlF_6]$, „Kryolith", wird auch künstlich hergestellt und dient als Lösungsmittel für Al_2O_3 bei der Al-Gewinnung.

3.8.3. Chlor und Chlorverbindungen

Allgemeines

Symbol: Cl [*chloros* (grch.) gelbgrün]; *Wertigkeit:* −1, +7; +5; +3; +1; (+4).
Vorkommen: nur gebunden, besonders im Meerwasser (enthält 2% Cl^--Ionen) und den daraus entstandenen Salzlagern; elfthäufigstes Element der Erdkruste.
Minerale: Steinsalz (*Halit*) NaCl, Sylvin KCl, Carnallit $KCl \cdot MgCl_2 \cdot 6H_2O$, Kainit $KCl \cdot MgSO_4 \cdot 3H_2O$.



Elementares Chlor (Cl_2)

Herstellung:

— durch Oxydation von Salzsäure mit Kaliumpermanganat, Braunstein, Chlorkalk u. a.:

$$2KMnO_4 + 16HCl \rightarrow 2KCl + 2MnCl_2 + 8H_2O + 5Cl_2$$

$$MnO_2 + 4HCl \rightarrow MnCl_2 + 2H_2O + Cl_2$$

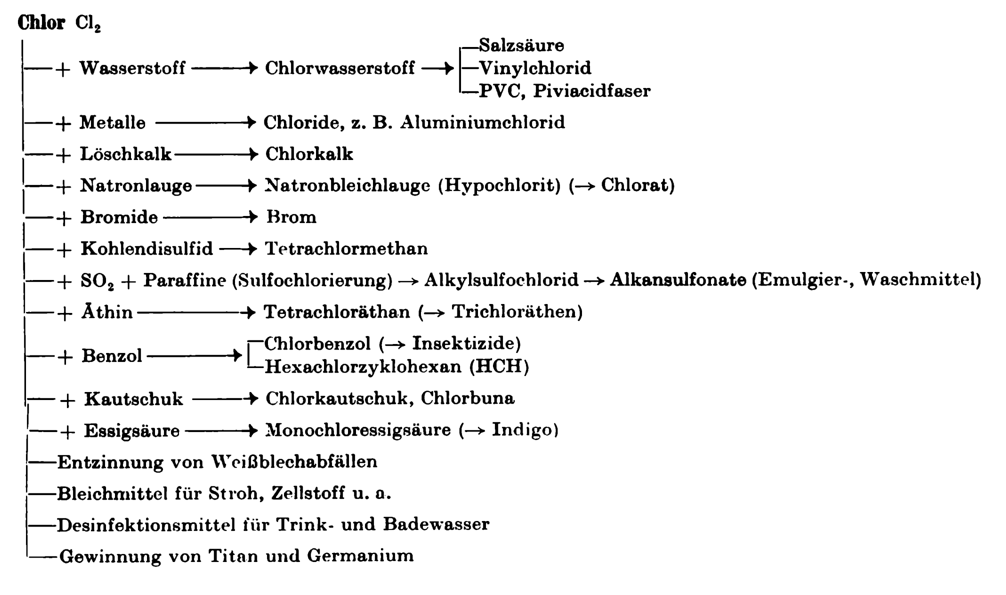
$$CaCl(OCl) + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + Cl_2$$

— technisch durch Alkalichloridelektrolyse und durch Elektrolyse von „Abfallsalzsäure".

Eigenschaften: gelbgrünes, nicht brennbares, stechend riechendes Gas; 2,5mal schwerer als Luft; in Wasser mäßig löslich zu Chlorwasser. Chlor ist sehr reaktionsfähig, verdrängt Brom und Jod aus ihren Wasserstoff- und Metallverbindungen und verbindet sich mit vielen anderen Elementen zu Chloriden. Gemische aus Chlor und Wasserstoff (*Chlorknallgas*) explodieren bei Zufuhr von Wärme oder Licht (Sonnen- oder Mg-Licht): $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$. Feuchtes Chlor bleicht viele Farbstoffe, da sich, besonders im Sonnenlicht, mit Wasser allmählich Monosauerstoff bildet; $H_2O + Cl_2 \rightarrow 2HCl + (O)$; daher ist Chlorwasser in braunen Flaschen aufzubewahren. — Chlorgas ätzt stark die Schleimhäute der Atmungsorgane und zerstört die Lungengewebe.

Verwendung: Chlor gehört zu den wichtigsten Grundchemikalien der chemischen Industrie. — Flüssiges, trockenes Chlor kommt in Stahlflaschen mit Rotgußventil in den Handel.

Technische Verwendung von Chlor



Chlorwasserstoff (HCl) und Salzsäure

Herstellung:

— durch Synthese (Verbrennung von Wasserstoff in Chlor): $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$
— aus Chloriden (Kochsalz) und konz. Schwefelsäure

bei niedriger Temperatur:	$NaCl + H_2SO_4 \rightarrow NaHSO_4 + HCl$
bei höherer Temperatur:	$NaCl + NaHSO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + HCl$
Gesamtreaktion:	$2NaCl + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2HCl$

Eigenschaften: farbloses, stechend riechendes hygroskopisches Gas, das an feuchter Luft weiße Nebel bildet. In Wasser löst es sich zu Salzsäure. Mit Ammoniak entsteht ein dichter weißer Rauch von festem Ammoniumchlorid; $NH_3 + HCl \rightarrow NH_4Cl$.

Verwendung: zur Herstellung von Salzsäure, Chloriden und Vinylchlorid (für PVC und PVC-Faser).

Salzsäure: farblose Flüssigkeit, die ständig um so mehr HCl abgibt, je konzentrierter sie ist, und dann an der Luft stark raucht. Salze: Chloride. Die handelsübliche konzentrierte Säure ist etwa 38%ig. Salzsäure löst die unedlen Metalle (nicht z. B. Kupfer) unter H_2-Entwicklung zu Chloriden, z. B. $2Al + 6HCl \rightarrow 2AlCl_3 + 3H_2$. Starke Oxydationsmittel, z. B. $KMnO_4$, machen Chlor frei.
Verwendung: zum Beizen von Metallen; für Lötwasser (Zn + HCl); zum Lösen von Metallen aus Erzen; zur Herstellung von Chloriden und Chlor.

Sauerstoffsäuren des Chlors und ihre Salze

Tabelle 10. Chlorsauerstoffsäuren und ihre Salze

Formel	Name	Name der Salze
$HClO_4$	Perchlorsäure	Perchlorat
$HClO_3$	Chlorsäure	Chlorat
$HClO_2$	chlorige Säure	Chlorit
HClO	hypochlorige Säure	Hypochlorit

Perchlorsäure $HClO_4$ (früher: *Überchlorsäure*) ist die stärkste Sauerstoffsäure. Wasserfrei leicht beweglich und explosiv, nimmt sie bei mäßiger Verdünnung ölige Konsistenz an und ist wesentlich beständiger.

Chlorsäure $HClO_3$ ist nur verdünnt (bis 40%) beständig. Die *Chlorate* bilden sich aus Chlor und heißer Alkalilauge: $6NaOH + 3Cl_2 \rightarrow NaClO_3 + 5NaCl + 3H_2O$. Sie sind starke Oxydationsmittel, z. B. explodieren Gemische von Kaliumchlorat und Schwefel beim Verreiben. Beim Erhitzen geben die Chlorate ihren Sauerstoff ab; die Zersetzung wird durch Braunstein katalytisch beschleunigt: $2KClO_3 \rightarrow 2KCl + 3O_2$. — *Kaliumchlorat* $KClO_3$ wird für Zündhölzer, Explosivstoffe und Feuerwerkskörper verwendet, *Natriumchlorat* $NaClO_3$ zur Unkrautbekämpfung.

Hypochlorige Säure HClO (früher: *unterchlorige Säure*) ist nur verdünnt existenzfähig; die Säure besitzt einen chlorähnlichen Geruch und ist wie ihre Salze, die *Hypochlorite*, ein starkes Oxydationsmittel. Ihre Anwesenheit im Chlorwasser geht auf die Reaktion $Cl_2 + H_2O \rightarrow HCl + HClO$ zurück. — *Natrium-* und *Kaliumhypochlorit* sind in den aus Alkalilaugen und Chlor erhältlichen *Bleichlaugen* (Kali- und Natronbleichlauge) enthalten, z. B. gemäß: $2KOH + Cl_2 \rightarrow KCl + KClO + H_2O$. Die Bleichlaugen geben leicht Sauerstoff ab und dienen als Bleich-, Desinfektions- und Entgiftungsmittel (z. B. zur Entgiftung galvanischer Abwässer). — *Chlorkalk* CaCl(ClO), *Kalziumchloridhypochlorit*, entsteht aus Chlor und Löschkalk und dient ebenfalls zum Bleichen und Desinfizieren.

3.8.4. Brom und Bromverbindungen

Symbol: Br [*bromos* (grch.) übelriechend]; *Wertigkeit:* −1, +5, +3, +1; *Vorkommen:* Br begleitet Cl in dessen Verbindungen in kleiner Menge (Salzlager, Meerwasser u. a.).
Herstellung: aus Bromiden, z. B. bromidhaltigen Endlaugen der Kaliindustrie, durch Chlor: $MgBr_2 + Cl_2 \rightarrow MgCl_2 + Br_2$.
Eigenschaften: intensiv schwarzrote Flüssigkeit, die unter Bildung brauner, stechend riechender, schwerer Dämpfe rasch verdunstet; in Chloroform, Kohlendisulfid und Benzol leicht, in Wasser nur wenig löslich („Bromwasser"). Es wirkt stark ätzend auf Haut und Atmungsorgane, zerstört auch Holz, Kork, Gummi rasch; verbindet sich mit vielen Elementen zu Bromiden.

Bromverbindungen: ähneln sehr stark den Chlorverbindungen; jedoch ist die Säure $HBrO_4$ nebst Salzen nicht bekannt.
Bromwasserstoff HBr ist wie HCl ein farbloses, an feuchter Luft rauchendes, stechend riechendes Gas; es ist jedoch unbeständiger. Die wäßrige Lösung, **Bromwasserstoffsäure**, ähnelt der Salzsäure.

3.8.5. Jod und Jodverbindungen

Symbol: J [ioeides (grch.) violett]; *Wertigkeit:* −1; +7, +5, +3, +1. *Vorkommen:* sehr selten; im Chilesalpeter (als $NaJO_3$) und in Organismen.
Eigenschaften: grauschwarze, metallisch glänzende, scharf riechende Kristalle, die an der Luft allmählich verdampfen. Bei langsamem Erhitzen sublimiert Jod; der Dampf sieht intensiv violett aus. J_2 löst sich leicht mit brauner Farbe in Äthanol („*Jodtinktur*"), mit violetter Farbe in Kohlendisulfid und Chloroform. In Wasser ist Jod nur sehr wenig löslich, leicht dagegen auf Zusatz von Kaliumjodid mit brauner Farbe

(*„Jodjodkaliumlösung“*). Jod ist reaktionsträger als Fluor, Chlor und Brom; dennoch ist es sehr aggressiv, bildet mit vielen Elementen Jodide, zerstört auch Kork, Gummi u. dgl.

Jodverbindungen: *Jodwasserstoff* HJ bildet sich aus Jod und feuchtem rotem Phosphor: $2P + 3J_2 \rightarrow 2PJ_3$; $PJ_3 + 3H_2O \rightarrow 3HJ + H_3PO_3$. Die wäßrige Lösung, *Jodwasserstoffsäure*, ist eine sehr starke Säure. HJ ist leicht oxydierbar, wobei freies Jod entsteht. — *Jodsäure* HJO_3 (farblose Kristalle) bildet als Salze die *Jodate*.

3.8.6. Astat

Astat, *Astatin* [Symbol: At; *astatin* (grch.) das Unbeständige], ist ein kurzlebiges, radioaktives Element (Halbwertszeit von At 210: 8,3 Stunden).

3.9. Elemente der VIII. Hauptgruppe (Edelgase)

Elemente: Helium [He; *helios* (grch.) Sonne], Neon [Ne; *to neon* (grch.) das Neue], Argon [Ar; *argos* (grch.) das Träge], Krypton [Kr; *kryptos* (grch.) verborgen], Xenon [Xe; *to xenon* (grch.) das Fremde], Radon [Rn; *radius* (lat.) Strahl, von seiner radioaktiven Strahlung].
Vorkommen: in der Luft, Rn in radioaktiven Quellwässern. He kommt auch in manchen Erdgasen und in radioaktiven Mineralen vor.
Gewinnung: aus Luft durch fraktionierte Kondensation und Destillation, kombiniert mit Adsorption an Aktivkohle oder Silikagel. Argon reichert sich auch im Kreislaufgas der Ammoniaksynthese an und wird daraus isoliert.
Physikalische Eigenschaften: farb-, geruch- und geschmacklose, in Wasser wenig lösliche Gase. ^{3}He und ^{4}He sind die einzigen auch bei sehr starker Annäherung an den absoluten Nullpunkt noch flüssigen Stoffe.

Tabelle 11. Edelgase

	Helium	Neon	Argon	Krypton	Xenon	Radon
Symbol	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn
Kernladungszahl	2	10	18	36	54	86
Relative Atommasse	4,00	20,18	39,95	83,80	131,30	222
Schmelzpunkt in °C	−272,1*)	−248,6	−189,4	−156,6	−111,5	−71
Siedepunkt in °C	−268,9	−246,0	−185,9	−152,9	−107,1	−65
Dichte in kg/m³ bei Normbedingungen	0,18	0,90	1,78	3,74	5,89	9,96
Wertigkeit	0	0	0	0; 2; 4	0; 2; 4; 6; 8	0; ?

*) bei 2,5 MPa

Helium ist das am schwersten zu verflüssigende Gas. Flüssiges He existiert in 2 *Modifikationen*: Während sich *Helium I* wie eine gewöhnliche Flüssigkeit verhält, ist *Helium II* suprawärmeleitend und suprafluid. Es leitet die Wärme zehnmillionenmal besser als Helium I (1000mal besser als Silber!) und weist praktisch keine Viskosität auf, fließt also rasch durch engste Kapillaren und überkriecht spontan Gefäßwände als dünner Film.
Chemische Eigenschaften: Die Edelgase sind äußerst reaktionsträge. Relativ am leichtesten reagieren die schweren Edelgase, und zwar mit Fluor.
Verwendung: Die leichten Edelgase (He, Ne, Ar) sind Füllgase für Leuchtröhren und Glimmlampen, die mittleren (Kr, Ar) setzen in Glühlampen die Lichtausbeute herauf (normale Glühlampen enthalten etwa 90% Ar und 10% N_2). Xenon ist infolge seines sonnenähnlichen Lichts in fotografischen Elektronenblitzgeräten enthalten. — Helium wird außerdem für Ballonfüllungen und für „Taucherluft“ (80 Vol.-% He + 20 Vol.-% O_2) verwendet, Argon als Schutzgas beim Schweißen.

Edelgasverbindungen: seit 1962 bekannt, z. B. *Xenon(VIII)-fluorid* XeF_8.

3.10. Elemente der I. Nebengruppe (Kupfergruppe)

Bei allen Elementen überschreitet die maximale Wertigkeit die Gruppennummer, da nicht nur das Außenelektron an der chemischen Bindung beteiligt ist.

Tabelle 12. Kupfergruppe

	Kupfer	Silber	Gold
Symbol	Cu	Ag	Au
Kernladungszahl	29	47	79
Relative Atommasse	63,55	107,868	196,96
Schmelzpunkt in °C	1083	960	1063
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	8,9	10,5	19,3
Wertigkeit	**2**; 1	**1**; (2)	**3**; 1

3.10.1. Kupfer und Kupferverbindungen

Allgemeines

Symbol: Cu [*cuprum* (lat.); benannt nach der Insel Zypern]; *Wertigkeit:* +2, +1.
Vorkommen: selten gediegen, meist als Sulfid. Der „Mansfelder Kupferschiefer" ist kein Erz, sondern ein bituminöser Mergel, in welchem viele Erze feinverteilt eingelagert sind.
Minerale: Kupferkies (*Chalkopyrit*) $CuFeS_2$, Buntkupferkies (Bornit) Cu_3FeS_3, Kupferglanz (Chalkosin) Cu_2S, Rotkupfererz (Kuprit) Cu_2O, Malachit $CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$, Azurit $2CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$.

Metallisches Kupfer

Herstellung:

- Oxidische Erze werden mit Koks reduziert.
- Aus Mansfelder Kupferschiefer wird in Kupferschachtöfen zunächst „*Kupferstein*" (Cu_2S, FeS und andere Sulfide, wie NiS und Ag_2S) erschmolzen (Schlacke → Pflastersteine). Im Konverter entsteht daraus durch seitliches Einblasen von Luft *Schwarzkupfer* ($Cu_2S + O_2 \rightarrow 2Cu + SO_2$; Schwefeldioxid → Schwefelsäure). Dieses wird oxydativ (→ *Garkupfer*) und für die meisten Zwecke noch elektrolytisch raffiniert (→ *Elektrolytkupfer*, Nebenprodukte: Silber, Selen, Nickelsulfat u. a.).
- Cu-Pulver entsteht aus Kupfersalzlösungen durch Zink, Eisen oder Aluminium: $CuSO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + Cu$. Ionengleichung: $Cu^{2+} + Zn \rightarrow Cu + Zn^{2+}$.

Eigenschaften: rotglänzendes, zähes, weiches Metall (wird durch Hämmern hart, durch Abschrecken wieder weich); ist nach Silber der beste Leiter für Elektrizität und Wärme. Beim Glühen an der Luft entsteht schwarzes, abblätterndes Kupfer(II)-oxid; die grüne „*Patina*" auf Kupferdächern besteht meist aus Hydroxidsulfat. Kupfer ist edler als Wasserstoff und löst sich demnach nur in oxydierenden Säuren: in HNO_3 unter Entwicklung nitroser Gase, in heißer, konzentrierter Schwefelsäure unter Bildung von Schwefeldioxid. Auch in $FeCl_3$- und $CuCl_2$-Lösung löst sich Kupfer auf, z. B. gemäß $Cu + 2FeCl_3 \rightarrow CuCl_2 + 2FeCl_2$.

Kupferverbindungen

Kupfer(I)-verbindungen: gehen meist an der Luft in Kupfer(II)-verbindungen über. *Kupfer(I)-oxid* Cu_2O ist ein rotes Pulver.
Kupfer(II)-sulfat $CuSO_4$ kristallisiert als *Kupfervitriol* $CuSO_4 \cdot 5H_2O$. Blaue, giftige, wasserlösliche Kristalle, die beim Erhitzen unter Abgabe des Kristallwassers zu einem weißen Pulver von wasserfreiem Kupfersulfat zerfallen. Dieses wird mit Wasser wieder blau (Nachweis für Wasser, z. B. in Alkohol). Anwendung zur Schädlingsbekämpfung, für galvanische Kupferelektrolyte und zum Anreißen auf Stahl.

Weitere Kupfer(II)-verbindungen: *Kupfer(II)-chlorid* $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ bildet grüne bis blaugrüne Kristalle; konzentrierte Lösungen sehen grün, verdünnte blau aus. — *Kupfer(II)-hydroxid* $Cu(OH)_2$ fällt als blauer, flockiger Niederschlag aus Kupfer(II)-salzlösungen durch Alkalilaugen aus; beim Erhitzen geht es in schwarzes *Kupfer(II)-oxid* CuO über, das auch beim Glühen von Kupfer an der Luft entsteht. — Mit Ammoniak färben sich Kupfer(II)-salzlösungen intensiv ultramarinblau, wobei sich z. B. *Tetrammin-kupfer(II)-sulfat* $[Cu(NH_3)_4]SO_4$ bildet. — Echter *Grünspan* ist *Kupfer(II)-hydroxidazetat* wechselnder Zusammensetzung, z. B. $Cu(CH_3COO)_2 \cdot Cu(OH)_2$.

3.10.2. Silber und Silberverbindungen

Allgemeines

Symbol: Ag [*argentum* (lat.)]; *Wertigkeit:* +1, (+2). — *Vorkommen:* manchmal gediegen, meist an Schwefel gebunden als Begleiter von Bleiglanz und Kupferkies. — Hauptmineral **Silberglanz** (*Argentit*) Ag_2S.

Metallisches Silber

Herstellung:

- aus Silbererzen durch „*Zyanidlaugerei*" mittels NaCN-Lösung: $Ag_2S + 4NaCN \rightarrow 2Na[Ag(CN)_2] + Na_2S$. Aus der Komplexsalzlösung fällt man das Silber durch Zinkpulver: $2Na[Ag(CN)_2] + Zn \rightarrow Na_2[Zn(CN)_4] + 2Ag$. Reinigung durch elektrolytische Raffination (in Silbernitratelektrolyten).
- aus silberhaltigem „Werkblei" durch Zinkentsilberung („*Parkesierung*"). Flüssiges Zink extrahiert das Silber aus dem Blei; nach Abdestillation des Zinks aus dem abgeschöpften Zinkschaum wird das restliche Blei in einem Flammofen durch Oxydation entfernt, bis die letzte Haut Bleiglätte reißt und der „Silberblick" sichtbar wird.
- aus den Anodenschlämmen der elektrolytischen Kupfer-, Nickel- und Bleiraffination durch Schmelzen und elektrolytische Raffination in Silbernitratlösung.

Eigenschaften: weiches, sehr dehnbares Edelmetall; hat von allen Metallen die beste Leitfähigkeit für Elektrizität und Wärme. Durch Schwefelwasserstoff wird es geschwärzt; hierauf beruht auch das Nachdunkeln an der Luft: $4Ag + 2H_2S + O_2 \rightarrow 2Ag_2S + 2H_2O$. Infolge seines edlen Charakters wird Silber nur von oxydierenden Säuren (Salpetersäure; heiße, konzentrierte Schwefelsäure) gelöst.

Verwendung: als Schmuck- und Münzmetall; für Spiegel, elektrische Kontakte, chemische Gefäße; als Anoden zum Versilbern; zur Herstellung von Silbersalzen (besonders für fotografische Zwecke).

Silberverbindungen

Meist farblos und lichtempfindlich (Aufbewahrung in braunen Flaschen!). Auf der Haut bilden Silbersalze schwarze, schwer entfernbare Flecke aus metallischem Silber. — ***Silbernitrat, Höllenstein***, $AgNO_3$, bildet farblose, sehr leicht lösliche Kristalle und wird zur Herstellung anderer Ag-Verbindungen sowie in der Medizin als Ätzmittel verwendet. — ***Silberchlorid, -bromid*** und ***-jodid***, AgCl, AgBr und AgJ, fallen als „käsige" Niederschläge aus Silbersalz- und entsprechenden Halogenidlösungen aus und dienen als lichtempfindliche Stoffe in der Fotografie. AgCl sieht weiß, AgBr gelblich weiß, AgJ hellgelb aus; die Löslichkeit ist bereits beim Chlorid sehr gering und sinkt bis zum Jodid weiter ab. — ***Silberoxid***, Ag_2O, fällt aus Silbersalzlösungen durch Alkalilaugen als brauner Niederschlag; Ammoniak löst zu ***Diamminsilbersalzen***, z. B. $[Ag(NH_3)_2]NO_3$ („*ammoniakalische Silberlösung*" zum Verspiegeln von Glas, Plasten und anderen nichtmetallischen Werkstoffen durch Einwirkung von Glukose). — ***Silbersulfid***, Ag_2S, bildet sich auf Silber an der Luft in Gegenwart auch sehr geringer Spuren Schwefelwasserstoff; es wird bei der „*Altsilberfärbung*" mittels Kaliumpolysulfidlösung auf Silber künstlich erzeugt.

3.10.3. Gold und Goldverbindungen

Allgemeines

Symbol: Au [*aurum* (lat.)]; *Wertigkeit:* +3, +1. — *Vorkommen:* meist gediegen. *Berggold* findet sich auf primärer Lagerstätte, *Seifengold* auf sekundärer Lagerstätte in Flußsanden. Meerwasser enthält nur 10 mg/m^3 Gold, so daß die Gewinnung nicht lohnt.

Gewinnung:

- durch *Schlämmen* („Goldwäscherei").
- durch *Zyanidlaugerei* mit lufthaltiger Natriumzyanidlösung: $4Au + 8NaCN + 2H_2O + O_2 \rightarrow 4Na[Au(CN)_2] + 4NaOH$; anschließend wird das Gold mit Zinkstaub gefällt und elektrolytisch (in Elektrolyten aus $H[AuCl_4] + HCl$) raffiniert.

Eigenschaften: schön gelbes, weiches Edelmetall von sehr guter Leitfähigkeit für Elektrizität und Wärme. Es ist das dehnbarste (duktilste) Metall und läßt sich z. B. zu grün durchscheinenden, in der Aufsicht jedoch immer noch golden aussehenden Blättchen von 0,1 µm Dicke auswalzen. An der Luft absolut beständig, wird es von Chlor, Brom und Königswasser leicht angegriffen; letzteres löst zu Tetrachlorogold(III)-säure $H[AuCl_4]$.

Verwendung: als Schmuckmetall; als Goldbarren zur Deckung von Papiergeld; in Zahntechnik, Porzellan- und Glasmalerei; zur Goldprägung auf Büchern; zur Herstellung von Goldverbindungen, z. B. für das Vergolden. Als Schmuckmetall wird es wegen seiner Weichheit mit Silber und Kupfer legiert. Der Goldgehalt („Feingehalt") wird z. Z. noch in Bruchteilen vom Tausend oder in Karat angegeben. Reines Gold (1000 fein) entspricht 24 Karat.

Goldverbindungen

Gold(III)-verbindungen sind meist beständiger als Gold(I)-verbindungen. Einfache Goldsalze existieren kaum; zumindest in wäßriger Lösung sind nahezu alle Verbindungen stark komplex. — *Tetrachlorogold(III)-säure* $H[AuCl_4]$ bildet hellgelbe, hygroskopische Nadeln (Salze: *Tetrachloroaurate*). „*Goldsalz*" ist *Natriumtetrachloroaurat(III)* $Na[AuCl_4]$; gelbe Kristalle. Komplexe *Goldzyanide* werden zum galvanischen Vergolden verwendet.

3.11. Elemente der II. Nebengruppe (Zinkgruppe)

Tabelle 13. Zinkgruppe

	Zink	Kadmium	Quecksilber
Symbol	Zn	Cd	Hg
Kernladungszahl	30	48	80
Relative Atommasse	65,37	112,40	200,59
Schmelzpunkt in °C	419,4	320,9	−38,8
Siedepunkt in °C	906	767	356,95
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	7,13	8,64	13,60
Wertigkeit	2	2	2; 1

3.11.1. Zink und Zinkverbindungen

Allgemeines

Symbol: Zn [*zincum* (lat.)]; *Wertigkeit:* +2.
Minerale: Zinkblende (*Sphalerit*) ZnS, Zinkspat (*edler Galmei*; *Smithsonit*) $ZnCO_3$.

Metallisches Zink

Herstellung:

- *Nasses* (*elektrolytisches*) *Verfahren:* Geröstete Zinkblende oder karbonatisches Zinkerz wird mit Schwefelsäure ausgelaugt; nach Reinigung der entstehenden Zinksulfatlösung mittels Zinkpulvers (Ausfällung von Cu, Cd u. a.) erfolgt Elektrolyse (Abscheidung an Al-Katoden).
- *Trockenes* (*chemisches*) *Verfahren* (wird immer mehr vom nassen abgelöst): Aus Zinkerzen durch Rösten ($2ZnS + 3O_2 \rightarrow 2ZnO + 2SO_2$) oder Brennen ($ZnCO_3 \rightarrow ZnO + CO_2$) hergestelltes Zinkoxid wird in Muffeln (kleinen Retorten, die in einem Muffelofen erhitzt werden) mit Kohle reduziert ($ZnO + C \rightarrow Zn + CO$); das Zink destilliert in luftgekühlte Vorlagen über, in denen es sich flüssig ansammelt.

Eigenschaften: bläulichweißes Metall, das sich walzen, schweißen, löten und gießen läßt. An der Luft bildet sich allmählich „Weißrost" (Zinkhydroxidkarbonat) aus, welcher das darunter befindliche Zink ziemlich gut schützt. Beim Erhitzen an der Luft, auch z. B. beim Gießen von Messing, verbrennt Zink mit grüner Flamme zu einem weißen Rauch von Zinkoxid ZnO. — Zink löst sich leicht in Säuren, langsam auch in Alkalilaugen unter Wasserstoffentwicklung; mit den Laugen bildet sich Zinkat: $Zn + 2NaOH + 2H_2O \rightarrow Na_2[Zn(OH)_4] + H_2$. Infolge seines relativ unedlen Charakters verdrängt Zink viele edlere Metalle aus ihren Salzlösungen.
Verwendung: zum Verzinken von Eisen und Stahl; als Legierungsmetall; als Konstruktionsmaterial; für Druckplatten und Anoden galvanischer Elektrolyte und galvanischer Ketten (Zink-Salmiak-Kohle-Elemente in Trockenelementen bzw. -batterien).

Zinkverbindungen

Zinkoxid ZnO: weißes, in der Hitze gelbes Pulver; entsteht durch Verbrennen des Metalls, durch Glühen des Hydroxids, Karbonats oder Nitrats oder durch Rösten des Sulfids. *Verwendung:* als Malerfarbe („Zinkweiß"), als Zusatz bei der Vulkanisation von Kautschuk.

Zinkhydroxid $Zn(OH)_2$: fällt als weißer, schleimiger Niederschlag aus Zinksalzlösungen durch Alkalilaugen und löst sich in deren Überschuß zu *Zinkat* ($Zn(OH)_2 + 2NaOH \rightarrow Na_2[Zn(OH)_4]$). Zinkhydroxid besitzt also *amphoteren* Charakter.

Zinkchlorid $ZnCl_2$: sehr hygroskopisches, weißes Pulver; kommt auch als porzellanartige Masse in den Handel. Es ist in dem aus Zink und Salzsäure bereiteten *Lötwasser* enthalten. *Verwendung:* als Flußmittel beim Feuerverzinken und -verzinnen.

Weitere Zinkverbindungen: *Zinksulfat* kristallisiert aus wäßrigen Lösungen als *Zinkvitriol* $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ in Form farbloser Kristalle, die zur Herstellung von Lithopone verwendet werden. — *Zinksulfid* ZnS, weiß, unlöslich, ist Bestandteil von *Lithopone* ($ZnS + BaSO_4$), einer weißen Malerfarbe, die aus Zinksulfatlösung durch Bariumsulfid ausfällt. Mit Spuren bestimmter Schwermetalle (Cu, Mn) geglüht, leuchtet ZnS nach Belichtung mit grünem Licht nach, so daß es für Leuchtfarben Anwendung findet. — Alle Zinkverbindungen sind giftig.

3.11.2. Kadmium und Kadmiumverbindungen

Symbol: Cd (cadmium); *Wertigkeit:* +2; *Vorkommen:* Cd begleitet Zink in dessen Erzen.

Metallisches Kadmium: silberweiß; weicher, leichter schmelzbar und an der Luft beständiger als Zink; hergestellt als Nebenprodukt der Zinkgewinnung; *Verwendung:* als Anodenmaterial beim galvanischen Verkadmen; als Bestandteil niedrigschmelzender Legierungen.

Kadmiumverbindungen: *Kadmiumoxid* CdO ist ein braunes Pulver: *Kadmiumsulfid* CdS ist die leuchtend gelbe Malerfarbe *Kadmiumgelb*; *Kadmiumrot* enthält das tiefrote Selenid CdSe. *Kadmiumchlorid* $CdCl_2 \cdot xH_2O$ ($x = 1 \cdots 4$), *-nitrat* $Cd(NO_3)_2 \cdot 4H_2O$ und *-sulfat* $CdSO_4 \cdot {}^8/_3 H_2O$ sind farblose, wasserlösliche Salze.

3.11.3. Quecksilber und Quecksilberverbindungen

Symbol: Hg [*hydrargyrum* (lat.) flüssiges Silber]; *Wertigkeit:* +2, +1.
Vorkommen: teils gediegen (Tröpfchen im Gestein), teils als rotes Mineral *Zinnober* (*Zinnabarit*) HgS. — *Physiologie:* Metallisches Quecksilber und seine löslichen Verbindungen sind sehr giftig. Verschüttetes Quecksilber ist restlos aufzulesen (Quecksilberzange; Zink- oder Kupferpulver), da der Dampf zu chronischen Vergiftungen führt. Lösliche Quecksilberverbindungen bewirken in Dosen von 0,2 ··· 1 g schwerste Vergiftungserscheinungen, die binnen eines Tages zum Tode führen.

Metallisches Quecksilber: *Herstellung:* durch Abrösten von Zinnober: $HgS + O_2 \rightarrow Hg + SO_2$. — *Eigenschaften:* flüssiges, silberglänzendes, an der Luft beständiges Metall, das bereits bei gewöhnlicher Temperatur einen erheblichen Dampfdruck besitzt. Es ist recht edel und löst sich daher nur in Salpetersäure, Königswasser und heißer, konzentrierter Schwefelsäure. *Verwendung:* für Thermometer, Barometer und andere wissenschaftliche Geräte; für Quecksilberdampflampen zur Erzeugung von ultraviolettem Licht; für Quecksilberdampfpumpen zur Erzeugung hoher Vakua.

Amalgame: Quecksilber löst viele Metalle (nicht Fe, Co, Ni) zu Legierungen, die Amalgame genannt werden Sie sind häufig flüssig oder sehr weich, in manchen Fällen jedoch auch hart; manche erhärten nach einer gewissen Zeit.

Quecksilber(I)-verbindungen: enthalten das Ion $^+Hg{-}Hg^+$ (auch Hg_2^{2+} geschrieben), z. B. *Quecksilber(I)-chlorid, Kalomel,* Hg_2Cl_2: weißes, unlösliches Pulver, das mit Ammoniak schwarz wird. Verwendung für Arzneimittel und für Kalomel-Elektroden.

Quecksilber(II)-verbindungen: *Quecksilber(II)-oxid* HgO, ein je nach Korngröße gelbes oder rotes Pulver, bildet sich bei 300 °C aus dem Metall an der Luft und zerfällt bei 400 °C wieder in die Elemente: $2HgO \rightleftharpoons 2Hg + O_2$. — *Quecksilber(II)-chlorid, Sublimat,* $HgCl_2$ ist farblos, sehr giftig, mäßig wasserlöslich und sublimiert beim Erhitzen; Desinfektions- und Sterilisationsmittel. — *Quecksilber(II)-sulfid* HgS kommt in einer schwarzen und in einer roten („*Zinnober*") Modifikation vor; Kunstmalfarbe.

3.12. Elemente der III. Nebengruppe (Skandiumgruppe)

Einteilung: Die III. Nebengruppe besteht aus den Elementen *Skandium* (Sc), *Yttrium* (Y), *Lanthan* (La) und *Aktinium* (Ac). Weiterhin rechnet man hierzu die *Lanthaniden* und die *Aktiniden*, je 14 Elemente, die im Periodensystem auf das Lanthan bzw. Aktinium folgen.

Seltenerdmetalle: Hierunter faßt man Sc, Y, La und die Lanthaniden zusammen. — *Wertigkeit:* +3; seltener +2, +4. — *Vorkommen:* vergesellschaftet als Silikate und Phosphate, z. B. im Monazitsand. — *Eigenschaften:* silberglänzende, an der Luft unbeständige Metalle; Dichte 7 ··· 9 g/cm³. — *Zer* wird mit 50% Eisen (*Zereisen*) als Zündmetall für Feuerzeuge, Gasanzünder u. dgl. verwendet; *Zer(III)-nitrat* $Ce(NO_3)_3$ dient zur Herstellung von Gasglühkörpern (s. u.).

Tabelle 14. Lanthaniden

Kernladungszahl	Symbol	Name	Kernladungszahl	Symbol	Name
58	Ce	Zer	65	Tb	Terbium
59	Pr	Praseodym	66	Dy	Dysprosium
60	Nd	Neodym	67	Ho	Holmium
61	Pm	Promethium	68	Er	Erbium
62	Sm	Samarium	69	Tm	Thulium
63	Eu	Europium	70	Yb	Ytterbium
64	Gd	Gadolinium	71	Lu	Lutetium

Tabelle 15. Aktiniden

Kernladungszahl	Symbol	Name	Kernladungszahl	Symbol	Name
90	Th	Thorium	97	Bk	Berkelium
91	Pa	Protaktinium	98	Cf	Kalifornium
92	U	Uran	99	Es	Einsteinium
93	Np	Neptunium	100	Fm	Fermium
94	Pu	Plutonium	101	Md	Mendelevium
95	Am	Amerizium	102	No	Nobelium
96	Cm	Curium	103	Lr	Lawrenzium

Aktiniden: Alle Aktiniden sind radioaktive Metalle; die Elemente bis Nr. 94 finden sich in der Natur. Am wichtigsten sind *Thorium* und *Uran*. Als *Transurane* bezeichnet man die auf das Uran folgenden Elemente; die *Transcuriumelemente* folgen auf das Curium. Die Transurane werden in Kernreaktoren oder Teilchenbeschleunigern durch Atomumwandlung hergestellt, insbesondere *Plutonium*, das in Reaktoren zur Gewinnung von Kernenergie dient. Die höheren Transurane sind sehr unbeständig; die Halbwertszeit von Lr 260 beträgt z. B. 3 min.

Thorium- und Thoriumverbindungen: *Thorium* (Th, nach dem germanischen Gott) ist silberweiß, weich und schmilzt bei 1700 °C; Dichte 11,7 g/cm³; es löst sich nur in rauchender Salzsäure sowie Königswasser und kommt ausschließlich +4wertig vor. Es ist schwach radioaktiv (Halbwertszeit von Th 232: $\approx 10^{10}$ Jahre). — *Thoriumnitrat* $Th(NO_3)_4$, farblos, ist sehr leicht löslich und dient im Gemisch mit 1% Zernitrat zum Tränken von Gasglühkörpern; beim ersten Anzünden entsteht aus dem Nitrat- ein Oxidgemisch, das beim Glühen ein sehr helles Licht aussendet.

Uran und Uranverbindungen: *Uran* (U, nach dem Planeten Uranus) kommt hauptsächlich in der *Uranpechblende* (Pechblende, Uraninit) U_3O_8 vor. Es ist ein silberweißes, ziemlich weiches Metall; Schmelzpunkt 1150 °C; Dichte 19,0 g/cm³; löslich in verdünnten Säuren zu Uran(III)-salzen. *Wertigkeit*: +6, +4. Uran ist radioaktiv (Halbwertszeit von U 238: $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre); das Isotop U 235 ist kernspaltbar. — *Uran(VI)-fluorid* UF_6 ist farblos und sublimiert bei 56 °C; es dient zur Trennung der U-Isotopen. — Die *Uranylsalze* enthalten das Kation UO_2^{2+}, z. B. *Uranylnitrat* $UO_2(NO_3)_2$, zitronengelbe, grün fluoreszierende, leicht lösliche Kristalle.

3.13. Elemente der IV. Nebengruppe (Titangruppe)

Tabelle 16. Titangruppe

	Titan	Zirkonium	Hafnium
Symbol	Ti	Zr	Hf
Kernladungszahl	22	40	72
Relative Atommasse	47,95	89,90	179,94
Schmelzpunkt in °C	1800	1860	2210
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	4,49	6,52	13,31
Wertigkeit	4; 3	4	4

Zur Titangruppe gehört noch *Kurtschatovium*, Symbol Ku, Kernladungszahl 104, ein künstliches, radioaktives, sehr unbeständiges Element (Halbwertszeit von Ku 261: 65 s).

Titan und Titanverbindungen: *Titan* (Symbol Ti; Titanen, grch. Sagengestalten) ist sehr verbreitet (neunthäufigstes Element der Erdkruste!), kommt jedoch nur selten in größeren Lagerstätten vor; *Minerale: Rutil* TiO_2, *Ilmenit* $FeTiO_3$. — *Eigenschaften:* leichtes, stahlähnlich aussehendes, bei Rotglut schmiedbares Metall, das bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft und auch gegen feuchtes Chlor beständig ist, sich jedoch beim Erhitzen (z. B. beim Schmelzen) mit Sauerstoff und Stickstoff verbindet und daher im Hochvakuum ($< 0,1$ Pa) geschmolzen werden muß. Leicht löslich in Flußsäure, beim Erhitzen auch in Salzsäure zu violetten Ti(III)-Salzen; Salpetersäure ergibt unlösliche, weiße „*Titansäure*“ $TiO_2 \cdot xH_2O$. — *Verwendung:* Spezialwerkstoff für Chemieanlagenbau, medizinische Instrumente, Galvanotechnik, Flugzeug- und Schiffbau und Raketentechnik. Titanstähle (mit weniger als 0,8% Ti) sind sehr fest und elastisch. — *Titan(IV)-oxid* (*Titandioxid*) TiO_2, weiß und unlöslich, wird als gut deckendes Pigment *Titanweiß* für Anstriche und als Mattierungsmittel für Chemiefaserstoffe verwendet. — *Titan(IV)-chlorid* ist flüssig und zersetzt sich mit Wasser.

Zirkonium, Hafnium und ihre Verbindungen: *Zirkonium* (Symbol Zr; nach dem Edelstein Zirkon) ist ein stahlglänzendes Metall, das von kalter Luft, Wasser, Alkalilaugen und verdünnten Säuren nicht angegriffen wird; leicht löslich in Königswasser und Flußsäure. — *Zirkoniumdioxid* ZrO_2 ist ein hochfeuerfestes Material (*Zirkonsteine*). — *Hafnium* ähnelt dem Zirkonium außerordentlich stark.

3.14. Elemente der V. Nebengruppe (Vanadingruppe)

Tabelle 17. Vanadingruppe

	Vanadin	Niob	Tantal
Symbol	V	Nb	Ta
Kernladungszahl	23	41	73
Relative Atommasse	50,94	92,91	180,95
Schmelzpunkt in °C	1715	2550	3000
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	6,07	8,58	16,69
Wertigkeit	5 (4; 3; 2)	5 (4; 3)	5 (4; 3)
Säuren	HVO_3	$HNbO_3$	$HTaO_3$
Salze	Vanadate	Niobate	Tantalate

Zur Vanadingruppe gehört auch das künstlich hergestellte, äußerst unbeständige Element 105, für das die Namen *Nielsbohrium*, *Bohrium* und *Hahnium* vorgeschlagen wurden.

Vanadin und Vanadinverbindungen: *Vanadin* (Symbol V; Vanadis → nach der Göttin Freyja) findet sich chemisch gebunden in den meisten Bauxiten, Brauneisenerzen und auch im Mansfelder Kupferschiefer. Herstellung aluminothermisch gemäß: $3V_2O_5 + 10Al \rightarrow 6V + 5Al_2O_3$; auch als *Ferrovanadin* (mit 70% Eisen). V ist ein stahlgraues, gewöhnlich hartes und sprödes Metall; ultrareines V ist jedoch dehnbar und geschmeidig. Es ist an der Luft beständig; von den Säuren greifen nur Salpetersäure, Flußsäure und Königswasser an. Anwendung für Vanadinstähle. — *Vanadin(V)-oxid* V_2O_5 ist ein orangegelbes, kaum wasserlösliches Pulver, das als Katalysator bei der Schwefelsäureherstellung dient. — *Vanadinsäure* HVO_3 ist weiß und fest; das bekannteste Salz ist das wasserlösliche *Ammoniumvanadat* NH_4VO_3.

Niob und Niobverbindungen: *Niob* (*Symbol* Nb; Niobe: griechische Sagengestalt), relativ selten, kommt in der Natur (vergesellschaftet mit Ta) als *Niobit* (*Kolumbit*) $Fe(NbO_3)_2$ vor. Das weißglänzende, luftbeständige Metall wird nur von Flußsäure und Alkalihydroxidschmelzen angegriffen; Verwendung für Niobstähle. Die Verbindungen ähneln sehr stark denen des Tantals.

Tantal und Tantalverbindungen: *Tantal* (*Symbol* Ta; benannt nach der Sagengestalt Tantalus), ähnlich selten wie Niob, kommt meist mit diesem zusammen als *Tantalit* $Fe(TaO_3)_2$ vor. Das platinfarbene, sehr hochschmelzende Metall ist ziemlich hart, doch sehr dehnbar; es widersteht allen Säuren außer Flußsäure und wird auch von Alkalien nicht angegriffen. Das ausgezeichnet korrosionsbeständige Metall wird als Material für chemische Apparaturen (z. B. Spinndüsen für Chemiefaserstoffe), medizinische Instrumente, Heizschlangen u. a. verwendet. — *Tantal(V)-oxid* Ta_2O_5 ist ein weißes, unlösliches Pulver; es existieren verschiedene *Tantalsäuren* und *Tantalate*. — *Tantalkarbid* TaC ist Bestandteil von Sinterhartmetallen.

3.15. Elemente der VI. Nebengruppe (Chromgruppe)

3.15.1. Allgemeines

Tabelle 18. Chromgruppe

	Chrom	Molybdän	Wolfram
Symbol	Cr	Mo	W
Kernladungszahl	24	42	74
Relative Atommasse	52,00	95,94	183,85
Schmelzpunkt in °C	1875	2620	3400
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	7,2	10,2	19,1
Wertigkeit	**6**; **3** (2)	**6** (5; 4; 3)	**6** (5; 4; 3; 2)

Element 106: Zur Chromgruppe gehört auch Element 106, dessen erste künstliche Darstellung 1974 gemeldet wurde.

3.15.2. Chrom und Chromverbindungen

Symbol: Cr [*chroma* (grch.) Farbe]; *Wertigkeit:* +6, +3, (+2).
Vorkommen: nur chemisch gebunden, mitunter als Begleiter der Aluminiums, z. B. sind im Rubin und Smaragd Al-Atome durch Cr ersetzt. — *Hauptmineral:* Chromeisenstein (*Chromit*) $FeO \cdot Cr_2O_3$.

Metallisches Chrom: Reines Chrom wird aluminothermisch erzeugt: $Cr_2O_3 + 2Al \rightarrow Al_2O_3 + 2Cr$; das erforderliche Chrom(III)-oxid gewinnt man aus Chromeisenstein. — „*Ferrochrom*" entsteht durch Reduktion von Chromeisenstein mit Koks im Elektroofen: $FeO \cdot Cr_2O_3 + 4C \rightarrow Fe + 2Cr + 4CO$. — Chrom ist ein bläulichweißes, glänzendes, sehr hartes und sprödes Metall, das auch an feuchter Luft seinen Glanz behält. Es löst sich leicht in Salzsäure, schwerer in verdünnter Schwefelsäure zu Chrom(II)-salzen; Salpetersäure und Königswasser wirken in der Kälte überhaupt nicht, beim Sieden nur sehr langsam ein („Passivität"). — Man verwendet Chrom als korrosionsschützenden oder dekorativen Überzug auf Metallen sowie als Legierungsbestandteil für Sonderstähle.

Chromverbindungen: Chrom(III)-verbindungen sehen kristallwasserhaltig meist grün aus und lassen sich (z. B. durch Hypochlorite) zu den gelben bis roten Chrom(VI)-verbindungen oxydieren. — *Chrom(III)-oxid* Cr_2O_3, ein grünes, wasserunlösliches Pulver, wird als Malerfarbe und als Poliermittel für harte Metalle, z. B. Chrom, verwendet.

Chromalaun ist *Kaliumchromsulfat* $KCr(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$; Verwendung zum Gerben („Chromleder"). — *Chrom(VI)-oxid* (*Chromtrioxid*) CrO_3, oft fälschlich „Chromsäure" genannt, bildet rote, stark ätzende Kristalle; Anwendung zur galvanischen Verchromung. Mit Wasser entsteht *Dichromsäure* $H_2Cr_2O_7$ (Salze: *Dichromate*) und schließlich *Chromsäure* H_2CrO_4 (Salze: *Chromate*). Chromate sehen in der Regel gelb, Dichromate orangefarben aus. In alkalischem Milieu sind Chromate, in saurem Dichromate beständig. — *Kalium-* und *Natriumdichromat*, $K_2Cr_2O_7$ bzw. $Na_2Cr_2O_7$, bilden orangefarbene, leicht lösliche Kristalle; mit Dichromatlösung getränkte Gelatine ist lichtempfindlich (Verwendung in der Reproduktionstechnik).

3.15.3. Molybdän, Wolfram und ihre Verbindungen

Molybdän [*Symbol* Mo; *molybdos* (grch.) Blei] ist in der Natur relativ selten, z. B. im Mansfelder Kupferschiefer; Hauptmineral: Molybdänglanz (Molybdänit) MoS_2. Es ist ein silberweißes, glänzendes, luftbeständiges, bei höherer Temperatur schmied- und schweißbares Metall, das von Säuren nur schwer angegriffen wird. Am raschesten lösen mäßig konzentrierte Salpetersäure, Königswasser und siedende, konz. Schwefelsäure. — Verwendung für Glühlampen- und Elektronenröhrenbauteile; als *Ferromolybdän* (mit 20···40% Fe) für Molybdänstähle. — Die wichtigste Verbindung ist *Ammoniummolybdat*, vereinfacht $(NH_4)_2MoO_4$. — *Molybdän(IV)-sulfid* MoS_2 ist graphitartig und wird als Schmiermittel verwendet.

Wolfram [*Symbol* W; von „Wolf"] ist ein schweres, silberweißes Metall; von den Säuren löst nur ein Gemisch aus Salpeter- und Flußsäure. Da Wolfram den höchsten Schmelzpunkt aller Metalle hat, wird es für Glühlampenfäden, elektrische Kontakte usw. verwendet; als *Ferrowolfram* (mit 20% Fe) für Wolframstähle. — *Natriumwolframat* Na_2WO_4 ist ein farbloses, wasserlösliches Salz. — *Wolframkarbid* W_2C, grau, sehr hart, ist Bestandteil von Sinterhartmetallen.



3.16. Elemente der VII. Nebengruppe (Mangangruppe)

Tabelle 19. Mangangruppe

	Mangan	Technetium	Rhenium
Symbol	Mn	Tc	Re
Kernladungszahl	25	43	75
Relative Atommasse	54,94	99*)	186,2
Schmelzpunkt in °C	1247	2140	3170
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	7,21	11,49	20,9
Wertigkeit	7; 6; (5); 4; 3; 2; 1	7 und niedriger	7 (6; 5; 4; 3)

*) Massenzahl des beständigsten Nuklids

Zur VII. Nebengruppe gehört auch Element 107, dessen künstliche Herstellung erstmals 1975 aus Dubna gemeldet wurde. Die Halbwertszeit des Isotops $^{261}107$ beträgt nur 2 ms.

Mangan (*Symbol* Mn, von „*magnesia nigra*") ist das zweithäufigste Schwermetall der Erdkruste. Es begleitet das Eisen in vielen Erzen; Minerale: *Braunstein* (Pyrolusit) MnO_2, *Braunmanganerz* (Manganit) MnO(OH) u. a. — Mangan ist ein eisenfarbenes, hartes, sprödes, recht unedles Metall, das an der Luft unter Bildung einer schützenden Deckschicht grau, manchmal bunt anläuft, bereits durch heißes Wasser merklich angegriffen wird und sich leicht in allen Säuren zu Mangan(II)-salzen löst. — Man verwendet es als *Ferromangan* (mit 20% Fe) und *Spiegeleisen* (Fe mit 6···20% Mn, 4···6% C und < 1% Si) in der Eisen- und Stahlmetallurgie sowie für Speziallegierungen.

Manganverbindungen: Mn tritt in den Wertigkeitsstufen +2 bis +4 als basenbildendes, in den Stufen +4 bis +7 als säurebildendes Element auf. In saurem Milieu sind die Oxydationsstufen +2 und +7, in alkalischem +4 und +6 am beständigsten. — Mangan(II)-verbindungen sind in kristallwasserhaltiger Form meist rosafarben, z. B. *Mangan(II)-chlorid* $MnCl_2 \cdot 4H_2O$. — *Mangan(IV)-oxid* (*Mangandioxid*), *Braunstein*, MnO_2, ein graues bis schwarzes Pulver, spaltet bei 530 °C Sauerstoff ab: $3MnO_2 \rightarrow Mn_3O_4 + O_2$; Verwendung als Depolarisator in Trockenelementen und als Entfärbungsmittel für Glasschmelzen. — *Mangan(VII)-oxid* Mn_2O_7 ist ein schwarzviolettes, explosibles Öl, das mit Wasser die tiefviolette *Permangansäure* $HMnO_4$ bildet. Ihr wichtigstes Salz ist *Kaliumpermanganat* $KMnO_4$, braun-bronzierende Kristalle, die sich in Wasser mit intensiv violetter Farbe lösen und beim Erhitzen Sauerstoff abgeben ($2KMnO_4 \rightarrow K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2$; $2K_2MnO_4 \rightarrow 2MnO_2 + 2K_2O + O_2$ usw.). Sehr starkes Oxydationsmittel; Anwendung als Desinfektionsmittel.

Technetium (*Symbol* Tc, das „Technische") ist ein künstliches, instabiles, radioaktives Metall, das aus den Spaltprodukten des Urans in Kernreaktoren gewonnen wird; die Halbwertszeit von Tc 98 beträgt $4 \cdot 10^6$ Jahre.

Rhenium und Rheniumverbindungen: *Rhenium* (*Symbol* Re, nach dem Rhein) ist eines der seltensten Elemente; es findet sich u. a. im Mansfelder Kupferschiefer. Re ist ein platinähnliches Metall, das als Katalysator verwendet wird. In seinen Verbindungen ist es zumeist +7wertig, z. B. im gelben, leicht flüchtigen *Rhenium(VII)-oxid* Re_2O_7 und im *Kaliumperrhenat* $KReO_4$, einem farblosen Salz.

3.17. Elemente der VIII. Nebengruppe

3.17.1. Allgemeines

Untergruppen:

- *Eisengruppe* (Eisen, Kobalt, Nickel),
- *leichte Platinmetalle* (Ruthenium, Rhodium, Palladium),
- *schwere Platinmetalle* (Osmium, Iridium, Platin).

Wertigkeit: Von diesen Elementen erreichen nur Ruthenium und Osmium die Wertigkeitsstufe +8. Die Element(VIII)-oxide sind im Gegensatz zu den entsprechenden Verbindungen der V., VI. und VII. Nebengruppe keine Säureanhydride.

Ferromagnetismus: Eisen, Kobalt und Nickel sind (neben Gadolinium) die einzigen ferromagnetischen Elemente.

Tabelle 20. Eisengruppe

	Eisen	Kobalt	Nickel
Symbol	Fe	Co	Ni
Kernladungszahl	26	27	28
Relative Atommasse	55,85	58,93	58,71
Schmelzpunkt in °C	1533	1490	1455
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	7,68	8,83	8,90
Wertigkeit	3; 2; (6)	2; (3)	2; (3; 4)

Tabelle 21. Leichte Platinmetalle

	Ruthenium	Rhodium	Palladium
Symbol	Ru	Rh	Pd
Kernladungszahl	44	45	46
Relative Atommasse	101,07	102,90	106,4
Schmelzpunkt in °C	2450	1966	1555
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	12,30	12,42	12,03
Wertigkeit	8; 4 (2; 3; 6; 7)	3; 4 (1; 2; 6)	2; 4 (3)

Tabelle 22. Schwere Platinmetalle

	Osmium	Iridium	Platin
Symbol	Os	Ir	Pt
Kernladungszahl	76	77	78
Relative Atommasse	190,2	192,2	195,09
Schmelzpunkt in °C	≈ 2550	2454	1774
Dichte bei 20 °C in $g \cdot cm^{-3}$	22,48	22,42	21,45
Wertigkeit	8; 6 (2; 3; 4)	3; 4 (1; 2; 6)	2; 4 (1; 3; 6)

3.17.2. Eisen und Eisenverbindungen

Allgemeines

Symbol: Fe [*ferrum* (lat.) Eisen]; *Wertigkeit:* +3, +2, (+6).
Vorkommen: vierthäufigstes Element (5,00%) und häufigstes Schwermetall der Erdkruste. Ob der Erdkern aus einer Eisen-Nickel-Legierung besteht, ist noch nicht mit Sicherheit erwiesen. Eisen findet sich, abgesehen von Meteoriten, nur chemisch gebunden, auch in Organismen. Die gelbe, braune oder rote Farbe des Erdbodens rührt meist von Eisenoxiden und -oxidhydraten her. Im Grundwasser ist es als Eisen(II)-sulfat $FeSO_4$ und Eisen(II)-hydrogenkarbonat $Fe(HCO_3)_2$ gelöst.

Minerale

Oxide: Magnetit, *Magneteisenstein, -erz* (Fe_3O_4), Hämatit, *Roteisenstein, -erz* (Fe_2O_3), Limonit, *Brauneisenstein, -erz* [FeO(OH)] (Abarten: *Raseneisenerz, gelber Ocker*).
Karbonate: Siderit, *Spateisenstein, -erz* ($FeCO_3$)
Sulfide: Pyrit, *Eisenkies, Schwefelkies* (FeS_2), Magnetopyrit, *Magnetkies* (FeS)
Silikate: Olivin [$(Mg,Fe_2)SiO_4$] und andere.

Metallisches Eisen

Herstellung von Reineisen: durch Reduktion von Eisenoxiden mit Aluminium (Thermitverfahren) oder Wasserstoff; Gleichungen: $Fe_2O_3 + 2Al \rightarrow 2Fe + Al_2O_3$ bzw. $Fe_2O_3 + 3H_2 \rightarrow 2Fe + 3H_2O$.
Physikalische Eigenschaften: silberweißes, zähes, ziemlich weiches Metall, das bei Rotglut erweicht und in diesem Zustand schmied-, walz- und schweißbar ist. Unterhalb 768 °C ist es ferromagnetisch, besitzt jedoch keine Remanenz, d. h., bei Entfernung der magnetisierenden Erregung verliert es seinen Magnetismus wieder.

Chemische Eigenschaften: An feuchter Luft rostet Eisen, wobei sich Eisen(III)-oxidhydrat, etwa FeO(OH), bildet. Infolge Porosität schützt Rost das Grundmetall nicht vor weiterem Angriff. — Beim Glühen an der Luft entsteht eine hauptsächlich aus Fe_3O_4 bestehende Zunderschicht. — Eisen ist ziemlich unedel und bildet mit verdünnten Säuren leicht Eisen(II)-salze; in konz. Salpetersäure wird Fe passiv, löst sich jedoch in der Hitze sehr heftig zu Eisen(III)-nitrat. — Gegen Alkalilaugen ist Fe beständig.
Verwendung: für Eisenkerne von Transformatoren und Elektromagneten sowie für Sonderlegierungen.
Kohlenstoffhaltiges Eisen s. Abschn. WERKSTOFFE.

Eisenmetallurgie

Gußschrott
Eisenerz
Stahlschrott
Hochofen
(Drehrohrofen)
Roheisen
Gießereiroheisen (Graues Roheisen)
Stahleisen (Weißes Roheisen)
Umschmelzen mit Zuschlägen, z. B. im Kupolofen
Umschmelzen mit Zuschlägen
Frischen
Blasfrischen im Konverter
Herdfrischen
Gußeisen
Gießen
Aufblasen (O_2)
Bodenblasen (Luft, O_2)
im SIEMENS-MARTIN-Ofen
im Elektroofen
Grauguß
Tempern
Temperguß
weiß
schwarz
Aufblas-Stahl
THOMAS-Stahl
SM-Stahl
Elektro-Stahl
Legieren
Legierte Stähle
Verarbeitung durch
Walzen
Schmieden
Gießen
Stahlguß

Bild 2. Übersicht über die Eisenmetallurgie

Hochofenprozeß (Bild 3)

— *Aufbereitung der Erze:* Weitgehende Entfernung der Erzbegleitstoffe („Gangart") auf trockenem, nassem oder magnetischem Wege. — Überführung nichtoxidischer Erze in Oxide durch Rösten (z. B. bei Pyrit: $4FeS_2 + 11O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$). — Schaffung der günstigsten Stückgröße durch Zerkleinern oder Brikettieren.
— *Beschickung: von oben* schichtweise *Koks* und *Möller* (Erz + Zuschläge); *von unten:* Heißluft.

— *Gegenstrom:* Die feste Beschickung durchläuft den Ofen langsam von oben nach unten; die Gase strömen von unten nach oben.
— *Erzeugung von Kohlenmonoxid:* erfolgt im unteren Teil der Schmelzzone. Heißluft („Heißwind") von etwa 800 °C, in COWPERschen Winderhitzern aufgeheizt, evtl. mit Sauerstoff angereichert, wird durch Windformen eingeblasen. Sie verbrennt den Koks unvollständig (Koksüberschuß!) zu Kohlenmonoxid CO. Dieses strömt nach oben.
— *Reduktion der Eisenerze:* erfolgt stufenweise durch Kohlenmonoxid (*indirekte Reduktion*) und feinverteilten Kohlenstoff (*direkte Reduktion*). Es entsteht zunächst festes, schwammiges Eisen.
— *Regenerierung des Kohlenmonoxids:* Das bei der Reduktion der Eisenerze entstehende Kohlendioxid wird durch den Koks teilweise wieder zu Kohlenmonoxid reduziert; dieses vermag erneut auf Eisenerze einzuwirken.
— *Kohlung des Eisens:* das schwammige Eisen katalysiert die Einstellung des BOUDOUARD-*Gleichgewichts* ($2CO \rightleftharpoons CO_2 + C$); der am Eisen entstehende feinverteilte Kohlenstoff dringt in dasselbe ein und erniedrigt den Schmelzpunkt um fast 400 K auf etwa 1150 °C.
— *Schmelzen und Abstich des Roheisens:* Oberhalb 1150 °C schmilzt das kohlenstoffhaltige Eisen und sammelt sich im untersten Teil des Gestells. Der „Abstich" erfolgt alle 4 ··· 6 Stunden.
— *Bildung und Abstich der Schlacke:* Die Schlacke bildet sich in der Schmelzzone aus den noch vorhandenen Erzbegleitstoffen (der Gangart) und den Zuschlägen. Letztere führen die schwer schmelzbare Gangart in niedrigschmelzende Schlacke über.
„*Saure Erze*" (SiO_2-reich) erfordern „*basische Zuschläge*" ($CaCO_3$).
„*Basische Erze*" ($CaCO_3$-reich) erfordern „*saure Zuschläge*" (SiO_2).
Mit dem in der Gangart oder den Zuschlägen vorhandenen Ton entsteht eine Schlacke aus Kalziumaluminat-silikat. Die Schlacke sammelt sich im Gestell auf dem flüssigen Roheisen an; sie fließt kontinuierlich ab oder wird von Zeit zu Zeit abgestochen.

Produkte des Hochofens:

— *Roheisen:* enthält neben Fe etwa 3 ··· 5% C, 0,3 ··· 2,5% Si, 0,5 ··· 6,0% Mn, 0,08 ··· 2,2% P und 0,03 bis 0,12% S. Je nach Bedarf erzeugt man:

Weißes Roheisen: Mn-reich; in Stahlkokillen rasch abgekühlt; flüssig auf THOMAS-Stahl weiterverarbeitet; C als Zementit Fe_3C; für Stahl und Temperguß.
Graues Roheisen: Si-reich; in Masselbetten aus Sand langsam abgekühlt; C als Graphit; für Gußeisen.

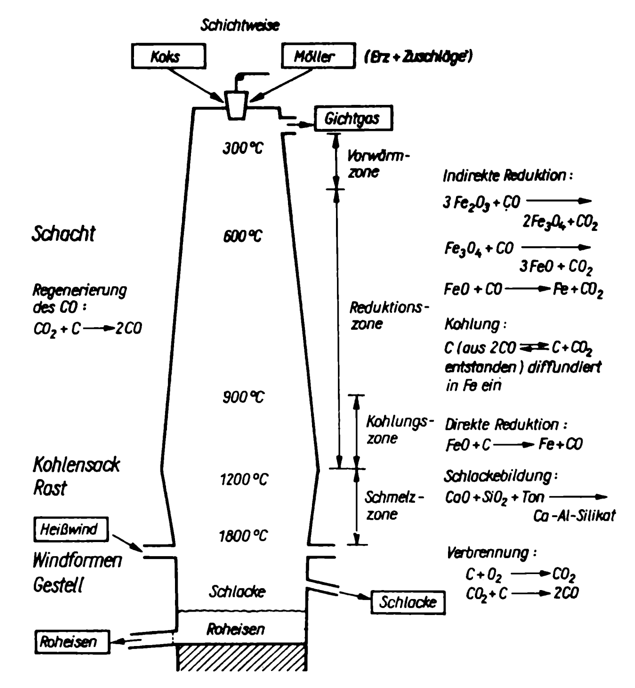


Bild 3. Hochofenprozeß

— *Hochofenschlacke:* besteht aus Ca-Al-Silikat. Verwendung für Pflastersteine, Straßen- und Gleisschotter; als Splitt und Schlackensand für die Betonbereitung; als Hüttenbims (geschäumt) für Leichtbeton; als Schlackenwolle (mit Luft verdüst) zur Wärmeisolation; abgeschreckt und gemahlen für Hochofen- und Eisenportlandzement.
— *Gichtgas:* etwa 60 Vol.-% N_2 + 30 Vol.-% CO + 10 Vol.-% CO_2 + viel Staub. Nach Entstaubung *Verwendung* zum Aufheizen der Winderhitzer, zur Erzeugung von Elektroenergie sowie als Heizgas.

Erzeugung von Thomas-Stahl (Windfrischen): *Chemie:* Entfernung von S, P und Si sowie Verminderung des C-Gehaltes des Roheisens durch Oxydation. — *Durchführung:* In *Konvertern* (sog. „*Thomasbirnen*") bläst man kalte, oft sauerstoffangereicherte Luft durch flüssiges Roheisen. In exothermer Reaktion bilden sich gasförmige (CO_2, SO_2) und andere (SiO_2, P_2O_5) Oxide, letztere werden durch Kalkzuschläge und Kalkauskleidung in Thomasschlacke umgewandelt; vereinfacht $4CaO + P_2O_5 \rightarrow CaO \cdot Ca_3(PO_4)_2$; und $2CaO + SiO_2 \rightarrow Ca_2SiO_4$. — Die gemahlene Schlacke dient als Phosphordüngemittel („*Thomasmehl*", „*Thomasphosphat*"). Da beim Frischprozeß auch C restlos entfernt wird, ist nach dem Blasen und dem Schlackenabguß Aufkohlung durch berechneten Zusatz kohlenstoffreichen „Spiegeleisens" erforderlich.
Beim modernen *Sauerstoffaufblasverfahren* bläst man reinen Sauerstoff mit 0,6 ··· 1,5 MPa durch ein wassergekühltes Rohr auf das Metallbad und vermeidet so Qualitätsminderungen, die durch Stickstoffaufnahme entstehen. Infolge der sich ausbildenden höheren Temperaturen können bis zu 40% Schrott mit eingeschmolzen werden; zudem ist der Durchsatz wesentlich höher.

Erzeugung von Siemens-Martin-Stahl (Herdfrischen): Beim SM-Verfahren (seit 1865) finden grundsätzlich die gleichen Vorgänge statt wie beim THOMAS-Verfahren. Sie verlaufen langsamer, gestatten aber dadurch eine bessere Überwachung und Regulierung. Da im Gegensatz zum THOMAS-Verfahren eine äußere Heizung vorhanden ist, kann viel (oder ausschließlich) Alteisen (Schrott) eingeschmolzen werden. Aufkohlung ist nicht erforderlich.
In einer flachen Mulde („Herd") werden Schrott und Roheisen durch brennendes Generatorgas (vorgewärmt durch die heißen Abgase; Prinzip der SIEMENSschen *Regenerativfeuerung*) niedergeschmolzen. Nach Zusatz von Kalkzuschlägen erfolgt das Frischen, indem mehr Luft schräg auf die Schmelze geblasen wird, als zum gleichzeitigen Verbrennen des Gases erforderlich ist. Da die Oxydation von S usw. nur von der Oberfläche her erfolgt, dauert ein Frischprozeß mehrere Stunden. Die SM-Schlacke ist phosphorarm und wird z. Z. noch nicht verwertet.
Elektrostahlverfahren: In Lichtbogen- oder Induktionsöfen werden aus SM-Stahl und (oder) Schrott unter Zusatz von Nickel, Ferrochrom, Ferrovanadin usw. hochwertige *legierte Stähle* erschmolzen; Frischprozesse erfolgen meist mit reinem Sauerstoff, da der Luftstickstoff schädlich sein kann.
Elektronenstrahlschmelzen: Ultrareine Stähle mit besonders hervorragenden Eigenschaften werden durch Elektronenstrahlschmelzen gegossener oder verformter Abschmelzstäbe bei etwa 0,1 Pa hergestellt. Das durch Aufprallen eines Elektronenstrahls abschmelzende Gut wird von einer wassergekühlten Kupferkokille mit absenkbarem Boden aufgefangen und ist frei von gebundenen Gasen und Schlackeneinschlüssen.
Weißer Temperguß: Weißes Roheisen wird in Formen gegossen; die geformten Gegenstände werden in ein Fe_2O_3/Fe_3O_4-Gemisch fest eingepackt und 5 ··· 6 Tage lang bei 950 ··· 1000 °C geglüht. Dabei erfolgt von der Oberfläche her Entkohlung, wodurch das Roheisen stahlähnlich wird. Anwendung für dünnwandige Massenartikel (Schlüssel, Hebel, Kettenglieder usw.).
Schwarzer Temperguß: Einbettmittel sind Sand oder Asche; dabei scheidet sich Kohlenstoff als „Temperkohle" in der Masse aus; Glühen 3 ··· 4 Tage.

Eisenverbindungen

Allgemeines: Eisen(II)-verbindungen (kristallwasserhaltig meist von grüner Farbe) gehen, besonders in alkalischem Milieu, an der Luft leicht in Eisen(III)-verbindungen (meist gelb) über. Auch durch Wasserstoffperoxid, heiße Salpetersäure und andere Oxydationsmittel geht Fe(II) in Fe(III) über. Umgekehrt lassen sich Fe(III)-Verbindungen z. B. durch Schütteln mit Eisenpulver wieder in Fe(II)-Verbindungen zurückverwandeln, z. B. $2FeCl_3 + Fe \rightarrow 3FeCl_2$.

Eisenoxide: *Eisen(II)-oxid* FeO: schwarzes Pulver. — *Eisen(II, III)-oxid, Trieisentetroxid,* Fe_3O_4 ($FeO \cdot Fe_2O_3$) kommt als *Magnetit* in der Natur vor. Es entsteht als *Hammerschlag* beim Schmieden und beim Verbrennen von Eisenfeilspänen an der Luft und bildet die Hauptmasse des Glühzunders von Eisen und Stahl; beim *Schwärzen* (*Brünieren*) wird es künstlich erzeugt. *Eisen(III)-oxid* Fe_2O_3 kommt als *Hämatit* (Blutstein) vor, ist auch im *Rötel* enthalten. Rotes bis braunes, nach starkem Glühen in Säuren unlösliches Pulver; größere Kristalle sind grau bis schwarz, ergeben jedoch einen roten Strich. Verwendung für das Thermogenschweißverfahren, als Poliermittel („*Polierrot*") für Stahl und Glas, als Farbpigment („*Englischrot*"), als Ton- und Bildträger für Magnetbänder.

Ferrite sind eisen(III)-oxidhaltige Doppeloxide, die keramisch gebrannt und teilweise als magnetische Werkstoffe verwendet werden, z. B. *Bariumferrit* (*Maniperm*) $BaO \cdot 6Fe_2O_3$.

Eisenhydroxide: *Eisen(II)-hydroxid* $Fe(OH)_2$ fällt aus Eisen(II)-lösungen durch Alkalilauge als zunächst weißer, infolge Oxydation grün, schwarz und unter Übergang in *Eisen(III)-hydroxid* $Fe(OH)_3$ rostbraun

werdender Niederschlag aus. Eisen(III)-hydroxid entsteht auch direkt durch Fällung aus Eisen(III)-lösungen.

Komplexe Eisen-Zyan-Verbindungen:

- *Kaliumhexazyanoferrat(II), Kaliumzyanoferrat(II), Gelbkali, gelbes Blutlaugensalz,* $K_4[Fe(CN)_6]\cdot 3H_2O$: gelbe, wasserlösliche Kristalle; Verwendung für Berliner Blau und Rotkali.
- *Kaliumhexazyanoferrat(III), Kaliumzyanoferrat(III), Rotkali, rotes Blutlaugensalz,* $K_3[Fe(CN)_6]$: rote, in Wasser mit gelbgrüner Farbe lösliche Kristalle. Da es feinverteiltes Silber in Silberzyanoferrat(II) $Ag_4[Fe(CN)_6]$ umwandelt, das sich in Natriumthiosulfat bzw. im Fixierbad löst, wird es in der Farbfotografie als „*Bleichsalz*" und in der Schwarzweißfotografie als „*Abschwächer*" verwendet.
- *Berliner Blau und* TURNBULL*s Blau* fallen aus Eisen(III)-lösung durch Zyanoferrat(II) und aus Eisen(II)-lösung durch Zyanoferrat(III) als intensiv dunkelblaue Niederschläge wechselnder Zusammensetzung aus. Im Berliner Blau ist z. B. Eisen(III)-hexazyanoferrat(II) $Fe_4[Fe(CN)_6]_3$ enthalten, doch sind die Niederschläge oft auch K-haltig. Verwendung als Farbpigment.

Weitere Eisen(II)-verbindungen: *Eisen(II)-sulfat* kristallisiert mit Wasser als *Eisenvitriol* $FeSO_4\cdot 7H_2O$. Grüne, wasserlösliche, an der Luft oxydable Kristalle; Verwendung für Eisentinten, medizinische Eisenpräparate, Berliner Blau, Gelb- und Rotkali sowie Eisen(III)-oxid für Magnetbänder. — Luftbeständiger ist *Ammoniumeisen(II)-sulfat,* MOHR*sches Salz* $(NH_4)_2SO_4\cdot FeSO_4\cdot 6H_2O$.

Weitere Eisen(III)-verbindungen: *Eisen(III)-chlorid* scheidet sich aus wäßriger Lösung als $FeCl_3\cdot 6H_2O$ ab. Gelbe, hygroskopische Masse. Verwendung zum Ätzen von Kupfer in der Reproduktionstechnik: $2FeCl_3 + Cu \rightarrow 2FeCl_2 + CuCl_2$. — *Ammonium-eisen(III)-sulfat,* „*Eisenalaun*", $(NH_4)Fe(SO_4)_2\cdot 12H_2O$ bildet farblose, durch Mn-Verunreinigungen oft violette, mit gelber Farbe in Wasser lösliche Kristalle.

3.17.3. Kobalt und Kobaltverbindungen

Symbol: Co (cobaltum, von „Kobold"); *Wertigkeit:* +2, seltener +3; *Vorkommen:* meist mit Nickel vergesellschaftet; *Minerale:* Speiskobalt (Smaltit) $CoAs_2$, Glanzkobalt (Kobaltit) CoAsS, Kobaltnickelkies $(Co,Ni)_3S_4$.

Metallisches Kobalt: silberweißes, schwach rötliches, bis 1115 °C ferromagnetisches Metall; zäher, härter und fester als unlegierter Stahl; an der Luft bei gewöhnlicher Temperatur beständig; in Säuren leicht, in Alkalien nicht löslich. — Verwendung für Legierungen (z. B. Schnellarbeitsstähle) und Sinterhartmetalle (Co-Pulver, mit W_2C oder anderen Karbiden gesintert).

Kobaltverbindungen: Co(II)-Verbindungen sind am beständigsten, Co(III)-Verbindungen nur in Form von Komplexen stabil. Co(II)-Salze sehen wasserhaltig meist rosa bis rot, wasserfrei oft blau aus. — *Kobalt(II)-chlorid* $CoCl_2\cdot 6H_2O$: rote Kristalle, die beim Erhitzen, auch in wäßriger Lösung, in blaue, wasserärmere Verbindungen übergehen, beim Erkalten wieder rosarot werden und deshalb für Luftfeuchtigkeitsanzeiger verwendet werden können. — *Kobalt(III)-oxid* Co_2O_3, schwarzbraunes Pulver, dient zum Blaufärben von Glas, Porzellan und Email; *Kobaltglas* ist K-Co-Silikat; es dient gemahlen unter dem Namen „*Smalte*" („Schmelze") als blaues Farbpigment.

3.17.4. Nickel und Nickelverbindungen

Symbol: Ni; (*niccolum:* von „Nickel"; einem Berggeist); *Wertigkeit:* +2, (+3), (+4); kommt elementar in Eisenmeteoriten, sonst nur chemisch gebunden vor; *Minerale:* Rotnickelkies NiAs, Weißnickelkies $(Ni,Co,Fe)AsS_2$; für die Gewinnung wichtiger: *Garnierit* (Mg-haltiges Ni-Silikat) u. a. Silikate sowie *Magnetkies* (Fe,Cu,Ni)S.

Herstellung: sehr verschieden, z. B. werden silikatische Erze in Drehrohröfen zu Nickel-Eisen-Luppen (mit 5···8% Ni) reduziert, die geröstet, entschwefelt und ammoniakalisch ausgelaugt werden. Aus saurer Lösung wird dann Ni elektrolytisch rein abgeschieden.

Metallisches Nickel: schwach gelblichsilberweißes, bis 356 °C ferromagnetisches Metall, sehr zäh und dehnbar; an der Luft sehr beständig; in Säuren langsam, in Alkalien nicht löslich. — *Verwendung* für Legierungen (z. B. Sonderstähle), Anodenplatten zum galvanischen Vernickeln, Laborgeräte, Thermoelemente; Nickel-Kadmium-Akkumulatoren; als Hydrierungskatalysator (z. B. für die Fetthärtung).

Nickelverbindungen: *Nickelsulfat* kristallisiert als *Nickelvitriol* $NiSO_4\cdot 7H_2O$ in smaragdgrünen, leicht löslichen Kristallen; Verwendung zum Vernickeln. — *Nickelhydroxid* $Ni(OH)_2$ fällt als apfelgrüner Niederschlag aus Nickelsalzlösungen durch Alkalilaugen; es ist nicht amphoter. — *Nickelchlorid* $NiCl_2\cdot 6H_2O$, laubgrün, dient im Gemisch mit Natriumhypophosphit NaH_2PO_2 und Natriumzitrat zum stromlosen Vernickeln.

3.17.5. Platinmetalle

Ruthenium (*Symbol* Ru; von Ruthenien — Rußland): seltenstes Platinmetall; silberweiß, sehr hart und spröde, schwer schmelzbar; unlöslich in Königswasser; löslich in sauerstoffbelüfteter Salzsäure. — *Ruthenium(VIII)-oxid* RuO_4 bildet gelbe, flüchtige, bei 25 °C schmelzende Kristallnadeln.

Rhodium [*Symbol* Rh; *rhodeos* (grch.) rosenrot]: stark silberglänzend; höchstes Lichtreflexionsvermögen; anlaufbeständig; zäh; in kompaktem Zustand unlöslich in allen Säuren. Anwendung als Katalysator, für Thermoelemente und zum galvanischen Rhodinieren von Silber, um dessen Anlaufen zu verhindern. — *Rhodiumsulfat* $Rh_2(SO_4)_3$ ist ein rosenrotes Salz.

Palladium (*Symbol* Pd, nach dem Planetoiden Pallas): silberweiß, etwas härter und zäher als Platin; löslich in konzentrierter Salpetersäure zu *Palladium(II)-nitrat* $Pd(NO_3)_2$, das gelbbraune, hygroskopische Kristalle bildet.

Osmium [*Symbol* Os; *osmeo* (grch.) ich rieche]: kommt in Platinerzen als königswasserunlösliche Iridiumlegierung (*Osmiridium* mit z. B. 52% Ir, 27% Os, 10% Pt, 6% Ru und 1,5% Rh) vor. Os ist bläulichweiß glänzend, hochschmelzend, sehr hart und spröde. Os-Pulver wird durch konz. HNO_3 und auch durch Luftsauerstoff oxydiert, wobei durchdringend riechendes *Osmium(VIII)-oxid* OsO_4 entsteht; letzteres bildet blaßgelbe, bei 40 °C schmelzende, flüchtige Kristalle.

Iridium [*Symbol* Ir; *irideios* (grch.) regenbogenfarbig]: silberweiß, sehr schwer, sehr hart und spröde; unlöslich in allen Säuren, auch Königswasser. *Verwendung*: für Füllhalter-Federspitzen; als härtendes Legierungsmetall für Platin.

Platin [*Symbol* Pt; *platina* (lat.) kleines Silber]: kommt (meist elementar und mit anderen Platinmetallen legiert) in „Platinerzen“, oft in Flußsanden, vor. Pt ist silberweiß, ziemlich weich, zäh, dehnbar, sehr schwer, in der Hitze schmied- und schweißbar. In feinverteilter Form (*Platinschwarz, Platinmohr*) ad- und absorbiert es viel Wasserstoff und Sauerstoff; hierauf beruht seine katalytische Wirksamkeit. Pt löst sich in Königswasser zu *Hexachloroplatin(IV)-säure* $H_2[PtCl_6]$. — *Verwendung*: für chemische Laborgeräte, Spinndüsen für Chemiefaserstoffe, Schmuckwaren und als Katalysator (besonders für Hydrierungen und Oxydationen). — *Ammoniumhexachloroplatinat(IV)* (Platinsalmiak) $(NH_4)_2[PtCl_6]$ bildet gelbe, schwer lösliche Kristalle und zerfällt beim Erhitzen unter Hinterlassung von Platinschwamm: $3(NH_4)_2[PtCl_6] \rightarrow 3Pt + 2N_2 + 18HCl + 2NH_3$.

4. Organische Chemie

4.1. Grundbegriffe

4.1.1. Gegenstand der organischen Chemie

Die organische Chemie ist die *Chemie der Kohlenstoffverbindungen*, denn sämtliche organische Verbindungen enthalten das Element Kohlenstoff. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit werden lediglich einige wenige Kohlenstoffverbindungen zur anorganischen Chemie gezählt. Es sind dies die Oxide des Kohlenstoffs, die Karbide, die Kohlensäure und ihre Salze.
Die meisten organischen Verbindungen weisen gegenüber den anorganischen Verbindungen einige *Besonderheiten* auf. Für die organische Chemie sind andere Reaktionen typisch als für die anorganische Chemie. Auch ist die Zahl der bisher beschriebenen organischen Verbindungen mit etwa 5 Millionen wesentlich größer als die Zahl der bekannten anorganischen Verbindungen (etwa 150000). All diese Gründe sprechen für eine *Abgrenzung* der Kohlenstoffverbindungen (organische Verbindungen) von den Verbindungen der anderen Elemente (anorganische Verbindungen).

Noch vor rund 150 Jahren verstand man unter organischen Stoffen nur solche Substanzen, die in Tieren bzw. Pflanzen und ihren Produkten vorkommen. Die Substanzen der unbelebten Natur zählte man zu den anorganischen Stoffen. Eine Synthese von organischen Stoffen aus anorganischen Stoffen im Laboratorium hielt man deshalb für unmöglich, weil dafür angeblich eine geheimnisvolle „Lebenskraft“ des Organismus notwendig wäre. Diese Ansicht wurde 1828 von dem deutschen Chemiker Friedrich WÖHLER widerlegt, dem die Harnstoffsynthese aus Ammoniumzyanat gelang. Ammoniumzyanat ist eine Verbindung, die aus anorganischen Stoffen darstellbar ist. Es dauerte trotzdem noch viele Jahre, bis die idealistische Theorie

von der „Lebenskraft“ aufgegeben wurde. Heute werden sehr viele Naturstoffe synthetisch hergestellt. Es gelingt, kompliziert gebaute organische Verbindungen zu synthetisieren, die in der Natur gar nicht vorkommen.

4.1.2. Besonderheiten organischer Verbindungen

Zusammensetzung

Am Aufbau organischer Verbindungen sind neben *Kohlenstoff* meist nur noch wenige andere Elemente beteiligt. Der häufigste Vertreter ist das Element *Wasserstoff*. In der Reihenfolge der Häufigkeit kommen dann die Elemente Sauerstoff, Stickstoff, Halogene und Schwefel. Prinzipiell bilden jedoch auch die übrigen Elemente organische Verbindungen.

Struktur

Der vierbindige Kohlenstoff hat die Fähigkeit, sich mit sich selbst zu verbinden. Er ist in der Lage, *lange Ketten*, *verzweigte Ketten* und auch *Ringe* zu bilden. Die Vielzahl der verschiedenen organischen Verbindungen kommt daher, daß bei gleicher Anzahl und Art der Atome unterschiedliche Anordnungen der Atome im Molekül möglich sind (*Isomerie*).

Die Anzahl der Kohlenstoffatome in den organischen Verbindungen ist praktisch unbegrenzt. Makromolekulare organische Stoffe können mehrere 100000 Kohlenstoffatome im Molekül enthalten.

Bindung

Die vorherrschende Bindungsart zwischen den Atomen organischer Verbindungen ist die *homöopolare Bindung*. Häufig ist diese Bindung polarisiert. Sehr selten tritt in organischen Verbindungen *Ionenbeziehung* auf (z. B. bei Salzen organischer Säuren). Bei bestimmten organischen Verbindungen sind *Wasserstoffbrückenbindungen* zwischen den Molekülen möglich.
Zwischen den Kohlenstoffatomen organischer Verbindungen kommen neben der *Einfachbindung* auch *Doppelbindungen* oder *Dreifachbindungen* vor. Bei den Mehrfachbindungen wird das σ-Elektronenpaar von einem oder zwei π-Elektronenpaaren überlagert.

Eigenschaften

Die Eigenschaften der organischen Verbindungen werden weitgehend von der Art der vorliegenden Bindung bestimmt. Da die Atombindung am häufigsten vorkommt, sind die Moleküle der meisten organischen Verbindungen im festen Aggregatzustand durch VAN-DER-WAALSsche Kräfte in einem *Molekülgitter* gebunden. Molekülgitter lassen sich schon durch geringe Energiezufuhr in Einzelmoleküle aufspalten, so daß der Schmelzpunkt der meisten organischen Verbindungen viel niedriger als der der anorganischen Verbindungen mit Ionengitter ist.
Fast alle organischen Stoffe sind im flüssigen Aggregatzustand *Nichtleiter* für den elektrischen Strom, da einzelne Moleküle vorliegen und keine frei beweglichen Ionen vorhanden sind.
Der größte Teil der organischen Verbindungen ist nicht in Wasser löslich. Entsprechend dem Grundsatz „Ähnliches löst Ähnliches“ sind die organischen Verbindungen mit deutlich homöopolarer Bindung nur in unpolaren Lösungsmitteln löslich.
Die π-Elektronenpaare der organischen Verbindungen mit Mehrfachbindung sind leicht verschiebbar und lassen sich auch leicht in Einzelelektronen aufspalten. Deshalb geben solche Verbindungen vorwiegend *Additionsreaktionen*.
Die chemischen Reaktionen zwischen den Molekülen organischer Verbindungen laufen meist viel langsamer ab als die Ionenreaktionen der anorganischen Verbindungen.

4.1.3. Formelschreibweise

In der organischen Chemie werden zur Bezeichnung der Verbindungen meist *Strukturformeln* angegeben. Die *Summenformel* ist nicht aussagekräftig genug, da es fast in allen Fällen viele Verbindungen mit der gleichen Summenformel gibt.
Da die Strukturformeln meist etwas unübersichtlich sind, werden häufig *rationelle Strukturformeln* benutzt. Hier ist die Strukturformel vereinfacht.

Summenformel (Bruttoformel)

Aus der Summenformel sind lediglich die Art und Anzahl der am Molekülbau beteiligten Atome ersichtlich.

Beispiele. C_2H_6O (Äthanol), C_6H_7N (Aminobenzol), C_4H_6 [Butadien-(1,3)]

Strukturformel

Aus der Strukturformel ist eindeutig der *Aufbau* der organischen Verbindung zu ersehen. Striche zwischen den Symbolen der Elemente geben die bindenden Elektronenpaare an, Striche bei Fremdatomen symbolisieren die freien Elektronenpaare.

Beispiele.

```
                        H-N̄-H
                          |
                         //C\
                       H-C   C-H
                         |   ||
    H H                H-C   C-H       H\           /H
    | |    _               \\C/          C=C-C=C
  H-C-C-O-H                  |         H/  | |  \H
    | |    ‾                 H             H H
    H H
Äthanol                Aminobenzol      Butadien-(1,3)
```

Rationelle Strukturformel

Die rationelle Strukturformel ist eine *vereinfachte Strukturformel*, aus der die Struktur der Verbindung noch eindeutig erkennbar sein muß. Es ist die häufigste Form zur Bezeichnung organischer Verbindungen.

Beispiele. Verzicht auf vollständige Angabe der Bindungselektronenpaare:

```
                       NH₂
                        |
                        C
                      // \
                    HC    CH
                    |     ||
                    HC    CH
                      \\ /
CH₃-CH₂-OH              CH           CH₂=CH-CH=CH₂
Äthanol            Aminobenzol      Butadien-(1,3)
```

Vereinfachte Schreibweise des Kohlenwasserstoffrests:

Äthanol: C_2H_5—OH   Aminobenzol: NH_2 (am Benzolring)   Butadien-(1,3): _//

4.1.4. Isomerie

Unter *Isomerie* versteht man die Erscheinung, daß mehrere Verbindungen mit *gleicher Summenformel* und *konstanter Molmasse* existieren, die aber *unterschiedliche Anordnung der Atome* im Molekül und verschiedene Eigenschaften besitzen. Die Verbindungen gleicher Summenformel, aber unterschiedlichen Molekülbaus werden *Isomere* genannt.

Kettenisomerie

Kettenisomerie ergibt sich aus den verschiedenartigen Verknüpfungen der Kohlenstoffatome zu geraden und vielen verzweigten Ketten. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten wächst rasch mit der Zahl der Kohlenstoffatome im Molekül (Tabelle 23).

Tabelle 23. Anzahl der möglichen Kettenisomere der Alkane

Summenformel	Anzahl der möglichen Kettenisomere
CH_4 bis C_3H_8	je 1
C_4H_{10}	2
C_5H_{12}	3
C_6H_{14}	5
C_7H_{16}	9
C_8H_{18}	18
$C_{12}H_{26}$	355
$C_{15}H_{32}$	4347
$C_{25}H_{52}$	36797588

Isomere des Hexans (Summenformel: C_6H_{14}):

a) $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$ *n-Hexan*

b) $CH_3-CH-CH_2-CH_2-CH_3$
$\quad\;\; |$
$\quad CH_3$ *2-Methylpentan*

c) $CH_3-CH-CH-CH_3$
$\quad\;\; | \quad\;\; |$
$\quad CH_3 \; CH_3$ *2,3-Dimethylbutan*

d) $CH_3-CH_2-CH-CH_2-CH_3$
$\qquad\qquad\;\; |$
$\qquad\qquad CH_3$ *3-Methylpentan*

$\qquad CH_3$
$\qquad\; |$
e) $CH_3-C-CH_2-CH_3$
$\qquad\; |$
$\qquad CH_3$ *2,2-Dimethylbutan*

Stellungsisomerie

Stellungsisomerie ergibt sich aus der unterschiedlichen Stellung eines oder mehrerer Substituenten im Kohlenstoffgerüst des Moleküls (Tabelle 24).

Tabelle 24. Beispiele für stellungsisomere Verbindungen

Summenformel	Stellungsisomere Verbindungen		
C_3H_7Br	$CH_3-CH_2-CH_2Br$ 1-Brompropan	$CH_3-CH(Br)-CH_3$ 2-Brompropan	
C_4H_8	$CH_2=CH-CH_2-CH_3$ Buten-(1)	$CH_3-CH=CH-CH_3$ Buten-(2)	
$C_6H_6O_2$	OH, —OH 1,2-Dihydroxybenzol	OH, —OH 1,3-Dihydroxybenzol	OH, OH 1,4-Dihydroxybenzol

Cis-trans-Isomerie

Cis-trans-Isomerie tritt nur bei *Verbindungen mit Doppelbindung* auf, die an den beiden Kohlenstoffatomen der Doppelbindung unterschiedliche Substituenten enthalten. Da bei der Kohlenstoffdoppelbindung durch Überlappung der p_z-Orbitale die freie Drehbarkeit der Kohlenstoffbindung aufgehoben ist, gibt es für die beiden Substituenten nur die Möglichkeiten, auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten der Doppelbindung zu sitzen. Die beiden Cis-

trans-Isomere zeigen unterschiedliche Eigenschaften, wobei die Cis-Form (beide Substituenten befinden sich auf der gleichen Seite der Doppelbindung) stets die *energiereichere* und *instabilere Form* ist (Tabelle 25).

Tabelle 25. Beispiele für cis-trans-isomere Verbindungen

Stoffe	Cis-Form	Trans-Form
1,2-Dibromäthen	H—C—Br ‖ H—C—Br	H—C—Br ‖ Br—C—H
Äthendikarbonsäure	H—C—COOH ‖ H—C—COOH Maleinsäure	H—C—COOH ‖ HOOC—C—H Fumarsäure

Optische Isomerie (Spiegelbildisomerie)

Optische Isomerie tritt nur bei Verbindungen mit *asymmetrischen Kohlenstoffatomen* im Molekül auf (Kohlenstoffatome, die mit vier verschiedenen Atomen oder Atomgruppen verbunden sind; Kennzeichen: *). Moleküle, die asymmetrische Kohlenstoffatome enthalten, sind ***optisch aktiv***, d. h., ihre Lösungen drehen die Schwingungsebene des polarisierten Lichts. Optisch isomere Verbindungen verhalten sich wie ***Bild*** und ***Spiegelbild***. Sie haben die gleichen physikalischen und chemischen Eigenschaften und unterscheiden sich lediglich durch die verschiedene Drehrichtung der Ebene des polarisierten Lichts.

Beispiele.

CH_3 | H—C*—OH | COOH	CH_3 | HO—C*—H | COOH
D-Hydroxypropansäure (D-Milchsäure)	L-Hydroxypropansäure (L-Milchsäure)

Erläuterung: Bezugssubstanz zur Bezeichnung optisch isomerer Verbindungen ist 2,3-Dihydroxypropanal (Glyzerinaldehyd). In Bild 4 sind die Tetraedermodelle der beiden isomeren Formen und ihre auf die Papierebene projizierte Strukturformel dargestellt.

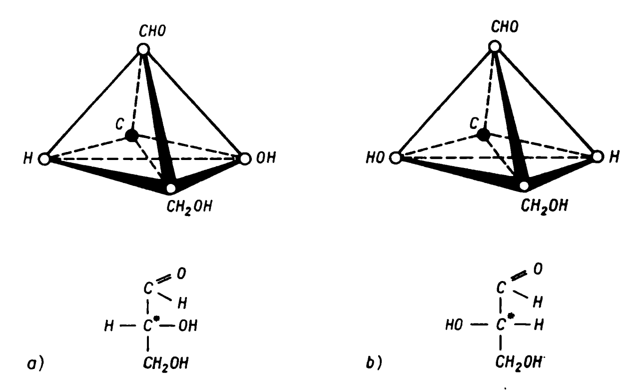


Bild 4. Isomere Formen des 2,3-Dihydroxypropanals (Glyzerinaldehyd)
a) D(+)-Glyzerinaldehyd, b) L(−)-Glyzerinaldehyd

Alle Verbindungen, die am asymmetrischen Kohlenstoffatom die gleiche Konfiguration wie D-Glyzerinaldehyd haben, gehören der D-Reihe (*Rechtsreihe*) an und alle Verbindungen mit der gleichen Konfiguration wie L-Glyzerinaldehyd der L-Reihe (*Linksreihe*). Die Drehrichtung der Ebene des polarisierten Lichts kann zusätzlich in Klammern angegeben werden (+ ≙ rechts, − ≙ links).

Tautomerie (Gleichgewichtsisomerie)

Tautomerie liegt vor, wenn zwei isomere Verbindungen, die miteinander im chemischen Gleichgewicht stehen, sich durch verschiedene Stellung eines Protons unterscheiden.

Beispiel. Ketoform ⇌ Enolform

$$CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_2-C\overset{\nearrow O}{\underset{\searrow O-C_2H_5}{}} \rightleftharpoons CH_3-\overset{\overset{OH}{|}}{C}=CH-C\overset{\nearrow O}{\underset{\searrow O-C_2H_5}{}}$$

Hier handelt es sich um die Gleichgewichtsisomerie des Azetyläthansäureäthylesters (Azetessigester). Bei Zimmertemperatur liegen im Gleichgewicht 93% der Ketoform und 7% der Enolform vor.

4.2. Einteilung organischer Verbindungen

4.2.1. Einteilung nach der Molekülgröße

Nach der Molekülgröße lassen sich organische Verbindungen in *niedrigmolekulare* und *makromolekulare Verbindungen* einteilen. Die Grenze zwischen beiden Verbindungsarten wird bei einer Molekülgröße gezogen, die in der organischen Chemie sehr selten vorkommt. Man drückt die Molekülgröße nicht durch den absoluten Moleküldurchmesser aus, sondern charakterisiert sie durch andere Werte (Tabelle 26).

Tabelle 26. Molekülgröße von niedrigmolekularen und makromolekularen Verbindungen

Größe	Niedrigmolekulare Verbindungen	Makromolekulare Verbindungen
Anzahl der Atome je Molekül	$Z < 1500$	$Z > 1500$
durchschnittliche Molmasse	$M < 10000$	$M > 10000$
durchschnittlicher Polymerisationsgrad	$\bar{P} < 100$	$\bar{P} > 100$

Die Zahlenwerte sind als ungefähre Angaben zu verstehen. Die Grenze für die Molmasse ergibt sich aus der Anzahl der Atome je Molekül, wenn man für die Elemente in organischen Verbindungen als durchschnittliche relative Atommasse 6 ··· 7 ansetzt. Der durchschnittliche Polymerisationsgrad von 100 stimmt dann mit der Molmasse von 10000 überein, wenn die Molmasse der Grundbausteine 100 beträgt.

Im chemischen Aufbau und in den Stoffeigenschaften existieren zwischen niedrigmolekularen und makromolekularen Verbindungen einige prinzipielle Unterschiede. Niedrigmolekulare organische Verbindungen sind stets *einheitlich* aufgebaut. Sie bestehen aus einer Molekülart; alle Moleküle der Verbindung haben die gleiche Molmasse. Makromolekulare Verbindungen sind nicht immer einheitlich aufgebaut. Ihre Moleküle haben nicht alle die gleiche Molmasse. Deswegen kann man bei ihnen auch nur eine *durchschnittliche Molmasse* bzw. einen *durchschnittlichen Polymerisationsgrad* angeben. Strenggenommen dürfte man gar nicht von „makromolekularen Verbindungen" sprechen. Man müßte mit dem Begriff „makromolekulare Stoffe" arbeiten, denn makromolekulare Stoffe sind als *Gemische* mehrerer ähnlicher Molekülarten aufzufassen, die als einheitliches Ganzes reagieren.

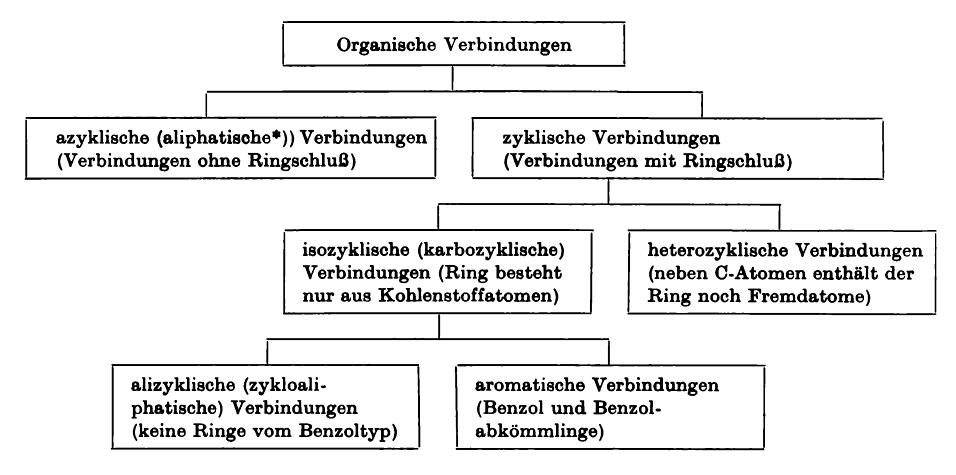
Niedrigmolekulare organische Verbindungen können meist in allen drei *Aggregatzuständen* existieren. Makromolekulare Stoffe kommen nur im festen und flüssigen Aggregatzustand vor. Sie existieren nicht in der Gasphase. Beim Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Aggregat-



zustand müssen die zwischenmolekularen Kräfte überwunden werden. Zwischen Makromolekülen sind die *Kohäsionskräfte* infolge der hohen Molmasse viel größer als zwischen kleinen Molekülen, so daß beim Erhitzen von Makromolekülen nicht die Kohäsionskräfte überwunden werden, sondern die Moleküle auseinanderbrechen (*Zersetzung*).
Die *Viskositätskoeffizienten* makromolekularer Schmelzen liegen wesentlich höher als die von niedrigmolekularen organischen Verbindungen (mehrere Zehnerpotenzen Unterschied). Es ist ohne weiteres einzusehen, daß der Reibungswiderstand bei der gegenseitigen Verschiebung parallel liegender Schichten bei Makromolekülen viel größer ist als bei kleineren Molekülen.

4.2.2. Einteilung nach der Struktur des Kohlenstoffgerüsts

Entsprechend der Anordnung der Atome in den Molekülen der organischen Verbindungen lassen sich *kettenförmige* (verzweigte oder unverzweigte) von *ringförmigen* Strukturen unterscheiden. Auf diesem Prinzip beruht die Einteilung der organischen Verbindungen nach der Struktur des Kohlenstoffgerüsts. Bei den Verbindungen mit ringförmiger Struktur unterscheidet man *reine Kohlenstoffringe* von solchen, die als Ringglieder auch andere Atome enthalten. Unter den organischen Verbindungen, deren Ring nur aus Kohlenstoffatomen besteht, nehmen das *Benzol* und die davon abgeleiteten Verbindungen eine Sonderstellung ein, woraus sich die Notwendigkeit einer weiteren Untergliederung ergibt:



*) abgeleitet von aleiphatos (grch.) Salböl. Da die fetten Öle zu den azyklischen Verbindungen zählen, hat man, historisch bedingt, die gesamte Verbindungsklasse danach benannt.

4.2.3. Einteilung nach funktionellen Gruppen

Funktionelle Gruppen sind Atome bzw. Atomgruppen mit charakteristischer Reaktionsfähigkeit. Sie bestimmen weitgehend das chemische Verhalten der organischen Verbindung. Da verschiedene organische Verbindungen mit der gleichen funktionellen Gruppe chemisch ähnlich reagieren, lassen sich organische Verbindungen auch entsprechend ihrer funktionellen Gruppe einteilen (Tabelle 27, S. 88).
Stoffe mit gleicher funktioneller Gruppe, deren aufeinanderfolgende Glieder sich jeweils um eine CH_2-Gruppe unterscheiden, werden zu *homologen Reihen* zusammengefaßt. Dadurch sind die chemischen Eigenschaften der Verbindungen einer homologen Reihe weitgehend ähnlich. Die physikalischen Eigenschaften der Glieder einer homologen Reihe ändern sich entsprechend der Molekülgröße gesetzmäßig (Tabelle 28, S. 90).

Tabelle 27. Einteilung organischer Verbindungen nach der funktionellen Gruppe

Formeldarstellung der funktionellen Gruppe	Bezeichnung der funktionellen Gruppe	Bezeichnung der Verbindungen, Beispiele	
$-F$	Fluor	**Halogenkohlenwasserstoffe**	
$-Cl$	Chlor	CCl_4	Tetrachlormethan (Tetrachlorkohlenstoff, Tetra)
$-Br$	Brom	$CHBr_3$	Tribrommethan (Bromoform)
$-J$	Jod	C_6H_5-J	Jodbenzol
$-OH$	Hydroxylgruppe	**Alkohole**	
		C_2H_5-OH	Äthanol
		$CH_2(OH)-CH_2(OH)$	Äthandiol (Glykol)
		Phenole	
		$HO-C_6H_4-OH$	1,4-Dihydroxybenzol (Hydrochinon)
$-C(=O)-H$ ($-CHO$)	Aldehydgruppe	**Aldehyde**	
		$CH_3-C(=O)-H$	Äthanal (Azetaldehyd)
		$C_6H_5-C(=O)-H$	Benzaldehyd
$-C(=O)-$	Oxogruppe Karbonylgruppe Ketogruppe	**Ketone**	
		$CH_3-C(=O)-C_2H_5$	Butanon-(2) (Methyläthylketon)
		$C_6H_5-C(=O)-C_6H_5$	Diphenylketon (Benzophenon)
$-C(=O)-OH$ ($-COOH$)	Karboxylgruppe Säuregruppe	**Karbonsäuren**	
		$C_3H_7-C(=O)-OH$	Butansäure (Buttersäure)
		$HO-C(=O)-C(=O)-OH$	Äthandisäure (Oxalsäure)
		$C_6H_5-C(=O)-OH$	Benzoesäure

Tabelle 27 (Fortsetzung)

Formeldarstellung der funktionellen Gruppe	Bezeichnung der funktionellen Gruppe	Bezeichnung der Verbindungen, Beispiele	
		Säurederivate	
$-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash X\end{smallmatrix}$	Säurehalogenidgruppe	$CH_3-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash Cl\end{smallmatrix}$	Äthanoylchlorid, Äthansäurechlorid (Azetylchlorid)
$\begin{smallmatrix}-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash\end{smallmatrix}\\ O\\ -C\begin{smallmatrix}/\\ {\backslash\!\!\backslash}O\end{smallmatrix}\end{smallmatrix}$	Säureanhydridgruppe	$\begin{smallmatrix}CH_3-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash\end{smallmatrix}\\ O\\ CH_3-C\begin{smallmatrix}/\\ {\backslash\!\!\backslash}O\end{smallmatrix}\end{smallmatrix}$	Äthansäureanhydrid (Essigsäureanhydrid)
$-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash O-R\end{smallmatrix}$	Estergruppe	$CH_3-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash O-C_2H_5\end{smallmatrix}$	Äthyläthanat (Essigsäureäthylester)
$-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash NH_2\end{smallmatrix}$	Säureamidgruppe	$CH_3-C\begin{smallmatrix}{/\!\!/}O\\ \backslash NH_2\end{smallmatrix}$	Äthansäureamid (Azetamid)
		Äther	
$-O-$	Äthergruppe	$CH_3-O-C_2H_5$	Methyläthyläther
		$C_2H_5-O-C_2H_5$	Diäthyläther
		Amine	
$-N\begin{smallmatrix}/H\\ \backslash H\end{smallmatrix}$	primäre Aminogruppe	$C_2H_5-NH_2$	Aminoäthan (Äthylamin)
$-N\begin{smallmatrix}/H\\ \backslash R\end{smallmatrix}$	sekundäre Aminogruppe	$C_6H_5-\underset{H}{\underset{\vert}{N}}-CH_3$	Methylaminobenzol (N-Methylanilin)
$-N\begin{smallmatrix}/R\\ \backslash R'\end{smallmatrix}$	tertiäre Aminogruppe	$\begin{smallmatrix}CH_3\backslash\\ CH_3/\end{smallmatrix}N-CH_3$	Dimethylaminomethan (Trimethylamin)
		Nitrokohlenwasserstoffe	
$-NO_2$	Nitrogruppe	CH_3-NO_2	Nitromethan
		$C_6H_5-NO_2$	Nitrobenzol
		Nitrile	
$-C\equiv N$	Nitrilgruppe	$CH_3-C\equiv N$	Äthannitril (Azetonitril)
		$C_6H_5-C\equiv N$	Benzonitril (Phenylzyanid)
$-N=N-$	Azogruppe	$C_6H_5-N=N-C_6H_5$	Azobenzol

Tabelle 27 (Fortsetzung)

Formeldarstellung der funktionellen Gruppe	Bezeichnung der funktionellen Gruppe	Bezeichnung der Verbindungen, Beispiele	
$-NH-NH-$	Hydrazogruppe	$C_6H_5-NH-NH-C_6H_5$	Hydrazobenzol
$-\overset{\oplus}{N}\equiv N\|$	Diazoniumgruppe	$[C_6H_5-\overset{\oplus}{N}\equiv N\|]^+ Cl^-$	Benzoldiazoniumchlorid
		Sulfonsäuren	
$-SO_3H$	Sulfogruppe	$C_2H_5-SO_3H$	Äthansulfonsäure
		$C_6H_4(SO_3H)_2$ (1,3)	Benzoldisulfonsäure-(1,3) (m-Benzoldisulfonsäure)

Tabelle 28. Beispiele für homologe Reihen

Alkane	Primäre Alkohole	Alkanale	Monokarbonsäuren
CH_4	CH_3-OH	$H-CHO$	$H-COOH$
C_2H_6	C_2H_5-OH	CH_3-CHO	CH_3-COOH
C_3H_8	C_3H_7-OH	C_2H_5-CHO	C_2H_5-COOH
C_4H_{10}	C_4H_9-OH	C_3H_7-CHO	C_3H_7-COOH
C_5H_{12}	$C_5H_{11}-OH$	C_4H_9-CHO	C_4H_9-COOH
⋮	⋮	⋮	⋮

4.3. Grundregeln zur rationellen Nomenklatur organischer Verbindungen

Die Grundregeln zur systematischen Bezeichnung organischer Verbindungen gehen auf eine Ausschußsitzung des Genfer Kongresses im Jahre 1892 zurück, an der sich 34 hervorragende Chemiker aus 8 europäischen Ländern beteiligten. Die dort aufgestellte Nomenklatur wird als „*Genfer Nomenklatur*" bezeichnet. Bis heute ist diese Nomenklatur mehrfach überarbeitet, erweitert und verbessert worden*). Es wird jedoch angestrebt, in Zukunft im chemischen Schrifttum die IUPAC-Schreibweise chemischer Namen**) anzuwenden***) (IUPAC, International Union of Pure and Applied Chemistry). Neben der rationellen Nomenklatur sind auch heute noch zur Bezeichnung organischer Verbindungen viele *Trivialnamen* im Gebrauch, die sich auf die Herkunft, den Verwendungszweck, bestimmte Eigenschaften oder auch auf willkürliche Gesichtspunkte beziehen.

4.3.1. Aliphatische Kohlenwasserstoffe

Geradkettige aliphatische Kohlenwasserstoffe

Die Bezeichnung wird in folgender Reihenfolge vorgenommen:

— *n*: Kennzeichen für eine normalkettige Verbindung.
— *Stammname:* Er gibt die Anzahl der Kohlenstoffatome an.
— *Endung:* Alkane enden auf „-an", Alkene auf „-en", Alkine auf „-in".

*) siehe Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft **26** (1893) 1595 und **65** (1932) 11
) siehe Handbuch zur Anwendung der Nomenklatur organisch-chemischer Verbindungen. — Berlin: Akademie-Verlag 1978, *) Diese Schreibweise wird in diesem Werk *noch nicht* angewendet.

Beispiele.

n	Hept	an
normalkettige Verbindung	Stammname	Endung

Anzahl der C-Atome	Stammname
1	Meth-
2	Äth-
3	Prop-
4	But-
5	Pent-
6	Hex-
↓	↓ griechische Zahlwörter

Bei *Alkenen* und *Alkinen* muß die Stellung der Mehrfachbindung im Molekül angegeben werden (arabische Ziffer in Klammern nach der Endung). Sind mehrere Mehrfachbindungen im Molekül vorhanden, so ist deren Anzahl durch ein griechisches Zahlwort vor der Endung anzugeben.

Beispiele. $CH_3-CH_2-CH=CH_2$ n-Buten-(1) $CH_2=CH-CH=CH-CH_3$ n-Pentadien-(1,3)

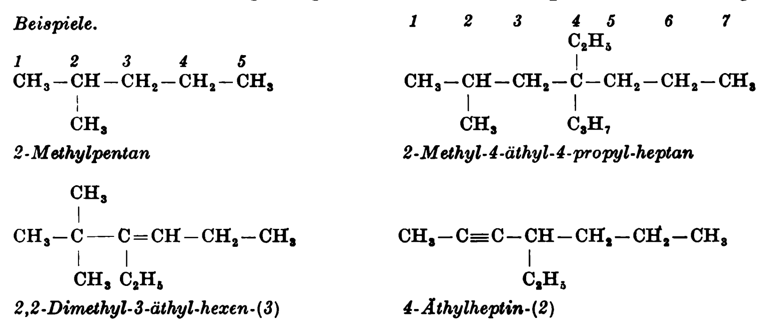
Verzweigte aliphatische Kohlenwasserstoffe

Aus der Strukturformel des Kohlenwasserstoffs sucht man sich die längste gerade Kette heraus und numeriert die Kohlenstoffatome so, daß die Verzweigungsstellen möglichst kleine Zahlen erhalten.

Reihenfolge der Benennung:

— *arabische Ziffern,* die die Stellung der Seitenketten angeben,
— *griechische Zahlwörter,* die die Anzahl der Kohlenwasserstoffreste angeben,
— *Name* der Seitenkette mit Endung „-yl",
— *Stammname* der längsten geraden Kette mit entsprechender Endung.

Beispiele.



2-Methylpentan *2-Methyl-4-äthyl-4-propyl-heptan*

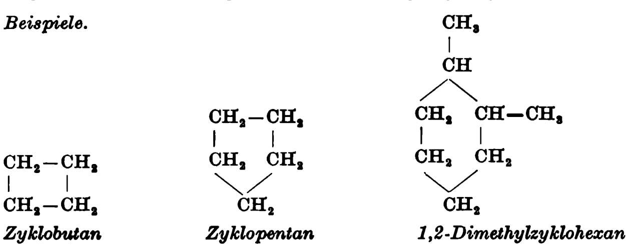
2,2-Dimethyl-3-äthyl-hexen-(3) *4-Äthylheptin-(2)*

4.3.2. Zyklische Kohlenwasserstoffe

Zykloalkane (Naphthene)

Zykloalkane enden wie die Alkane auf „-an". Vor den Stammnamen setzt man die Silbe „Zyklo-". Für die Angabe von Verzweigungen gelten die bereits genannten Regeln.

Beispiele.



Zyklobutan *Zyklopentan* *1,2-Dimethylzyklohexan*

Aromatische Kohlenwasserstoffe

Aromatische Kohlenwasserstoffe leiten sich vom *Benzol* ab. Es werden Homologe des Benzols (*Alkylbenzole*) von mehrkernigen aromatischen Kohlenwasserstoffen unterschieden.

Alkylbenzole

Vor der Endung „-benzol" werden die aliphatischen Seitenketten entsprechend den Regeln zur Bezeichnung aliphatischer Kohlenwasserstoffe genannt. Hängen am Benzolmolekül zwei aliphatische Seitenketten, so ist neben der Numerierung der Kohlenstoffatome noch folgende Bezeichnung üblich (Tabelle 29).

Tabelle 29. Bezeichnung von Benzolabkömmlingen mit zwei Seitenketten

Stellung der C-Atome mit Seitenketten	Bezeichnung	Abkürzung
1,2-Stellung	ortho-	o-
1,3-Stellung	meta-	m-
1,4-Stellung	para-	p-

Beispiele.

$-CH_3$ — *Methylbenzol* (Toluol)

$-C_2H_5$ — *Äthylbenzol*

$-CH(CH_3)_2$ — *Isopropylbenzol* (Kumol)

CH_3, CH_3 — *1,2-Dimethylbenzol* (o-Xylol)

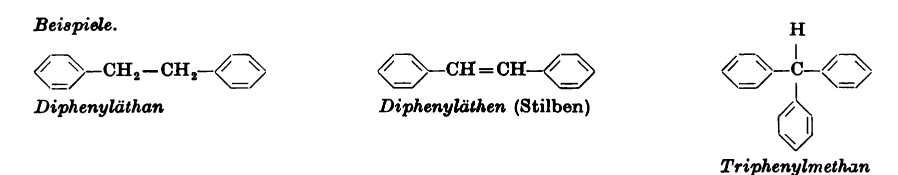
CH_3, CH_3 — *1,3-Dimethylbenzol* (m-Xylol)

CH_3, CH_3 — *1,4-Dimethylbenzol* (p-Xylol)

Mehrkernige aromatische Kohlenwasserstoffe

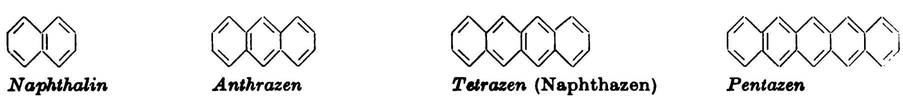
Nichtkondensierte aromatische Kohlenwasserstoffe (sie haben keine Ringglieder gemeinsam) werden als azyklische Kohlenwasserstoffe mit aromatischen Resten aufgefaßt.

Beispiele.



Kondensierte aromatische Kohlenwasserstoffe (sie haben mehrere Kohlenstoffatome als Ringglieder gemeinsam) mit linearer Anordnung der Kerne werden als *Azene* bezeichnet. Die Zahl der Ringe wird mit einem griechischen Zahlwort in der Vorsilbe angegeben.

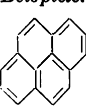
Beispiele.

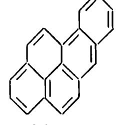


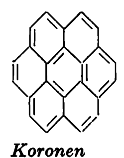
Naphthalin *Anthrazen* *Tetrazen* (Naphthazen) *Pentazen*

Höherkondensierte aromatische Kohlenwasserstoffe werden mit Trivialnamen bezeichnet.


Beispiele.


Pyren

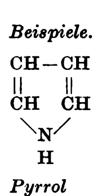

3,4-Benzpyren


Koronen

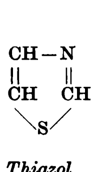
Heterozyklische Kohlenwasserstoffe

Zur Bezeichnung der Heterozyklen werden meist Trivialnamen benutzt. Fünfringe haben häufig die Endung „-ol", Sechsringe die Endung „-in". Heterozyklische Verbindungen mit Seitenketten werden nach der üblichen Nomenklatur unter Verwendung des Stammnamens bezeichnet.

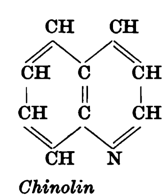
Beispiele.



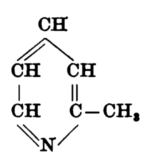
Pyrrol



Thiazol



Chinolin



2-Methylpyridin (α-Methylpyridin)

4.3.3. Derivate der Kohlenwasserstoffe

Derivate der Kohlenwasserstoffe werden meist nach der im Molekül enthaltenen funktionellen Gruppe bezeichnet.

Alkohole, Aldehyde, Ketone

Für aliphatische Verbindungen wird an den Namen des zugrunde liegenden Kohlenwasserstoffs ein Suffix angehängt und die Stellung der funktionellen Gruppe im Molekül durch eine arabische Ziffer in Klammern nach der Endung angegeben (Tabelle 30).

Tabelle 30. Bezeichnung aliphatischer Alkohole, Aldehyde und Ketone

Verbindungstyp	Bezeichnung	Suffix
Aliphatischer Alkohol	Alkanol	-ol
Aliphatischer Aldehyd	Alkanal	-al
Aliphatisches Keton	Alkanon	-on

Bei aromatischen Ketonen werden die Namen der beiden Kohlenwasserstoffreste mit der Silbe „-yl" versehen, und als Endung wird „-keton" angehängt. Diese Bezeichnung kann auch für aliphatische Ketone verwendet werden.

Beispiele.

$CH_3-C(CH_3)(OH)-C_2H_5$

2-Methylbutanol-(2)

$CH_2(OH)-CH(OH)-CH_3$

Propandiol-(1,2)

$C_6H_5-CH_2-CH_2-OH$

2-Phenyläthanol-(1)

$CH_3-C(=O)H$

Äthanal (Azetaldehyd)

$CH_3-C(=O)-C_3H_7$

Pentanon-(2) (Methylpropylketon)

$CH_3-C(=O)-C_6H_5$

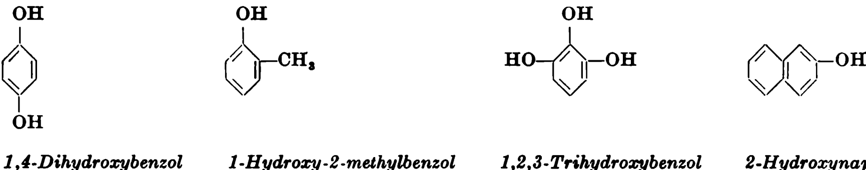
Methylphenylketon (Azetophenon)

Phenole

Die Bezeichnung wird in folgender Reihenfolge vorgenommen:

- *Stellung* der OH-Gruppe (arabische Ziffer),
- bei mehreren OH-Gruppen deren *Anzahl* (griechisches Zahlwort),
- *funktionelle Gruppe:* „-hydroxy-",
- *Name* des aromatischen Kohlenwasserstoffs.

Beispiele.



1,4-Dihydroxybenzol (Hydrochinon)	*1-Hydroxy-2-methylbenzol* (o-Kresol)	*1,2,3-Trihydroxybenzol* (Pyrogallol)	*2-Hydroxynaphthalin* (β-Naphthol)

Karbonsäuren

Zur Bezeichnung der Karbonsäuren wird an den Namen des Kohlenwasserstoffs, der der Gesamtzahl an Kohlenstoffatomen entspricht, das Suffix „-säure" angehängt. Bei der Verwendung des Suffixes „-karbonsäure" gilt die COOH-Gruppe als Substituent.

Beispiele.

$CH_3-C(=O)OH$

Äthansäure
Methankarbonsäure
(Essigsäure)

$CH_2-C(=O)OH$
$|$
$CH_2-C(=O)OH$

Butandisäure
Äthandikarbonsäure
(Bernsteinsäure)

$C_6H_4(-C(=O)OH)_2$

Benzoldikarbonsäure-(1,2)
(Phthalsäure)

Amine

Zur Benennung der Amine existieren zwei Möglichkeiten:

1. Die Bezeichnung beginnt mit der Stellung der funktionellen Gruppe im Molekül (arabische Ziffer). Es folgt der Name der funktionellen Gruppe: „amino-". Daran schließt sich der Name des Kohlenwasserstoffs an.
2. Die Namen der Kohlenwasserstoffreste werden mit der Silbe „-yl" versehen, und als Endung wird „-amin" angehängt.

Beispiele.

$CH_3-CH_2-CH(NH_2)-CH_3$

2-Aminobutan
Butylamin-(2)

$CH_3-NH-C_2H_5$

Methylaminoäthan
Methyläthylamin

$CH_3-N(CH_3)-CH_3$

Dimethylaminomethan
Trimethylamin

$C_6H_5-NH_2$

Aminobenzol
Phenylamin (Anilin)

$H_2N-C_6H_4-NH_2$

1,4-Diaminobenzol
p-Phenylendiamin



4.4. Reaktionen in der organischen Chemie

Betrachtet man die Vielzahl der Reaktionen in der organischen Chemie vom *Bruttoumsatz* her, so lassen sich alle Reaktionen auf drei Grundtypen zurückführen. Für das reagierende Molekül gibt es drei Möglichkeiten (Bild 5):

1. An das Molekül ist ein Stoff angelagert worden (*Addition*).
2. Aus dem Molekül ist ein Stoff abgespalten worden (*Eliminierung*).
3. Verschiedene Moleküle haben unter Austausch bestimmter Atome oder Atomgruppen neue Moleküle gebildet (*Substitution*).

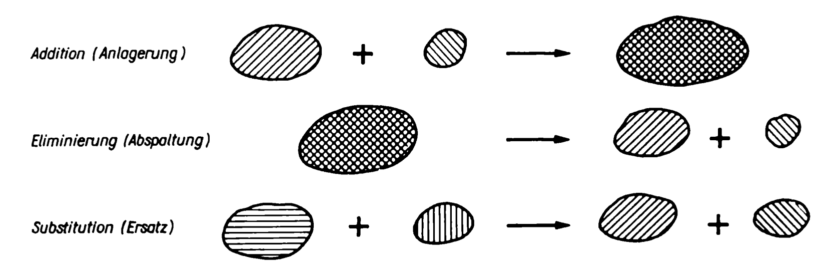


Bild 5. Schematische Darstellung der organischen Reaktionstypen

Neben dieser Typisierung der organischen Reaktionen werden sie auch noch unter anderen Gesichtspunkten zusammengefaßt. So läßt sich mit der *Bezeichnung* das Typische des chemischen Vorgangs ausdrücken (z. B. Hydrierung, Oxydation, Veresterung, Dehydratisierung) oder auch der Vorgang mit dem *Namen des Forschers* verbinden, der diese Reaktion als erster eingehend beschrieben hat (z. B. WURTZsche Synthese, GRIGNARDsche Synthese).

4.4.1. Addition (Anlagerung)

Unter Addition ist die Bildung *eines* Reaktionsprodukts aus *zwei* Ausgangsstoffen zu verstehen. Dabei muß mindestens ein Reaktionspartner eine *Mehrfachbindung* aufweisen. Im Verlaufe der Addition geht dann die Dreifachbindung in eine Doppelbindung bzw. die Doppelbindung in eine Einfachbindung über (Tabelle 31).

Reaktionsschema: $>C{=}C< + H{-}X \rightarrow -\overset{|}{\underset{H}{C}}-\overset{|}{\underset{X}{C}}-$

Tabelle 31. Beispiele für Additionsreaktionen

Reaktionsgleichung	Bezeichnung des chemischen Vorgangs
$CH_2{=}CH_2 + H_2 \rightarrow CH_3{-}CH_3$	*Hydrierung* (Addition von Wasserstoff)
$H{-}C(=O){-}H + H_2 \rightarrow CH_3{-}OH$	*Reduktion* (Addition von Wasserstoff)
$CH_2{=}CH_2 + H_2O \rightarrow CH_2(OH){-}CH_3$	*Hydratation* (Addition von Wasser)
$n\,[CH_2{=}CH_2] \rightarrow [-CH_2{-}CH_2-]_n$	*Polymerisation* (wiederholte Addition von Molekülen mit sich selbst)

4.4.2. Eliminierung (Abspaltung)

Unter Eliminierung wird die intramolekulare Abspaltung von Atomen oder Atomgruppen verstanden, die meist unter Bildung einer *Doppelbindung* abläuft. Aus *einem* Stoff entstehen *zwei* Stoffe. Die Eliminierung kann als Umkehrung der Addition verstanden werden (Tabelle 32).

Reaktionsschema: $-\underset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}-\underset{X}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}- \rightarrow \;>C=C< + H-X$

Tabelle 32. Beispiele für Eliminierungsreaktionen

Reaktionsgleichung	Bezeichnung des chemischen Vorgangs
$R-CH_2-CH_2-OH \rightarrow R-CH=CH_2 + H_2O$	*Dehydratisierung* (Abspaltung von Wasser)
$H-CCl_2-CCl_2-H \rightarrow (Cl)(H)C=CCl_2 + HCl$	*Abspaltung* von Chlorwasserstoff
C_6H_{12} (Cyclohexan: H_2C, CH_2 im Ring) $\rightarrow C_6H_6$ (Ring aus CH mit Doppelbindungen) $+ 3H_2$	*Dehydrierung* (Abspaltung von Wasserstoff)

4.4.3. Substitution (Austausch, Ersatz)

Unter Substitution wird der Ersatz eines Atoms oder einer Atomgruppe durch ein anderes Atom oder eine Atomgruppe verstanden. Aus *zwei* Stoffen entstehen *zwei* andere Stoffe (Tabelle 33).

Reaktionsschema: $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-\overset{|}{\underset{|}{C}}-X + Y \rightarrow -\overset{|}{\underset{|}{C}}-\overset{|}{\underset{|}{C}}-Y + X$

Tabelle 33. Beispiele für Substitutionsreaktionen

Reaktionsgleichung	Bezeichnung des chemischen Vorgangs
$C_6H_5-NO_2 + 3H_2 \rightarrow C_6H_5-NH_2 + 2H_2O$	*Reduktion* (Ersatz von Sauerstoff durch Wasserstoff in einem organischen Molekül)
$C_6H_6 + Cl_2 \rightarrow C_6H_5-Cl + HCl$	*Chlorierung* (Ersatz eines Wasserstoffatoms durch ein Chloratom)
$CH_3-C(=O)H + H_2N-OH \rightarrow CH_3-\underset{H}{C}=N-OH + H_2O$	*Kondensation* (der Austausch erfolgt unter Bildung von Wasser)
$CH_3-C(=O)OH + C_2H_5-OH \rightarrow CH_3-C(=O)O-C_2H_5 + H_2O$	*Veresterung* (Reaktion einer Säure mit einem Alkohol)

4.4.4. Bildung von Makromolekülen

Die Reaktionen zur Bildung von Makromolekülen lassen sich auf die Grundtypen *Addition* und *Substitution* zurückführen. Das Charakteristische dabei ist, daß sich der gleiche Reaktionsschritt sehr viele Male wiederholt und so zur Bildung von Makromolekülen führt.

Polymerisation

Hierbei treten meist die gleichen Moleküle der niedrigmolekularen Verbindung mit Mehrfachbindung unter Aufspaltung der Mehrfachbindung zu *Makromolekülen* zusammen (Addition).

Beispiel.

$$n\,\mathrm{H_2C{=}CHCl} \rightarrow \left[-\underset{\mathrm{H}}{\overset{\mathrm{H}}{\mathrm{C}}}-\underset{\mathrm{Cl}}{\overset{\mathrm{H}}{\mathrm{C}}}- \right]_n$$

Vinylchlorid — Polyvinylchlorid

Polykondensation

Bei der Polykondensation reagieren zahlreiche Moleküle von mindestens zwei niedrigmolekularen organischen Verbindungen mit zwei oder mehreren funktionellen Gruppen zu *Makromolekülen.* Dabei wird ein niedrigmolekulares Spaltprodukt, meist Wasser, abgespalten (Substitution).

Beispiel.

$$n\,\mathrm{HO{-}CH_2{-}CH_2{-}OH} + n\,\mathrm{HOOC{-}C_6H_4{-}COOH}$$

Äthandiol (Glykol) — Benzoldikarbonsäure-(1,4) (Terephthalsäure)

$$\rightarrow \left[-\mathrm{O{-}CH_2{-}CH_2{-}O{-}\overset{O}{\overset{\|}{C}}{-}C_6H_4{-}\overset{O}{\overset{\|}{C}}}- \right]_n + 2n\,\mathrm{H_2O}$$

Polyester

Polyaddition

Hierbei reagieren zahlreiche Moleküle von mindestens zwei niedrigmolekularen Verbindungen mit zwei oder mehreren funktionellen Gruppen (ein Stoff mit Mehrfachbindungen) zu *Makromolekülen.* Die Addition des einen Stoffs an die Doppelbindung des anderen erfolgt unter Platzwechsel von Wasserstoffatomen.

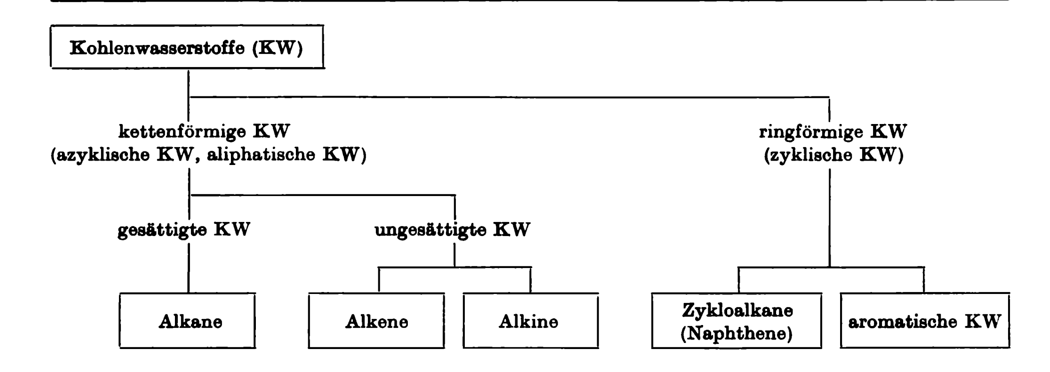
Beispiel.

$$n\,\mathrm{O{=}C{=}N{-}(CH_2)_6{-}N{=}C{=}O} + n\,\mathrm{HO{-}(CH_2)_4{-}OH} \rightarrow \left[-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-\underset{H}{\underset{|}{N}}-(CH_2)_6-\underset{H}{\underset{|}{N}}-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-(CH_2)_4-O- \right]_n$$

Hexamethylendiisozyanat — Butandiol-(1,4) — Polyurethan

4.5. Organische Verbindungen der Elemente Kohlenstoff und Wasserstoff

Entsprechend der Einteilung der organischen Verbindungen nach der Struktur des Kohlenstoffgerüsts lassen sich die Kohlenwasserstoffe in folgende fünf *Gruppen* einteilen:



4.5.1. Alkane

Alkane sind Kohlenwasserstoffe mit der *Summenformel* C_nH_{2n+2}. Da sie *keine* Mehrfachbindung haben und sie dementsprechend keine Additionsreaktionen geben können, werden sie zu den *gesättigten Kohlenwasserstoffen* gezählt.

Eigenschaften

In der homologen Reihe der geradkettigen Alkane steigen Schmelz- und Siedepunkt gesetzmäßig mit zunehmender Molmasse an (Tabelle 34).

Tabelle 34. Physikalische Eigenschaften der normalkettigen Alkane

Name	Summenformel	Siedepunkt t_{sd} in °C	Schmelzpunkt t_{sm} in °C	Allgemeine Beschreibung
Methan	CH_4	−164	−184	geruchlose Gase
Äthan	C_2H_6	−88,5	−171,4	
Propan	C_3H_8	−42	−190	leicht zu verflüssigende Gase („Flüssiggas")
Butan	C_4H_{10}	+0,6	−135	
Pentan	C_5H_{12}	+36,2	−130,8	farblose Flüssigkeiten mit charakteristischem „Benzingeruch"
Hexan	C_6H_{14}	+68,7	−94,3	
Oktan	C_8H_{18}	+125,8	−56,8	
Dekan	$C_{10}H_{22}$	+173,8	−30	
Oktadekan	$C_{18}H_{38}$	+317	+28	feste, geruchlose, paraffinartige Stoffe
Pentatriakontan	$C_{35}H_{72}$	+344 bei 2 kPa	+74,6	
Pentakontan	$C_{50}H_{102}$		+92	
Heptakontan	$C_{70}H_{142}$		+105	

Von den Isomeren der einzelnen Alkane haben stets die normalkettigen den höchsten Siedepunkt (Tabelle 35).

Tabelle 35. Siedepunkte der Isomere des Hexans

Isomere des Hexans	Siedepunkt t_{sd} in °C
n-Hexan	68,7
3-Methylpentan	63,3
2-Methylpentan	60,3
2,3-Dimethylbutan	58,1
2,2-Dimethylbutan	49,7

Typische Reaktionen

Die Gruppe der Alkane wird auch mit dem Trivialnamen „*Paraffine*" bezeichnet. Dieser Name deutet auf ein geringes Reaktionsvermögen hin*). Tatsächlich sind die Alkane auch gegenüber starken Säuren und Laugen sehr beständig. Trotzdem gehen sie verschiedene Reaktionen ein, besonders bei erhöhter Temperatur bzw. Anwesenheit von Katalysatoren.

Substitution:

Technische Bedeutung haben die *Chlorierung* von Alkanen zur Herstellung von Halogenkohlenwasserstoffen und die *Sulfochlorierung* als Ausgangsreaktion zur Herstellung waschaktiver Substanzen. Die Reaktionen werden meist bei niedrigen Temperaturen unter Einwirkung von UV-Licht durchgeführt:

$$CH_4 \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2} CH_3Cl \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2} CH_2Cl_2 \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2} CHCl_3 \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2} CCl_4$$

$$R-H + SO_2 + Cl_2 \rightarrow R-SO_2Cl + HCl$$

Oxydation:

Die katalytische Oxydation mit Luftsauerstoff und Kaliumpermanganat als Katalysator liefert bei etwa 100 °C hauptsächlich *Monokarbonsäuren* („Paraffinoxydation" zur Herstellung höherer Fettsäuren):

$$C_nH_{2n+2} + \frac{3}{2}O_2 \rightarrow C_{n-1}H_{2n-1}COOH + H_2O$$

Spaltung:

Die thermische oder katalytische Spaltung von Alkanen aus Erdölfraktionen ist eine wichtige *petrolchemische Reaktion* zur Bildung von Alkenen, Alkinen und Aromaten. Bei 600 °C und Gegenwart von Aluminiumoxid als Katalysator bilden sich z. B. unter Wasserstoffabspaltung (*Dehydrierung*) Alkene und niedrigmolekulare Alkane:

$$CH_3-CH_3 \rightarrow CH_2=CH_2 + H_2$$

$$2CH_3-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_3-CH=CH_2 + CH_2=CH_2 + CH_4 + H_2$$

Vorkommen und Verwendung

Die Alkane sind der Hauptbestandteil des *paraffinbasischen Erdöls*. Sie kommen weiter in den Destillationsprodukten des *Braunkohlenteers* vor.
Methan bildet den Hauptbestandteil des *Erdgases*. Daneben entsteht es bei der bakteriellen Zersetzung als *Sumpf*- und *Biogas* und ist im *Grubengas* enthalten (schlagende Wetter!).
Über die Einsatzmöglichkeiten von Alkanen bestimmter Kettenlänge gibt die Tabelle 36 Auskunft.

Tabelle 36. Einsatzmöglichkeiten der Alkane

C-Anzahl	Verbindung	Einsatzmöglichkeiten
1	Methan	Heizgas, Treibgas, Gasrußherstellung, Ammoniak-, Methanol-, Äthinsynthese
2	Äthan	Heizgas, Äthingewinnung
3, 4	Propan, Butan	Treibgas für Kraftfahrzeuge, bequeme Abfüllung in Stahlflaschen: Haushalt, Camping
5, 6	Pentan, Hexan	Petroläther: Lösungsmittel für Fette, Öle und Harze
6···10	Hexan···Dekan	Benzin: Treibstoff für Ottomotoren, Lösungsmittel
8···12	Oktan···Undekan	Testbenzin: Lösungsmittel, vorwiegend für Lacke
10···17	Dekan···Heptadekan	Treibstoff für Dieselmotoren (Dieselöl), Strahltriebwerke — Beleuchtung (Petroleum) — Heizöl
15···25	Pentadekan···Pentakosan	Schmieröle (Spindel-, Maschinen-, Zylinderöl) — Heizöl
> 20	Eikosan und folgende Alkane	Salbengrundlage (Vaseline), Weichparaffin, Hartparaffin, Schuhpflegemittel, Zündholzimprägnierung, Dachpappe, Straßenbelag (Asphalt)

*) abgeleitet von parum affinis (lat.), wenig verwandt, wenig reaktionsfähig

4.5.2. Alkene

Alkene sind azyklische Kohlenwasserstoffe, die *Doppelbindungen* im Molekül enthalten. Die Bindungslänge (Abstand der bindenden Kohlenstoffatome) beträgt bei einer Doppelbindung 0,135 nm, dagegen bei der Einfachbindung 0,154 nm. Ist im Molekül nur *eine* Doppelbindung vorhanden, so lautet die Summenformel C_nH_{2n}. Dialkene haben dementsprechend die Summenformel C_nH_{2n-2}. Alkene gehören zu den *ungesättigten Kohlenwasserstoffen* und gehen vorwiegend Additions- und Polymerisationsreaktionen ein.

Eigenschaften

Die Alkene ähneln in ihren physikalischen Eigenschaften weitgehend den Alkanen. Im Gegensatz zu den Alkanen sind sie sehr reaktionsfreudig. Entscheidend für ihr chemisches Verhalten ist das π-Elektronenpaar der Doppelbindung, das sich je nach dem Reaktionspartner leicht verschieben bzw. leicht in zwei Einzelelektronen aufspalten läßt:

Aufspaltung des π-Elektronenpaars (Entkopplung):

$$H_2C=CH_2 \leftrightarrow H_2\dot{C}-\dot{C}H_2$$

Grundstruktur reaktionsfähige Struktur

Es liegt ein doppeltes Radikal vor $\triangleq$ *Biradikalstruktur.* Alkene reagieren über diese Biradikalstruktur, wenn das π-Elektronenpaar durch Energiezufuhr oder durch Radikalbildner (z. B. Peroxide) zur Aufspaltung veranlaßt wird.

Verschiebung des π-Elektronenpaars:

$$H_2C=CH_2 \leftrightarrow H_2\overset{\ominus}{\underline{C}}-\overset{\oplus}{C}H_2 \leftrightarrow H_2\overset{\oplus}{C}-\overset{\ominus}{\underline{C}}H_2$$

Grundstruktur reaktionsfähige Strukturen

Durch die Verschiebung des π-Elektronenpaars erhalten die beiden Kohlenstoffatome unterschiedliche Ladung $\triangleq$ *Zwitterionenstruktur.* Alkene reagieren über diese Zwitterionenstruktur bei Gegenwart stark polarer Substanzen.
Charakteristische Reaktionen dieser reaktionsfähigen Strukturen sind die Addition und die Polymerisation.
Die Alkene werden auch häufig „*Olefine*" genannt, da früher das Äthen als „ölbildendes Gas" bezeichnet wurde. Ursache dafür ist die Bildung von öligen Tropfen 1,2-Dibromäthans bei der Addition von Brom an Äthen. Diese Reaktion dient auch als Nachweisreaktion von Mehrfachbindungen, weil hierbei die intensiv gefärbte Bromlösung entfärbt wird:

$$CH_2=CH_2 + Br_2 \rightarrow CH_2Br-CH_2Br$$

Gewinnung und Verwendung

Alkene sind die wichtigsten Primärprodukte der *Petrolchemie* und zugleich Ausgangsstoffe für den größten Teil der *Plasterzeugnisse*, die durch Polymerisation gewonnen werden. Die bedeutendste Reaktion zur Gewinnung der Alkene ist die *thermische* bzw. *katalytische Spaltung* von Kohlenwasserstoffen aus Erdölfraktionen.
Butadien-(1,3) ist der wichtigste Vertreter der Dialkene und Ausgangsprodukt für die Herstellung von synthetischem Kautschuk. Es wird zumeist aus Äthin gewonnen: An Äthin wird katalytisch (Quecksilbersulfat) Wasser angelagert. Zwei Moleküle des entstandenen Azetaldehyds dimerisieren zum Aldol. Durch Reduktion des Aldols entsteht Butandiol-(1,3). Aus diesem zweiwertigen Alkanol kann katalytisch (Natriummetaphosphat) Wasser abgespaltet werden:

$$2CH\equiv CH \xrightarrow{+2H_2O} 2CH_3-CHO \rightarrow CH_3-CH(OH)-CH_2-CHO$$

Äthin *Azetaldehyd* *Aldol*

$$\xrightarrow{+2H} CH_2(OH)-CH_2-CH(OH)-CH_3 \xrightarrow{-2H_2O} CH_2=CH-CH=CH_2$$

Butandiol-(1,3) *Butadien-(1,3)*

4.5.3. Alkine

Alkine sind ungesättigte azyklische Kohlenwasserstoffe mit *Dreifachbindungen.* Bei *einer* Dreifachbindung im Molekül lautet die Summenformel C_nH_{2n-2}. Hier soll lediglich auf den wichtigsten Vertreter, auf das Äthin, eingegangen werden.

Herstellung des Äthins

Äthin (Azetylen) kann aus Kalk und Kohle gewonnen werden. Koks und gebrannter Kalk setzen sich im elektrischen Ofen bei etwa 2300 °C zu Kalziumkarbid um. Anschließend wird das Kalziumkarbid mit Wasser zersetzt:

$$3\,C + CaO \rightarrow CaC_2 + CO, \qquad CaC_2 + H_2O \rightarrow C_2H_2 + CaO$$

Aus dem Methan des Erdgases kann Äthin durch *pyrogene Zersetzung* gewonnen werden. Dabei wird Erdgas mit Sauerstoff im Verhältnis 5 : 3 gemischt, auf 600 °C vorgeheizt, dann in Spezialbrennern kurzfristig (höchstens 0,01 s) auf 1500 °C erhitzt und sofort abgeschreckt. Unter diesen Bedingungen beträgt die Äthinausbeute etwa 9 %:

$$2\,CH_4 \rightarrow CH{\equiv}CH + 3\,H_2$$

Eigenschaften des Äthins

Reines Äthin ist ein farbloses Gas mit ätherischem Geruch. Der „Karbidgeruch" des technischen Azetylens rührt von Verunreinigungen im Kalziumkarbid her, die bei der Reaktion mit Wasser Spuren von Phosphin PH_3 bilden. Im Unterschied zu den höheren Alkinen ist Äthin auch in Wasser löslich. Das in Stahlflaschen (Azetylenflaschen) gehandelte Äthin ist dort unter 1,2 MPa Druck in Azeton gelöst und von Kieselgur aufgesogen. An der Luft verbrennt Äthin mit heißer, leuchtender und rußender*) Flamme (Flammentemperatur ≈ 1900 °C). Mit reinem Sauerstoff verbrennt Äthin bei Flammentemperaturen von etwa 3000 °C vollständig zu Kohlendioxid und Wasser (autogenes Schweißen und Schneiden):

$$CH{\equiv}CH + {}^5/_2\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2 + H_2O$$

Äthin-Luft-Gemische sind sehr explosiv. Die Explosionsgrenze liegt bei einem Äthingehalt von 2,8 ··· 73 % (Entzündungstemperatur ≈ 335 °C).

Reaktionen, Verwendung

Äthin wird zum autogenen Schweißen und Schneiden von Metallen, zur Rußgewinnung (thermische Spaltung) und als Ausgangsstoff für eine Vielzahl organischer Verbindungen verwendet. Die wichtigste Reaktion ist die *Addition,* bei der die Dreifachbindung in eine Doppelbindung übergeht (Tabelle 37).

Tabelle 37. Beispiele für Additionsreaktionen des Äthins

Addition	Folgeprodukte
$CH{\equiv}CH + H_2 \rightarrow CH_2{=}CH_2$ Äthen	Polyäthen, Polystyrol
$CH{\equiv}CH + HCl \rightarrow CH_2{=}CHCl$ Vinylchlorid	Polyvinylchlorid, PC-Faser
$CH{\equiv}CH + HCN \rightarrow CH_2{=}CH{-}C{\equiv}N$ Propennitril (Akrylnitril)	Polyakrylnitrilfaser
$CH{\equiv}CH + H_2O \rightarrow CH_2{=}CH(OH) \rightarrow CH_3{-}C(=O)H$ Äthanal (Azetaldehyd)	Äthanol, Diäthyläther, Äthansäure, (Essigsäure), Butadien, Buna

*) Rußbildung bei der Verbrennung tritt vorwiegend bei solchen organischen Molekülen auf, deren Kohlenstoffgehalt im Vergleich zum Wasserstoffgehalt relativ groß ist.

4.5.4. Zykloalkane (Naphthene)

Zykloalkane sind *ringförmige gesättigte Kohlenwasserstoffe*. Sie haben die Summenformel C_nH_{2n}. In ihren Eigenschaften ähneln sie weitgehend den Alkanen (Tabelle 38).

Tabelle 38. Eigenschaften der Zykloalkane

Name	Summenformel	Siedepunkt t_{sd} in °C	Eigenschaften
Zyklopropan	C_3H_6	−34	farblose Gase — Ring kann leicht aufgespalten werden
Zyklobutan	C_4H_8	+11	
Zyklopentan	C_5H_{10}	+50	farblose Flüssigkeiten — ähnliche Eigenschaften wie Alkane
Zyklohexan	C_6H_{12}	+81	
Zykloheptan	C_7H_{14}	+118	

Zykloalkane (Naphthene) sind der Hauptbestandteil des naphthenbasischen Erdöls. Aus den Naphthenfraktionen des Erdöls lassen sich durch Dehydrierungsreaktionen aromatische Kohlenwasserstoffe gewinnen.

Beispiel.

```
       CH2                     CH
      /   \                  //  \
  H2C      CH-CH3          HC     C-CH3
   |       |          →     |     ||         + 3H2
  H2C      CH2             HC     CH
      \   /                  \\  /
       CH2                     CH
Methylzyklohexan      Methylbenzol (Toluol)
```

4.5.5. Aromatische Kohlenwasserstoffe

Aromatische Kohlenwasserstoffe sind *zyklische* Kohlenwasserstoffe, die sich vom Benzol ableiten. Für das typische Verhalten der aromatischen Kohlenwasserstoffe ist die besondere Elektronenverteilung im Molekül verantwortlich.

Struktur des Benzols

Zur Darstellung der Struktur des Benzols wird auch heute noch die KEKULÉ-Formel*) verwendet:

```
        H                  H
        |                  |
        C                  C
      //  \              /  \\
  H-C       C-H      H-C       C-H
     |      ||    ↔     ||      |      ≡  (Sechseck)  ↔  (Sechseck)
  H-C       C-H      H-C       C-H
      \   //             \\   /
        C                  C
        |                  |
        H                  H
```

Diese von KEKULÉ aufgestellte Benzolformel spiegelt jedoch nicht die wahre Benzolstruktur wider, da sich beim Benzol *keine echten Doppelbindungen* nachweisen lassen. Die sechs Kohlenstoffatome des Benzol-

*) FRIEDRICH AUGUST KEKULÉ (1829—1896) war einer der bedeutendsten Chemiker seiner Zeit und hat durch die konsequente Anwendung der Vierbindigkeit des Kohlenstoffs und der Aufklärung der Benzolformel wesentlich zur Aufstellung der wichtigsten Strukturformeln organischer Verbindungen beigetragen.

moleküls sind in einem ebenen regulären Sechseck angeordnet, dessen Kantenlänge 0,140 nm ist und damit zwischen der Bindungslänge der Einfach- und der Doppelbindung liegt. Im Benzolmolekül sind keine lokalisierten π-Elektronenpaare vorhanden, sondern die sechs π-Elektronen bilden ein über das ganze Molekül gleichmäßig verteiltes π-Elektronensextett. Mit den herkömmlichen Strukturformeln läßt sich diese Elektronenverteilung nicht ausdrücken. Deshalb verwendet man gleichberechtigt neben der KEKULÉ-Formel eine Darstellung, in der das π-Elektronensextett durch einen Kreis im regelmäßigen Sechseck angedeutet wird:

$$C_6H_6 \leftrightarrow C_6H_6 \leftrightarrow C_6H_6$$

Das Vorhandensein eines π-Elektronensextetts ist charakteristisch für alle aromatischen Verbindungen.

Typische Reaktionen

Das chemische Verhalten der aromatischen Kohlenwasserstoffe wird durch das π-Elektronensextett bestimmt. Deshalb sind für aromatische Kohlenwasserstoffe *Substitutionsreaktionen* typisch. Zu Additionsreaktionen zeigen sie im Vergleich mit den ungesättigten Kohlenwasserstoffen eine viel geringere Neigung.

Substitution:

Die Substitutionsreaktionen verlaufen am besten in flüssiger Phase bei Gegenwart von Katalysatoren:

$$C_6H_6 \xrightarrow{+Cl_2} HCl + C_6H_5{-}Cl \quad \text{Chlorbenzol}$$

$$C_6H_6 \xrightarrow{+H_2SO_4} H_2O + C_6H_5{-}SO_3H \quad \text{Benzolsulfonsäure}$$

$$C_6H_6 \xrightarrow{+HNO_3} H_2O + C_6H_5{-}NO_2 \quad \text{Nitrobenzol}$$

Führt man mit Benzol, das im Molekül bereits einen Substituenten hat, weitere Substitutionsreaktionen durch, so dirigiert der erste Substituent den zweiten Substituenten in bevorzugte Stellungen (*Substitutionsregeln*):

- Substituenten 1. Ordnung (Gruppen mit *Einfachbindungen*, z. B. $-Cl$, $-Br$, $-J$, $-CH_3$, $-OH$, $-NH_2$, $-NR_2$, $-OR$) dirigieren den nachfolgenden Substituenten vorwiegend in o- oder p-Stellung.
- Substituenten 2. Ordnung (Gruppen mit *Mehrfachbindungen*, z. B. $-CHO$, $-COOH$, $-SO_3H$, $-CN$) dirigieren den nachfolgenden Substituenten vorwiegend in m-Stellung.

Alkylbenzole lassen sich je nach den Reaktionsbedingungen im aromatischen Kern oder in den Seitenketten substituieren.

Kernsubstitutionen erfolgen vorwiegend bei gewöhnlicher Temperatur und Anwesenheit von Katalysatoren (Merksatz: **Kern — Katalysator — Kälte**). *Seitenkettensubstitutionen* werden meist in der Dampfphase bei Einwirkung von UV-Licht durchgeführt (Merksatz: Seitenkette — Sonnenlicht — Siedehitze):

$$C_6H_5{-}CH_3 + Cl_2 \xrightarrow{-HCl} CH_3{-}C_6H_4{-}Cl \ (\text{o-}) \ \text{bzw.} \ CH_3{-}C_6H_4{-}Cl \ (\text{p-})$$

$$C_6H_5{-}CH_3 + Cl_2 \xrightarrow{-HCl} C_6H_5{-}CH_2Cl$$

Addition:

Unter bestimmten Bedingungen lassen sich auch mit aromatischen Verbindungen Additionsreaktionen ausführen:

$+3H_2$ → Zyklohexan (Reaktionsbedingungen: 180 °C, Nickel als Katalysator)

$+3Cl_2$ → (Cl, Cl, Cl, Cl, Cl, Cl) Hexachlorzyklohexan (HCH), (Reaktionsbedingung: UV-Licht)

Wichtige aromatische Kohlenwasserstoffe siehe Tabelle 39.

Tabelle 39. Wichtige aromatische Kohlenwasserstoffe

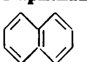
Kohlenwasserstoff	Eigenschaften, Verwendung
Benzol t_{sm} = 5,5 °C t_{sd} = 80,1 °C ϱ_{20} = 879,1 kg/m³	farblose, aromatisch riechende Flüssigkeit; stark lichtbrechend; in Wasser unlöslich; mit stark rußender Flamme brennbar; Benzoldämpfe sind giftig; Verwendung als Lösungsmittel und Ausgangsstoff für die Herstellung vieler organischer Produkte (z. B. Nitrobenzol, Anilin, Farbstoffe, Arzneimittel, Plaste, Synthesefasern, Waschmittel)
Alkylbenzole (s. 4.3.2.)	farblose Flüssigkeiten mit aromatischem Charakter; ähneln im chemischen Verhalten weitgehend dem Benzol; je Methylgruppe steigt der Siedepunkt gegenüber Benzol um rund 30 °C; Zwischenprodukte für viele organische Synthesen
Naphthalin  t_{sm} = 80,4 °C t_{sd} = 217,9 °C ϱ_{20} = 1 168 kg/m³	farblose, blättchenförmige Kristalle; charakteristischer Geruch (Mottenkugeln); Ausgangsprodukt für die Herstellung verschiedener Farbstoffe; bei Substitutionsreaktionen sind zwei isomere Verbindungen möglich, z. B.: OH — 1-Hydroxynaphthalin (α-Naphthol) —OH — 2-Hydroxynaphthalin (β-Naphthol) *katalytische Hydrierung:* $+4H$ → Tetrahydronaphthalin (Tetralin) $+6H$ → Dekahydronaphthalin (Dekalin) *katalytische Oxydation:* $+9/2\,O_2$; $-2CO_2$; $-H_2O$ → COOH, COOH Benzoldikarbonsäure-(1,2) (Phthalsäure)

Tabelle 39 (Fortsetzung)

Kohlenwasserstoff	Eigenschaften, Verwendung
Anthrazen $t_{sm} = 217\,°C$ $t_{sd} = 351\,°C$ $\varrho_{20} = 1\,242\ kg/m^3$	farblose, blättchenförmige Kristalle; intensiv blauviolette Fluoreszenz im UV-Licht; Neigung zu Substitutionsreaktionen ist nicht so stark ausgeprägt wie bei Benzol und Naphthalin; Ausgangsprodukt für Farbstoffe *katalytische Hydrierung:* Anthrazen $\xrightarrow{+2H}$ Dihydroanthrazen (CH_2, CH_2) Dihydroanthrazen *katalytische Oxydation:* Anthrazen $\xrightarrow{+3/2\,O_2}$ Anthrachinon (C=O, C=O) $+ H_2O$ Anthrachinon
Azene (s. 4.3.2.)	farbige, feste Stoffe; aromatischer Charakter geht mit zunehmender Kernzahl in ausgesprochen ungesättigten Charakter über; luft- und lichtempfindlich, Neigung zu Polymerisationsreaktionen

4.5.6. Erdöl

Erdöl ist ein in der Natur vorkommendes Gemisch verschiedener Kohlenwasserstoffe. Abhängig vom Fundort fällt das *Rohöl* als dünn- bis dickflüssige und hell- bis schwarzbraune Flüssigkeit an. Je nach der Zusammensetzung des Gemisches beträgt die Dichte durchschnittlich 0,8 bis 0,9 g/cm³. Man unterscheidet *paraffinbasische* Erdöle, die vorwiegend aus unverzweigten Alkanen bestehen, *naphthenbasische* Erdöle (Hauptbestandteil: Zykloalkane ≙ Naphthene) und *gemischtbasische* Erdöle. Die Technologie der Erdöl- und Erdgasverarbeitung wird als *Petrolchemie* bezeichnet.

Produkte der Erdöldestillation

Bei der kontinuierlichen Erdöldestillation werden die verschiedenen Fraktionen durch *Normaldruck-* und *Vakuumdestillation* gewonnen (Bild 6).

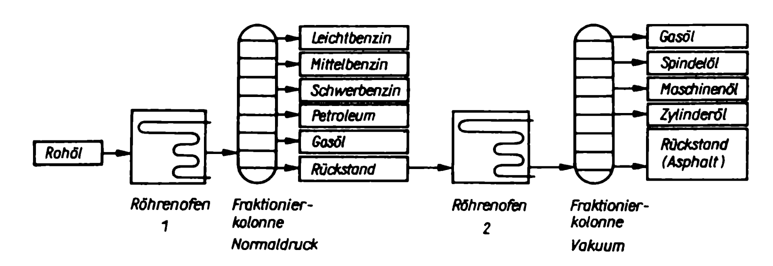


Bild 6. Schema der kontinuierlichen destillativen Erdölaufbereitung

In der Normaldruckdestillation zerlegt man das Erdöl meist in folgende *Hauptfraktionen*:
- Benzin (Siedebereich bis 220 °C),
- Petroleum (Siedebereich 150···270 °C),
- Gasöl (Siedebereich 250···400 °C).

Einsatzmöglichkeiten siehe Tabelle 40.

Tabelle 40. Einsatzmöglichkeiten für die Fraktionen der Erdöldestillation

Fraktion	Einsatzmöglichkeiten
Benzinfraktion	Die Benzinfraktion wird meist noch einer weiteren Destillation unterworfen, in der *Leicht-, Mittel-* und *Schwerbenzinfraktionen* abgetrennt werden. Die als Treibstoff für Ottomotoren verwendeten Benzine werden zur Erhöhung der Klopffestigkeit chemisch nachbehandelt (Reformieren). Weitere Einsatzgebiete: Lösungs- und Extraktionsmittel für Fette, Öle und Harze
Petroleumfraktion	Weitere Bezeichnungen für diese Fraktion: *Kerosin, Leuchtöl*; Einsatzgebiete: Kraftstoff (z. B. für Traktoren, Wasserfahrzeuge), Treibstoff für Flugzeuge mit Strahltriebwerken, Lösungsmittel für Schädlingsbekämpfungsmittel, Heizmaterial für Petrolöfen, Putzöl
Gasölfraktion	Die Gasölfraktion wird häufig zu *Krackbenzin* aufgearbeitet. Einsatzgebiete: Treibstoff für Dieselmotoren, Heizöl
Schmierölfraktion	Die bei der Vakuumdestillation anfallenden Schmieröle werden meist nach steigenden Siedetemperaturintervallen in weitere Fraktionen zerlegt: *Spindelöl*; leichtes, mittleres und schweres *Maschinenöl*; *Zylinderöl*. Für den Schmieröleinsatz müssen diese Fraktionen entparaffiniert werden, um den *Stockpunkt* (Temperatur des Übergangs in den halbfesten Zustand) zu senken. Zur Verbesserung der Schmieröleigenschaften werden eine ganze Reihe Zusätze (Additives) zugegeben.
Destillationsrückstand	Das bei der Destillation von naphthenbasischem Erdöl anfallende *Erdölbitumen* wird vorwiegend im Straßenbau eingesetzt. Die aus höheren Alkanen bestehenden Rückstände werden zu *Vaseline* aufgearbeitet (Grundlage für Salben und Hautcremes).

Chemische Verarbeitung von Fraktionen der Erdöldestillation

Krack-Reaktionen (Spaltung)

Hierbei werden aus den höhersiedenden Fraktionen der Erdöldestillation (z. B. Gasöl) niedrigmolekulare Kohlenwasserstoffe gewonnen. Man unterscheidet das *thermische Kracken* (1···7 MPa, 500···600 °C), das *katalytische Kracken* (natürliche oder synthetische Aluminiumsilikate als Katalysator, < 500 °C) und die *Pyrolyse* (> 600 °C).

Reformierungsverfahren

Reformierungsverfahren sind chemische Reaktionen zur Veränderung der Qualität von Benzinen durch Bildung von klopffesten Kohlenwasserstoffen. Kohlenwasserstoffe mit hohen *Oktanzahlen**) sind vor allem stark verzweigte Alkane und Aromaten. Bei der Reformierung können sich folgende Reaktionen abspielen: *Isomerisierung* von Paraffinkohlenwasserstoffen, *Dehydrozyklisierung* von Paraffinkohlenwasserstoffen zu Aromaten und *Dehydrierung* von Naphthenen zu Aromaten. Hierbei wird das Einsatzprodukt bei 450···540 °C und 1···5 MPa Wasserstoffdruck über Katalysatoren geleitet. Der Wasserstoff verzögert dabei die Abscheidung von hochmolekularen Reaktionsprodukten am Katalysator.

*) Kennzahl für die *Klopffestigkeit* von Benzinen. Bezugssubstanzen sind n-Heptan mit der Oktanzahl 0 und Isooktan (2,2,4-Trimethylpentan) mit der Oktanzahl 100.

4.6. Halogenkohlenwasserstoffe

Halogenkohlenwasserstoffe sind Kohlenwasserstoffverbindungen, in denen ein oder mehrere Wasserstoffatome durch *Halogenatome* ersetzt sind. Sie werden vorwiegend aus den entsprechenden Kohlenwasserstoffen durch Substitutionsreaktionen mit Halogenen hergestellt.

Eigenschaften

Die Mehrzahl der Halogenkohlenwasserstoffe sind farblose Flüssigkeiten. Sie sind in Wasser praktisch unlöslich, dagegen leicht mit den gebräuchlichen organischen Lösungsmitteln mischbar. Besonders gut ausgeprägt ist ihr Lösungsvermögen für Fette, Öle und Harze. Siedepunkt, Schmelzpunkt und Dichte liegen höher als die der entsprechenden Kohlenwasserstoffe; sie steigen mit zunehmender Anzahl und Atommasse der Halogenatome an (Tabelle 41).

Tabelle 41. Abhängigkeit der wichtigsten physikalischen Konstanten der Halogenkohlenwasserstoffe von der Anzahl und Art der Halogenatome

Name	Formel	Schmelzpunkt t_{sm} in °C	Siedepunkt t_{sd} in °C	Dichte ϱ in kg/m³
Monochlormethan	CH_3Cl	−97,7	−23,7	1003 (bei −24 °C)
Dichlormethan	CH_2Cl_2	−96,7	40,7	1336
Trichlormethan	$CHCl_3$	−63,5	61,2	1498
Tetrachlormethan	CCl_4	−22,9	76,7	1596
Chloräthan	C_2H_5Cl	−138,7	13,1	917
Bromäthan	C_2H_5Br	−118,9	38,4	1459
Jodäthan	C_2H_5J	−108,5	72,2	1933
Chlorbenzol	C_6H_5Cl	−45,5	131,7	1106
Brombenzol	C_6H_5Br	−30,6	155,6	1490

In aliphatischen Halogenkohlenwasserstoffen und in aliphatischen Seitenketten aromatischer Kohlenwasserstoffe sind die Halogenatome infolge der stark polaren Atombindung leicht austauschbar:

$$\text{R-Hal} + \text{KOH} \rightarrow \text{R-OH} + \text{KHal}$$

$$\text{R-Hal} + \text{NaCN} \rightarrow \text{R-C}\equiv\text{N} + \text{NaHal}$$

$$\text{R-Hal} + \text{NaOR}' \rightarrow \text{R-O-R}' + \text{NaHal}$$

$$\text{R-Hal} + \text{NH}_3 \rightarrow \text{R-NH}_2 + \text{HHal}$$

Aromatisch gebundenes Halogen ist relativ fest gebunden und läßt sich schwer austauschen, da die freien Elektronenpaare des Halogenatoms mit dem π-Elektronensextett des aromatischen Kerns in Wechselwirkung treten.
Wichtige Halogenkohlenwasserstoffe siehe Tabelle 42 (S. 108).

4.7. Organische Verbindungen der Elemente Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff

4.7.1. Alkohole

Alkohole sind organische Verbindungen, die als funktionelle Gruppe eine oder mehrere Hydroxylgruppen (—OH) enthalten. Das Kohlenstoffatom mit OH-Gruppe darf keine Mehrfachbindung besitzen. Nach der Zahl der OH-Gruppen im Molekül teilt man die Alkohole in *ein-*

Tabelle 42. Wichtige Halogenkohlenwasserstoffe

Halogenkohlenwasserstoff	Eigenschaften, Verwendung
Chlormethan (Methylchlorid) CH_3Cl	Kühlmittel in Kältemaschinen; Methylierungsmittel bei organischen Synthesen (Methylierung $\Rightarrow$ Einführung der Methylgruppe in ein Molekül)
Trichlormethan (Chloroform) $CHCl_3$	süßlich riechende Flüssigkeit; Fett- und Harzlösungsmittel; Ausgangsprodukt für die Herstellung von Difluordichlormethan
Tetrachlormethan (Tetrachlorkohlenstoff, Tetra, Kohlenstofftetrachlorid) CCl_4	unbrennbares Lösungs-, Extraktions- und Verdünnungsmittel für Fette, Öle, Harze, Kautschuk und Wachse; Fleckenentfernungsmittel; Ausgangsprodukt zur Herstellung verschiedener organischer Chemikalien, Farben und Drogen
Chloräthan (Äthylchlorid, Chloräthyl) C_2H_5Cl	Kühlmittel in Kältemaschinen; Äthylierungsmittel (z. B. Herstellung des Antiklopfmittels Bleitetraäthyl $Pb(C_2H_5)_4$); Medizin und Zahnmedizin: örtliche Narkose durch Vereisen des Operationsfeldes (Verdunstungskälte)
Trichloräthen (Trichloräthylen, Tri) $CHCl{=}CCl_2$	wertvolles Lösungsmittel für Fette, Wachse, Harze, Kautschuk, Asphalt, Paraffin, Zelluloseazetat, Phosphor und Schwefel (t_{sd} = 87,2 °C); Narkosemittel (Chlorylen)
Difluordichlormethan CF_2Cl_2	Kühlmittel in Kältemaschinen (hohe Verdampfungswärme); Aerosoltreibgas (t_{sd} = −29,8 °C)
Chlorbenzol $C_6H_5{-}Cl$	Lösungsmittel für Fette, Öle und Kautschuk (t_{sd} = 132 °C); Ausgangsprodukt für viele organische Synthesen (Phenol, DDT, Arzneimittel, Farbstoffe, Riechstoffe)

und *mehrwertige* ein. Dabei darf an jedem Kohlenstoffatom nur eine OH-Gruppe sein (ERLENMEYERsche Regel).

Beispiele.

$CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}OH$ — *einwertiger Alkohol*

$CH_3{-}CH(OH){-}CH_2(OH)$ — *zweiwertiger Alkohol*

$CH_2(OH){-}CH(OH){-}CH(OH){-}CH(OH){-}CH_2(OH)$ — *fünfwertiger Alkohol*

Bei einwertigen Alkoholen unterscheidet man *primäre, sekundäre* und *tertiäre Alkohole*, da das chemische Verhalten durch die Anzahl der Wasserstoffatome bestimmt wird, die sich am Kohlenstoffatom mit der funktionellen Gruppe befinden.

Beispiele.

$R{-}CH_2{-}OH$ (C mit H, H) — *primärer Alkohol*

$R_1{-}CH(R_2){-}OH$ (C mit H, R_2) — *sekundärer Alkohol*

$R_1{-}C(R_2)(R_3){-}OH$ — *tertiärer Alkohol*



Eigenschaften

Alkohole sind farblose Flüssigkeiten oder feste Stoffe. Ihr Siedepunkt liegt um etwa 100···200 K höher als der der entsprechenden Kohlenwasserstoffe, da im flüssigen Zustand *Molekülassoziate* infolge Wasserstoffbrückenbindung vorliegen:

$$\underset{\text{R}}{|\overline{\text{O}}}-\text{H}\cdots\underset{\text{R}}{\overline{\text{O}}}-\text{H}\cdots\underset{\text{R}}{\overline{\text{O}}}-\text{H}\cdots \rightarrow \underset{\text{R}}{|\overline{\text{O}}}-\text{H} + \underset{\text{R}}{|\overline{\text{O}}}-\text{H} + \underset{\text{R}}{|\overline{\text{O}}}-\text{H} +$$

Molekülassoziate im flüssigen Zustand — *Einzelmoleküle im dampfförmigen Zustand*

Niedere Alkohole sind in Wasser löslich (Ähnlichkeit zur Bindung im Wassermolekül). Die wäßrige Lösung reagiert neutral. Höhere Alkohole sind wasserunlöslich, da hier der Einfluß der langen Kohlenwasserstoffkette überwiegt. Alkohole sind mit fast allen organischen Lösungsmitteln mischbar.
Bei der Einwirkung von Alkalimetallen auf Alkohole bilden sich unter Wasserstoffentwicklung *Alkanolate*:

$$C_2H_5-OH + Na \rightarrow C_2H_5-ONa + 1/2H_2$$

Alkanolate sind feste Verbindungen, die mit Wasser sofort hydrolysieren (vergleichbar mit einem Salz aus einer sehr starken Base und sehr schwachen Säure):

$$C_2H_5-ONa + H_2O \rightarrow C_2H_5-OH + NaOH$$

Sowohl mit anorganischen als auch mit organischen Säuren bilden Alkohole *Ester*. Bei der Oxydation liefern die primären Alkohole *Aldehyde* und die sekundären Alkohole *Ketone*:

$$R-CH_2-OH + 1/2O_2 \rightarrow R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{matrix} + H_2O$$

$$R_1-\underset{\text{OH}}{\underset{|}{CH}}-R_2 + 1/2O_2 \rightarrow R_1-\underset{\text{O}}{\underset{\|}{C}}-R_2 + H_2O$$

Tertiäre Alkohole werden von schwachen Oxydationsmitteln nicht angegriffen. Bei Verwendung starker Oxydationsmittel entstehen Verbrennungsprodukte (Kohlendioxid und Wasser).

Wichtige Alkohole siehe Tabelle 43.

Tabelle 43. Wichtige Alkohole

Alkohol	Eigenschaften, Herstellung, Verwendung
Methanol (Methylalkohol, Karbinol, Holzgeist) CH_3-OH	farblose Flüssigkeit (t_{sd} = 64,7 °C); stark giftig (Erblindung, tödliche Dosis ≈ 50 g); *Herstellung:* $CO + 2H_2 \rightarrow CH_3-OH$ (Katalysator: ZnO, Cr_2O_3; ≈ 350 °C; ≈ 20 MPa) Lösungsmittel für Harze, Lacke, Farbstoffe; Brennstoff, Kraftstoffzusatz, Vergällungsmittel für Äthanol; Ausgangsprodukt zur Herstellung von Formaldehyd und Piacryl
Äthanol (Äthylalkohol, Spiritus, Weingeist) C_2H_5-OH	wasserklare Flüssigkeit (t_{sd} = 78,37 °C), leicht entzündbar; 95,3%iges Äthanol bildet ein azeotropes Gemisch (t_{sd} = 78,15 °C) *Herstellung:* $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$ Summengleichung für die alkoholische Gärung (katalytische Umwandlung von Kohlenhydraten in Äthanol durch Enzyme, die von Hefepilzen abgeschieden werden) $CaC_2 \xrightarrow[-CaO]{+H_2O} CH\equiv CH \xrightarrow{+H_2O} CH_3-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{matrix} \xrightarrow{+H_2} CH_3-CH_2-OH$ Gewinnung von „Karbidsprit“ Lösungsmittel, Brennstoff, Kraftstoffzusatz, Genußmittel; Ausgangsprodukt für Farbstoffe, Riechstoffe, pharmazeutische Präparate, Fruchtester

Tabelle 43 (Fortsetzung)

Alkohol	Eigenschaften, Herstellung, Verwendung
Äthandiol-(1,2) (Äthylenglykol, Glykol) CH_2-CH_2 (OH, OH)	hygroskopische Flüssigkeit, mit Wasser unbegrenzt mischbar (t_{sd} = 197,4 °C); Gefrierschutzmittel für Motorkühlwasser (30%ige Äthandiollösung erstarrt bei −19 °C); Ausgangsprodukt zur Herstellung von Sprengstoffen, Polyesterfasern, Weichmachern, Netzmitteln und Emulgatoren
Propantriol (Glyzerin) $CH_2-CH-CH_2$ (OH, OH, OH)	farb- und geruchlose Flüssigkeit; süßschmeckend, hygroskopisch, zähflüssig; Bestandteil der natürlichen Fette und Öle; Ausgangsprodukt für kosmetische Präparate, Salben, Glyzerintrinitrat, Polyesterlackharze
Fettalkohole $C_{12}H_{25}OH$ ··· $C_{20}H_{41}OH$	farblos, fest, wasserunlöslich; Herstellung durch Hochdruckhydrierung des bei der Paraffinoxydation gewonnenen Alkansäuregemisches (s. 4.5.1.): $C_{n-1}H_{2n+1}COOH + H_2 \rightarrow C_nH_{2n+1}OH + H_2O$ Ausgangsprodukte für Waschmittel und Kosmetika
Phenylmethanol (Benzylalkohol) $C_6H_5-CH_2-OH$	farblose, ölige Flüssigkeit (t_{sd} = 205,2 °C); wenig löslich in Wasser; Einsatz in der Parfümindustrie; Lösungsmittel für Gelatine, Kumaronharze, Zelluloseester und Schwefel

4.7.2. Aldehyde und Ketone

Aldehyde und Ketone sind Oxydationsprodukte der primären bzw. sekundären Alkohole. Sie enthalten als funktionelle Gruppe die Aldehyd- bzw. Ketogruppe.

Typische Reaktionen

Das chemische Verhalten der Aldehyde und Ketone wird durch die *Doppelbindung* zwischen Kohlenstoff und Sauerstoff in der Karbonylgruppe bestimmt. Diese Doppelbindung wird ebenso wie die C—C-Doppelbindung aus einem σ- und π-Elektronenpaar gebildet. Die Kohlenstoff-Sauerstoff-Bindung ist auf Grund der unterschiedlichen Elektronegativität der Elemente polarisiert. Bei chemischen Reaktionen ist deshalb das π-Elektronenpaar zum Sauerstoff hin verschoben:

$$>C=\overline{\underline{O}} \leftrightarrow >\overset{\oplus}{C}-\overset{\ominus}{\overline{\underline{O}}}|$$

Addition

— Addition von Wasserstoff (Hydrierung):

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{matrix} + H_2 \rightarrow R-CH_2-OH$$

Aldehyd — primärer Alkohol

$$R_1-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R_2 + H_2 \rightarrow R_1-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R_2$$

Keton — sekundärer Alkohol

— Addition von Zyanwasserstoff:

$$R-\overset{\oplus}{C}(=\overline{O}|^{\ominus})-H + \overset{\oplus}{H} \vdots -\overset{\ominus}{C}\equiv N \rightarrow R-\underset{H}{\overset{OH}{C}}-C\equiv N$$

Zyanhydrin

— Aldoladdition:

Bei Zugabe von Lauge zu Aldehyden lagern sich zwei Aldehydmoleküle zu einem Aldolmolekül zusammen (*Dimerisierung*):

$$CH_3-\overset{\oplus}{C}(-\overline{O}|^{\ominus})-H + H \vdots -CH_2-C(=O)-H \rightleftharpoons CH_3-\underset{H}{\overset{OH}{C}}-CH_2-C(=O)-H$$

Diese Reaktion ist an die Gegenwart von leicht abspaltbaren Wasserstoffatomen gebunden. Sind diese Wasserstoffatome nicht vorhanden, so findet die CANNIZZAROsche Reaktion statt (*Disproportionierung*):

$$2R-\underset{R}{\overset{R}{C}}-C(=O)-H + NaOH \rightarrow R-\underset{R}{\overset{R}{C}}-C(=O)-ONa + R-\underset{R}{\overset{R}{C}}-CH_2OH$$

Polymerisation:

Aldehyde neigen stark zur Polymerisation:

$$n\,H-C(=O)-H \rightarrow \left[-\underset{H}{\overset{H}{C}}-O-\right]_n \quad \text{Paraldehyd}$$

$$4\,CH_3-C(=O)-H \rightarrow (CH_3-CHO)_4 \quad \text{Metaldehyd (Hartspiritus)}$$

Kondensation:

Aldehyde und Ketone gehen mit vielen Stoffen Kondensationsreaktionen ein, z. B. dient die *Oximbildung* mit Hydroxylamin als Nachweisreaktion für Aldehyde und Ketone, da die Oxime gut kristallisierbare Verbindungen sind:

$$R_1-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R_2 + H_2N-OH \rightarrow R_1-\underset{\underset{N-OH}{\|}}{C}-R_2 + H_2O$$

Oxydation:

Aldehyde werden sehr leicht zu Karbonsäuren oxydiert:

$$R-C(=O)-H + 1/2\,O_2 \rightarrow R-C(=O)-OH$$

Aldehyde sind daher kräftige Reduktionsmittel (ammoniakalische Silbernitratlösung wird zu elementarem Silber reduziert; Kaliumpermanganatlösung wird entfärbt; FEHLINGsche Lösung wird zu rotem Kupfer(I)-oxid reduziert).
Wichtige Aldehyde und Ketone siehe Tabelle 44.

Tabelle 44. Wichtige Aldehyde und Ketone

Aldehyd, Keton	Eigenschaften, Herstellung, Verwendung
Methanal (Formaldehyd) H–C(=O)–H	farbloses, stechend riechendes Gas, starker Reizstoff für die Nasen- und Rachenschleimhaut (giftig); die wäßrige Lösung (etwa 40%ig) wird als *Formalin* bezeichnet; Formalin polymerisiert leicht zu einer amorphen, wasserunlöslichen, weißen Masse (Paraformaldehyd) *Herstellung:* katalytische Oxydation von Methanol oder Methan mit Luftsauerstoff: $CH_3-OH + 1/2O_2 \rightarrow CH_2O + H_2O$ $CH_4 + O_2 \rightarrow CH_2O + H_2O$ Desinfektionsmittel, Konservierungsmittel für biologische Präparate; Ausgangsprodukt für die Herstellung von Phenoplasten, Aminoplasten, Farbstoffen und Arzneimitteln
Äthanal (Azetaldehyd) CH_3–C(=O)–H	farblose Flüssigkeit, charakteristischer Geruch (t_{sd} = 20,2 °C); Zwischenprodukt bei der Herstellung von Buna, Äthanol (s. 4.7.1. „Karbidsprit"), Essigsäure und Hartspiritus
Benzaldehyd (Phenylmethanal) C_6H_5–C(=O)–H	farblose Flüssigkeit, charakteristischer Bittermandelgeruch, wenig wasserlöslich (t_{sd} = 178°C); leicht oxydierbar (beim Stehen an der Luft scheidet sich Benzoesäure in Form von farblosen Kristallen ab); Geruchs- und Geschmacksstoff in der Lebensmittelindustrie; Ausgangsprodukt für pharmazeutische Präparate, Triphenylmethanfarbstoffe
Propanon (Dimethylketon, Azeton) CH_3–C(=O)–CH_3	farblose Flüssigkeit, obstartiger Geruch, wasserlöslich (t_{sd} = 56,1 °C); Nebenprodukt bei der Phenolsynthese nach dem Kumolverfahren (s. 4.7.5.); vielseitig einsetzbares Lösungsmittel; Ausgangsprodukt für zahlreiche Synthesen

4.7.3. Karbonsäuren und wichtige Reaktionsprodukte

4.7.3.1. Karbonsäuren

Karbonsäuren sind organische Säuren, die als funktionelle Gruppe eine oder mehrere Karboxylgruppen (–COOH) enthalten. Es sind schwache Säuren; sie dissoziieren in wäßriger Lösung viel weniger als die meisten Mineralsäuren. Karbonsäuren lassen sich als Oxydationsprodukte der Aldehyde bzw. der primären Alkohole auffassen.

Eigenschaften

Der saure Charakter der Karbonsäuren wird durch die Karboxylgruppe bestimmt, die in wäßriger Lösung ein Proton abgeben kann:

$$R-C\begin{matrix}\nearrow \overline{\underline{O}} \\ \searrow \overline{\underline{O}}-H\end{matrix} \rightleftharpoons H^+ + \left[R-C\begin{matrix}\nearrow \overline{\underline{O}} \\ \searrow \overline{\underline{O}}|^{\ominus}\end{matrix}\right]^-$$

Die *Säurestärke* der Karbonsäuren nimmt mit wachsender Molekülgröße ab, da die Säureeigenschaften der Karboxylgruppe von den Eigenschaften des wachsenden Kohlenwasserstoffrests verdrängt werden. In gleicher Weise geht auch die *Wasserlöslichkeit* der Karbonsäuren mit zunehmender Molekülgröße zurück, wogegen die Löslichkeit in organischen Lösungsmitteln zunimmt. Dikarbonsäuren sind stärker dissoziiert, wenn die Karboxylgruppen im Molekül nahe beieinander stehen (z. B. Oxalsäure).
Karbonsäuren bilden Salze, die in wäßriger Lösung hydrolysieren:

$$R-COOH + NaOH \rightleftharpoons R-COONa + H_2O$$

Die Alkalisalze der Karbonsäuren sind wasserlöslich, dagegen unlöslich in den meisten organischen Lösungsmitteln.
Die Siedepunkte der Karbonsäuren liegen im Vergleich zu denen der entsprechenden Alkane bedeutend höher. Die Ursache liegt in der Assoziation durch Wasserstoffbrückenbindung:

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O \cdots H-\overline{O}\searrow \\ \searrow \underline{O}-H \cdots O \nearrow\end{matrix}C-R$$

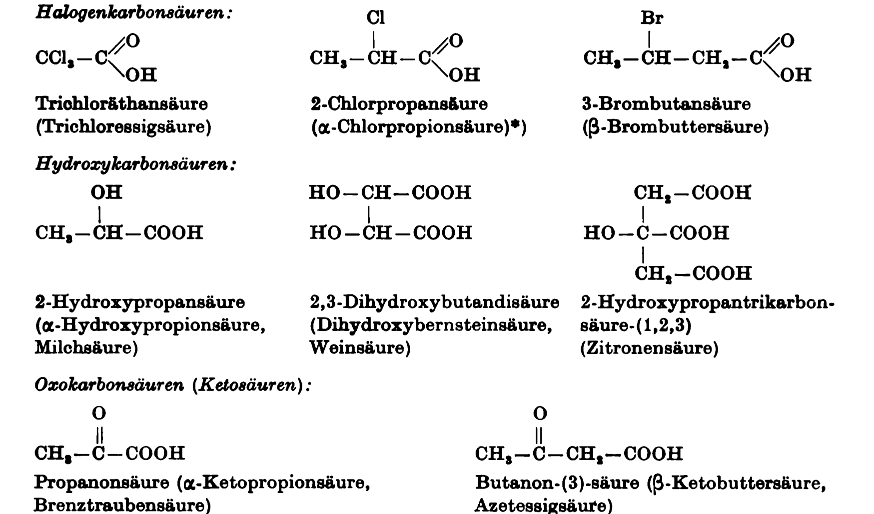
Wichtige Karbonsäuren siehe Tabelle 45.

Tabelle 45. Wichtige Karbonsäuren

Karbonsäure	Eigenschaften, Herstellung, Verwendung
Methansäure (Ameisensäure) $H-C{\overset{O}{\underset{OH}{\lessgtr}}}$	farblose Flüssigkeit, stechender Geruch (t_{sd} = 100,5 °C); wirkt stark ätzend, erzeugt Blasen auf der Haut; Reduktionsmittel (Methansäure kann als Hydroxymethanal aufgefaßt werden) Zerfallsreaktion: $HCOOH \rightarrow H_2O + CO$ (konz. Schwefelsäure) $HCOOH \rightarrow H_2 + CO_2$ (Erhitzen) Kohlenmonoxid wird bei 200 °C und 1 MPa über gepulvertes Natriumhydroxid geleitet. Das gebildete Natriumformiat wird anschließend mit Schwefelsäure zersetzt und die Ameisensäure im Vakuum abdestilliert: $2NaOH + 2CO \rightarrow 2H-C{\overset{O}{\underset{ONa}{\lessgtr}}} \xrightarrow[-Na_2SO_4]{+H_2SO_4} 2H-C{\overset{O}{\underset{OH}{\lessgtr}}}$ Konservierungsmittel (Fruchtsäfte, Silofutter); Desinfektionsmittel (Wein- und Bierfässer); Hilfsstoff in der Textilfärberei und Gerberei
Äthansäure (Essigsäure, Eisessig) $CH_3-C{\overset{O}{\underset{OH}{\lessgtr}}}$	farblose Flüssigkeit, stechender Geruch (t_{sm} = 16,6 °C, t_{sd} = 118,1 °C); Herstellung durch Vergären von Fruchtsäften unter Einwirkung von Essigbakterien (Weinessig), durch trockene Destillation des Holzes oder durch katalytische Oxydation von „Karbidsprit" (Karbidessig); Verwendung als Konservierungs- und Würzmittel (Speiseessig: 5 ⋯ 10%ige wäßrige Lösung); Ausgangsprodukt für viele organische Synthesen; Einsatz in Färbereien, Gerbereien, Textilindustrie
Äthandisäure (Oxalsäure, Kleesäure) $HOOC-COOH$	farblose Kristalle (t_{sm} = 189,5 °C); in größeren Mengen giftig (Störung des Kalziumstoffwechsels); in vielen Pflanzen als Kalziumhydrogenäthandiat (Kleesalz) enthalten (z. B. Klee, Spinat, Tomate); Reagens in der quantitativen Analyse; Verwendung als Beize in der Zeugfärberei und zum Entfernen von Rost- und Tintenflecken
Propandisäure (Malonsäure) $HOOC-CH_2-COOH$	farblose Kristalle; beim Erhitzen auf 140 ⋯ 150 °C Zersetzung unter Bildung von Essigsäure: $HOOC-CH_2-COOH \rightarrow CH_3-COOH + CO_2$ Über den Diäthylester der Malonsäure können verschiedene Monokarbonsäuren hergestellt werden (Malonestersynthesen)
Benzolkarbonsäure (Benzoesäure) C_6H_5-COOH	farblose, glänzende Blättchen, in heißem Wasser löslich (t_{sm} = 121,7 °C); in vielen Pflanzen frei oder als Ester enthalten; Konservierungsmittel (Lebensmittel, Klebstoffe); Ausgangsprodukt für Farbstoffe und Pharmazeutika

4.7.3.2. Substituierte Karbonsäuren

Substituierte Karbonsäuren enthalten neben der Karboxylgruppe im Kohlenwasserstoffrest noch eine weitere funktionelle Gruppe. Die Eigenschaften der substituierten Karbonsäuren werden weitgehend von der charakteristischen Eigenschaft dieser funktionellen Gruppe mitbestimmt.



Aminosäuren:

$$CH_3-CH(NH_2)-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix}$$

2-Aminopropansäure
(α-Aminopropionsäure, Alanin)

$$H_2N-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix}$$

6-Aminohexansäure
(ε-Aminokapronsäure)

4.7.3.3. Säurederivate

Bei einem Säurederivat ist die OH-Gruppe der Karboxylgruppe der Karbonsäure durch eine andere Gruppe ersetzt. Die wichtigsten Gruppen dafür sind die *Halogengruppe* (Säurehalogenide), die *OR-Gruppe* (Ester) und die *NH_2-Gruppe* (Säureamide).

Säurehalogenide

Säurehalogenide lassen sich aus Karbonsäuren darstellen, indem man sie mit Phosphorhalogeniden oder mit Thionylchlorid umsetzt:

$$3R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix} + PCl_3 \rightarrow 3R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow Cl\end{matrix} + H_3PO_3$$

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix} + PCl_5 \rightarrow R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow Cl\end{matrix} + POCl_3 + HCl$$

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix} + SOCl_2 \rightarrow R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow Cl\end{matrix} + SO_2 + HCl$$

*) Zur Unterscheidung der Isomere von Substitutionsprodukten der Karbonsäuren können die C-Atome mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden. Das der Säuregruppe benachbarte C-Atom trägt den Buchstaben α; die weiteren β, γ usw.

Säurehalogenide sind meist stechend riechende Flüssigkeiten, die bei Gegenwart von Luftfeuchtigkeit hydrolysieren:

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow Cl\end{matrix} + H_2O \rightarrow R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow OH\end{matrix} + HCl$$

Säurehalogenide sind die reaktionsfähigsten Säurederivate. Das Halogenatom kann leicht durch andere Atome oder Atomgruppen ausgetauscht werden. Säurechloride werden häufig zu ***Azylierungsreaktionen****) benutzt.

Ester

Ester lassen sich aus Säure und Alkohol durch Veresterung darstellen:

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow OH\end{matrix} + H\,O-R' \rightleftharpoons R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow O-R'\end{matrix} + H_2O$$

Es handelt sich um eine Gleichgewichtsreaktion. H^+-Ionen beschleunigen die Einstellung des Gleichgewichts. Die Gleichgewichtslage kann durch Überschuß der billigeren Ausgangskomponente (meist Alkohol) zugunsten einer höheren Esterausbeute verschoben werden. Ein nahezu völliger Umsatz zum Ester wird erreicht, indem der entstehende Ester oder das Wasser aus dem Gleichgewicht entfernt wird (Destillation, wasserentziehende Mittel).
Im Vergleich zu den Säurehalogeniden sind die Ester viel weniger reaktionsfreudig. Sie können hydrolytisch in Säure und Alkohol gespalten werden (*Verseifung*, Umkehrung der Esterbildung). Ester haben niedrigere Siedepunkte als die entsprechenden Säuren (keine Assoziation durch Wasserstoffbrückenbindung).
Die niederen Glieder der Karbonsäureester sind farblose, leichtbewegliche Flüssigkeiten mit meist obstartigem Geruch. Sie werden als Lösungsmittel in der Lackindustrie und als künstliche Aromen und Essenzen (*Fruchtester*) verwendet. *Wachse* sind Ester aus langkettigen Karbonsäuren und höheren Alkoholen. *Fette* und *Öle* bestehen aus Propantriol und langkettigen Monokarbonsäuren.
Als *Mineralsäureester* werden die Ester anorganischer Säuren bezeichnet. Von den *Schwefelsäureestern* haben das Dimethylsulfat $(CH_3)_2SO_4$ als Methylierungsmittel und die Fettalkoholsulfate zur Waschmittelherstellung Bedeutung. Propantrioltrinitrat (Glyzerintrinitrat), fälschlicherweise als „Nitroglyzerin" bezeichnet, wird durch Aufquellen mit Kollodium zu einem handhabungssicheren Sprengstoff (Sprenggelatine) umgewandelt. Verschiedene *Phosphorsäureester* werden als Pflanzenschutz- und Schädlingsbekämpfungsmittel eingesetzt.

4.7.4. Äther

Die Strukturformel der Äther kann formal aus der des Wassers abgeleitet werden, indem man beide Wasserstoffatome durch Kohlenwasserstoffreste ersetzt.

Äther lassen sich aus Alkoholen durch Wasserabspaltung gewinnen (wasserentziehende Mittel, Katalysatoren):

$$R-OH + H\,O-R' \rightarrow R-O-R' + H_2O$$

Die meisten Äther sind relativ reaktionsträge, leichtbewegliche, brennbare Flüssigkeiten. *Aliphatische* und *aromatische Äther* sind in Wasser kaum löslich, dagegen lassen sich die meisten zyklischen Äther mit Wasser mischen. Da Äther nur mit wenigen Stoffen Verbindungen eingehen, werden sie häufig bei chemischen Reaktionen als indifferente Lösungsmittel benutzt.

Wichtige Äther siehe Tabelle 46.

---

*) Einführung der $R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}$-Gruppe in organische Verbindungen, die Hydroxyl- oder Aminogruppen enthalten.

Tabelle 46. Wichtige Äther

Äther	Eigenschaften, Verwendung
Diäthyläther (Äthoxyäthan) $C_2H_5-O-C_2H_5$	wasserklare, leichtbewegliche und leicht flüchtige Flüssigkeit von süßlichem Geruch (t_{sd} = 34,6 °C); Dämpfe sind leicht entflammbar und bilden mit Luft explosive Gemische; durch Lichteinwirkung können explosive Peroxide entstehen; beliebtes Lösungsmittel für viele organische Substanzen; Narkosemittel
Phenylmethyläther (Methoxybenzol, Anisol) $C_6H_5-O-CH_3$	farblose Flüssigkeit, angenehmer Geruch (t_{sd} = 153,8 °C); herstellbar durch Methylierung von Phenol mit Dimethylsulfat in alkalischer Lösung; Lösungsmittel; Einsatz bei der Herstellung von Riechstoffen
1,4-Dioxan $O(CH_2-CH_2)_2O$	farblose Flüssigkeit, beliebig mit Wasser mischbar (t_{sd} = 101,4 °C); Neigung zur Peroxidbildung; Lösungsmittel für Chlorkautschuk, Fette, Wachse, Harze und Lacke; Extraktionsmittel bei der Herstellung pharmazeutischer Präparate

4.7.5. Phenole (Hydroxybenzole)

Phenole sind aromatische Verbindungen, die als funktionelle Gruppe eine oder mehrere OH-Gruppen direkt am aromatischen Kern gebunden enthalten. Im Unterschied zu den Alkoholen sind die Phenole schwache Säuren.

Eigenschaften

Phenole dissoziieren schwach in wäßriger Lösung, indem der Wasserstoff der OH-Gruppe als Proton abgespalten wird. Das ist deshalb möglich, weil das bindende Elektronenpaar mit dem π-Elektronensextett des aromatischen Rests in Wechselwirkung treten kann:

$$C_6H_5-OH \rightleftharpoons H^+ + [C_6H_5-O]^-$$

mögliche Strukturen des Phenolatanions

Mit Laugen bilden Phenole Salze (*Phenolate*):

$$C_6H_5-OH + NaOH \rightleftharpoons C_6H_5-ONa + H_2O$$

Infolge Hydrolyse (Salz einer starken Base und einer sehr schwachen Säure) reagieren Phenolatlösungen alkalisch. Bereits Kohlensäure vermag Phenole aus ihren Salzlösungen zu verdrängen (z. B. Einleiten von Kohlendioxid):

$$C_6H_5-ONa + CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_5-OH + NaHCO_3$$

Phenole lassen sich besonders leicht substituieren. Entsprechend den Substitutionsregeln wird die Substitution in ortho- bzw. para-Stellung begünstigt.
Phenole bilden mit Eisen(III)-chloridlösungen charakteristisch gefärbte *Komplexsalzlösungen*. Diese Reaktion wird zum analytischen Nachweis benutzt.

Die meisten mehrwertigen Phenole lassen sich leicht oxydieren. Als Oxydationsprodukte entstehen *Chinone*:

$$C_6H_4(OH)_2 + 1/2\,O_2 \rightarrow C_6H_4O_2 + H_2O$$

1,2-Dihydroxybenzol (Brenzkatechin) → o-Chinon

$$C_6H_4(OH)_2 + 1/2\,O_2 \rightarrow C_6H_4O_2 + H_2O$$

1,4-Dihydroxybenzol (Hydrochinon) → p-Chinon

Herstellung

Phenole lassen sich bei der *Destillation* von Stein- bzw. Braunkohlenteer gewinnen. Die entsprechende Fraktion wird mit Natronlauge extrahiert (Bildung von Natriumphenolat), abgetrennt, und anschließend werden durch Einleiten von Kohlendioxid die Phenole abgeschieden.
Eine petrolchemische Methode zur Herstellung von Phenol ist das *Kumol-Verfahren.* Hier wird zunächst bei Gegenwart von wasserfreiem Aluminiumchlorid das Propen der Krackgase mit Benzol zu iso-Propylbenzol (Kumol) umgesetzt. Anschließend erfolgt Oxydation zum Kumolhydroperoxid, das schließlich bei Gegenwart von Schwefelsäure in Phenol und Propanon (Azeton) gespalten wird:

$$CH_3-CH=CH_2 + C_6H_6 \xrightarrow{(AlCl_3)} C_6H_5-CH(CH_3)_2 \xrightarrow{+O_2} C_6H_5-C(CH_3)_2-O-O-H$$

$$\xrightarrow{(H_2SO_4)} C_6H_5-OH + CH_3-CO-CH_3$$

Bei der Herstellung von *Farbstoffen* erreicht man das Einführen der phenolischen OH-Gruppe durch Ätznatronschmelze von aromatischen Sulfonsäuren:

$$C_{10}H_7-SO_3Na + NaOH \rightarrow C_{10}H_7-OH + Na_2SO_3$$

Wichtige Phenole siehe Tabelle 47.

Tabelle 47. Wichtige Phenole

Phenol	Eigenschaften, Verwendung
Hydroxybenzol (Phenol, „Karbolsäure") C_6H_5OH	farblose Kristalle, färben sich an der Luft rötlich, charakteristischer Geruch, giftig (t_{sm} = 41 °C); wasserlöslich (5%ige wäßrige Lösung wird als „Karbolwasser" zu Desinfektionszwecken benutzt); Verwendung zur Herstellung von Farbstoffen, Arzneimitteln, Plasten (Phenolharze), Dederon
1,4-Dihydroxybenzol (Hydrochinon) $C_6H_4(OH)_2$	farblose Kristalle, löslich in Wasser und organischen Lösungsmitteln (t_{sm} = 170,3 °C); oxydiert leicht zu Chinon; Verwendung als fotografischer Entwickler, Desinfektionsmittel, Oxydationsinhibitor für ungesättigte Verbindungen; Zwischenprodukt der Farbstoffindustrie

Tabelle 47 (Fortsetzung)

Phenol	Eigenschaften, Verwendung
1,2,3-Trihydroxybenzol (Pyrogallol)	farblose, nadelförmige Kristalle (t_{sm} = 133 °C); wäßrige Lösung reagiert stark sauer; alkalische Lösung wirkt kräftig reduzierend (z. B. quantitative Absorption von Luftsauerstoff in der Gasanalyse); fotografischer Entwickler
2-Hydroxynaphthalin (β-Naphthol)	farblose Kristalle, in kaltem Wasser sehr schwer löslich (t_{sm} = 123 °C); Konservierungsmittel; Ausgangsprodukt für Insektizide, Fungizide, Riechstoffe; Kupplungskomponente für Azofarbstoffe

4.8. Organische Stickstoffverbindungen

4.8.1. Amine

Die Strukturformel der Amine läßt sich formal aus der des Ammoniaks ableiten, indem ein oder mehrere Wasserstoffatome durch Kohlenwasserstoffreste ersetzt werden. Je nach der Anzahl der ersetzten Wasserstoffatome unterscheidet man *primäre, sekundäre* und *tertiäre Amine.*

Beispiele.

$R-NH_2$	R_1R_2N-H	$R_1R_2N-R_3$
primäres Amin	*sekundäres Amin*	*tertiäres Amin*

Amine sind organische Basen und bilden mit Säuren Salze.

Eigenschaften

Sämtliche Amine sind gut in organischen Lösungsmitteln löslich. Die niederen aliphatischen Amine lösen sich auch in Wasser. Der Geruch der niederen Amine erinnert an den des Ammoniaks (nicht so stechend, mehr fischartig). Mit wachsendem Kohlenwasserstoffrest verliert sich dieser Geruch.

Der basische Charakter der Amine ist auf das freie Elektronenpaar am Stickstoffatom zurückzuführen, da es in der Lage ist, vom Wasser ein Proton zu binden:

$$CH_3-\overset{H}{\underset{H}{N}}| + H_2O \rightarrow \left[CH_3-\overset{H}{\underset{H}{N}}-H\right]^+ OH^- \quad \text{Methylammoniumhydroxid}$$

Aromatische Amine sind schwache Basen, da das freie Elektronenpaar des Stickstoffs mit dem π-Elektronensextett des aromatischen Rests in Wechselwirkung treten kann und damit nicht voll zur Protonenaufnahme aus dem Wasser zur Verfügung steht:

$$C_6H_5-NH_2| \leftrightarrow {}^{\ominus}C_6H_5{=}N^{\oplus}H_2 \leftrightarrow {}^{\ominus}C_6H_5{=}N^{\oplus}H_2 \leftrightarrow {}^{\ominus}|C_6H_5{=}N^{\oplus}H_2$$

Amine können mit Säuren Salze bilden:

$$R-NH_2 + HCl \rightarrow [R-NH_3]^+ Cl^-$$

Primäre, sekundäre und *tertiäre Amine* lassen sich durch die Reaktion mit salpetriger Säure unterscheiden:

— Primäre Amine zersetzen sich unter Bildung von Stickstoff:

$$R-N\begin{matrix}H\\H\end{matrix} + O=N-OH \xrightarrow[-H_2O]{} R-OH + N_2$$

— Sekundäre Amine liefern farbige Verbindungen, da die Nitrosogruppe (—N=O) zu den chromophoren Gruppen zählt:

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}{>}N-H + HO-N=O \xrightarrow[-H_2O]{} \begin{matrix}R\\R\end{matrix}{>}N-N=O$$

— Tertiäre Amine werden von salpetriger Säure nicht angegriffen.

Wichtige Amine siehe Tabelle 48.

Tabelle 48. Wichtige Amine

Amin	Eigenschaften, Verwendung
Dimethylaminomethan (Trimethylamin) $(CH_3)_2N-CH_3$	brennbares, ammoniakalisch riechendes Gas; Stoffwechselprodukt der Pflanzen und Tiere, entsteht bei der Zersetzung von Fisch und Käse, in Heringslake und Zuckerrübenmelasse enthalten; Desinfektionsmittel, Emulgator, Zusatz zu Insektiziden
Äthylaminoäthan (Diäthylamin) $C_2H_5-N(H)-C_2H_5$	brennbare, ammoniakalisch riechende Flüssigkeit (t_{sd} = 55,9 °C); Vulkanisationsbeschleuniger; Zwischenprodukt bei der Herstellung von pharmazeutischen Präparaten, Insektiziden, Farbstoffen
Aminobenzol (Phenylamin, Anilin) $C_6H_5-NH_2$	farblose, ölige Flüssigkeit, färbt sich an der Luft braun, wenig wasserlöslich (t_{sd} = 184,4 °C); schweres Blut- und Nervengift; Violettfärbung bei Oxydation mit Chlorkalk (RUNGEsche Chlorkalkprobe) *Herstellung:* Nitrobenzol wird mit Eisenfeilspänen und Salzsäure versetzt, oder Nitrobenzoldampf wird mit Wasserstoff über einen Kupferkontakt geleitet: $C_6H_5-NO_2 + 6H \rightarrow C_6H_5-NH_2 + 2H_2O$ Ausgangsprodukt zur Herstellung zahlreicher Farbstoffe und Arzneimittel
Diphenylamin $C_6H_5-N(H)-C_6H_5$	farblose Kristalle, angenehmer Geruch, wenig wasserlöslich (t_{sm} = 53 °C); Reagens auf Salpetersäure und salpetrige Säure (Blaufärbung in stark schwefelsaurer Lösung); Stabilisator für Glyzerintrinitrat; Einsatz in Farbstoffindustrie

4.8.2. Aminosäuren

Aminosäuren sind substituierte Karbonsäuren, die im Kohlenwasserstoffrest eine oder mehrere Aminogruppen enthalten. Die größte Bedeutung haben die Aminosäuren als Bausteine der *Eiweißstoffe,* wo sie fast ausschließlich als α-Aminosäuren mit der allgemeinen Formel $R-CH(NH_2)-C{\begin{matrix}{=}O\\OH\end{matrix}}$ auftreten (R kann ein aliphatischer, aromatischer oder heterozyklischer Rest sein).

Aminosäuren sind feste Stoffe mit relativ hohen Schmelzpunkten. Bis auf wenige Ausnahmen sind sie in Äther schwer löslich, dagegen sind viele Aminosäuren wasserlöslich. Die wäßrige Lösung von Aminosäuren, die eine basische Aminogruppe und eine saure Karboxylgruppe enthalten, reagiert nahezu neutral. Diese Aminosäuren können innere Salze oder Zwitterionen bilden:

$$R-CH(NH_2)-COOH \leftrightarrow R-CH(NH_3^{\oplus})-COO^{\ominus}$$

Aminosäuren können mit Säuren und auch mit Laugen *Salze* bilden. Gegenüber starken Säuren verhalten sie sich wie Basen und gegenüber starken Basen wie Säuren. Aus diesem Grunde zählt man die Aminosäuren zu den *Ampholyten*:

$$R-CH(NH_2)-COOH \xrightarrow{+HCl} [R-CH(^{\oplus}NH_3)-COOH]^{+}Cl^{-}$$

$$R-CH(NH_2)-COOH \xrightarrow{+NaOH} Na^{+}[R-CH(NH_2)-COO^{\ominus}]^{-} + H_2O$$

Im sauren Gebiet liegt die Aminosäure als Kation vor, im alkalischen Bereich als Anion. Dazwischen gibt es einen *p*H-Wert, bei dem die Aminosäure weder als Anion noch als Kation auftritt. Sie stellt ein Zwitterion dar. Dieser *p*H-Wert heißt ***isoelektrischer Punkt***, da bei einer Elektrolyse der wäßrigen Lösung die Aminosäure nicht wandert, sondern sich das Zwitterion wie in einem Magnetfeld ausrichtet.

Ähnlich den Karbonsäuren können Aminosäuren auch Ester bilden. Die Ester der Aminosäuren haben keine Zwitterionenstruktur und zeigen auch nicht den Salzcharakter der Aminosäuren. Es sind vorwiegend niedrig siedende Flüssigkeiten, die sich in organischen Lösungsmitteln leicht lösen.

4.8.3. Nitrile

Nitrile sind organische Verbindungen, die als funktionelle Gruppe die CN-Gruppe enthalten. Es sind meist farblose Flüssigkeiten, deren Wasserlöslichkeit mit steigender Molmasse abnimmt. Infolge der *Dreifachbindung* zwischen Kohlenstoff und Stickstoff gehen Nitrile leicht Additionsreaktionen ein. Sie haben als Zwischenprodukt bei verschiedenen organischen Synthesen Bedeutung (z. B. Herstellung von Farbstoffen, Arzneimitteln, Pflanzenschutzmitteln).

Die Addition von Wasserstoff an Nitrile liefert primäre Amine:

$$R-C\equiv N + 4H \rightarrow R-CH_2-NH_2$$

Bei der Reaktion mit starken Säuren bzw. Laugen bilden sich unter Addition von Wasser zunächst Säureamide. Bei erhöhter Temperatur geht die Verseifung unter Abspaltung von Ammoniak bis zur Karbonsäure weiter:

$$R-C\equiv N \xrightarrow{+H_2O} R-C(=O)NH_2 \xrightarrow{+H_2O} R-C(=O)OH + NH_3$$

4.8.4. Nitrokohlenwasserstoffe

Nitrokohlenwasserstoffe enthalten als funktionelle Gruppe eine oder mehrere Nitrogruppen am Kohlenwasserstoffrest. Große Bedeutung haben *aromatische Nitrokohlenwasserstoffe*, da sie sich leicht durch Nitrierung von aromatischen Kohlenwasserstoffen mittels *Nitriersäure*

(Gemisch aus konzentrierter Salpetersäure und konzentrierter Schwefelsäure) herstellen lassen:

$$C_6H_6 + HNO_3 \rightarrow C_6H_5{-}NO_2 + H_2O$$

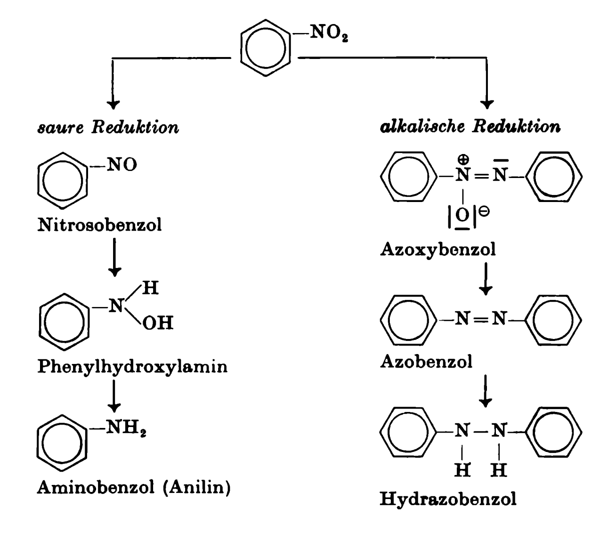
Aliphatische Nitrokohlenwasserstoffe (Nitroparaffine) lassen sich nur unter extremen Bedingungen gewinnen (Dampfphasennitrierung von niederen Alkanen bei 400···500 °C).

Relativ gut gelingt die Synthese von Nitromethan aus Chloressigsäure und Natriumnitrit über die Nitroessigsäure, welche sofort unter Abspaltung von Kohlendioxid zerfällt:

$$HOOC-CH_2-Cl \xrightarrow[-NaCl]{+NaNO_2} (HOOC-CH_2-NO_2) \rightarrow CH_3-NO_2 + CO_2$$

Eigenschaften

Nitrokohlenwasserstoffe sind farblose oder gelb gefärbte Stoffe, da die Nitrogruppe zu den chromophoren Gruppen zählt. Sie haben einen ganz charakteristischen, meist bittermandelähnlichen Geruch. Fast alle Nitroverbindungen sind giftig. Nitrokohlenwasserstoffe sind in organischen Lösungsmitteln gut löslich. In Wasser lösen sich einige niedere Nitrokohlenwasserstoffe etwas.
Bei der Reduktion von Nitrokohlenwasserstoffen zu Aminen können unter bestimmten Bedingungen verschiedene Zwischenstufen isoliert werden. Als Beispiel sollen die möglichen Zwischenprodukte der Reduktion des Nitrobenzols genannt werden:



Wichtige Nitrokohlenwasserstoffe siehe Tabelle 49.

Tabelle 49. Wichtige Nitrokohlenwasserstoffe

Nitrokohlenwasserstoff	Eigenschaften, Verwendung
Nitromethan CH_3-NO_2	farblose, ätherisch riechende Flüssigkeit (t_{sd} = 101 °C); Lösungsmittel für Zellulosenitrat, Harze und Wachse; Verwendung zur Extraktion aromatischer Kohlenwasserstoffe aus Mineralölen
Nitrobenzol $C_6H_5-NO_2$	stark lichtbrechende Flüssigkeit (t_{sd} = 210,9 °C); Bittermandelgeruch, billiges Parfüm (Mirbanöl, z. B. für Kernseife); Blutgift, behindert Sauerstofftransport; Lösungsmittel für Öle und PVC; mildes Oxydationsmittel; Verwendung zur Herstellung von Anilin, Farbstoffen, Sprengstoffen und Arzneimitteln

Tabelle 49 (Fortsetzung)

Nitrokohlenwasserstoff	Eigenschaften, Verwendung
2,4,6-Trinitrotoluol (Strukturformel: Benzolring mit CH_3, O_2N, NO_2, NO_2)	blaßgelbe Kristalle (t_{sm} = 80,65 °C); stoßunempfindlich, gefahrlos vergießbar, verpufft bei stärkerem Erhitzen unter Rußentwicklung, detoniert heftig bei Initialzündung; Einsatz als hochbrisanter Explosivstoff für technische und militärische Zwecke (TNT, Trotyl, Tri)
2,4,6-Trinitrophenol (Pikrinsäure) (Strukturformel: Benzolring mit OH, O_2N, NO_2, NO_2)	hellgelbe Blättchen, in kaltem Wasser schwer, dagegen in siedendem Wasser leicht löslich (t_{sm} = 122 °C); wäßrige Lösung färbt Eiweißstoffe intensiv gelb (z. B. Wolle, Seide, menschliche Haut); bei raschem Erhitzen oder Initialzündung heftige Explosion; Anwendung in Laboratorien zu analytischen Zwecken

4.8.5. Diazoniumsalze

Diazoniumsalze sind organische Stickstoffverbindungen, die durch *Diazotierungsreaktionen* aus primären aromatischen Aminen gewonnen werden. Es sind farblose, kristalline Salze, die in wäßriger Lösung dissoziiert sind und den elektrischen Strom leiten. Im festen Zustand neigen sie zum explosionsartigen Zerfall. Deshalb werden sie meist sofort nach der Diazotierung in wäßriger Lösung weiterverarbeitet. Charakteristische Reaktionen sind die *Diazospaltung* (Abspaltung von Stickstoff) und die *Kupplungsreaktion* (Kupplung zu Azofarbstoffen).

Diazotierung

Bei der Diazotierung wird ein primäres aromatisches Amin in saurer Lösung unter Eiskühlung mit salpetriger Säure zu einem Diazoniumsalz umgesetzt. Dazu wird das aromatische Amin in einem Überschuß an Mineralsäure unter Salzbildung gelöst und Natriumnitrit zugegeben. Das Natriumnitrit bildet mit Salzsäure die salpetrige Säure. Die niedrige Temperatur soll verhindern, daß sich das gebildete Diazoniumsalz unter Stickstoffabspaltung zersetzt:

$$C_6H_5{-}\overline{N}H_2 + HCl \rightarrow [C_6H_5{-}\overset{\oplus}{N}H_3]^+ Cl^-$$

$$NaNO_2 + HCl \rightarrow HNO_2 + NaCl$$

$$[C_6H_5{-}\overset{\oplus}{N}H_3]^+ Cl^- + HNO_2 \rightarrow [C_6H_5{-}\overset{\oplus}{N}{\equiv}N|]^+ Cl^- + 2H_2O$$

Summengleichung:

$$C_6H_5{-}NH_2 + 2HCl + NaNO_2 \rightarrow [C_6H_5{-}\overset{\oplus}{N}{\equiv}N|]^+ Cl^- + NaCl + 2H_2O$$

Diazospaltung

Unter diesem Begriff werden Reaktionen verstanden, die unter Abspaltung des Stickstoffs erfolgen. Wird eine wäßrige Lösung von Benzoldiazoniumchlorid erwärmt, so entsteht unter Abspaltung von Stickstoff *Phenol*:

$$[C_6H_5{-}\overset{\oplus}{N}{\equiv}N|]^+ Cl^- + H_2O \rightarrow C_6H_5{-}OH + |N{\equiv}N| + HCl$$

Bei Gegenwart bestimmter Katalysatoren [meist Kupfer(I)-salze] läßt sich unter Stickstoffabspaltung ein anderer Substituent in den aromatischen Rest einführen (SANDMEYERsche *Reaktion*):

$$[C_6H_5-\overset{\oplus}{N}\equiv N|]^+ Cl^- \xrightarrow{(Cu^+)} C_6H_5-Cl + |N\equiv N|$$

Kupplung

Diazoniumsalze vermögen in schwach saurer Lösung mit Aminen und in schwach alkalischer Lösung mit Phenolen zu kuppeln, wobei sich die *Azogruppe* bildet. Die Kupplung erfolgt fast stets in p-Stellung zur NH_2- oder OH-Gruppe. Zum Beispiel entsteht der Farbstoff *Pararot* durch Kuppeln von diazotiertem p-Aminonitrobenzol mit β-Naphthol:

$$[O_2N-C_6H_4-\overset{\oplus}{N}\equiv N|]^+ Cl^- + C_{10}H_7OH \rightarrow O_2N-C_6H_4-N=N-C_{10}H_6OH + HCl$$

Diazotypie

Unter Diazotypie versteht man ein *Lichtpausverfahren*, bei dem die Diazospaltung und die Kupplung von Diazoniumsalzen zu Azofarbstoffen ausgenutzt werden. Das verwendete Lichtpauspapier ist mit einer Mischung aus Diazoniumsalzlösung (z. B. Chinondiazid) und einer Kupplungskomponente (z. B. α-Naphtholsulfonsäure) präpariert. Zur Verhinderung der vorzeitigen Kupplung wird das Papier mit Säure (z. B. Weinsäure) stabilisiert. Bei Belichtung mit energiereichem UV-Licht zersetzt sich das Diazoniumsalz unter Stickstoffabspaltung. Durch die anschließende Entwicklung mit Ammoniakdämpfen wird die Säure im Papier neutralisiert, und an den unbelichteten Stellen, an denen noch unzersetztes Diazoniumsalz vorhanden ist, kann die Kupplung zum Farbstoff einsetzen. Dadurch entsteht unmittelbar eine positive Kopie der transparenten Vorlage.

4.9. Schwefelhaltige organische Verbindungen

Es gibt eine Vielzahl von organischen Verbindungen, die Schwefelatome im Molekül enthalten. Zum Beispiel existieren in Analogie zu den sauerstoffhaltigen organischen Verbindungen solche Stoffe, in denen das Sauerstoffatom durch Schwefel ersetzt ist.

Beispiele.

$R-SH$	$R-S-R$	$R-C(=S)-H$	$R-C(=S)-R$	$R-C(=S)-OH$
Thioalkohol Merkaptan	*Thioäther* Dialkylsulfid	*Thioaldehyd*	*Thioketon*	*Karbothionsäure*

Die wichtigsten niedrigmolekularen organischen Schwefelverbindungen sind die *Sulfonsäuren* und ihre *Derivate*.

Darstellung und Eigenschaften der Sulfonsäuren

Aliphatische Sulfonsäuren können durch *Sulfochlorierung* von Alkanen und anschließende Hydrolyse der Sulfochloride oder durch *Sulfoxydation* (gleichzeitige Einwirkung von Schwefeldioxid und Sauerstoff) gewonnen werden:

$$R-H + SO_2Cl_2 \xrightarrow[-HCl]{} R-SO_2Cl \xrightarrow[-HCl]{+H_2O} R-SO_3H$$

$$R-H + SO_2 + 1/2\,O_2 \rightarrow R-SO_3H$$

Aromatische Sulfonsäuren entstehen durch Substitutionsreaktionen bei der Einwirkung von konzentrierter Schwefelsäure auf aromatische Kohlenwasserstoffe.

Zur Einführung einer SO_3H-Gruppe in den Kohlenwasserstoff reicht konzentrierte Schwefelsäure bei Zimmertemperatur aus. Sollen gleichzeitig mehrere Sulfonsäuregruppen eingeführt werden, so muß *Oleum* bei erhöhter Temperatur benutzt werden, da das bei der Reaktion gebildete Wasser die Schwefelsäure

laufend verdünnt:

$$C_6H_6 \xrightarrow[-H_2O]{+H_2SO_4} C_6H_5\text{–}SO_3H \xrightarrow[-H_2O]{+H_2SO_4} C_6H_4(SO_3H)_2 \xrightarrow[-H_2O]{+H_2SO_4} HO_3S\text{–}C_6H_3(SO_3H)_2$$

Sulfonsäuren sind farblose Substanzen, die sich gut in Wasser auflösen. Verschiedene aromatische Sulfonsäuren sind stark hygroskopisch. Die wäßrigen Lösungen der Sulfonsäuren reagieren stark sauer. Im Vergleich zu den Karbonsäuren sind die Sulfonsäuren stärker dissoziiert. Ihre Säurestärke entspricht etwa der der Schwefelsäure. Die Salze der Sulfonsäuren heißen *Sulfonate*. Die Alkalisalze sind in Wasser leicht löslich und zeigen eine gute Waschwirkung.
Vom Amid der 4-Aminobenzolsulfonsäure (*Sulfanilsäure*) leiten sich wichtige Pharmazeutika ab, die *Sulfonamide*. Sie werden in der Medizin bei den verschiedenen bakteriellen Infektionen mit großem Erfolg eingesetzt.

Beispiele.

Albuzid: $H_2N\text{–}C_6H_4\text{–}SO_2\text{–}NH\text{–}CO\text{–}CH_3$

Sulfathiazol: $H_2N\text{–}C_6H_4\text{–}SO_2\text{–}NH\text{–}$(Thiazolring, N, S)

Depovernil: $H_2N\text{–}C_6H_4\text{–}SO_2\text{–}NH\text{–}$(Pyridazinring, N, N)$\text{–}O\text{–}CH_3$

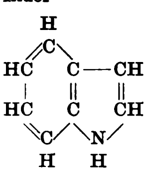
4.10. Heterozyklische Verbindungen

Heterozyklische Verbindungen sind zyklische Verbindungen, die neben Kohlenstoff noch ein oder mehrere Fremdatome (*Heteroatome*) im Ring eingebaut enthalten. Als Heteroatome kommen vorwiegend Stickstoff, Schwefel und Sauerstoff in Frage. Die heterozyklischen Verbindungen im engeren Sinne sind relativ stabile Stoffe, die in ihren Eigenschaften weitgehend den aromatischen Verbindungen ähneln und sich gut zu Substitutionsreaktionen eignen.
Wichtige heterozyklische Verbindungen siehe Tabelle 50.

Tabelle 50. Wichtige heterozyklische Verbindungen

Verbindung	Eigenschaften, Verwendung
Furan HC—CH, HC CH (‖ ‖), O im Ring	farblose, chloroformartig riechende Flüssigkeit (t_{sd} = 32 °C); bei Säureeinwirkung Verharzung; Furandämpfe färben einen mit Salzsäure angefeuchteten Fichtenspan grün; bei der Hydrierung bildet sich *Tetrahydrofuran:* $C_4H_4O + 4H \rightarrow C_4H_8O$ (HC—CH / HC CH / O + 4 H → H_2C—CH_2 / H_2C CH_2 / O)
Furanaldehyd-(2) (Furfural, Furfurol) HC—CH, HC C—CHO, O im Ring	farblose Flüssigkeit, in Wasser und vielen organischen Lösungsmitteln löslich (t_{sd} = 162 °C); Braunfärbung und allmähliche Verharzung durch Luft- und Lichteinwirkung; herstellbar durch Erhitzen von Kleie, entkörnten Maiskolben oder Stroh (Naturprodukte, die *Pentosane* enthalten, s. 4.12.2.1.) mit verdünnter Schwefelsäure; Lösungsmittel, Extraktionsmittel für Butadien-(1,3) aus Krackgasen; Ausgangsprodukt für verschiedene organische Synthesen
Thiophen HC—CH, HC CH (‖ ‖), S im Ring	farblose, wasserunlösliche Flüssigkeit (t_{sd} = 84 °C); in der Benzolfraktion des Steinkohlenteers enthalten; zeigt ausgesprochen aromatischen Charakter, das π-Elektronensextett wird unter Verwendung eines der beiden freien Elektronenpaare des Schwefels aufgebaut: (Grenzstrukturen mit S) ↔ (Grenzstrukturen mit S) Verwendung zur Herstellung von Arzneimitteln und Schädlingsbekämpfungsmitteln

Tabelle 50 (Fortsetzung)

Verbindung	Eigenschaften, Verwendung
Pyrrol HC—CH ‖ ‖ HC CH \N/ H	farblose, stark lichtbrechende Flüssigkeit (t_{sd} = 130 °C); bei Säureeinwirkung bilden sich rote Pyrrolharze; Pyrroldämpfe färben einen mit Salzsäure angefeuchteten Fichtenspan rot; keinerlei basische Eigenschaften, da sich das freie Elektronenpaar des Stickstoffs am Aufbau des π-Elektronensextetts beteiligt; wichtiger Baustein der Blut-, Blatt- und Gallenfarbstoffe
Pyridin H C HC CH | ‖ HC CH N	farblose, giftige Flüssigkeit von äußerst unangenehmem Geruch (t_{sd} = 115,5 °C); Gewinnung aus Braunkohlen- oder Steinkohlenteer; aromatischer Charakter, Substitutionsreaktionen verlaufen langsamer als bei Benzol; schwache basische Eigenschaften; Verwendung als Lösungsmittel, Vergällungsmittel für Alkohol (Brennspiritus), Ausgangsstoff für Synthesen (Arzneimittel, Farbstoffe)
Indol 	farblose, glänzende Blättchen, blumiger Geruch, löslich in organischen Lösungsmitteln, in der Hitze auch wasserlöslich (t_{sm} = 53 °C); polymerisiert in der Hitze bei Gegenwart von Säuren zu Harzen; in der Natur in verschiedenen ätherischen Ölen enthalten; Ausgangsprodukt zur Synthese bestimmter organischer Stoffe (z. B. Indigo, Heteroauxin, Tryptophan)
Chinolin H H C C HC C CH | ‖ | HC C CH C N H	farblose Flüssigkeit, färbt sich an der Luft allmählich braun, charakteristischer Geruch (t_{sd} = 238 °C); bildet mit Säuren gut kristallisierbare Salze; Vorkommen im Steinkohlenteer; wichtiges Ausgangsprodukt für Pharmazeutika und Farbstoffe
Kumaron H C HC C—CH | ‖ ‖ HC C CH C O H	farblose, ölige Flüssigkeit, aromatischer Geruch (t_{sd} = 174 °C); herstellbar bei der fraktionierten Destillation des Steinkohlenteers; Polymerisation bei Einwirkung von Säuren (Doppelbindung im Furanring); *Kumaronharze* ähneln in den Eigenschaften den natürlichen Kolophoniumharzen
Kumarin H H C C HC C CH | ‖ | HC C C=O C O H	kristalliner, farbloser Stoff, leicht löslich in Alkohol und Äther, schwer löslich in Wasser (t_{sm} = 71 °C); charakteristischer Geruch nach *Waldmeister* (Riechstoff des Waldmeisters, außerdem in den Blüten und Blättern verschiedener Gras- und Kleearten enthalten); Verwendung zur Seifenparfümierung

Alkaloide

Alkaloide sind basische *Pflanzenstoffe*, die große physiologische Wirksamkeit besitzen. Sie enthalten stets Stickstoff und haben meist heterozyklischen Aufbau. Fast alle Alkaloide sind farblose feste Stoffe. Sie sind in Wasser schwer, in organischen Lösungsmitteln leicht löslich. Mit Säuren bilden sie meist Salze, die in Wasser leicht löslich sind. Viele Alkaloide sind optisch aktiv. Eine Reihe von Alkaloiden wird in Form verdünnter wäßriger Lösungen in der Medizin benutzt, da sie eine starke, meist sehr spezifische Wirkung auf bestimmte Bezirke des Nervensystems haben.
In vielen Pflanzen (z. B. Hahnenfußgewächse, Nachtschattengewächse) kommen mehrere Alkaloide nebeneinander vor. Bis heute sind bereits über 2000 verschiedene Alkaloide beschrieben worden. Die Isolierung der Alkaloide aus den Pflanzensäften erfolgt durch Zugabe starker Basen. Dabei werden die in den Pflanzen salzartig an Pflanzensäuren (z. B. Oxalsäure, Äpfelsäure, Zitronensäure) gebundenen Alkaloide freigesetzt und können mit organischen Lösungsmitteln extrahiert bzw. die flüchtigen Alkaloide abdestilliert werden.

Beispiele.

Nikotin
(Alkaloid des Tabaks)

Koffein
(Alkaloid des Kaffees bzw. Tees)

Koniin
(Giftstoff des Schierlings)

Atropin (Alkaloid der Tollkirsche)

Chinin (Alkaloid der Chinarinde)

4.11. Metallorganische Verbindungen

In den metallorganischen Verbindungen ist der Kohlenstoff direkt an *Metalle* bzw. *Halbmetalle* (z. B. Silizium) gebunden. Als Bindungspartner treten die Elemente der 1. bis 4. Hauptgruppe des Periodensystems auf, seltener die Nebengruppenelemente. Die Polarität der Atombindung zwischen Kohlenstoff und Metall und damit die Reaktionsfähigkeit ist um so größer, je elektropositiver das Metall ist. So sind z. B. *kaliumorganische Verbindungen* kaum zu handhaben, da sie sofort zerfallen. *Lithiumorganische Verbindungen* entzünden sich an der Luft. *Magnesiumorganische Verbindungen* sind sehr reaktionsfähig. Sie werden als Grignard-Verbindungen*) zu einer Vielzahl von organischen Synthesen eingesetzt. Makromolekulare *siliziumorganische Verbindungen* (Silikone) sind dagegen sehr beständige Stoffe.

*) Die magnesiumorganischen Verbindungen werden nach Victor Grignard (1871—1935) benannt, der um 1900 die vielseitige Reaktionsfähigkeit dieser Verbindungen entdeckte.

4.11.1. Magnesiumorganische Verbindungen

Magnesiumorganische Verbindungen (GRIGNARD-Verbindungen) bilden sich bei der Einwirkung von Halogenkohlenwasserstoffen auf Magnesiumspäne in einem indifferenten Lösungsmittel (meist Diäthyläther).

Zur Einleitung der Reaktion wird häufig eine geringe Menge Jod zugegeben. Von den Halogenkohlenwasserstoffen reagieren die Jodkohlenwasserstoffe am heftigsten, die Chlorkohlenwasserstoffe am langsamsten:

$$\mathrm{R-\underset{H}{\overset{H}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-Hal + Mg \rightarrow R-\underset{H}{\overset{H}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-Mg-Hal}$$

Die große Reaktionsfähigkeit der magnesiumorganischen Verbindungen ergibt sich aus der stark polaren Atombindung zwischen Kohlenstoff und Magnesium. So vermögen GRIGNARD-Verbindungen mit Stoffen zu reagieren, die *aktive Wasserstoffatome* enthalten.

Diese Reaktion wird als analytischer Nachweis für aktive Wasserstoffatome in organischen Verbindungen benutzt, da sich hier stets Kohlenwasserstoffe bilden:

$$\mathrm{R-MgHal + H-OH \rightarrow R-H + Mg(OH)Hal}$$

$$\mathrm{R-MgHal + H-OR' \rightarrow R-H + Mg(OR')Hal}$$

$$\mathrm{R-MgHal + H-NR_2' \rightarrow R-H + Mg(NR_2')Hal}$$

Bei den eigentlichen GRIGNARD-Synthesen reagiert die magnesiumorganische Verbindung mit Stoffen, die eine Mehrfachbindung zwischen Kohlenstoff und einem Fremdatom enthalten. Hierbei wird stets der Kohlenwasserstoffrest der GRIGNARD-Verbindung an das positive Kohlenstoffatom der Mehrfachbindung addiert. Die erforderliche magnesiumorganische Verbindung wird unmittelbar vor der Synthese hergestellt:

$$\mathrm{\overset{\ominus}{R}-\overset{\oplus}{Mg}Hal + \left[\begin{matrix}R_1\\R_2\end{matrix}\!\!>C=O \leftrightarrow \begin{matrix}R_1\\R_2\end{matrix}\!\!>\overset{\oplus}{C}-\overset{\ominus}{\underline{\overline{O}}}|\right] \rightarrow [MgHal]^+\left[R-\underset{R_2}{\overset{R_1}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-\overset{\ominus}{\underline{\overline{O}}}|\right]^-}$$

Diese Reaktion verläuft nur bei völliger Abwesenheit von Feuchtigkeit und von Verbindungen, die Wasserstoff abgeben können. Anschließend wird die gebildete Additionsverbindung mit Wasser unter Abspaltung von basischem *Magnesiumhalogenid* zersetzt:

$$\mathrm{[MgHal]^+\left[R-\underset{R_2}{\overset{R_1}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-\overset{\ominus}{\underline{\overline{O}}}|\right]^- + H_2O \rightarrow R-\underset{R_2}{\overset{R_1}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-OH + Mg(OH)Hal}$$

Je nach Wahl des Kohlenwasserstoffrestes der GRIGNARD-Verbindung und des Reaktionspartners mit Mehrfachbindung sind die verschiedensten Synthesen möglich (Tabelle 51).

Tabelle 51. Reaktionsprodukte von GRIGNARD-Synthesen

Ausgangsstoff	Reaktionsprodukt der GRIGNARD-Synthese
Aldehyd	sekundärer Alkohol
Keton	tertiärer Alkohol
Kohlendioxid	Karbonsäure
Nitril	Keton (Ammoniakabspaltung bei Hydrolyse)

4.11.2. Silikone

Silikone sind makromolekulare *siliziumorganische* Verbindungen, in denen Siliziumatome vorwiegend über Sauerstoffbrücken verknüpft sind. Die restlichen Valenzen des Siliziums sind durch Kohlenwasserstoffreste (Methyl-, Äthyl- oder Phenylreste) abgesättigt.

Herstellung

Die Herstellung der Silikone erfolgt in drei Stufen.

1. Synthese der Alkylchlorsilane:

Nach der MÜLLER-ROCHOW-Synthese werden Chloralkane bei etwa 350 °C unter Druck mit Silizium katalytisch (Kupferpulver, Siliziumpulver) zu *Dialkyldichlorsilan* umgesetzt: $Si + 2R-Cl \rightarrow R_2SiCl_2$.
Nebenprodukte: $RSiCl_3$ Alkyltrichlorsilan, R_3SiCl Trialkylchlorsilan

2. Hydrolyse der Alkylchlorsilane:

Wegen der starken Polarisierung der Silizium-Chlor-Bindung hydrolysiert das Dialkyldichlorsilan leicht zu *Dialkylsilandiol*:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ Cl- & Si & -Cl \\ & | & \\ & R & \end{array} + 2H_2O \rightarrow \begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ HO- & Si & -OH \\ & | & \\ & R & \end{array} + 2HCl$$

Nebenprodukte: $RSi(OH)_3$ Alkylsilantriol, R_3SiOH Trialkylsilanol

3. Polykondensation der Silanole:

Silanole sind wenig beständig. Bei erhöhter Temperatur kondensieren sie unter Wasserabspaltung zu langen *Polysiloxanketten*:

$$n\begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ HO- & Si & -OH \\ & | & \\ & R & \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ - & Si & -O- \\ & | & \\ & R & \end{array}\right]_n + nH_2O$$

Hierbei bilden die als Nebenprodukt enthaltenen Trialkylsilanole die Molekülendgruppen des Makromoleküls (•), und die Alkylsilantriole sind für die räumliche Vernetzung des Silikonmoleküls (*) verantwortlich:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & R & & R & & R & & R & & R & \\ & |\bullet & & | & & |* & & | & & | & \\ R- & Si & -O- & Si & -O- & Si & -O- & Si & -O- & Si & -O- \\ & | & & | & & | & & | & & | & \\ & R & & R & & O & & R & & R & \\ & & & & & | & & & & & \\ & & & & R- & Si & -R & & & & \\ & & & & & | & & & & & \\ & & & & & O & & & & & \\ & & & & & | & & & & & \end{array}$$

Somit lassen sich bei der *Silikonherstellung* durch Veränderung des Gehalts an Nebenprodukten Molekülgröße und Vernetzungsgrad beeinflussen. Bei einem geringen Gehalt an Nebenprodukten entstehen lange *lineare Polysiloxanketten*. Mit wachsendem Gehalt an Trialkylchlorsilan werden die Molekülketten kürzer. Steigt der Alkyltrichlorsilangehalt an, so nimmt die räumliche Vernetzung der Moleküle zu.

Eigenschaften und Verwendung

Charakteristisch für Silikone sind ihre ausgesprochen hydrophoben Eigenschaften, ihre relativ hohe Temperaturbeständigkeit, ihre Beständigkeit gegenüber vielen Chemikalien, ihre physiologische Unbedenklichkeit und ihr *gutes elektrisches Isoliervermögen*. Entsprechend diesen Eigenschaften erfolgt ihr Einsatz.

Silikonöle:

Silikonöle sind meist linear aufgebaute *Methylpolysiloxanketten*. Ihre Viskosität wächst mit zunehmender Kettenlänge. Charakteristisch für Silikonöle ist die geringe Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Sie werden als Schmieröle für spezielle Zwecke, als hydraulische Öle, als Transformatorenöle, als Entschäumungsmittel, zur Hydrophobierung von Textilien und als Salbengrundlage verwendet.

Silikonharze:

Silikonharze sind dreidimensional vernetzte *Polysiloxane* mit Duroplasteigenschaften. Bei *Silikonlacken* erfolgt das endgültige Aushärten (räumliche Vernetzung der Moleküle) nach Verdunsten des Lösungsmittels und anschließendem Erwärmen. Silikonlacke werden als wärmebeständige Anstrichmittel, als Isolierstoffe in der Elektrotechnik und als Trenn- und Entformungsmittel bei der Plastherstellung und in Bäckereien eingesetzt.

Silikongummi:

Silikongummi ist ein schwach vernetzter *Elast*, der sich durch seinen großen Gebrauchstemperaturbereich auszeichnet (etwa $-60 \cdots +180\,°C$). Einsatzgebiete: Dichtungsmaterial in der chemischen Industrie, für Flugzeuge und Tiefkühltruhen; Kabelisolation für Elektroöfen.

4.12. Naturstoffe

Unter dem Begriff *Naturstoffe* werden die in der Natur vorkommenden organischen Verbindungen zusammengefaßt. In diese Gruppe von Verbindungen gehören z. B. die Kohlenhydrate, die Fette und Öle, die Eiweißstoffe, die Alkaloide, die Terpene [in den ätherischen Ölen vorkommende Kohlenwasserstoffe mit der allgemeinen Summenformel $(C_5H_8)_n$], die Hormone und Vitamine.

4.12.1. Fette und Öle

Fette sind *Propantriolester* (Glyzerinester) von höheren Monokarbonsäuren (Fettsäuren). Die bei Zimmertemperatur flüssigen Fette werden meist als *Öle**) bezeichnet. Die Vielzahl der in der Natur vorkommenden Fette und Öle rührt daher, daß sie fast immer Gemenge aus verschiedenen gemischten *Triglyzeriden* darstellen (die drei OH-Gruppen des Glyzerinmoleküls sind mit verschiedenen Karbonsäuren verestert):

$$\begin{array}{l} R_1-C(=O)-O-CH_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ R_2-C(=O)-O-CH \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ R_3-C(=O)-O-CH_2 \end{array}$$

In den natürlichen Fetten und Ölen kommen fast ausschließlich nur unverzweigte Fettsäuren mit gerader Anzahl von Kohlenstoffatomen vor. *Feste Fette* enthalten vorwiegend gesättigte Fettsäuren, während bei *flüssigen Ölen* ein höherer Gehalt an ungesättigten Fettsäuren vorliegt. Je höher der Anteil an ungesättigten Fettsäuren ist, desto niedriger liegt der Schmelzpunkt des Fetts.

Am Aufbau der Fette und Öle sind häufig folgende Fettsäuren beteiligt:

$C_{15}H_{31}COOH$: Hexadekansäure (*Palmitinsäure*),
$C_{17}H_{35}COOH$: Oktadekansäure (*Stearinsäure*),
$C_{17}H_{33}COOH = CH_3-(CH_2)_7-CH=CH-(CH_2)_7-COOH$: Oktadeken-(9)-säure (*Ölsäure*),
$C_{17}H_{31}COOH = CH_3-(CH_2)_4-CH=CH-CH_2-CH=CH-(CH_2)_7-COOH$: Oktadekadien-(9,12)-säure (*Linolsäure*),
$C_{17}H_{29}COOH = CH_3-CH_2-CH=CH-CH_2-CH=CH-CH_2-CH=CH-(CH_2)_7-COOH$: Oktadekatrien-(9,12,15)-säure (*Linolensäure*)

---

*) Um den Unterschied zu den Mineralölen deutlich zu machen, wird auch häufig der Ausdruck „fette Öle" gebraucht.

Tabelle 52. Beispiele für den Gehalt an gesättigten und ungesättigten Fettsäuren bei Fetten und Ölen

Fettsäuregehalt des Rindertalgs		Fettsäuregehalt des Olivenöls	
Palmitinsäure	27%	Palmitinsäure	10%
Stearinsäure	26,5%	Stearinsäure	3%
Ölsäure	39%	Ölsäure	77%
		Linolsäure	8,5%

Vorkommen und Gewinnung

Nach dem Vorkommen werden *pflanzliche* und *tierische Fette* und *Öle* unterschieden. Etwa 2/3 der Welterzeugung stammt aus pflanzlichem Material. Pflanzliche Öle und Fette sind vorwiegend in den *Samen* der Pflanzen enthalten. Tierische Fette und Öle kommen größtenteils im *Unterhautgewebe* (Speck) vor. Jedoch werden auch Fette aus der Milch von Säugetieren, aus Knochen, aus Fischleber usw. gewonnen. Man benennt die Fette und Öle nach dem Vorkommen.
Beispiele siehe Tabelle 53.

Tabelle 53. Beispiele für tierische und pflanzliche Fette und Öle

Tierische Fette und Öle	Pflanzliche Öle und Fette
Rindertalg, Hammeltalg, Schweineschmalz, Gänsefett, Knochenfett, Butterfett, Rinderklauenöl, Waltran, Dorschlebertran	Leinöl, Mohnöl, Olivenöl, Sonnenblumenöl, Erdnußöl, Baumwollsaatöl, Rüböl, Kokosfett. Kakaobutter

Tierische Fette werden vorwiegend durch *Ausschmelzen* des zerkleinerten tierischen Gewebes gewonnen. Pflanzliche Öle können entweder durch *hydraulisches Pressen* der Pflanzensamen mit hohem Druck oder durch *Extraktion* gewonnen werden. Kalt gepreßte Öle sind nahezu farblos, während heiß gepreßte Öle meist durch Spaltprodukte und gelöste Eiweißstoffe gefärbt sind. Zur Extraktion werden vorwiegend die Rückstände der Pressung (*Ölkuchen*) benutzt. Je nach dem Ölgehalt der Pflanzensamen und dem Preßverfahren kann der Ölkuchen noch bis zu 15% Öl enthalten. Als Extraktionsmittel dienen flüssige Kohlenwasserstoffe, Halogenkohlenwasserstoffe, Diäthyläther oder Schwefelkohlenstoff. An die Extraktion wird häufig noch eine Bleichung und Raffination angeschlossen.

Eigenschaften

Fette und Öle sind in reinem Zustand farb-, geruch- und geschmacklos. Ihre Schmelzpunkte bewegen sich zwischen −27 °C (*Nußöl*) und +55 °C (*Hammeltalg*). Die Siedepunkte liegen meist über 200 °C. Die Dichten schwanken zwischen 910 und 970 kg/m³. Fette und Öle sind wasserunlöslich, lösen sich aber in vielen organischen Lösungsmitteln.
Da Fette Estercharakter haben, lassen sich diese hydrolytisch in Propantriol und Fettsäure spalten (Verseifung):

$$\begin{array}{l} R_1-C(=O)-O-CH_2 \\ R_2-C(=O)-O-CH \\ R_3-C(=O)-O-CH_2 \end{array} + 3H_2O \rightleftharpoons \begin{array}{l} R_1-C(=O)OH + HO-CH_2 \\ R_2-C(=O)OH + HO-CH \\ R_3-C(=O)OH + HO-CH_2 \end{array}$$

Die *Fettspaltung* dient der technischen Gewinnung von Glyzerin und Fettsäuren bzw. deren Alkalisalzen. Je nach dem Verwendungszweck der entstehenden Produkte werden verschiedene Katalysatoren benutzt und bestimmte Reaktionsbedingungen eingehalten (z. B. Autoklavenspaltung, fermentative Fettspaltung, Verseifung mit Laugen).

Beim kräftigen Erhitzen von Fetten zersetzen sich diese unter Abspaltung von *Propenal* (Akrolein). Propenal ist das Dehydratisierungsprodukt des Propantriols und zeichnet sich durch einen scharfen, stechenden Geruch aus:

$$\underset{OH}{CH_2}-\underset{OH}{CH}-\underset{OH}{CH_2} \rightarrow CH_2{=}CH-C\begin{smallmatrix}O\\H\end{smallmatrix} + 2H_2O$$

Die am Aufbau der Öle beteiligten ungesättigten Fettsäuren können *Additions-* bzw. *Polymerisationsreaktionen* eingehen. Die Addition von Jod oder Brom kann zur analytischen Bestimmung des Gehalts an ungesättigten Fettsäuren benutzt werden, da bei dieser Reaktion die charakteristische Eigenfarbe der Halogene verschwindet. Die *Fett-* bzw. *Ölhärtung* beruht auf der Addition von Wasserstoff an die Doppelbindungen der ungesättigten Fettsäuren. Dieser Vorgang wird bei der Margarineherstellung ausgenutzt (katalytische Hydrierung von pflanzlichen Ölen), um eine gute Streichfähigkeit bei Zimmertemperatur durch Erhöhung der Schmelzpunkte der Fette bzw. Öle zu erreichen.
Öle mit einem hohen Anteil an ungesättigten Fettsäuren werden als *trocknende Öle* bezeichnet. Sie erstarren bei längerer Einwirkung von Luft und Licht zu einer festen, zähen, plastischen Haut. Bei diesem Vorgang entstehen unter Bildung von Sauerstoffbrücken Makromoleküle. Der Trockenvorgang kann durch *Sikkative* (Sauerstoffüberträger: z. B. Mangandioxid, Bleidioxid) katalytisch beschleunigt werden. Wegen dieser Eigenschaft ist z. B. Leinöl sehr gut zur Herstellung von Ölfarben geeignet.

Bei längerem Lagern in der Wärme können Fette und Öle unter Einwirkung von Luftsauerstoff und Licht gespalten und abgebaut werden. Der Abbau erfolgt meist bei Anwesenheit von Bakterien und Schimmelpilzen. Die Fette werden ranzig. Es entstehen unangenehm riechende und schmeckende Stoffe (z. B. niedere Fettsäuren, Hydroxykarbonsäuren, Aldehyde, Ketone).

4.12.2. Kohlenhydrate

Kohlenhydrate sind feste, farb- und geruchlose Naturstoffe, die aus den Elementen Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff bestehen. In den meisten Kohlenhydraten sind Wasserstoff und Sauerstoff im Verhältnis 2 : 1 enthalten. Dies entspricht der allgemeinen Summenformel $C_m(H_2O)_n$. Nach der Molekülgröße werden Kohlenhydrate in drei Gruppen eingeteilt:

- *Monosaccharide:* Sie lassen sich nicht in einfachere Kohlenhydrate aufspalten (z. B. Traubenzucker, Fruchtzucker).
- *Oligosaccharide:* Sie lassen sich unter Wasseraufnahme in zwei oder mehrere Monosaccharidmoleküle aufspalten. Die wichtigsten Vertreter sind die *Disaccharide* (z. B. Rohrzucker, Malzzucker, Milchzucker).
- *Polysaccharide:* Es sind hochmolekulare Kohlenhydrate (z. B. Stärke, Zellulose).

4.12.2.1. Monosaccharide

Monosaccharide lassen sich als Oxydationsprodukte mehrwertiger Alkohole auffassen. Sie enthalten neben den Hydroxylgruppen entweder eine *Aldehydgruppe* oder eine *Ketogruppe*. Entsprechend der Anzahl der Sauerstoffatome im Molekül unterscheidet man *Triosen*, *Tetrosen*, *Pentosen* usw. Nach der Oxogruppe lassen sich die Monosaccharide in *Aldosen* und *Ketosen* einteilen.

Beispiele.

```
                O                           O
CH₂–CH–C⫽            CH₂–CH–CH–CH–C⫽            CH₂–CH–CH–CH–C–CH₂
|   |    ╲H          |   |   |   |    ╲H        |   |   |   |  ‖  |
OH  OH               OH  OH  OH  OH             OH  OH  OH  OH O  OH
```

Aldotriose — *Aldopentose* — *Ketohexose*

Bei den Monosacchariden tritt *optische Isomerie* auf, da sie meist mehrere asymmetrische Kohlenstoffatome im Molekül enthalten. Bestimmend für die Zugehörigkeit zur D- bzw. L-Reihe ist das von der Oxogruppe am weitesten entfernte asymmetrische Kohlenstoffatom.
In der Natur kommen fast nur Pentosen und Hexosen vor. Pentosen findet man ausschließlich als Bausteine von makromolekularen Kohlenhydraten (Pentosane).

Beispiele.

$C(H){=}O$	$C(H){=}O$	CH_2OH	$C(H){=}O$	
$H-C-OH$	$HO-C-H$	$C{=}O$	$H-C-OH$	$C(H){=}O$
$HO-C-H$	$H-C-OH$	$HO-C-H$	$HO-C-H$	$HO-C-H$
$H-C-OH$	$HO-C-H$	$H-C-OH$	$HO-C-H$	$H-C-OH$
$H-C-OH$	$HO-C-H$	$H-C-OH$	$H-C-OH$	$H-C-OH$
CH_2OH	CH_2OH	CH_2OH	CH_2OH	CH_2OH
D(+)-*Glukose*	L(−)-*Glukose*	D(−)-*Fruktose*	D(+)-*Galaktose*	D(−)-*Arabinose*

Eigenschaften

Die Eigenschaften der Monosaccharide werden durch die im Molekül enthaltenen funktionellen Gruppen bestimmt. Da alle Monosaccharide OH-Gruppen enthalten, lassen sie sich ähnlich den Alkoholen verestern. Es kommen auch in der Natur Ester von Monosacchariden vor.

Die Aldehydgruppe von Aldosen läßt sich zur Karboxylgruppe oxydieren. Deshalb wirken Aldosen als *Reduktionsmittel.* So wird zum Beispiel eine ammoniakalische Silbernitratlösung zu elementarem Silber und FEHLINGsche Lösung zu Kupfer(I)-oxid reduziert. Bei Verwendung kräftiger Oxydationsmittel wird auch die endständige primäre Hydroxylgruppe zur Säuregruppe oxydiert:

$$\begin{array}{c} C(H){=}O \\ H-C-OH \\ HO-C-H \\ H-C-OH \\ H-C-OH \\ CH_2OH \end{array} \xrightarrow{+1/2\,O_2} \begin{array}{c} COOH \\ H-C-OH \\ HO-C-H \\ H-C-OH \\ H-C-OH \\ CH_2OH \end{array} \xrightarrow[-H_2O]{+O_2} \begin{array}{c} COOH \\ H-C-OH \\ HO-C-H \\ H-C-OH \\ H-C-OH \\ COOH \end{array}$$

D-*Glukose* D-*Glukonsäure* D-*Zuckersäure*

Bei der Reduktion der Keto- bzw. Aldehydgruppe von Monosacchariden mit katalytisch angeregtem Wasserstoff entstehen *mehrwertige Alkohole* (*Zuckeralkohole*). Verwendet man D-Fruktose als Ausgangsprodukt, so bildet sich bei der Reduktion ein weiteres asymmetrisches Kohlenstoffatom im Molekül, und es entstehen zwei stereoisomere Zuckeralkohole:

$$\begin{array}{c} CH_2OH \\ H-C-OH \\ HO-C-H \\ H-C-OH \\ H-C-OH \\ CH_2OH \end{array} \xleftarrow{+2H} \begin{array}{c} CH_2OH \\ C{=}O \\ HO-C-H \\ H-C-OH \\ H-C-OH \\ CH_2OH \end{array} \xrightarrow{+2H} \begin{array}{c} CH_2OH \\ HO-C-H \\ HO-C-H \\ H-C-OH \\ H-C-OH \\ CH_2OH \end{array}$$

D-*Sorbit* D-*Fruktose* D-*Mannit*

Monosaccharide geben nicht alle Reaktionen, die für Aldehyde bzw. Ketone typisch sind. Untersuchungen haben gezeigt, daß bei Monosacchariden ein Gleichgewicht zwischen zwei isomeren Formen vorliegt (Gleichgewichtsisomerie, Tautomerie). Diese Form der Tautomerie wird als *Zyklo-Oxo-Tautomerie* bezeichnet, da in der Zykloform durch die Wanderung eines Protons zur Oxogruppe und durch die Bildung einer Sauerstoffbrücke ein ringförmiges Molekül vorliegt. Gleichzeitig ist in der Zykloform ein asymmetrisches Kohlenstoffatom mehr enthalten, so daß von der Zykloform zwei stereoisomere Formen

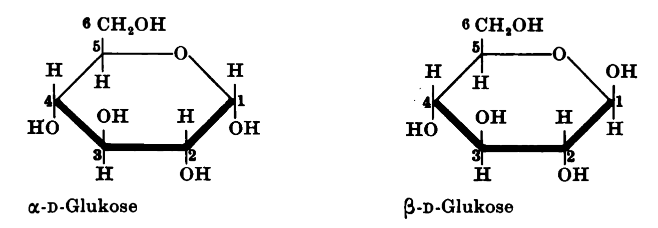


existieren:

```
   H-C*-OH                  C(=O)H                HO-C*-H
   H-C*-OH ─┐               H-C*-OH               H-C*-OH ─┐
  HO-C*-H   O     ⇌        HO-C*-H       ⇌       HO-C*-H   O
   H-C*-OH  │               H-C*-OH               H-C*-OH  │
   H-C* ────┘               H-C*-OH               H-C* ────┘
     CH2OH                    CH2OH                 CH2OH
```

Zykloform α-D-Glukose — *Oxoform* D-Glukose — *Zykloform* β-D-Glukose

Zur besseren Darstellung der Ringstruktur von Kohlenhydraten werden häufig *Raumformeln* verwendet. Man stellt sich die Kohlenstoffatome des Rings in einer Ebene liegend vor. Die Valenzen des Kohlenstoffs ragen senkrecht aus dieser Ebene heraus. Der Übersicht halber werden die Kohlenstoffatome im Ring weggelassen. Die beiden stereoisomeren Formen der D-Glukose haben folgende Raumformeln (die Zahlen geben die Nummern der Kohlenstoffatome an):



Wichtige Monosaccharide siehe Tabelle 54.

Tabelle 54. Wichtige Monosaccharide

Monosaccharid	Vorkommen, Verwendung
D(+)-Glukose (Dextrose, Traubenzucker)	in freier Form in vielen süßen Früchten und im Bienenhonig enthalten; Rohrzucker enthält Traubenzucker an Fruchtzucker gebunden; viele Polysaccharide enthalten D-Glukose chemisch gebunden *Verwendung* in der Medizin (Kräftigungsmittel bei Erschöpfungszuständen und Verdauungskrankheiten); Nahrungs- und Genußmittelindustrie *biologische Bedeutung:* Primärprodukt bei der Assimilation der Pflanzen: $6CO_2 + 6H_2O \xrightarrow{\text{Licht}} C_6H_{12}O_6 + 6O_2$ Beim Kohlenhydratstoffwechsel der Tiere werden die aufgenommenen Kohlenhydrate (z. B. Rohrzucker, Stärke) durch Fermente zu Traubenzucker aufgespalten; Blutspiegel des gesunden Menschen: 0,1% Traubenzucker (Abweichungen von diesem Wert sind Anzeichen von Zuckerkrankheit)
D(—)-Fruktose (Lävulose, Fruchtzucker)	in freier Form in vielen süßen Früchten enthalten, im Rohrzucker chemisch an Traubenzucker gebunden; einzige in der Natur häufig vorkommende Ketose; Kräftigungsmittel in der Medizin; erhöht auch in größeren Mengen kaum den Blutzuckerspiegel des Menschen (Bedeutung zum Süßen von Speisen für Zuckerkranke)
D(+)-Galaktose	in verschiedenen pflanzlichen und tierischen Polysacchariden enthalten; im Milchzucker chemisch an D-Glukose gebunden; herstellbar durch Hydrolyse von Milchzucker mittels Säuren

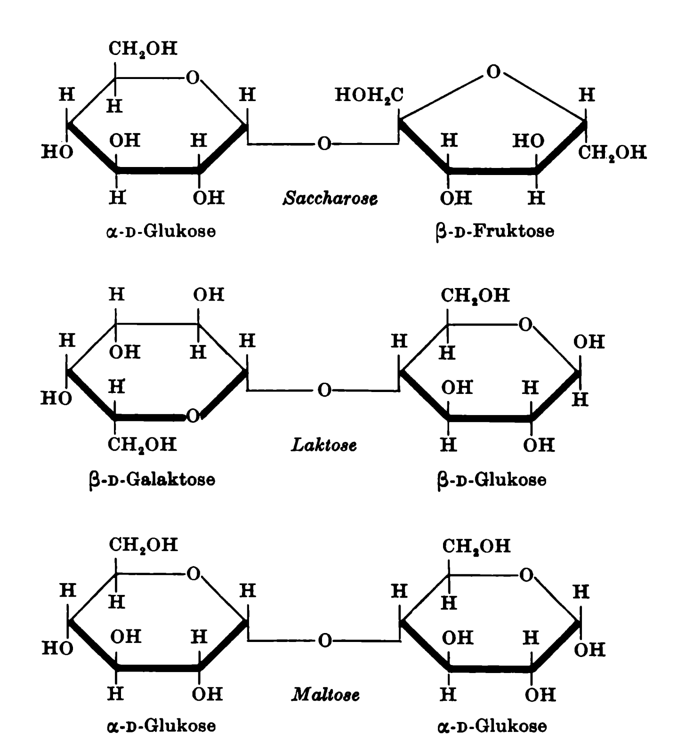
4.12.2.2. Disaccharide

Disaccharidmoleküle sind aus zwei Monosaccharidmolekülen aufgebaut. Die wichtigsten in der Natur vorkommenden Disaccharide haben die Summenformel $C_{12}H_{22}O_{11}$. Man kann sie sich formal durch Kondensation aus Monosacchariden entstanden denken:

$$2\,C_6H_{12}O_6 \rightarrow C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$$

Die beiden Monosaccharidmoleküle sind durch eine Sauerstoffbrücke verknüpft, die durch Wasserabspaltung aus zwei OH-Gruppen entstanden ist.

Beispiele.



Eigenschaften

Verschiedene Disaccharide können ähnlich den Monosacchariden reduzierend wirken. Voraussetzung dafür ist das Vorhandensein der Aldehydgruppe im Molekül. Bei *Laktose* und *Maltose* ist in einem D-Glukosemolekülrest am Kohlenstoffatom 1 eine OH-Gruppe enthalten, die nur in der tautomeren Zykloform vorkommt und in der Oxoform eine Aldehydgruppe darstellt. Im *Saccharosemolekül* dagegen ist die OH-Gruppe am Kohlenstoffatom 1 des D-Glukoserests die Bindung mit einer OH-Gruppe des D-Fruktoserests eingegangen (*glykosidische Bindung*). Saccharose reagiert dementsprechend nicht mit FEHLINGscher Lösung.
Disaccharide lassen sich durch Kochen mit verdünnten Säuren oder durch Behandeln mit Fermenten unter Wasseraufnahme in Monosaccharide spalten:

$C_{12}H_{22}O_{11}$ + H_2O →	$C_6H_{12}O_6$ +	$C_6H_{12}O_6$
Disaccharid	Monosaccharid	Monosaccharid

Wichtige Disaccharide siehe Tabelle 55.



Tabelle 55. Wichtige Disaccharide

Disaccharid	Vorkommen, Eigenschaften, Verwendung
Saccharose (Rohrzucker, Rübenzucker)	in kleinen Mengen in zahlreichen Pflanzen enthalten, größere Mengen kommen im Rohrzucker (8···17%) und in der Zuckerrübe (15···20%) vor; farblose, süß schmeckende, monokline Kristalle; im Wasser leicht, in Alkohol wenig löslich; beim Erhitzen auf 200 °C geht Saccharose in *Karamel* über (braun gefärbte Masse aus verschiedenen Abbau- und Umwandlungsprodukten); bei Hydrolyse mit Säuren Aufspaltung in Traubenzucker und Fruchtzucker (Rohrzuckerinversion*))
Laktose (Milchzucker)	fast ausschließlich nur in der Milch von Säugetieren enthalten (1···8%); schmeckt nur wenig süß; bei Milchsäuregärung Übergang in Milchsäure; Bedeutung als Kindernahrung; Grundsubstanz in verschiedenen pharmazeutischen Präparaten; Einsatz bei der Futtermittelkonservierung
Maltose (Malzzucker)	in vielen Pflanzen enthalten, bildet sich aus Stärke bei der Einwirkung des Malzferments *Amylase*; Anwendung in der Säuglingsernährung (Mittel gegen Darmstörungen), Bestandteil von Bakteriennährböden, Bienenfutter, Nähr- und Süßmittel

*) Die wäßrige Rohrzuckerlösung dreht die Polarisationsebene des Lichts nach rechts, das Gemisch der Endprodukte nach links, da D-Fruktose stärker linksdrehend als D-Glukose rechtsdrehend ist. Im Verlaufe der Reaktion kehrt sich somit die Drehrichtung der Polarisationsebene um (Inversion).

4.12.2.3. Polysaccharide

Polysaccharide sind *hochmolekulare Kohlenhydrate*. Sie sind aus glykosidisch verbundenen Monosaccharidresten (Pentosen und Hexosen) aufgebaut. Polysaccharide haben keine zuckerähnlichen Eigenschaften; sie schmecken nicht süß und bilden mit Wasser keine echten Lösungen. Die wichtigsten in der Natur vorkommenden Polysaccharide sind *Stärke* und *Zellulose* mit der Summenformel $(C_6H_{10}O_5)_n$.

Stärke

Alle Pflanzen enthalten Stärke. Sie ist ein pflanzliches Assimilationsprodukt, das mikroskopisch erkannt werden kann. Die in den grünen Pflanzenteilen primär entstehende Stärke hydrolysiert und wird in bestimmten Speicherorganen der Pflanzen (z. B. Wurzelknollen, Samen) zu *sekundärer Stärke* aufgebaut. Je nach Pflanzenart haben die Stärkekörner unterschiedliche Formen und Größen (0,002···0,2 mm Durchmesser). Sie sind nicht einheitlich aufgebaut. Die Hüllsubstanz der Stärkekörner besteht aus *Amylopektin* (etwa 80% der Gesamtsubstanz, verzweigter Molekülaufbau, quillt in heißem Wasser zu Stärkekleister), das Innere aus *Amylose* (etwa 20% der Gesamtsubstanz, unverzweigter Molekülaufbau, löst sich in Wasser kolloidal auf).
Stärkemoleküle bestehen aus glykosidisch verknüpften α-D-Glukoseresten. Amylose enthält etwa 100 bis 200 Glukosebausteine, Amylopektin etwa 300···5000:

Unter dem Einfluß von Säuren oder Fermenten kann Stärke abgebaut werden. Das Ferment *Amylase* baut Amylopektin zu *Dextrinen* ab (Polysaccharid-Bruchstücke, Klebstoffe). Beim Kochen mit verdünnten Säuren spaltet Amylose über Dextrine bis zur D-Glukose auf. Das Ferment *Diastase* baut Stärke bis zum Malzzucker ab.

Stärke ist das Hauptnahrungsmittel des Menschen. Der tägliche Kohlenhydratbedarf des Menschen liegt bei etwa 500 g. Davon wird das meiste in Form von Stärke aufgenommen (Kartoffel, Reis, Nahrungsmittel aus Getreidemehl). Gereinigte Stärke wird industriell zur Herstellung verschiedener Nährmittel benutzt (Puddingpulver, Maizena, Gallerten). Weiter kann Stärke direkt zu Alkohol vergoren werden. In der Textilindustrie wird Stärke zum Beschweren und Appretieren neuer Gewebe benutzt. Als *Schlichte* glättet sie nach dem Trocknen die Fasern und schützt sie beim Weben. Häufig dient Stärke zum Steifen der Wäsche.

Zellulose

Zellulose bildet in Pflanzen die Gerüstsubstanz der Zellwände. Baumwolle ist fast reine Zellulose. Viele andere Pflanzenfasern (wie Jute, Flachs und Hanf) bestehen zum größten Teil aus Zellulose. Das Holz unserer Nadel- und Laubbäume enthält etwa 40···50% Zellulose. Der Rest besteht aus den *Inkrusten* (Lignine, Hemizellulosen, Harzstoffe). Stroh besteht zu etwa 30% aus Zellulose. Bei der Gewinnung von Zellulose aus Holz oder Stroh müssen durch Aufschlußverfahren die Inkrusten von der Zellulose abgetrennt werden.
Zellulosemoleküle bestehen aus glykosidisch verknüpften β-D-Glukoseresten. Je nach Zelluloseart können im Zellulosemolekül 300···5000 Glukosebausteine enthalten sein (z. B. Rohbaumwolle 5000, Hanf 2200, Holzzellulose 1000···1200):

Zellulose ist eine weiße, in Wasser und in fast allen organischen Lösungsmitteln unlösliche Substanz. Das beste Lösungsmittel für Zellulose ist Tetramminkupfer(II)-hydroxid (Schweitzers Reagens) $[Cu(NH_3)_4](OH)_2$. Dieser Lösungsvorgang hat bei der Herstellung von Kupferseide Bedeutung.
Bei Einwirkung von konzentrierten Säuren und anschließendem Kochen mit verdünnten Säuren kann Zellulose fast vollständig zur D-Glukose abgebaut werden (*Holzverzuckerung*). Unter bestimmten Hydrolysebedingungen ist das Tetra-, Tri- oder Disaccharid darstellbar. Für die Technik haben besonders die Derivate der Zellulose Bedeutung. Infolge der im Zellulosemolekül vorhandenen OH-Gruppen läßt sich Zellulose verestern bzw. veräthern.

Wichtige Zelluloseester siehe Tabelle 56.

Tabelle 56. Wichtige Zelluloseester

Ester	Entstehung, Eigenschaften, Verwendung
Zellulosenitrat (fälschlicherweise auch Nitrozellulose genannt)	entsteht bei der Reaktion der Zellulose mit Nitriersäure in Form eines Gemisches aus Mono-, Di- und Triester; weiße Fasern, geruch- und geschmacklos, unlöslich in Wasser, löslich in verschiedenen organischen Lösungsmitteln; Verwendung als *Schießbaumwolle* (Stickstoffgehalt: 12,5 bis 13,5%) und als *Kollodiumwolle* (Stickstoffgehalt: 10,6···12,5%), zur Herstellung von Rohfilmen, Nitrolacken und Zelluloid
Zelluloseazetat (Azetylzellulose)	entsteht bei der Veresterung der Zellulose mit Essigsäure bzw. Essigsäureanhydrid; Zellulosetriazetat ist nur in wenigen Lösungsmitteln löslich, Zellulose-(2,5)-azetat (Sekundärazetat) ist azetonlöslich; Verwendung zur Herstellung von schwer entflammbaren Filmen, plastischen Massen, Azetatseide

4.12.3. Eiweißstoffe

Eiweißstoffe sind hochmolekulare, vorwiegend amorphe *Naturstoffe*. Sie kommen als leicht- bis zähflüssige Kolloide vor. Es sind die Grundbausteine der lebenden Substanz und damit die Träger aller Lebensprozesse.

Chemischer Aufbau und Eigenschaften

Am Aufbau der Eiweißstoffe sind die Elemente Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Schwefel und häufig auch Phosphor beteiligt. Die Eiweißmoleküle sind im wesentlichen aus *Polypeptidketten* aufgebaut, die ihrerseits aus *α-Aminosäuren* bestehen. Eine *Peptidbindung* zwischen zwei Aminosäuren läßt sich formal als Kondensation zwischen Karboxyl- und Aminogruppe darstellen:

$$2\,H_2N-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix} \xrightarrow[-H_2O]{} H_2N-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}\boxed{-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{N}}-}\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{matrix}$$

Die Polypeptidkette würde dann folgenden Aufbau haben:

$$-\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{N}}-\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{\displaystyle R_1}{\underset{|}{C}}}}-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{N}}-\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{\displaystyle R_2}{\underset{|}{C}}}}-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{N}}-\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{\displaystyle R_3}{\underset{|}{C}}}}-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{N}}-\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{\displaystyle R_4}{\underset{|}{C}}}}-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{N}}-\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{\displaystyle R_5}{\underset{|}{C}}}}-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-$$

Die Polypeptidketten zeigen häufig *Schraubenstruktur* (*α-Helix*). Dabei stehen sich von Windung zu Windung CO- und NH-Gruppen gegenüber, wobei sich *Wasserstoffbrückenbindungen* ausbilden. Die relativen Molmassen der verschiedenen Eiweißarten schwanken zwischen einigen Tausend und mehreren Millionen.
Eiweißstoffe sind optisch aktiv. Fast alle α-Aminosäuren der Eiweiße gehören der L-Reihe an. Auf Grund der hohen Molmassen bilden sie mit Wasser nur *kolloidale Lösungen*. Bei Säurebehandlung oder beim Erhitzen koagulieren kolloidal gelöste Eiweißstoffe. Sie verlieren dabei ihre spezifischen biologischen Eigenschaften (*Denaturierung*).
Durch Kochen mit verdünnten Säuren oder Laugen lassen sich die Eiweißstoffe hydrolytisch in Aminosäuren spalten. Bei dieser Spaltung treten aber auch unerwünschte Nebenreaktionen durch Zersetzung verschiedener Aminosäuren ein. Schonender verläuft der Abbau mit Hilfe von *Enzymen*, die bestimmte Peptidbindungen angreifen. Zur Trennung des bei der Hydrolyse anfallenden Aminosäuregemisches wird meist die *Papierchromatografie* benutzt.

Aminosäuren als Bestandteile der Eiweißstoffe

Bis heute sind etwa 100 in der Natur vorkommende Aminosäuren nachgewiesen worden. Am Aufbau der Eiweißstoffe sind jedoch nur etwa 20 ··· 25 verschiedene Aminosäuren beteiligt. Die Vielzahl der Eiweißarten ergibt sich daraus, daß für die einzelnen Eiweißstoffe eine ganz spezifische Reihenfolge der Verknüpfungen der verschiedenen Aminosäuremoleküle in der Peptidkette vorliegt (*Sequenz*).
Eine Reihe von Aminosäuren kann der Organismus des Menschen und der Säugetiere nicht selbst synthetisieren. Diese Aminosäuren sind lebenswichtig und müssen dem Körper mit der Nahrung zugeführt werden. Sie werden als „*essentielle Aminosäuren*" bezeichnet (Valin, Leuzin, Isoleuzin, Threonin, Histidin, Methionin, Phenylalanin, Tryptophan, Lysin, Arginin).

Beispiel.

$$H_2N-\overset{\displaystyle COOH}{\overset{|}{\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{C}}}}-H$$

—R siehe Tabelle 57.

Tabelle 57. Wichtige Aminosäuren

—R	Bezeichnung	Symbol
—H	Glyzin	Gly
$-CH_3$	Alanin	Ala
$-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{\|}{CH}}-CH_3$	Valin	Val

Fortsetzung S. 138

Tabelle 57 (Fortsetzung)

−R	Bezeichnung	Symbol
$-CH_2-CH(CH_3)-CH_3$	Leuzin	Leu
$-CH(CH_3)-CH_2-CH_3$	Isoleuzin	Ile
$-CH_2-OH$	Serin	Ser
$-CH_2-COOH$	Asparaginsäure	Asp
$-CH_2-C(=O)NH_2$	Asparagin	$Asp\text{-}NH_2$
$-CH_2-CH_2-COOH$	Glutaminsäure	Glu
$-CH_2-CH_2-C(=O)NH_2$	Glutamin	$Glu\text{-}NH_2$
$-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-NH_2$	Lysin	Lys
$-CH_2-C_6H_4-OH$	Tyrosin	Tyr
$-CH_2-$ (Indolring, N−H)	Tryptophan	Try

Wichtige Eiweißstoffe

Proteine sind einfache Eiweißstoffe, die nur α-Aminosäuren enthalten (Tabelle 58).

Tabelle 58. Wichtige Proteine

Protein	Eigenschaften, Vorkommen
Albumine	wasserlöslich, Molmasse < 100000; in verschiedenen Körperflüssigkeiten enthalten (Blutserum, Lymphflüssigkeit, Milch, Eiklar)
Globuline	wasserunlöslich, löslich in 10%iger Kochsalzlösung oder in Harnstofflösung; kommen in Gemeinschaft mit Albuminen vor; im Blutplasma (Fibrinogen) enthalten
Skleroproteine (Faserproteine, fibrilläre Proteine, Gerüsteiweißstoffe)	wasserunlöslich; Polypeptidketten sind parallel in Faserrichtung gebündelt; hohe mechanische Festigkeit (Gerüstsubstanz des tierischen Organismus); Beispiele: *Kollagen:* Grundsubstanz des lockeren Bindegewebes, der Sehnen, Bänder, Knorpel; enthält etwa 25% Glyzin; technische Verarbeitung zu Gelatine; beim Gerbvorgang der tierischen Häute zu Leder wird vorwiegend Kollagen denaturiert *Elastin:* Hauptbestandteil der elastischen Fasern in den Sehnen und Bändern *Keratin:* Hauptbestandteil der Horngewebe (Epidermis, Haare, Wolle, Federn, Nägel, Hufe, Krallen, Hörner)



Proteide sind zusammengesetzte Eiweißstoffe, die an die Polypeptidketten gebundene artfremde Substanzen (*prosthetische Gruppen*) enthalten (Tabelle 59).

Tabelle 59. Wichtige Proteide

Proteid	Beispiele
Phosphorproteide	die OH-Gruppe des Serins in der Polypeptidkette ist zum Teil mit Phosphorsäure verestert; Beispiele: *Kasein* (Milch), *Lezithin* (Eidotter)
Chromoproteide	Farbstoffe als prosthetische Gruppe; Beispiel: *Hämoglobin* (roter Blutfarbstoff)
Glykoproteide	Kohlenhydrate (bis zu 20%) als prosthetische Gruppe; Hauptgruppe der Proteide; Beispiele: *Muzine* (Schleimstoffe), *Mukoide* (nicht schleimartige Glykoproteide)
Nukleoproteide	Nukleinsäuren als prosthetische Gruppe; Beispiele: Proteide der Chromosomen der Zellkerne (in der *Desoxyribonukleinsäure* (DNS) wird die genetische Information zum Aufbau der Organismen gespeichert), Virusproteide

4.12.4. Biokatalysatoren

Biokatalysatoren sind organische Katalysatoren für Lebensvorgänge. Schon geringste Mengen zeigen eine deutliche physiologische Wirkung. Sie sind für den normalen Ablauf der Lebensvorgänge im Pflanzen- und Tierreich unbedingt erforderlich. Zu den Biokatalysatoren im engeren Sinne zählen die *Vitamine*, die *Hormone* und die *Fermente* (*Enzyme*).

Vitamine

Vitamine sind Biokatalysatoren, die bereits in geringen Mengen die verschiedensten *Stoffwechselvorgänge* des Menschen regulieren. Sie werden vorwiegend von Pflanzen gebildet und mit der Nahrung aufgenommen. Der tierische Organismus selbst ist nur in der Lage, Vitamine aus einigen unwirksamen Vorstufen (*Provitamine*) aufzubauen.

Das vollständige Fehlen bestimmter Vitamine führt beim Menschen zu Mangelkrankheiten (*Avitaminosen*), die ungenügende Zufuhr eines Vitamins zur *Hypovitaminose* und ein Überangebot zur *Hypervitaminose*. Der Bedarf des menschlichen Organismus für einzelne Vitamine ist sehr unterschiedlich (Tagesbedarf: 0,001 ··· 75 mg) und abhängig von den Stoffwechselvorgängen. So kann sich zum Beispiel bei Krankheiten der Vitaminbedarf um ein Vielfaches erhöhen.
Vitamine gehören den verschiedensten Stoffklassen an. Es sind heute über 20 verschiedene Vitamine bekannt, von denen auch bereits die Synthese gelungen ist. Nach den Eigenschaften unterscheidet man *fettlösliche Vitamine* (A, D, E, K, F) und *wasserlösliche Vitamine* (B, C, H).

Formelbeispiele für Vitamine.

```
H3C  CH3
  \  /
   C            CH3               CH3
  / \            |                 |
H2C  C-CH=CH-C=CH-CH=CH-C=CH-CH2OH
 |   ||
H2C  C-CH3
  \C/
  H2
```

Vitamin A_1 (*Retinol*)

```
HO-C==C-OH
   |    |
O=C    CH-CH-CH2OH
   \O/      |
            OH
```

Vitamin C (*Askorbinsäure*)

Wichtige Vitamine siehe Tabelle 60.

Tabelle 60. Wichtige Vitamine

Vitamin	Vorkommen, Avitaminose, täglicher Bedarf
Vitamin A_1 (Retinol, Axerophthol)	Vorkommen in Milch, Eidotter, Butter, Lebertran; in verschiedenen Pflanzen als Provitamin *Karotin* enthalten; Epithelschutzvitamin, Vitaminmangel führt zur Epithelverhornung und zu Sehstörungen; täglicher Bedarf: 1,5 ··· 2 mg
Vitamin B_1 (Thiamin, Aneurin)	Vorkommen in Getreidekeimlingen (besonders Reiskleie), Hefe, Kartoffeln, Gemüse; Avitaminose: Beriberi; täglicher Bedarf: 0,5 ··· 1 mg
Vitamin C (Askorbinsäure)	Vorkommen in frischem Gemüse und Obst; kann durch Oxydationsvorgänge leicht abgebaut werden (Vitamingehalt des Gemüses verringert sich beim Kochen); Avitaminose: Skorbut; täglicher Bedarf: 75 mg (kann bei Belastung auf das Zehnfache ansteigen)
Vitamin D_2 (Ergokalziferol)	Vorkommen in Lebertran, Butter, Milch, Eigelb; Avitaminose: Rachitis; täglicher Bedarf: 0,025 mg
Vitamin-E-Komplex (Tokopherol)	Vorkommen in Weizenkeimlingen, Kopfsalat, Sellerie, Butter, Eigelb; Antisterilitätsvitamin; täglicher Bedarf: 5 mg
Vitamin K_1 (Phyllochinon)	Vorkommen in allen grünen Pflanzenteilen, Schweineleber; reguliert die Blutgerinnung; täglicher Bedarf: 0,001 mg

Hormone

Hormone sind Wirkstoffe, die in den *innersekretorischen Drüsen* der Menschen und Tiere gebildet werden. Die Sekretionsprodukte gelangen direkt oder über den Lymphweg in die Blutbahn. Vom chemischen Aufbau her gehören die Hormone den verschiedensten Stoffklassen an (Tabelle 61).

Tabelle 61. Wichtige Hormone

Hormon	Auftreten, Funktion
Adrenalin	Hormon des Nebennierenmarks; steuert die Blutverteilung und reguliert zusammen mit *Noradrenalin* den Blutdruck
Insulin	Hormon der Bauchspeicheldrüse (Pankreas); reguliert den Kohlenhydratstoffwechsel; Fehlen des Hormons führt zur Zuckerkrankheit (Blutzuckergehalt steigt an)
Thyroxin	Hormon der Schilddrüse (jodhaltig); reguliert den Umfang des Grundstoffwechsels, beeinflußt den Wasserhaushalt und ist für ein normales Wachstum verantwortlich; Überproduktion: BASEDOWsche Krankheit, Unterproduktion: Kretinismus

Fermente (Enzyme)

Fermente sind *hochmolekulare Eiweißstoffe*, die im lebenden Organismus selbst gebildet werden und als Biokatalysatoren für bestimmte chemische Reaktionen notwendig sind. Sie wirken sehr spezifisch und katalysieren die Reaktionen fast ausschließlich in die für den Stoffwechsel erforderliche Richtung. Gegenüber Änderung der äußeren Bedingungen (z. B. Temperatur, *p*H-Wert, Konzentration) sind sie sehr empfindlich.

Fermente lassen sich durch Extraktion tierischer oder pflanzlicher Gewebe isolieren und als Katalysatoren zu bestimmten chemischen Reaktionen außerhalb des lebenden Organismus einsetzen. So werden zum Beispiel die in der Hefe enthaltenen Gärungsfermente zur *alkoholischen Gärung* und die Fermente der

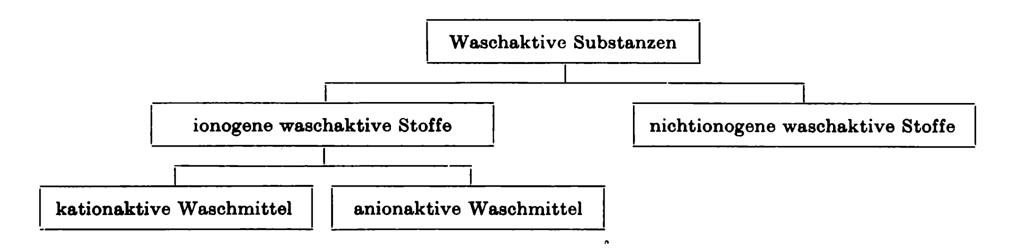
Milchsäurebakterien zur Herstellung von ***Milchsäure*** und ***Zitronensäure*** benutzt. Weitere technisch bedeutsame enzymatische Prozesse sind die ***Käsebereitung***, die ***Fermentation*** des Tabaks, die ***Abwasserreinigung*** und die ***Eiweißgewinnung*** aus Erdöl.

4.13. Seifen und Waschmittel

Seifen sind *Alkalisalze* höherer Fettsäuren. Waschmittel enthalten synthetisch hergestellte waschaktive Substanzen mit einer dem Verwendungszweck entsprechenden Zusammensetzung. Sie werden mit speziellen Beimischungen (z. B. Phosphate, Silikate, Soda, Natriumsulfat, Zelluloseäther, Bleichmittel, optische Aufheller) versehen und kommen als Feinwaschmittel, Neutralwaschmittel, Grobwaschmittel, Geschirrspülmittel usw. in den Handel. In der Waschwirkung sind sie den Seifen überlegen.
Waschaktive Substanzen haben einen ganz charakteristischen Aufbau. Ihre Moleküle bestehen aus einem ***hydrophilen*** (wasserfreundlichen) und einem ***hydrophoben*** (wasserfeindlichen) ***Teil.*** Für die hydrophoben Eigenschaften ist stets der Kohlenwasserstoffrest des Moleküls verantwortlich, während die hydrophilen Eigenschaften durch ionisierbare Reste (z. B. $-COONa$, $-SO_3Na$) oder durch polare Gruppen (z. B. $-NH_2$, $-OH$) hervorgerufen werden.

Beim ***Waschvorgang*** umhüllen die Moleküle der waschaktiven Substanz mit ihrem hydrophoben Ende die Schmutzteilchen und das zu reinigende Waschgut; der hydrophile Rest ist dem Wasser zugekehrt. Die Waschlauge dringt zwischen die zu reinigende Fläche und die Schmutzteilchen und hebt letztere ab. Elektrische Abstoßungskräfte zwischen den gleichsinnig geladenen Oberflächen der waschmittelbenetzten Schmutzteilchen und des Waschguts unterstützen das Abheben des Schmutzes. Die Schmutzteilchen müssen im Wasser suspendiert bzw. emulgiert bleiben, da sie sonst wieder das Waschgut verschmutzen könnten (*Schmutztragevermögen*). Waschaktive Substanzen haben ein ausgesprochenes *Emulgiervermögen*. Ölverunreinigungen werden vom Waschmittel in kleinste Tröpfchenform bleibend aufgeteilt.

Die waschaktiven Substanzen lassen sich nach der Art der Bindung in *ionogene* und *nichtionogene Stoffe* einteilen. Bei den ionogenen Stoffen wird weiter unterschieden, ob das Kation oder das Anion waschaktiv wirksam ist. Die größte Bedeutung haben anionaktive Waschmittel, zu denen auch die Seife gehört.



4.13.1. Seifen

Seifen können beim *Verseifen von Fetten oder Ölen* durch Kochen mit Kali- oder Natronlauge gewonnen werden:

$$\begin{array}{l} R-C\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup O}{\diagdown O-CH_2} \\ \qquad\qquad\quad | \\ R-C\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup O}{\diagdown O-CH} \\ \qquad\qquad\quad | \\ R-C\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup O}{\diagdown O-CH_2} \end{array} + 3\,NaOH \rightarrow 3\,R-C\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup O}{\diagdown ONa} + \begin{array}{c} CH_2OH \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH_2OH \end{array}$$

Es ist auch möglich, die bei der *Paraffinoxydation* erhaltenen höheren Fettsäuren anschließend mit Lauge zu neutralisieren bzw. mit wäßriger Sodalösung zu Seife umzusetzen:

$$2R{-}COOH \xrightarrow{+2NaOH} 2R{-}COONa + 2H_2O$$

$$2R{-}COOH \xrightarrow{+Na_2CO_3} 2R{-}COONa + H_2O + CO_2$$

Wäßrige Seifenlösungen reagieren infolge Hydrolyse *alkalisch* (Salze schwacher Säuren und starker Basen):

$$R{-}COONa + H_2O \rightleftharpoons R{-}COOH + Na^+ + OH^-$$

Die bei der Hydrolyse entstehende freie Fettsäure bleibt im Wasser kolloidal gelöst. Bei Säurezugabe fällt sie als *Niederschlag* aus.

In hartem Wasser entstehen bei Zugabe von Seifenlösungen Niederschläge von Kalzium- bzw. Magnesiumsalzen der höheren Fettsäuren, da nur die Alkalisalze höherer Fettsäuren wasserlöslich sind. Die Waschwirkung der Seife setzt beim Verwenden von hartem Wasser erst dann ein, wenn alle vorhandenen Kalzium- und Magnesiumionen als Kalzium- bzw. Magnesiumseife ausgefallen sind.

4.13.2. Anionaktive Waschmittel

Alkylsulfate (Fettalkoholsulfate)

Sie entstehen als *Schwefelsäureester* höherer Alkohole bei der Veresterung von Schwefelsäure mit höheren Alkoholen ($C_{10} \cdots C_{18}$) und anschließender Neutralisation mit Lauge:

$$R{-}OH + H_2SO_4 \rightleftharpoons R{-}O{-}SO_3H + H_2O$$

$$R{-}O{-}SO_3H + NaOH \rightarrow R{-}O{-}SO_3Na + H_2O$$

Alkylsulfate zählen zu den *Neutralwaschmitteln* (keine Hydrolyse, Salz einer starken Säure). Sie können auch im harten Wasser eingesetzt werden, da ihre Kalzium- bzw. Magnesiumsalze wasserlöslich sind.

Alkylsulfonate (Mersolate)

Es sind *Natriumsalze* höherer aliphatischer Sulfonsäuren. Sie können in hartem Wasser eingesetzt werden. Zu Geschirrspülmitteln verwendet man häufig Alkylarylsulfonate, da sie einen hohen Benetzungseffekt zeigen:

$$CH_3{-}CH(CH_3){-}C_{10}H_5(SO_3Na){-}CH(CH_3){-}CH_3$$

Beispiel eines Alkylarylsulfonats

Fettsäurekondensationsprodukte

Sie entstehen durch Kondensation von höheren Fettsäuren mit sulfonierten Alkoholen oder Aminen und anschließender Neutralisation mit Natronlauge:

$$R{-}C(=O){-}OH + HO{-}CH_2{-}CH_2{-}SO_3H \rightarrow R{-}C(=O){-}O{-}CH_2{-}CH_2{-}SO_3H + H_2O$$

$$R{-}C(=O){-}OH + H_2N{-}CH_2{-}CH_2{-}SO_3H \rightarrow R{-}C(=O){-}N(H){-}CH_2{-}CH_2{-}SO_3H + H_2O$$

4.13.3. Nichtionogene und kationaktive Waschmittel

Nichtionogene Waschmittel dissoziieren nicht in wäßriger Lösung. Sie enthalten hochmolekulare Kohlenwasserstoffreste, die durch OH-Gruppen und Sauerstoffbrücken wasserlösliche Eigenschaften aufweisen. Sie waschen sowohl in alkalischem als auch in saurem Milieu. Gegen die Härtebildner des Wassers sind sie unempfindlich.

$C_{12}H_{25}-C_6H_4-O-(CH_2-CH_2-O)_n-CH_2-CH_2-OH$

Dodezyl-phenol-polyglykol-äther als Beispiel einer nichtionogenen waschaktiven Substanz

Kationaktive Waschmittel leiten sich von quartären Ammoniumsalzen ab. Sie können in neutraler und saurer Lösung verwendet werden und wirken keimtötend.

Beispiele.

$\left[CH_3-\overset{CH_3}{\underset{C_7H_{15}}{N}}-CH_3\right]^+ Hal^-$

Trimethyl-heptyl-ammonium-halogenid

$\left[C_5H_5N-C_{16}H_{33}\right]^+ Hal^-$

Zetylpyridiniumhalogenid

4.14. Farbstoffe

Farbstoffe sind organische Verbindungen, die bestimmte Wellenbereiche des sichtbaren Lichts absorbieren, in Wasser oder anderen Lösungsmitteln löslich sind und zum Anfärben von Fasern und Geweben benutzt werden.
Alle organischen Verbindungen absorbieren elektromagnetische Wellen. Die Ursache dafür liegt in der *Wechselwirkung der Lichtquanten mit den Bindungselektronen* der Stoffe. Der größte Teil der organischen Verbindungen erscheint deshalb farblos, weil diese Stoffe im ultravioletten Bereich absorbieren. Farbige Verbindungen absorbieren im sichtbaren Bereich der elektromagnetischen Wellen (Wellenlänge: 400···800 nm). Das menschliche Auge sieht den Farbton, der der Summe der nichtabsorbierten Lichtstrahlen entspricht. Absorbiert eine Verbindung einen bestimmten Bereich des Spektrums, so zeigt sie im weißen Licht dazu die Komplementärfarbe.
Für die *Farbigkeit organischer Verbindungen* kann man bestimmte funktionelle Gruppen verantwortlich machen, deren Elektronenverteilung eine Absorption im Bereich des sichtbaren Lichts bewirkt.

Chromophore Gruppen

Es sind die eigentlichen farbgebenden Gruppen organischer Verbindungen. Alle chromophoren Gruppen besitzen *π-Elektronenpaare.* Häufig ist zur Farbigkeit von organischen Verbindungen eine Kombination mehrerer chromophorer Gruppen im Molekül erforderlich.

Beispiele.

$>C=\overline{\underline{O}}$	$>C=C<$	$-\overline{N}=\overline{\underline{O}}$	$-\overset{\oplus}{N}(=\overline{O})-\overline{\underline{O}}|^{\ominus}$	$-\overline{N}=\overline{N}-$
Karbonylgruppe	Kohlenstoffdoppelbindung	Nitrosogruppe	Nitrogruppe	Azogruppe

Auxochrome Gruppen

Sie bewirken selbst keine Farbigkeit. Jedoch in Kombination mit chromophoren Gruppen rufen sie eine *Erhöhung der Farbintensität* (Verstärkung der Absorption) oder eine *Farbvertiefung* (Verschiebung des Absorptionsbereiches nach größeren Wellenlängen hin ≙ Farbverschiebung von Gelb über Rot nach Blau) hervor. Alle auxochromen Gruppen haben *freie Elektronenpaare.*

Beispiele.

$-\overline{\underline{O}}-H$	$-\overline{\underline{O}}-R$	$-\overline{N}(H)H$	$-\overline{N}(R)H$	$-\overline{N}(R_1)R_2$
Hydroxylgruppe	Alkoxygruppe	primäre Aminogruppe	sekundäre Aminogruppe	tertiäre Aminogruppe

4.14.1. Färbeverfahren

Eine farbige organische Verbindung ist erst dann ein *Farbstoff*, wenn sie die Fähigkeit hat, Textilfasern dauerhaft anzufärben. Infolge des unterschiedlichen Aufbaus der einzelnen Textilfasern und Farbstoffe werden verschiedene Färbeverfahren benutzt. Die Farbstoffe lassen sich nach den Färbemethoden einteilen.

Direktfarbstoffe (substantive Farbstoffe):

Sie färben die neutrale Faser direkt aus der wäßrigen Farbstofflösung (*Flotte*) an. Meist enthalten diese Farbstoffe eine oder mehrere Sulfonsäuregruppen, da eine solche Gruppe im Molekül häufig erst die Wasserlöslichkeit des Farbstoffs bewirkt. Zu den Direktfarbstoffen gehören zahlreiche *Azofarbstoffe.*

Beizenfarbstoffe:

Sie haften nicht allein auf der Faser. Die Faser muß vor dem Färben gebeizt werden. Zum Beizen dienen Metallsalze, die auf der Faser haften und mit dem Farbstoff eine schwerlösliche Verbindung (*Farblack*) bilden. Beizenfarbstoffe müssen in bestimmter Stellung im Molekül OH-, COOH- oder NH_2-Gruppen enthalten. Sie können unterschiedlichen chemischen Aufbau haben (z. B. *Azofarbstoffe, Anthrachinonfarbstoffe*).

Entwicklungsfarbstoffe (Eisfarben):

Bei diesen Farbstoffen wird die Faser mit einer *Kupplungskomponente* (Entwickler) getränkt und anschließend mit einer *Diazoniumlösung* behandelt. Durch eine Kupplungsreaktion entsteht der Farbstoff unmittelbar auf der Faser.

Küpenfarbstoffe:

Küpenfarbstoffe sind unlösliche chinoide Verbindungen. Durch Reduktion werden sie in die wasserlösliche, farblose *Leukoverbindung* (*Küpe*) überführt. Mit dieser wäßrigen Farbstofflösung wird die Faser getränkt. Nach Aufhängen an der Luft bildet sich der ursprüngliche Farbstoff durch Oxydation mit Luftsauerstoff wieder zurück. Der Farbstoff haftet fest auf der Faser und ist besonders lichtecht, da er durch Sauerstoff nicht gebleicht werden kann. Wichtige Vertreter sind die *Indigofarbstoffe* und die *Indanthrenfarbstoffe.*

4.14.2. Azofarbstoffe

Sie enthalten als chromophore Gruppe eine oder mehrere *Azogruppen* (—N=N—), die an aromatische Reste gebunden sind. Die aromatischen Reste haben meist in ortho- oder para-Stellung zur Azogruppe auxochrome Gruppen. Häufig besitzen die Moleküle von Azofarbstoffen Sulfonsäuregruppen.

Beispiele. OH SO_3Na —N=N— SO_3Na OH —N=N— NaO_3S— SO_3Na

Echtrot B (Bordeaux B) *Orange* GG

NH_2 OH —N=N— —N=N— OH NH_2 NaO_3S— —SO_3Na NaO_3S— —SO_3Na

Direktblau BB (*Disazofarbstoff* → enthält im Molekül zwei Azogruppen).

Azofarbstoffe sind die wichtigsten Farbstoffe, da sie eine größere Anzahl von Verbindungen umfassen als alle anderen Farbstoffklassen zusammen. Bis heute sind über 100000 verschiedene Azofarbstoffe entwickelt worden, von denen mehr als 1000 industriell hergestellt werden. Die größte Bedeutung kommt den *Disazofarbstoffen* zu. Sie zeigen meist tiefere Farben.

Zu den Azofarbstoffen gehören viele *Indikatoren.* Die Farbänderung der Indikatoren bei Verschiebung des *p*H-Werts beruht auf einer Veränderung der Elektronenverteilung im Molekül durch Bildung anderer chromophorer Gruppen.

Beispiel.

$NaO_3S-C_6H_4-N=N-C_6H_4-N(CH_3)_2 \xrightarrow{+HCl} [NaO_3S-C_6H_4-NH-N=C_6H_4=N^{\oplus}(CH_3)_2]^+ Cl^-$

gelb — rot

Helianthin (Methylorange), im alkalischen Bereich gelb und im sauren Bereich rot gefärbt

4.14.3. Triphenylmethanfarbstoffe

Sie leiten sich vom *Triphenylmethan* ab. Triphenylmethan selbst ist farblos. In den Triphenylmethanfarbstoffen wirkt das Triphenylmethangerüst dann als chromophore Gruppe, wenn ein Phenylrest *chinoide Struktur* besitzt. Als auxochrome Gruppen müssen in mindestens zwei der aromatischen Reste OH- oder NH_2-Gruppen vorhanden sein.

Beispiele.

$[(CH_3)_2N-C_6H_4-C(C_6H_5)=C_6H_4=N^{\oplus}(CH_3)_2]^+ Cl^-$

Malachitgrün

$[(H_2N-C_6H_4)(H_2N-C_6H_3(CH_3))C=C_6H_4=\overset{\oplus}{N}H_2]^+ Cl^-$

Fuchsin

Triphenylmethanfarbstoffe haben heute als Textilfarbstoffe wegen der geringen Licht- und Farbechtheit kaum noch Bedeutung. Sie werden zur Herstellung von Tinten, Stempelfarben, Farbbändern, Kopierstiften usw. verwendet.

4.14.4. Anthrachinonfarbstoffe

Sie leiten sich vom Anthrachinon ab. Die chinoide Struktur des Anthrachinonmoleküls wirkt als chromophore Gruppe. Als auxochrome Gruppe müssen mindestens zwei NH_2- oder OH-Gruppen im Farbstoffmolekül vorhanden sein. Anthrachinonfarbstoffe werden vorwiegend als *Beizenfarbstoffe* eingesetzt. Die Gruppe der *Indanthrenfarbstoffe* (Küpenfarbstoffe) zeichnet sich durch besondere Licht- und Waschechtheit aus.

Beispiele.

O OH, —OH, —SO_3Na, O

Alizarinrot S

O, O HN, NH O, O

Indanthrenblau RS

4.14.5. Indigofarbstoffe

Sie leiten sich vom *Indigo* ab, einem blauen, sehr lichtechten Naturstoff, der heute fast ausschließlich synthetisch gewonnen wird. Indigofarbstoffe werden als *Küpenfarbstoffe* eingesetzt und vor dem Färbevorgang zur wasserlöslichen Leukoverbindung reduziert:

$\xrightarrow{+2H}$

Indigo Leukindigo (Indigoweiß)

Indigofarbstoffe gibt es heute in fast allen Farbtönen. Sie werden synthetisch gewonnen und stellen Derivate des Indigos dar.

Beispiele.

Thioindigo *6,6'-Dibromindigo* (antiker Purpur)

Literaturverzeichnis

[1] *Autorenkollektiv:* Brockhaus ABC Chemie. 4. Aufl. — Leipzig: F. A. Brockhaus Verlag 1977

[2] *Autorenkollektiv:* Tabellenbuch Chemie. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975

[3] *Döhring, L.; Gohlisch, G.:* Grundlagen der organischen Chemie. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979

[4] *Ludwig, G.:* Allgemeine, anorganische und organische Chemie — Wissensspeicher. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1978

[5] *Näser, K.-H.:* Physikalische Chemie für Techniker und Ingenieure. 14. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976

[6] *Näser, K.-H.:* Physikalisch-chemische Rechenaufgaben. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979

[7] *Näser, K.-H.:* Physikalisch-chemische Meßmethoden. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976

[8] *Nikolski, B. P.:* Handbuch des Chemikers. 3 Bände. — Berlin: VEB Verlag Technik 1959

[9] *Rauscher, K., Voigt, J., Wilke, I., Wilke, K.-Th.:* Chemische Tabellen und Rechentafeln für die analytische Praxis. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[10] *Westermann, K., Näser, K.-H., Brandes, G.:* Anorganische Chemie. 10. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1978

Weiterführende Literatur

[11] *Autorenkollektiv:* Allgemeine Chemie. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1978

[12] *Autorenkollektiv:* Analytikum. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979

[13] *Autorenkollektiv:* Anorganikum. 8. Aufl. — Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978

[14] *Autorenkollektiv:* Chemie. Reihe: Nachschlagebücher für Grundlagenfächer. 14. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981

[15] *Autorenkollektiv:* chimica — ein Wissensspeicher. Band I: Anorganische Chemie, Organische Chemie; Band II: Allgemeine und physikalische Chemie, Technische Chemie. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1972

[16] *Autorenkollektiv:* Lehrbuch der Chemie. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975

[17] *Autorenkollektiv:* Lehrbuch der technischen Chemie. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979

[18] *Autorenkollektiv:* Organikum. — 15. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978

[19] *Autorenkollektiv:* Reaktionsverhalten und Syntheseprinzipien. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975

[20] *Autorenkollektiv:* Wissensspeicher Chemie. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1978

[21] *Bergmann, H., Trieglaff, K.:* Physikalische Chemie — Wissensspeicher. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975

[22] *Beyer, L.:* Anorganische Chemie — Grundkurs. 2. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979

[23] *Brdicka, R.:* Grundlagen der physikalischen Chemie. 14. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978

[24] *Bittrich, H.-J.:* Leitfaden der Chemischen Thermodynamik. 2. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976

[25] *Cotton, F. A., Wilkinson, G.:* Anorganische Chemie. 3. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970

[26] *Hallpap, P., Wiesner, E., Liebscher, W.:* Nomenklatur organischer Verbindungen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1978

[27] *Hauptmann, S.:* Über den Ablauf organisch-chemischer Reaktionen. WTB, Reihe Chemie. — Berlin: Akademie-Verlag 1973

[28] *Hauptmann, S., Graefe, J., Remane, H.:* Lehrbuch der organischen Chemie. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976

[29] *Hermann, P.:* Kompendium der allgemeinen und anorganischen Chemie. 2. Aufl. — Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1975

[30] *Holland, W.:* Die Nomenklatur in der organischen Chemie. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973

[31] *Kretschmer, E.:* Physikalische Chemie — Grundkurs. 2. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978

[32] *Möbius, H.-H., Dürselen, W.:* Chemische Thermodynamik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975

[33] *Remy, H.:* Grundriß der anorganischen Chemie. 14. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1967

[34] *Remy, H.:* Lehrbuch der anorganischen Chemie. 13. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1970

[35] *Richter, G.:* Atombau. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976

[36] *Richter, G.:* Periodensystem der Elemente. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[37] *Schwabe, K.:* Physikalische Chemie. 3 Bände. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1975

[38] *Trzebiatowski, W.:* Lehrbuch der anorganischen Chemie. 7. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976

[39] *Wünsch, K.-H., Miethchen, R., Ehlers, D.:* Organische Chemie — Grundkurs. 2. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975



We Werkstoffe

Von Dr. rer. nat. Horst Bretschneider, Niederwiesa (Abschn. 3.7.); *Dr.-Ing. Dieter Hempel, Dresden* (Abschn. 3.5., 3.6.); *Stud.-Dir. Dipl.-Ing. Gerhard Jokisch, Leipzig* (Abschn. 1. und 2.3.); *Dr.-Ing. Hartmut Schiefer, Dresden* (Abschn. 3.1. bis 3.4.); *Ing. Bruno Schütze, Neustadt (Sa.)* (Abschn. 2.1. und 2.2.) *und Fachschuldozent Dipl.-Ing. Wolfgang Seidel, Karl-Marx-Stadt* (Abschn. 2.1. und 2.2.)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Bedeutung, Wesen und Arbeitsmethoden der Werkstoffwissenschaft

Der Werkstoffwissenschaft kommt eine wesentliche Schlüsselstellung in der Technik zu. Der Ingenieur muß sich deshalb mit den Arten der Werkstoffe und ihren Eigenschaften vertraut machen, ganz gleich, ob er als Konstrukteur oder Technologe, als Güteprüfer oder Mechaniker tätig ist. Die Studenten an Technischen und Ingenieurhochschulen, Ingenieur- und Fachschulen lernen schon frühzeitig die große Anzahl der Werkstoffe und ihre Anwendung



in der Praxis kennen und erhalten somit einen Teil des Rüstzeugs für ihre spätere praktische Tätigkeit.
Das Wesen der Werkstoffwissenschaft liegt sowohl in der Gewinnung als auch in der Vermittlung von Kenntnissen, vor allem über

- die *physikalischen Eigenschaften* der Werkstoffe (Dichte, innerer Aufbau, Leitfähigkeit, Festigkeit, Dehnung, Härte usw.),
- die *chemischen Eigenschaften* (z. B. gegenüber Korrosion),
- den Einfluß von *Verunreinigungen* und *Beimengungen*,
- den Einfluß von *Wärmebehandlung* und *Formung*,
- die *inneren Vorgänge* bei äußeren Beanspruchungen,
- die *Eignung* in der Fertigungstechnik,
- den technisch und ökonomisch zweckmäßigsten *Werkstoffeinsatz*.

Arbeitsmethoden zur Ermittlung der Eigenschaften der Werkstoffe sind die *Verfahren der Werkstoffprüfung*.*)
Die Beziehungen der Werkstoffwissenschaft zu anderen Fachgebieten sind vielseitig. So lassen sich viele Werkstoffprobleme nur mit Hilfe von Methoden der *Physik* und *Chemie* lösen (insbesondere bei der Ermittlung wichtiger Eigenschaften, aber auch bei der Klärung der Vorgänge bei der Gewinnung). Die *Metallurgie* liefert die Kenntnisse der Ursachen von Erscheinungen und Wirkungen in den metallischen Werkstoffen, die durch die Herstellungsprozesse und die dabei notwendigen Hilfsstoffe hervorgerufen werden.
Andererseits wirken Werkstoffwissenschaft und Werkstofftechnik mit ihren Ergebnissen auf Festigkeitslehre, Konstruktion und Fertigung ein und liefern wertvolle Unterlagen für die sinnvolle Auswahl der Werkstoffe für bestimmte Aufgaben und Bearbeitungsverfahren. Sie helfen damit, die Güte von Maschinen und Anlagen zu erhöhen und die Wirtschaftlichkeit zu verbessern.

1.2. Einteilung der Werkstoffe

Aus den verschiedenen Möglichkeiten der Einteilung wird hier die in der Technik am meisten interessierende angeführt: man unterscheidet *metallische Werkstoffe* (die den Hauptteil der Konstruktionswerkstoffe bilden) und *nichtmetallische Werkstoffe*. Während *Eisenwerkstoffe* (Reineisen, Stähle und Gußeisen) sowie *Nichteisenmetalle* (Leicht- und Schwermetalle) zu den Metallen zählen, sind nichtmetallische Werkstoffe all jene Werkstoffe, die nicht auf der Metallbasis aufbauen, jedoch in Einzelfällen Metalle enthalten können. Neben den *keramischen Werkstoffen***) und den *Naturstoffen* (Holz, Gummi, Glas**)) stellen die *hochpolymeren Werkstoffe* (in der Hauptsache die Plaste) die wichtigste Gruppe der Nichtmetalle dar.

1.3. Begriffe

Naturstoffe sind Stoffe, die die Natur dem Menschen liefert, ohne daß bereits menschliche Arbeit in ihnen vergegenständlicht worden ist, z. B. anstehende Erze, Kohleflöze, Bäume usw.
Rohstoffe sind Stoffe, die durch menschliche Arbeit daraus gewonnen werden, z. B. geförderte Erze, gefällte Bäume. Zu den Rohstoffen zählen ebenfalls die Altstoffe (*Sekundärrohstoffe*), z. B. unbrauchbar gewordene Maschinen, Bekleidung, und die Abfälle, z. B. Schrott, Späne usw. Sie werden durch Weiterverarbeitung zu Halb- oder Stufenfabrikaten.
Halb- oder Stufenfabrikate sind Stoffe, die sich in der Weiterverarbeitung vom Rohstoff zum Werkstoff befinden, z. B. Roheisen, Rohöl, Rohglas.
Werkstoffe sind Stoffe, die die letzte Stufe der Weiterverarbeitung durchlaufen haben und zur endgültigen Verarbeitung zur Verfügung stehen, z. B. Stahl, Polyvinylchlorid, Faserstoffe.

---

*) siehe auch Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG
**) siehe Abschn. CHEMIE

Hilfsstoffe sind Stoffe, die als Zusätze zur stofflichen Veränderung von Rohstoffen dienen. Sie unterstützen das jeweilige Fertigungsverfahren, ohne es direkt durchzuführen, z. B. Koks bei der Roheisenerzeugung, Schmiermittel bei der spanenden Formung.

1.4. Auswahl und Substitution von Werkstoffen

Die Ermittlung des technisch und ökonomisch zweckmäßigsten Werkstoffs für jeden Anwendungsfall ist ein wesentlicher Beitrag für eine hohe *Materialökonomie.*
Jedes Bauteil einer Maschine, eines Aggregats oder einer Anlage hat eine oder mehrere genau bestimmte Funktionen zu erfüllen, die neben den Umweltbedingungen bei seinem Einsatz und seiner werkstoffgerechten Herstellung eine Reihe von Forderungen bezüglich bestimmter Werkstoffeigenschaften und -kennwerte stellen (z. B. Zug-, Druck-, Biege-, Scher-, Dauerfestigkeit, Korrosionsbeständigkeit, elektrische Leitfähigkeit). Die geforderten Eigenschaften und Kennwerte werden in den meisten Fällen bei mehr als einem Werkstoff vorhanden sein. Es sind solche Werkstoffe zu bevorzugen, deren Eigenschaften bei der Funktion des Bauteils weitestgehend ausgenutzt werden. Die in Frage kommenden Werkstoffe sind hinsichtlich ihrer Verfügbarkeit und Kosten sowohl für Beschaffung als auch Herstellung des Bauteils zu vergleichen, wobei eine möglichst wenig arbeitsintensive Herstellung anzustreben ist. Dadurch wird die Auswahl der geeignetsten Werkstoffe ermöglicht.
Beim Einsatz hochwertiger und teurer Werkstoffe ist zu prüfen, ob das entsprechende Bauteil völlig aus diesem Werkstoff hergestellt werden muß oder ob durch eine *Funktionsteilung,* z. B. auf zwei Werkstoffe, ein Teil hochwertigen Werkstoffs substituiert werden kann.

Beispiel. Eine hochbeanspruchte Lagerbuchse benötigt zur Gewährleistung von Gleitfähigkeit und Notlaufeigenschaft einen Bronzewerkstoff. Die genannten Eigenschaften sind aber nur an der Innenseite der Buchse erforderlich. Die notwendige Festigkeit und die Wärmeleitfähigkeit können durch einen billigeren Werkstoff, z. B. Stahl, verwirklicht werden. Der Stahl muß nur für den aufzubringenden Bronzebelag genügend Haftfestigkeit besitzen. Das Ergebnis ist dann eine Lagerbuchse aus Stahl mit niedrigem Kohlenstoffgehalt und einem in das Innere der Buchse eingegossenen dünnen Bronzebelag, ein *Verbundlager.* Gegenüber der Vollausführung der Lagerbuchse aus Bronze läßt sich durch die Anwendung des Verbundlagers der überwiegende Teil der Bronze einsparen (*Teilsubstitution*).

Die Umstellung von wenig verfügbaren oder teuren Werkstoffen auf reichlich verfügbare und billigere oder auf technisch geeignetere Werkstoffe heißt *Substitution.* Erfolgt diese Umstellung bei Bauteilen von bereits in Produktion befindlichen Erzeugnissen, wird von *sichtbarer Substitution* gesprochen. Wird der neue Werkstoff von vornherein im Projektierungs-, Entwicklungs- und Konstruktionsstadium eingesetzt, wird dies *verdeckte Substitution* genannt. Der Anteil der verdeckten Substitution an der Gesamtsubstitution beträgt etwa 80%.
Zielstellung der Substitution ist die Herausbildung einer optimalen *Materialverbrauchsstruktur* auf der Basis der vorhandenen Rohstoffressourcen, d. h., das vorhandene Werkstoffaufkommen ist nach größter volkswirtschaftlicher Effektivität einzusetzen. Dazu ist es erforderlich, *silikatische Werkstoffe* (besonders Glas) bis zur maximalen Einsatzmöglichkeit zu nutzen, metallische Werkstoffe nur soweit wie unbedingt erforderlich einzusetzen und organische Werkstoffe für das verbleibende Einsatzspektrum anzuwenden.

In der Entwicklung der Werkstoffverbrauchsstruktur der DDR soll unter Berücksichtigung ihrer Rohstoffressourcen der Anteil der Eisenwerkstoffe von 1970 bis 1990 um etwa 28% gesenkt, im gleichen Zeitraum jedoch der Anteil von Glas mehr als verdoppelt und der Anteil von Plasten etwa verfünffacht werden.

Zur Erreichung des Ziels der Substitution, der *Senkung der Kosten* für die Finalerzeugnisse sowie für die Gebrauchswerteinheit, ist die Optimierung in Wechselbeziehung stehender Einflüsse und Wirkungen erforderlich, so u. a. die Wahl des Arbeits- und Konstruktionsprinzips sowie des Werkstoffs nach geforderter Eigenschaft, Verfügbarkeit und Preis und die Wahl der Herstellungstechnologie, womit Änderungen der technologischen Ausrüstung, des Mechanisierungs- und Automatisierungsgrads der Produktion, der Materialökonomie, der Arbeitsproduktivität und des Produktionsumfangs verbunden sind. Die Möglichkeiten wiederholt verwendbarer Bauteile sind zum Erreichen ausreichender Stückzahlen für eine ökonomische Fertigung stärker zu nutzen. Das zwingt zu stärkerer Vereinheitlichung und Standardisierung.

Tabelle 1. Ausgewählte Beispiele für Werkstoffsubstitution und Einsparung von Metallen

Zu substituierende Metalle und Legierungen	Substitution*)
Blei	Plaste für Rohre, Auskleidungen, Kabelummantelungen (S); Beton oder Gußeisen für Gegengewichte (S); Salzbäder statt Bleibäder (S); Klinker für Auskleidungen von Schwelöfen (S)
Bleilagermetalle	Gußeisen mit Plast (S); Zink (S); Sintermetalle (S); Stahlrollenlager (S); Leichtmetallguß (S)
Kupfer	Hohlprofile anstelle von Vollprofilen in der Elektrotechnik (Skineffekt) (M); Kupferplattierung auf Aluminium bei Kontakten (TS); Aluminium, Stahl, Plaste (S)
Bronze	Gußeisen für Kugelstützlager (S); Stahl mit Bronze für Lager (TS); Zink-Aluminium-Guß für Lager (S); Stahl mit Weißmetall (TS); Stahl mit Sondermessing (TS)
Rotguß	Gußeisen für Kugelstützlager (S); Leichtmetallguß für Lager (S); Gußeisen mit Rotguß (TS); Sondergußeisen (S); Stahl mit Sondermessing (TS)
Messing	Zink z. B. für Glühlampensockel (TS); Porzellan für Armaturen (S)
Zinn und Zinnlegierungen	Kadmiumzusatz in Loten verringert Zinnanteil (TS); Aluminiumfolie (S); verzinktes Stahlblech (S); Zinkdruckguß für Zinndruckguß (S)
Stahl	Plaste für Behälter, Rohre, Maschinenabdeckungen, Maschinenelemente (S); Glas (S)
Nickel und Nickellegierungen	Chrom- und Zinküberzüge (S); Stähle mit etwa 30% Chrom für Mittelelektroden in Zündkerzen (S)
Silberlote	niedrigsilberhaltige Lote für hochsilberhaltige (TS); Messinglot für niedrigsilberhaltige Lote (S)
Galvanische Überzüge aus Cu, Ni, Cr	Plastbeschichtung durch Anstrich, Wirbelsintern, Spritzen oder Tauchen (S)

*) M mengenmäßige Einsparung, S Substitution, TS Teilsubstitution

Der Substitutionsprozeß erfordert eine enge Zusammenarbeit zwischen den Werkstoffherstellern und -anwendern, insbesondere Werkstoffeinsatzberatung und koordinierende Zusammenarbeit*).

Maßstäbe für die Substitution in der verarbeitenden Industrie sind: optimale Substitution hochwertiger Metallsortimente (verbunden mit hoher Kostensenkung je Gebrauchswerteinheit der Erzeugnisse), hoher Automatisierungsgrad der Fertigung und Exportfähigkeit der Erzeugnisse.
Die Tabelle 1 gibt als Anregung ausgewählte Beispiele für Werkstoffsubstitutionen, die bereits angewendet werden, wieder. Bei der Werkstoffsubstitution bereits vorhandener oder projektierter Bauteile ist zu beachten, daß hinsichtlich der Querschnittsbemessung und der Formgebung den Eigenschaften des neuen Werkstoffs voll Rechnung getragen werden muß. Das gilt besonders bei der Anwendung von Plasten, bei denen aus Gründen der Festigkeit im Durchschnitt mit einer *Verdopplung der Querschnitte* zu rechnen ist (siehe auch Tabelle 2).

*) Diesem Zweck dient in der DDR das „*System der komplexen Werkstoffeinsatzberatung*", dessen wesentliche Einrichtungen sind: der Beirat für ökonomischen Werkstoffeinsatz beim Ministerium für Materialwirtschaft, das Informationszentrum beim Institut für Leichtbau und ökonomische Verwendung von Werkstoffen, die zentralen Beratungsstellen der Herstellerindustrie einschließlich anwendungstechnischer Abteilungen und Kundendienste der Kombinate und Betriebe, die zentrale Beratungsstelle der verarbeitenden Industrie und wissenschaftliche Einrichtungen der Werkstofforschung.

Tabelle 2. Ausgewählte Beispiele für die Substitution durch Plastwerkstoffe

Anwendungsgebiete	Anwendungsbeispiele
Bauwesen	*Armaturen:* St/PVC-h; *Badewannen, Sanitärarmaturen:* GG, BM/ABS, GFP, PA, PMMA, PP; *Rohre und Verbindungsteile:* St, ESt, BM/PA, PE, PP, PVC
Chemische Industrie	*Auskleidungen von Behältern und Rohrleitungen:* Pb/NBR, PTFE, PVC-w; *Behälter:* St, ESt/GFP; *Säurepumpen:* GS-X, Ti/EP
Elektrotechnik	*Druckgußteile:* GD-Al/ABS; *Zahnräder, Schneckenräder, Schnecken, Spindeln:* St, BM/PA, POM, PUR
Fahrzeugbau	*Armaturen:* GG, BM/PC, PP; *Behälter:* Ms/PE, PP; *Korrosionsschutzschichten an Konstruktionsteilen*/CAB, PUR; *Lüfterräder:* GD-AlSiCu/PA; *Pumpen:* Al, St/ABS; *Verkleidungen:* G-Al/PP
Feinmechanik	*Armaturen, Präzisionsteile:* St, BM/POM
Konsumgüterindustrie	*Gehäuse:* St, ESt/SAN, PP; *Haushaltsgegenstände:* St, BM, Al/PC, PE-HD, POM, PS-SZ
Landmaschinenbau	*Düsenverteiler:* Al, Ms/PA; *Füllsiebe:* St, Ms/PA; *Lagerbuchsen:* G-CuPb/Hgw; *Stützräder:* GGL/PA; *Teile von Melkanlagen:* Al/PA, PF
Luft- und Kältetechnik	*Absaugkanäle:* St, ESt/GFP, PVC, SAN; *Lüfterflügel:* St/PVC-h; *Lüfterräder:* St, GS/ABS, PA, PC, PP, PVC-h
Maschinenbau	*Gleitlager:* BM, Bz/PA, POM; *Kolbenringe:* GG/PTFE; *Auflager:* GG, BM/PTFE; *Verkleidungsteile:* St, GG/GFP, PS, PVC
Wasserwirtschaft	*Rohre für Trinkwasserleitungen:* St, Pb/PE-HD, PVC-h; *Rohre, Fittings, Kaltwasserinstallation:* St, GG, Al, Pb/PE-ND, PVC-h

Erläuterung: Das zu substituierende Metall steht jeweils vor dem Schrägstrich, die dafür angewendeten Plaste stehen dahinter.

Die Kurzzeichen bedeuten:

Al Aluminium, **BM** Buntmetall, **Bz** Bronze, **ESt** Edelstahl, **G-Al** Guß-Aluminium, **G-CuPb** Guß-Bleibronze, **GD-Al** Aluminium-Druckguß, **GD-AlSiCu** Aluminium-Druckguß-Legierung mit Si und Cu, **GG** Gußeisen, **GGL** laminares Gußeisen, **GS-X** hochlegierter Stahlguß, **Ms** Messing, **Pb** Blei, **St** Stahl, **Ti** Titan
ABS Akrylnitril-Butadien-Styrol-Kopolymere, **CAB** Zelluloseazetobutyrat, **EP** Epoxidharz, **GFP** glasfaserverstärkte Plaste, **Hgw** Hartgewebe, **NBR** Butadien-Akrylnitril-Elastomere, **PA** Polyamid, **PC** Polykarbonat, **PE** Polyäthylen, **PE-HD** Polyäthylen — hohe Dichte, **PE-ND** Polyäthylen — niedere Dichte, **PF** Phenolformaldehydkondensat, **PMMA** Polymethylmethakrylat, **POM** Polyoxymethylen, **PP** Polypropylen, **PS** Polystyrol, **PS-SZ** Polystyrol — schlagfest, **PTFE** Polytetrafluoräthylen, **PUR** Polyurethan, **PVC** Polyvinylchlorid, **PVC-h** Polyvinylchlorid — weichmacherfrei, **PVC-w** Polyvinylchlorid — weich, **SAN** Styrol-Akrylnitril-Kopolymere, **GS** Stahlguß

Auch mit gutem Wissen über die grundsätzlichen Eigenschaften und das Verhalten der Werkstoffe, das für jeden Konstrukteur und Technologen zumindest an seinem Arbeitsplatz notwendig ist, ist bei der ständig wachsenden Anzahl der zur Verfügung gestellten Werkstoffe die Bestimmung des technisch und ökonomisch zweckmäßigsten Werkstoffs für jeden Einzelfall kaum mehr ohne zusätzliche Hilfestellung möglich*).

*) Eine wertvolle Hilfe bietet in ständig zunehmendem Maße das „Informationssystem für Werkstoffkennwerte und ökonomischen Materialeinsatz (ISW)", dessen Informationszentrum am Institut für Leichtbau und ökonomische Verwendung von Werkstoffen (IfL) in Dresden eingerichtet wurde. Das ISW verfügt bereits über mehr als 900000 Werkstoffkennwerte (vor allem von Plasten und Metallen). Es gibt rechnergestützt Auskünfte bis hin zur Lösung von Werkstoffsuchproblemen. Das ISW arbeitet im Zuge der sich vertiefenden sozialistischen ökonomischen Integration der Länder des RGW mit dem „Einheitlichen System des RGW für Standard-Richtwerte für Stoffe und Werkstoffe (SSSD-RGW)" zusammen.

Ein Vorteil des Einsatzes von Plasten gegenüber dem der Metalle ist unter Beachtung ökonomischer Parameter und ausreichender Stückzahlen die Möglichkeit der Herstellung von Fertigteilen in einem Arbeitsgang durch hochproduktive kontinuierliche Verfahren, wodurch eine Verminderung des Arbeitsaufwands um teilweise 50% gegenüber der Herstellung aus metallischen Werkstoffen erreichbar ist. Die Materialausnutzung liegt bei Plastwerkstoffen im Durchschnitt bei etwa 95%, also wesentlich höher als bei Metallen.

1.5. Stoffwirtschaft

Ein weiterer Beitrag für eine hohe Materialökonomie ist die *Rückführung von Schrott* (vor allem von Buntmetallen) zur Wiederverwendung. Dazu wird der anfallende Schrott sortengerecht und möglichst rein gesammelt und der Herstellung neuer Werkstoffe zugeführt [15, 16]*).

2. Metallische Werkstoffe

Literatur: [6, 8, 11, 26, 28, 30, 31, 32, 38, 45, 49, 50, 51, 69, 76]

2.1. Allgemeines

2.1.1. Grundbegriffe

Vor etwa siebentausend Jahren wurde das *Metall* Gold erstmalig zur Herstellung von Geräten und Schmuck verwandt. Seit dieser Zeit gewannen Metalle immer mehr an Bedeutung und bestimmten als wesentlicher Faktor die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und Technik mit.
Bei aller Vielseitigkeit der Eigenschaften und Verwendungsmöglichkeiten gibt es doch eine ganze Anzahl von Erscheinungen, die sich für alle Metalle verallgemeinern lassen und die die allgemeine Metallkunde mit Hilfe physikalischer und chemischer Arbeitsmethoden ergründet und zu allgemeingültigen Regeln zusammenfaßt.
Die *Metallkunde* ist die Lehre von der stofflichen Struktur und den Eigenschaften der Metalle und Legierungen.

Kennzeichnende Eigenschaften von Metallen

Die typischen metallischen Eigenschaften werden durch die Art der *chemischen Bindung* (*Metallbindung*) und die daraus resultierende *Kristallgitterstruktur* bestimmt.
Charakteristisch für sämtliche Metalle sind Glanz, Lichtundurchlässigkeit (bei ganz geringer Dicke durchscheinend), hohe Festigkeit (auch bei hohen und tiefen Temperaturen), hohe Leitfähigkeit für elektrischen Strom und Wärme, Verfestigungsvermögen sowie die mannigfachen Verarbeitungsmöglichkeiten (bildsame Formbarkeit, Zerspanbarkeit, Schweißbarkeit). Die wichtigsten physikalischen Daten der Metalle enthält Tabelle 3**).

Die außerordentliche Variationsbreite der Eigenschaften metallischer Stoffe erreicht man durch Veränderungen der chemischen Zusammensetzung oder/und durch Beeinflussung der realen Gitterstruktur (z. B. Legieren, Wärmebehandlung, Verformen, Bestrahlen).
Technische Verwendbarkeit. Nicht alle der etwa 70 Metalle des Periodensystems sind als technische Werkstoffe verwendbar. Dazu müssen sie in genügendem Maße verfügbar, wirtschaftlich zu gewinnen und zu verarbeiten, ausreichend beständig und genügend fest sein. Je nach Strenge der Auswahl bleiben dann noch etwa 20 Metalle übrig, von denen

als *Grundmetalle:* Fe, Al, Cu, Mg, Ni, Zn, Sn, Pb, W und Ti
und als *Legierungsmetalle:* Cr, Mn, Co, Cd, V und Mo

besonders wichtig sind. Allerdings haben seit einiger Zeit auch Metalle technische Bedeutung erlangt, die früher wegen der schwierigen Gewinnung bzw. Verarbeitung oder wegen ihrer Seltenheit nur theoretisches Interesse fanden, z. B. Zr, Ta und Be.

*) Nahezu 75% der Stahlproduktion der DDR basieren auf dem Sekundärrohstoff Stahlschrott.
**) Chemische Eigenschaften siehe Abschn. CHEMIE

Tabelle 3. Wichtigste physikalische Kennwerte der Metalle

Benennung	Symbol	Elastizitätsmodul E in GPa	Schub- oder Gleitmodul G in GPa	Linearer Ausdehnungskoeffizient α bei 20 °C in 10^{-6} K^{-1}	Spezifischer elektrischer Widerstand ϱ bei 20 °C in 10^{-6} $\Omega \cdot$ m	Elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$ bei 20 °C in 10^{6} S/m	Temperaturkoeffizient des Widerstands α_W in 10^{-3} K^{-1}	Wärmeleitfähigkeit λ in 10^{2} W/(m · K)	Spezifische Wärmekapazität c_p bei 20 °C in kJ/(kg · K)
Aluminium	Al	72,2	27,2	23,9	0,027	37,6	4,67	2,11	0,896
Antimon	Sb	56	20	10,5	0,39	2,56	5,4	0,20	0,21
Arsen	As	—	—	—	0,35	2,86	—	—	0,33
Barium	Ba	9,8	5	≈ 19	—	—	—	—	0,28
Beryllium	Be	292,8	135	10,6	0,059	16,9	10	1,59	1,75
Blei	Pb	16	5,7	28,3	0,206	4,82	4,22	0,35	0,129
Chrom	Cr	190	73	8,2	0,13	6,7	—	0,67	0,44
Eisen	Fe	215,5	83,8	11,7	0,098	10,3	6,57	0,04	0,452
Gallium	Ga	10	4,3	58	0,534	1,87	—	—	0,38
Germanium	Ge	80	30	≈ 6	≈ 890	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	> 0	—	0,31
Gold	Au	79	28,2	14,2	0,020	45,7	3,98	3,11	0,124
Hafnium	Hf	85	31	≈ 9	—	—	—	—	0,13
Indium	In	10,7	3,8	44	0,084	12,0	5,1	0,23	0,24
Iridium	Ir	538,3	214	6,8	0,053	18,9	4,11	0,59	0,134
Kadmium	Cd	63,5	24,6	30,8	0,068	14,6	4,26	0,92	0,23
Kalium	K	3,6	1,3	84	0,062	15,9	5,7	0,98	0,74
Kalzium	Ca	20	7,5	22	0,034	29,2	3,8	1,25	0,65
Kobalt	Co	212,8	76,3	12,3	0,062	16,1	6,58	0,69	0,39
Kupfer	Cu	125	46,4	16,2	0,017	60	4,31	3,84	0,383
Lanthan	La	38,2	15	≈ 13	0,59	1,69	—	—	0,19
Lithium	Li	11,7	4,3	58	0,086	11,8	4,35	0,71	3,39
Magnesium	Mg	45,2	17,7	26	0,045	22,2	4,2	1,57	1,02
Mangan	Mn	201,6	78	23	1,85	0,54	—	—	0,486
Molybdän	Mo	336,3	122	5	0,052	19,4	4,73	1,46	0,251
Natrium	Na	9,1	3,4	72	0,042	23,8	5,5	1,38	0,12
Nickel	Ni	197	75	13,3	0,068	14,6	6,75	0,92	0,446
Niob	Nb	160	60	7,0	0,131	7,7	—	—	0,27
Osmium	Os	570	228	4,6	0,095	10,4	4,45	—	0,13
Palladium	Pa	123,6	44,5	11,8	0,108	9,26	3,77	0,71	0,24
Platin	Pt	173,2	62,2	8,9	0,105	9,5	3,92	0,70	0,133
Quecksilber	Hg	—	—	—	0,941	1,06	—	0,10	0,14
Rhenium	Re	530	210	—	—	—	4,63	—	0,13
Rubidium	Rb	2,4	—	90	0,125	8,6	4,8	—	0,33
Ruthenium	Ru	440	176	9,1	0,076	13,2	—	—	0,24
Silber	Ag	81,6	294	19	0,016	63	4,1	4,55	0,234
Silizium	Si	15	4,1	≈ 7	10^{3}	10^{-3}	> 0	0,84	0,70
Strontium	Sr	16	6,2	≈ 20	0,23	4,35	3,5	—	0,74
Tantal	Ta	182,2	70	6,6	0,124	8,1	3,47	0,54	0,14
Thallium	Tl	8,1	2,8	29	0,18	5,56	5,2	0,39	0,13
Thorium	Th	79,7	31,6	11,1	0,19	5,8	—	—	0,14
Titan	Ti	105,2	38,7	≈ 10	0,80	1,25	5,46	—	0,61
Uran	U	120	40	—	0,60	1,67	—	0,27	0,11
Vanadin	V	150	55	8,5	0,26	3,84	—	—	0,50
Wismut	Bi	34,8	13,1	12,4	1,068	0,94	4,45	0,07	0,123
Wolfram	W	415,7	151,4	4,3	0,055	18,2	4,82	1,59	0,134
Zäsium	Cs	1,8	—	97	0,188	5,6	5,0	—	0,22
Zink	Zn	94	37,9	29,8	0,059	16,9	4,2	1,08	0,385
Zinn	Sn	55	20,6	20,5	0,115	8,7	4,63	0,64	0,226
Zirkonium	Zr	69,7	25,4	10	0,41	2,44	4,4	—	0,28

*) *Abkürzungen der Gittertypen: k* kubisch, *kfz* kubisch flächenzentriert, *krz* kubisch raumzentriert, *rhd* rhomboedrisch, *orf* orthorhombisch flächenzentriert

Schmelzwärme (spezifische Wärmemenge) q in kJ/kg	Schmelzpunkt t_{sm} in °C	Siedepunkt t_{sd} in °C	Gitterkonstante a (b) in 10^{-1} nm	Gitterkonstante c in 10^{-1} nm bzw. Achsenwinkel in °	Gittertyp*) (Allotropie hier unberücksichtigt)	Atomradius r in 10^{-1} nm	Atomvolumen V_A in 10^{-6} m³/mol	Relative Atommasse A_r, molare Masse M in kg/kmol	Dichte ϱ in 10^3 kg/m³	Symbol
388	660,1	2447	4,041	—	kfz	1,430	9,99	26,98	2,70	Al
163	630,5	1637	4,501	57° 5′	rh	1,461	18,4	121,75	6,68	Sb
—	—	—	4,123	54° 10′	rh	1,25	13,1	74,92	5,78	As
56,6	710	1637	5,015 (20 °C)	—	krz	2,174	39	137,34	3,65	Ba
1089	1283	2477	2,268	3,594	hdP	1,113	4,96	9,01	1,85	Be
23,9	327,4	1751	4,941	—	kfz	1,749	18,27	207,19	11,34	Pb
317	1903	2642	2,878	—	krz	1,248	7,23	≈ 52	7,19	Cr
272	1535	2800	2,861	—	krz	1,240	7,1	55,85	7,89	Fe
80,5	29,8	2227	4,516 (4,510)	7,645	orf	2 · 1,220	11,8	69,72	5,91	Ga
423	937,2	2830	5,647	—	kD	1,224	13,5	72,69	5,32	Ge
62,8	1063	2700	4,070	—	kfz	1,442	10,2	196,97	19,30	Au
—	2222	5200	3,200	5,077	hdP	1,57	15,7	178,49	13,30	Hf
28,5	156,2	2047	4,583	4,936	tfz	1,62	15,7	114,82	7,31	In
—	2454,3	> 4800	3,823	—	kfz	1,356	8,58	192,2	22,50	Ir
57,0	320,9	765	2,973	5,606	hdP	1,489	13,0	112,40	8,64	Cd
25,7	63,2	754	5,333	—	krz	2,314	45	39,1	0,85	K
216,5	850,0	1485	5,56	—	kfz	1,969	25,9	40,08	1,54	Ca
258,5	1495,0	2880	2,514	4,105	hdP	1,252	6,6	58,93	8,83	Co
204,5	1083,0	2360	3,608	—	kfz	1,277	7,09	63,54	8,96	Cu
—	920,0	3370	3,72 (18 °C)	6,06	hdP	1,868	22,6	138,91	6,16	La
415	180	1317	3,46 (−173 °C)	—	krz	1,519	13	6,94	0,63	Li
344	649,5	1120	3,203	5,196	hdP	1,598	14	24,31	1,74	Mg
248,5	1244,0	2095	8,894	—	k	1,598	7,39	54,94	7,21	Mn
293	2622,0	4800	3,140	—	krz	1,362	9,41	95,94	10,2	Mo
115	97,8	890	4,30 (18 °C)	—	krz	1,858	24	22,99	0,97	Na
302,5	1455,0	2800	2,66	4,29	hdP	1,245	6,59	58,71	8,90	Ni
—	2487	4900	3,03	—	krz	1,429	10,8	92,91	8,58	Nb
—	2700	—	2,724	4,314	hdP	1,337	8,46	190,2	22,5	Os
143,5	1555,0	3560	3,879	—	kfz	1,375	8,89	106,4	12,0	Pa
113	1769,0	4410	3,914	—	kfz	1,386	9,10	195,09	21,45	Pt
11,7	−38,9	357	2,997 (−48 °C)	70° 31,7′	rhd	1,502	14,81	200,59	13,55	Hg
—	3180	5600	2,765	4,470	hdP	1,369	9,3	186,2	20,9	Re
25,6	38,7	701	5,62	—	krz	2,440	55,9	85,47	1,53	Rb
—	2500	—	2,695	4,273	hdP	1,324	8,33	101,1	12,3	Ru
104,5	960,8	2212	4,078	—	kfz	1,443	10,28	107,87	10,50	Ag
1655	1412,0	2477	5,417	—	kD	1,175	12	28,09	2,33	Si
105	770,0	1367	6,075	—	kfz	2,154	34	87,62	2,63	Sr
—	2996	5400	3,296	—	krz	1,429	10,9	180,95	16,69	Ta
20,9	303,5	1457	3,450	5,520	hdP	1,70	17,24	204,37	11,85	Tl
—	1695	4200	5,074	—	kfz	1,798	20,2	232,04	11,7	Th
—	1668	3280	2,951	4,692	hdP	1,457	10,6	47,90	4,50	Ti
—	1133	3900	2,852 (5,865)	4,945	rh	1,38	12,7	238,03	18,9	U
—	1730	3380	3,034	—	krz	1,316	8,5	50,94	5,98	V
52	271,3	1559	4,749	57° 16′	rhd	1,555	21,3	208,98	9,80	Bi
184	3387	5530	5,038	—	krz	1,369	9,53	183,85	19,3	W
1575	28,6	685	6,05 (−173 °C)	—	krz	2,625	70	132,91	1,89	Cs
112,5	419,5	907	2,659	4,937	hdP	1,331	9,17	65,37	7,14	Zn
59,0	231,9	2687	6,46	—	kD	1,511	16,26	118,69	7,28	Sn
—	1855,0	4380	3,229	5,123	hdP	1,583	14	91,22	6,52	Zr

hdP hexagonal dichteste Packung, *kD* Diamantgitter, *tfz* tetragonal flächenzentriert, *rh* rhombisch

Vorkommen und Darstellung der Metalle

Rein (gediegen) gefunden werden Edelmetalle, Kupfer und Meteoreisen. Alle übrigen Metalle sind nur als chemische Verbindungen anzutreffen, wobei oxidische und sulfidische *Erze* überwiegen*). Die Häufigkeit und Mächtigkeit der Lagerstätten ist mit entscheidend für die Verwendbarkeit der Metalle und die Abbauwürdigkeit (Fe ≈ 28%, Sn ≈ 1%, Au ≈ 0,001%) ihrer Erze.
Die Gebrauchsmetalle kommen am häufigsten als Oxid- und Sulfiderze vor, die überwiegend durch Stoffe reduziert werden, die eine höhere Affinität zum Begleitelement als das Metall selbst haben. Solche Stoffe sind z. B. Kohlenstoff (Hochofenprozeß) und Aluminium (aluminothermische Reduktion). Die Fähigkeit der Metalle, mit Säuren Salze zu bilden, benutzt man fast ebenso häufig, um mittels Elektrolyse aus Metallsalzlösungen das zu gewinnende Metall chemisch rein an der Katode abzuscheiden*).

Wie Hochofenprozeß und Elektrolyse zeigen, ist das Ergebnis von den Verfahren und den Ausgangsstoffen abhängig. Beim Hochofenprozeß und verschiedenen anderen Verfahren gelingt es nicht vollständig, das Metall von den Beimengungen (Tabelle 4) zu trennen. Der *Reinheitsgrad* der Metalle bestimmt wesentlich ihre Eigenschaften. Durch ausgeklügelte Methoden gelingt es, den Reinheitsgrad immer weiter zu erhöhen, und an solchen Metallen stellt man oft neuartige Eigenschaften fest (z. B. besonders hohe Korrosionsbeständigkeit bei Reinst-Al oder gute Duktilität bei Reinst-Cr).

Tabelle 4. Häufig in Erzen zusätzlich vorkommende Metalle

Erze	Beimengungen																			
	C	Si	Mn	P	S	O	Ni	As	Pb	Ag	Fe	Co	Cu	Cd	Sn	Zn	Bi	Sb	Al	Mg
Aluminium-		×									×		×							×
Blei-							×	×		×	×		×				×	×		
Eisen-	×	×	×	×	×	×							×							
Kupfer-					×	×	×	×	×	×	×									
Magnesium-		×														×				
Nickel-	×		×		×	×						×	×							
Zink-									×		×			×	×					
Zinn-					×				×	×			×							

Einteilung der Metalle

In der Werkstofftechnik sind verschiedene Gesichtspunkte für die Einteilung gebräuchlich:

- nach dem *Schmelzpunkt* in niedrigschmelzende (bis 700 °C, z. B. Pb, Sn), hochschmelzende (700···2000 °C, z. B. Mn, Ni) und höchstschmelzende Metalle (ab 2000 °C, z. B. W, Mo);
- nach der *chemischen Beständigkeit* in Edelmetalle (z. B. Au, Ag, Pt) und unedle Metalle (alle übrigen Metalle);
- nach der *Dichte* in Leichtmetalle (z. B. Al, Mg, Ti, Be) und Schwermetalle (z. B. Zn, Sn, Fe, Ni, Cu, Pb);
- nach der *Farbe* in Schwarzmetalle (z. B. Fe, Mn, Ni, Co), Buntmetalle (z. B. Cu und Cu-Legierungen) und Weißmetalle (z. B. Sn, Sb, Pb und deren Legierungen).

Legierungen

Die Verwendung *reiner Metalle* bleibt auf Spezialfälle beschränkt. Durch Mischen und gemeinsames Erstarren von verschiedenen metallischen oder metallischen und nichtmetallischen Stoffen erhält man *Legierungen*, deren Eigenschaften durch Variieren der Komponenten den wechselnden Ansprüchen der Praxis angepaßt werden können. So wird beispielsweise Eisen durch Zusatz von Kohlenstoff härtbar, durch Zusatz von Chrom oder Nickel korrosionsbeständig, Blei durch Zusatz von Antimon hart usw. Durch Legieren werden somit Stoffe

*) Einzelheiten siehe Abschn. CHEMIE

mit Eigenschaften geschaffen, die die Komponenten überhaupt nicht oder nur unvollkommen aufweisen. Dadurch erklärt sich auch die weitverbreitete Verwendung von Legierungen in der technischen Praxis.

Der Vielfalt der Anforderungen werden eine große Anzahl von Legierungen gerecht, die oft gleiche oder ähnliche Eigenschaften haben, so daß eine sinnvolle und zweckentsprechende Standardisierung notwendig wurde.

2.1.2. Kristalline Struktur der Metalle

2.1.2.1. Festkörper Metall

Im physikalischen Sinne sind Metalle sogenannte echte Festkörper, d. h., bei der *Metallbindung* existiert eine bestimmte, regelmäßige Anordnung der Ionen*). Diesen geordneten Verband, in dem sich die Ionenabstände periodisch im Raum wiederholen, nennt man *Kristall*. Mit Röntgenstrahlen sind Kristallstrukturen nachweisbar (*Röntgenfeinstrukturanalyse*).

Unterscheide:

a) Idealkristall (nur Modellvorstellung!)
b) Realkristall (diese Betrachtungsweise berücksichtigt die für viele Eigenschaften bestimmende Existenz von Gitterbaufehlern)

Zur Beschreibung der Realstruktur wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

2.1.2.2. Gittertypen

Beim Erstarren aus der Schmelze ordnen sich die Metallatome im dreidimensionalen *Raumgitter* an. Sie sind bestrebt, sich möglichst bis zur gegenseitigen Berührung zu nähern (dichteste Kugelpackung) (Bild 1). Je nach der räumlichen Anordnung der Metallatome unterscheidet

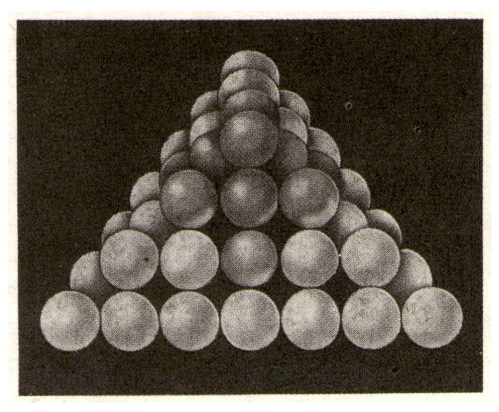


Bild 1. Kugelmodell einer dichtgepackten Atomanordnung (kfz-Elementarzelle hervorgehoben)

man verschiedene Gitterformen (Gittertypen). Die wichtigsten sind das *hexagonale* (h), das *kubisch-flächenzentrierte* (kfz) und das *kubisch-raumzentrierte* (krz) *Gitter* (Tafel 1).
Die unmittelbar benachbarten Gitterbausteine bilden eine *Elementarzelle* (Bild 2). Im Kristall weisen die Gitterbausteine gleiche Anordnung in gleichen Richtungen auf. Nicht die äußere Form (regelmäßige Flächen und Winkel), sondern die Gesetzmäßigkeit des inneren Aufbaus ist das Kennzeichen eines Kristalls.

*) In weiteren Darlegungen wird vereinfachend von *Atomen* gesprochen.

Tafel 1. Wichtigste Kristallgittertypen der Metalle

System	Achsen	Elementarzelle	Kristallform	Stoff	Gitterkonstante λ in 10^{-1} nm a	c	Bemerkungen
Kubisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$		raumzentriert	Würfel, Tetraeder, Oktaeder	Li	3,5		die drei senkrecht zueinander stehenden Achsen sind gleichwertig
				Na	4,28		
				K	5,33		
				V	3,03		
				α-Cr	2,88		
				α-Fe	2,86		
				Mo	3,14		
				W	3,16		
				Ta	3,29		
		flächenzentriert	Rhombendodekaeder, Pentagondodekaeder	Ni	3,50		
				Co	3,56		
				Cu	3,61		
				γ-Fe	3,65		
				Pd	3,87		
				Pt	3,9		
				Al	4,04		
				Au	4,07		
				Ag	4,08		
				Pb	4,9		
Tetragonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$			Tetragonales Prisma, Pyramide, Dipyramide	β-Sn	5,83	3,18	zwei von den senkrecht zueinander stehenden Achsen sind gleichwertig
				γ-Mn	3,77	3,53	
Hexagonal $a_1 = a_2 = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 120°$ $\alpha' = \beta' = \gamma' = 90°$			hexagonales Prisma, Pyramide, Dipyramide	α-Ni	2,49	4,08	in der Basisebene liegen drei gleichwertige Achsen, zu ihnen steht die nicht gleichwertige Achse senkrecht
				α-Co	2,51	4,07	
				Zn	2,66	2,94	
				Cd	2,07	5,62	
				Mg	3,2	5,2	
				Be	2,28	3,58	
				Ti	2,95	4,73	
				β-Cr	2,72	4,72	

Zur vollständigen Beschreibung eines Raumgitters gehören der Schwerpunktabstand der Gitterbausteine innerhalb der Elementarzelle (*Gitterkonstante*), die *Achsenwinkel*, die *Anzahl der Atome* (pro Elementarzelle) und die *Koordinationszahl*, die der Beschreibung der Packungsdichte dient.

Anisotropie ist eine charakteristische Eigenschaft der Kristalle, die auf dem inneren Aufbau beruht. Sie besagt, daß die physikalischen, chemischen und mechanischen Eigenschaften eines Kristalls (z. B. Leitfähigkeit, Korrosionswiderstand, Verformbarkeit) von der Richtung innerhalb des Kristalls, in der sie gemessen werden, abhängen.

Allotrope Modifikationen. Im festen Zustand sind Metalle stets kristallin; das Raumgitter löst sich erst beim Übergang in den flüssigen Zustand auf. Manche Metalle jedoch zeigen in verschiedenen Temperaturbereichen unterschiedliche Gitterformen; bei einer bestimmten Temperatur wandelt sich ein Raumgitter in das andere um. Solche Metalle nennt man *allotrop* (Tabelle 5).



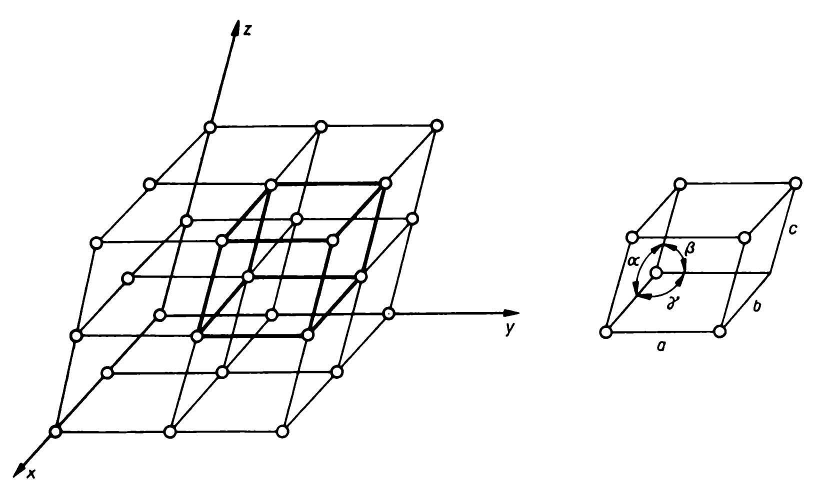


Bild 2. Triklines Raumgitter mit eingezeichneter Elementarzelle. Rechts: Elementarzelle mit Achsenwinkeln und Gitterkonstanten

Tabelle 5. Allotrope Metalle

Modifikation des Metalls	Gitterbau	Beständig im Temperaturbereich in °C
α-Sn	kubisch (Diamantgitter)	< 18
β-Sn	tetragonal	18 ··· 161
γ-Sn	rhombisch	161 ··· 232
β-Co	hexagonal (dichteste Packung)	< 430
α-Co	kubisch-flächenzentriert	430 ··· 1 490
α-Mn	kubisch, 58 Atome	< 700
β-Mn	kubisch, 20 Atome	700 ··· 1 079
γ-Mn	tetragonal-flächenzentriert	1 079 ··· 1 143
δ-Mn	kubisch-raumzentriert	1 143 ··· 1 245
α-Zr	hexagonal (dichteste Packung)	< 862
β-Zr	kubisch-raumzentriert	862 ··· 1 857
α-Ti	hexagonal (dichteste Packung)	< 880
β-Ti	kubisch-raumzentriert	880 ··· 1 820
α-Fe	kubisch-raumzentriert	< 906
γ-Fe	kubisch-flächenzentriert	906 ··· 1 401
δ-Fe	kubisch-raumzentriert	1 401 ··· 1 535

2.1.2.3. Zur Struktur der Legierungen

Nach der Anzahl der an Legierungen beteiligten metallischen und nichtmetallischen Komponenten (Stoffe) spricht man von *Zweistoff-*, *Dreistoff-* usw. *-Legierungen* (*binäre, ternäre* usw. *Legierungen*). Die Eigenschaften ändern sich mit der Konzentration in der Legierung, wobei die geltende Gesetzmäßigkeit vom Legierungstyp abhängt (siehe Tafel 2). Unbeabsichtigte Komponenten, die entweder im Ausgangsrohstoff enthalten sind oder im Verarbeitungsgang aufgenommen werden, bezeichnet man als *Begleitelemente* oder *Verunreinigungen*.

Tafel 2. Struktur der Legierungen (schematisch)

Kristallart	Bedingungen	Gitter	Schema	Beispiele	Bemerkung
Substitutions- oder Austausch-Mischkristalle	gleicher Gittertyp und annähernd gleiche Atomradien der Komponenten	Typ des Wirtsmetalls bleibt erhalten, Gitterkonstante ändert sich, unregelmäßige Verteilung der Fremdatome auf Gitterplätze des Wirtsgitters	○ Wirtsgitter ● Fremdatome	Al—Be Bi—Si Bi—Cd Cu—Ni Cr-α-Fe	Bedingungen notwendig, aber nicht immer ausreichend, z. B. bei Al—Cu
Einlagerungs-Mischkristalle	genügend große Lücken im Wirtsgitter, kleine Fremdatome im Verhältnis zu dem Wirtsgitter	Typ des Wirtsgitters bleibt erhalten, Gitterkonstante ändert sich, unregelmäßige Verteilung der Fremdatome in Lücken des Wirtsgitters	○ Wirtsgitter ● Fremdatome	α-Fe—C γ-Fe—C β-Fe—N	häufig zwischen Metallen und Nichtmetallen zu beobachten
Überstrukturen	ganzzahliges Verhältnis zwischen den Komponenten erforderlich	geordnete Verteilung der Fremdatome auf Gitterplätze des Wirtsgitters	○ Wirtsgitter ● Fremdatome	CuAu Cu_3Au $FeNi_3$	Mischkristalle mit arteigener Struktur
Intermetallische Phasen	Bildung direkt aus der Schmelze oder aus zwei Phasen im festen Zustand, ganzzahliges Verhältnis der Atomarten ist nicht erforderlich	Form oft kompliziert, Bildung eines neuen Gitters, welches vom Gitter der Komponenten abweicht, einfache Formen sind der CsCl-, NaCl- und der CaF_2-Gittertyp	CsCl-Gittertyp NaCl-Gittertyp CaF_2-Gittertyp	*CsCl-Gittertyp:* CuSn, NiAl *NaCl-Gittertyp:* Hartstoffe TiC und TaC *CaF_2-Gittertyp:* Mg_2Pb, Mg_2Si	harte und spröde Phasen

Legierungen bestehen aus verschiedenen Atomarten. Es gibt vielfältige Möglichkeiten, wie diese nebeneinander vorliegen:

Mischkristallphasen (einschließlich Überstrukturen)

Die beiden Atomarten bilden gemeinsam einen *Mischkristall* (Tafel 2). Bei Mischkristallbildung bleibt der Gittertyp des Grundmetalls grundsätzlich unverändert. Nach dem Platz, den die Atome des Zusatzes im „Wirtsgitter" einnehmen, unterscheidet man zwischen *Austausch-* und *Einlagerungs-Mischkristallen.*

Austausch-(Substitutions-)Mischkristall. Die Atome des zugesetzten Metalls nehmen reguläre Gitterplätze im Wirtsgitter ein. Dazu ist Voraussetzung, daß sie bestrebt sind, den gleichen Gittertyp zu bilden, daß sie annähernd gleiche Größe wie die Atome des Wirtsgitters haben und daß das Bestreben, Verbindungen zu bilden, klein genug ist. Das Aufnahmevermögen des Wirtsgitters für die Atome des Zusatzmetalls richtet sich danach, inwieweit diese Bedingungen erfüllt sind. Manche Metalle sind sich so ähnlich, daß das Gitter des einen mit steigenden Zusätzen des anderen kontinuierlich in das Gitter des Zusatzmetalls übergeht (ununterbrochene Mischkristallreihe, z. B. im Falle Cu—Ni, Fe—Cr, Co—Ni, Fe—Ni, Cr—Mo). Weil jedoch die Atome des Zusatzmetalls meist etwas anderen Durchmesser als die des Wirtsgitters haben, wird das Gitter verzerrt. Dadurch ändern sich die Eigenschaften erheblich, besonders steigen Härte und Festigkeit, während die Leitfähigkeit stark absinkt. Durch Mischkristallbildung lassen sich deshalb Eigenschaften erzielen, die die Grundmetalle nicht von vornherein erkennen lassen, und die Mischungsregel ist nur sehr ungenau anzuwenden.

Einlagerungs-Mischkristall. Die Atome des Zusatzelements besetzen Gitterlücken innerhalb des Wirtsgitters (Zwischengitterplätze). Dazu sind nur sehr kleine Atome in der Lage (besonders von Nichtmetallen, z. B. H, C, B, N). Das Aufnahmevermögen des Wirtsgitters ist begrenzt. Durch die starke Verzerrung des Wirtsgitters steigen Härte und Festigkeit stark an (Beispiel: Fe—C).

Es ist durchaus möglich, daß Mischkristalle auch aus mehr als zwei Atomarten bestehen und daß die eine davon Austausch-, die andere Einlagerungs-Mischkristalle bildet (z. B. bei legierten Stählen). Die beiden Atomarten bilden gemeinsam einen Kristall und nehmen dabei im Gitter eine ganz bestimmte Ordnung ein. In diesem Fall spricht man von *Überstruktur.* Während im Mischkristall die Verteilung der Atome des Zusatzmetalls regellos war, nehmen sie hier eine ganz bestimmte symmetrische Ordnung ein. Sie besetzen z. B. im kubisch-flächenzentrierten Gitter die Seitenmitten oder die Würfelecken. Dann stehen die beiden Ionenarten natürlich auch mengenmäßig in ganz bestimmtem Verhältnis zueinander. Wenn innerhalb einer Mischkristallreihe bei einem bestimmten Verhältnis der Komponenten eine solche Überstruktur auftritt, dann haben die Eigenschaften an dieser Stelle eine Unstetigkeit.

*Metallverbindungen**)

Die beiden Atomarten bilden gemeinsam einen Kristall, der aber grundsätzlich anderes Gitter als die Komponenten aufweist. Das ist dann der Fall, wenn die Komponenten beispielsweise eine *intermetallische Phase* (intermetallische Verbindung, auch *Metallid* genannt) bilden. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß die von den Atomen der einen Komponente abgegebenen Elektronen mehr oder weniger unter Verlust der freien Beweglichkeit von Atomen der anderen Komponente „eingefangen" werden. Dadurch verliert sich mehr und mehr der metallische Charakter. Auf diese Weise kann man sich einen fließenden Übergang von der metallischen Bindung zur heteropolaren Bindung vorstellen.

Wenn der metallische Charakter der Verbindung noch vorhanden ist, dann liegt eine intermetallische Verbindung vor. Sie unterscheidet sich von der klassischen chemischen Verbindung durch einige Eigenarten: Sie tritt nicht nur bei einem genau definierten Verhältnis der Komponenten auf, sondern kann eine bestimmte Existenzbreite haben. Das Gesetz der einfachen multiplen Proportionen ist oft nicht eingehalten. So gibt es z. B. intermetallische Verbindungen der Formeln Cu_5Zn_8, Cu_9Al_4, $Cu_{31}Sn_8$ usw. Das Gitter solcher intermetallischer Verbindungen ist sehr kompliziert. Dadurch sind intermetallische Verbindungen gewöhnlich hart und spröde (z. B. Fe_3C, Zementit).

Wenn Kristalle einer intermetallischen Verbindung in einer Legierung vorliegen, dann ist das nicht immer unerwünscht, denn sie verbessern z. B. den Verschleißwiderstand.

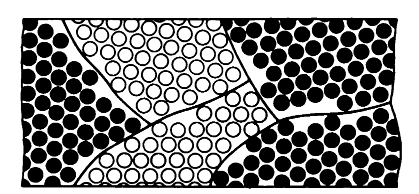


Bild 3. Schematische Darstellung einer heterogenen Gefügestruktur

*) Der Begriff „Metallverbindung" wird hier in umfassendem Sinn gebraucht (einschließlich sog. Karbide, Nitride, Sulfide, Oxide).

Die Kristallite reiner Metalle, die Mischkristalle und die Metallverbindungen (Metallide) sind die möglichen festen Phasen der Legierungen. Von *Kristallgemischen oder -gemengen* spricht man, wenn zwei oder mehr der genannten Phasen im Gefüge einer Legierung vorliegen (Bild 3).
Eine extrem feine Verteilung einer Phase in der Gefügegrundmasse einer Legierung soll hier nicht berücksichtigt werden.

2.1.3. Kristallisation

2.1.3.1. Grundsätzliches zur Kristallisation reiner Metalle

Bei allen Metallen ist der Kristallisationsprozeß als Übergang aus dem flüssigen in den festen Zustand eine *Zustandsänderung*. Jede Zustandsänderung macht sich durch eine Unstetigkeit im Verlauf der Temperatur-Zeit-Kurve bemerkbar und erstreckt sich über ein Zeitintervall.
Schmelzpunkt und *Erstarrungspunkt* sind gleich. Ersterer kann ohne Zustandsänderung nicht überschritten werden. Die Kristallisation dagegen setzt bei rascher Abkühlung möglicherweise erst bei einer unterhalb des Erstarrungspunkts liegenden Temperatur ein. Die Temperaturdifferenz zwischen Erstarrungspunkt und tatsächlicher Kristallisationstemperatur ist die *Unterkühlung*.

Sämtliche Metalle sind im flüssigen Zustand von annähernd ungeordneter, im festen Zustand von geordneter, kristalliner Struktur; der *amorphe* Zustand existiert für feste Metalle nicht.
Die nachstehende Betrachtung berücksichtigt nicht den Übergang gasförmig—fest.

2.1.3.2. Übergang fest—flüssig

Jeder Übergang vom festen in den flüssigen Zustand wird durch Wärmezufuhr eingeleitet und in Gang gehalten. Durch die Steigerung der Temperatur schwingen die Atome stärker um ihre Ruhelage, wodurch das Gitter aufgeweitet wird und schließlich beim Erreichen des Schmelzpunkts die Kohäsionskräfte zwischen den Atomen nicht mehr ausreichen, das Raumgitter zusammenzuhalten. Das Gitter löst sich auf, und an die Stelle der geordneten Struktur des Festkörpers tritt die ungeordnete der Flüssigkeit. Der Temperatur-Zeit-Verlauf zeigt im Gleichgewichtsfall den typischen *Haltepunkt* (Bild 4), der durch zusätzlichen Energieverbrauch (Schmelzwärme) verursacht wird.
Nicht alle Metalle behalten ihre Gitterform bis zum Schmelzpunkt bei. Bei den allotropen Metallen setzt noch vor dem Schmelzpunkt eine Gitterumbildung ein; d. h., die Atome plazieren sich zu einem neuen Raumgitter. Die Gitterumwandlungen sind ebenfalls mit meßbaren Wärmetönungen verbunden. Als Beispiel hierfür sei Eisen (Bild 5) genannt.
Unter dem Einfluß der *Schmelzwärme* hat die Schwingungsintensität der Atome derart zugenommen, daß das Gitter der Kristalle aufgelöst wird. Die Atome liegen annähernd im ungeordneten Zustand vor (Zustand einer Flüssigkeit). Bei weiterer Wärmezufuhr steigt die Temperatur weiter an, bis bei Erreichen des Siedepunkts das Metall in den gasförmigen Zustand übergeht.

2.1.3.3. Übergang flüssig—fest

Keimbildung und Kristallwachstum

Geht man vom flüssigen Zustand aus, so verlangsamt die ständige Abkühlung die Bewegung der Atome in der Schmelze. An einzelnen Stellen lagern sich einige Metallatome so zusammen, daß sie den Ursprung für das zu bildende Gitter darstellen. Diese Zentren der Erstarrung nennt man *Keime*, von denen aus die Kristallisation beginnt. Die an verschiedenen Stellen gebildeten Keime haben in der Regel unterschiedliche Orientierung.

Wenn sich die Atome des Grundmetalls selbst zusammenschließen, dann spricht man von *arteigenen Keimen*. Allerdings tritt dieses Ereignis nur sehr selten ein; meist wirken andere Stoffe (*Fremdkeime*) oder Grenzflächen keimbildend.



An die Keime schließen sich nun weitere Atome aus der Schmelze an. Dadurch wächst ein Kristall mit bestimmter Geschwindigkeit, der *Kristallisationsgeschwindigkeit*, in die Schmelze hinein. Das geht so lange, bis sich die Kristalle gegenseitig berühren und alle Atome in das Gitter eingebaut sind. Dann ist die Erstarrung beendet. Die von den Atomen beim Einbau in das Gitter abgegebene Bewegungsenergie wandelt sich in Wärmeenergie um. Dadurch bleibt die Temperatur während der Erstarrung konstant, obwohl weiterhin Wärme an die Umgebung abgegeben wird (Bilder 4 und 5).

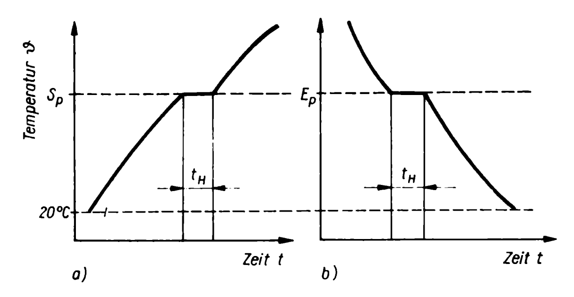


Bild 4. Temperaturkurven eines reinen Metalls. a) Erwärmungskurve; b) Abkühlkurve. *Sp* Schmelzpunkt (Haltepunkt); *Ep* Erstarrungspunkt (Haltepunkt); t_H Haltezeit

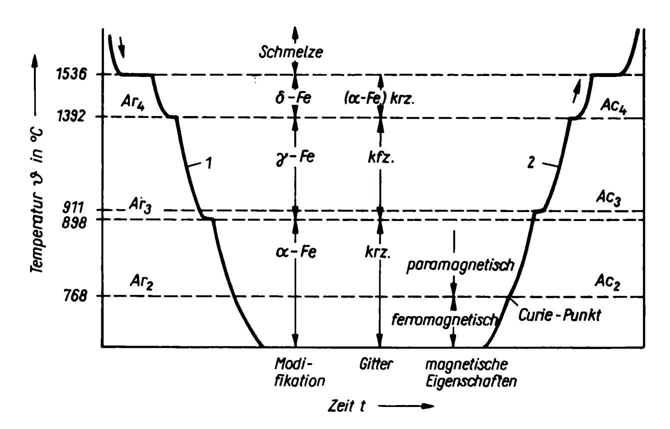


Bild 5. Temperaturkurven des reinen Eisens (idealisiert). *1* Abkühlkurve; *2* Erwärmungskurve. *Ar* Haltepunkt bei der Abkühlung; *Ac* Haltepunkt bei der Erwärmung

Die Anzahl der je Zeiteinheit gebildeten Keime (*Keimzahl*) und die Kristallisationsgeschwindigkeit sind die den Erstarrungsverlauf bestimmenden Faktoren.

Struktur des erstarrten Metalls

Das Ergebnis der Erstarrung ist die Bildung des Gefüges des metallischen Werkstoffs. Unter *Gefüge* versteht man die Vielzahl von Kristallen, die in ihrer Gesamtheit den Metallkörper bilden, etwa wie Steine einer Mauer. Die Grenzen der Kristalle sind nun nicht mehr von der Gesetzmäßigkeit des inneren Aufbaus bedingt (regelmäßig), sondern vom zufälligen Zusammentreffen benachbarter Kristalle abhängig. Dadurch werden die äußeren Formen ungleichmäßig, man nennt solche Gebilde *Kristallite* oder *Körner*. Einzelne Kristallite werden durch die *Korngrenzen* deutlich voneinander getrennt. Dort befinden sich vielfach die in jeder Schmelze vorhandenen Verunreinigungen, sie bilden die *Korngrenzensubstanz*.
Die Ausbildung des Gefüges ist besonders für die mechanischen Eigenschaften eines metallischen Werkstoffs von Bedeutung. Außerdem hat der Praktiker eine weitere Möglichkeit, die Eigen-

schaften metallischer Werkstoffe in gewisser Weise zu beeinflussen, indem er die Kristallisation lenkt; z. B. durch Impfen, d. h. durch absichtlichen Zusatz von Stoffen, die auf die Keimbildung Einfluß nehmen.

Folgende *Kenngrößen des Gefüges* spielen eine Rolle:

Größe der Kristallite (*Korngröße*). Im allgemeinen werden die Metalle um so fester sein, je kleiner die Körner sind.

Wirkung der Korngrenzen und der Korngrenzensubstanz. Die Korngrenzen wirken mitunter bei niedrigen Temperaturen als „versteifendes Gerüst" und erhöhen Festigkeit und Härte. Bei hohen Temperaturen allerdings werden sie zähflüssig und erleichtern das Kriechen des Werkstoffs unter konstanter Belastung. Unter solchen Bedingungen ist ein Werkstoff mit weniger Korngrenzen, also größeren Kristalliten, günstiger.

Anzahl und Art der Phasen. Besonderen Einfluß auf die Eigenschaften haben solche Phasen, die hart und spröde sind und bei Verschleißbeanspruchung als „Tragkristalle" wirken. In diesem Falle kommt es auch auf Feinheit und Gleichmäßigkeit der Verteilung dieser Phasen an.

Orientierung der Kristallite. Im allgemeinen haben die Kristallite unterschiedliche Orientierung. Die Richtungsabhängigkeit der Eigenschaften tritt deshalb für ein ganzes Metallstück nicht in Erscheinung. Es verhält sich isotrop. Unter bestimmten Erstarrungs- oder Verarbeitungsbedingungen (z. B. Verformung) richten sich jedoch die Kristallite in bestimmter Weise aus und nehmen zumindest annähernd gleiche oder gleichartige Orientierung ein, die als *Textur* bezeichnet wird. Ein texturbehafteter metallischer Werkstoff ist anisotrop.

Reale Erstarrung und Einflußgrößen

Die Faktoren, die Keimbildung und Kristallwachstum beeinflussen, faßt man als *Erstarrungsbedingungen* zusammen. Im wesentlichen sind dies der Anteil der Fremdkeime in der Schmelze sowie Geschwindigkeit und Richtung des Wärmeentzugs.

Die *Geschwindigkeit des Wärmeentzugs* hängt im wesentlichen von der Wärmeleitfähigkeit der Gießform ab. Je höher diese ist (z. B. bei metallischen Gießformen), um so mehr wird die Schmelze unterkühlt, d. h., bei um so tieferen Temperaturen setzt die Kristallisation ein (Bild 6). Der Grad der Unterkühlung bestimmt sowohl die Keimanzahl wie auch die Kristallisationsgeschwindigkeit.

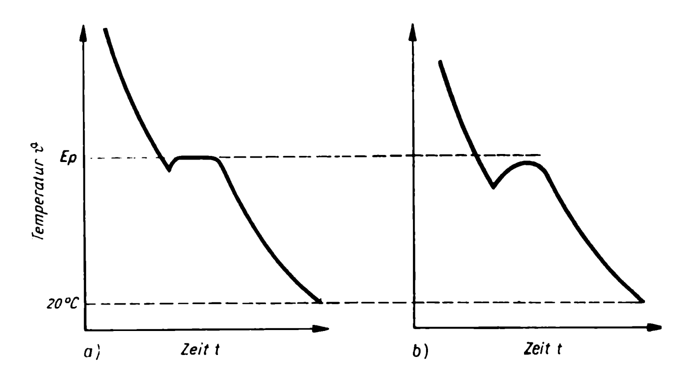


Bild 6. Abkühlkurve des reinen Eisens. a) geringfügige Unterkühlung; b) mit Unterkühlung (Verschiebung des Umwandlungspunkts zu tieferer Temperatur)

Richtung des Wärmeentzugs. Die Kristalle wachsen in ruhender Schmelze senkrecht zur Gefäßwand in die Schmelze hinein. Unter bestimmten Bedingungen kommt es dadurch zur Bildung von *Stengelkristallen.* Da der seitliche Zusammenhalt bei solchen Kristallen gering ist, ist ein derartiges Gefüge unerwünscht. Bei einer nachfolgenden Umformung wird diese Struktur beseitigt.

Beim Übergang flüssig—fest ändern sich sprunghaft sämtliche Eigenschaften des Metalls. Dazu gehört auch das spezifische Volumen. Während das flüssige Metall eine bestimmte Gießform vollständig gefüllt hat, reicht das erstarrte Metall dazu nicht mehr aus, und es bleibt an der Stelle der letzten Erstarrung ein Hohlraum, ein *Lunker.* Die Größe der Volumenkontraktion ist eine Metallkonstante, aber wo und wie sich der Lunker ausbildet, ist von den Erstarrungsbedingungen abhängig.



Erstarrung unter verschiedenen Bedingungen. Bei einer einseitig gerichteten Erstarrung wird sich die Schwindung nur in einem Absinken des Flüssigkeitsspiegels bemerkbar machen, und der Metallkörper wird dicht sein. Bei einer Wärmeableitung nach allen Richtungen hin wird sich dagegen der Lunker in der Mitte bilden, wo in diesem Falle die Zone der letzten Erstarrung liegt (thermischer Mittelpunkt). Bei Blöcken schneidet man den Kopf mit dem Lunker oft ab (verlorener Kopf) oder sorgt für eine gerichtete Erstarrung (z. B. beim Strangguß). Beim Formguß gleicht man die Schwindung durch aufgesetzte Vorratsbehälter voll flüssigen Metalls aus (Steiger).

2.1.4. Grundsätzliches über Zwei- und Dreistoffsysteme

2.1.4.1. Zweistofflegierungen (binäre Systeme)

Die wie bei reinen Metallen auch beim Erstarren einer Zweistofflegierung bestimmter Konzentration beobachtete Temperatur-Zeit-Funktion vermittelt nur einen Überblick über den Temperaturverlauf bei Abkühlung oder Erwärmung einer Legierung bestimmter Zusammensetzung. Demgegenüber gibt das *Zustandsdiagramm* über eine Legierungsreihe Auskunft. Es erfaßt alle möglichen Konzentrationen zwischen den Komponenten A und B und ihr Verhalten bei dem Übergang flüssig—fest oder umgekehrt.

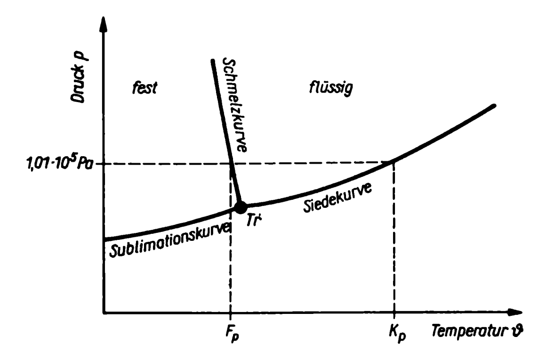


Bild 7. Zustandsdiagramm eines Einstoffsystems $p = f(\vartheta)$, eine feste Phase.
Fp Schmelzpunkt (Fusionspunkt); *Kp* Siedepunkt (Kochpunkt); *Tr* Tripelpunkt

Der Zusammenhang Druck—Temperatur—Phasenausbildung wird am Einstoffsystem deutlich (Bild 7). Ein Zustandsdiagramm gewinnt man dadurch, daß von vielen Legierungen verschiedener Konzentrationen innerhalb des Systems Abkühlungskurven aufgestellt werden. Durch Zusammenfassen der Punkte des Beginns und des Endes der Erstarrung erhält man dann die *Liquidus- und die Soliduslinien**) des Zustandsdiagramms.
Als *Phase* bezeichnet man stets einen homogenen Bereich (≙ bestimmtem Volumen dieses Stoffes), der in sich die gleichen physikalischen Eigenschaften aufweist (unabhängig vom vorliegenden Aggregatzustand).
Die folgenden Zustandsdiagramme beziehen sich auf Erstarrungs- und Schmelzvorgänge im Falle thermodynamischen Gleichgewichts. Die Diagramme enthalten Gleichgewichtslinien, die Ein- und Zweiphasenfelder (verschiedene flüssige, eine flüssige und eine feste oder verschiedene feste Phasen enthaltend) aufweisen.
Ermittlung von Phasenanteilen und deren Konzentration (Beispiel System Bi—Cd). Für jedes 2-Phasen-Feld des Zustandsdiagramms eines beliebigen binären Systems gelten für den Gleichgewichtsfall folgende Regeln (Bild 8):

1. Die Schnittpunkte einer Linie konstanter Temperatur T_x (*Konode*) mit den beiden das 2-Phasen-Feld begrenzenden Zustandslinien geben die Zusammensetzung der beiden bei der betreffenden Temperatur T_x im Gleichgewicht stehenden Phasen an.

*) liquid — flüssig; solid — fest

2. Bei einer Legierung der Konzentration c verhalten sich die Massen (Mengen) der bei einer Temperatur T_x im Gleichgewicht stehenden beiden Phasen wie die Längen der abgewandten Konodenabschnitte (*Hebelbeziehung*).

Anwendung der Hebelbeziehung:

Für c gilt bei T_x: $m_{\text{Cd-Primär-Kristalle}}/m_{\text{Schmelze}} = y/x$
Für c gilt bei T_s: $m_{\text{Cd-Primär-Kristalle}}/m_{\text{Eutektikum}} = v/u$

Beachte: Restschmelze erstarrt bei Temperatur T_s zu Eutektikum!

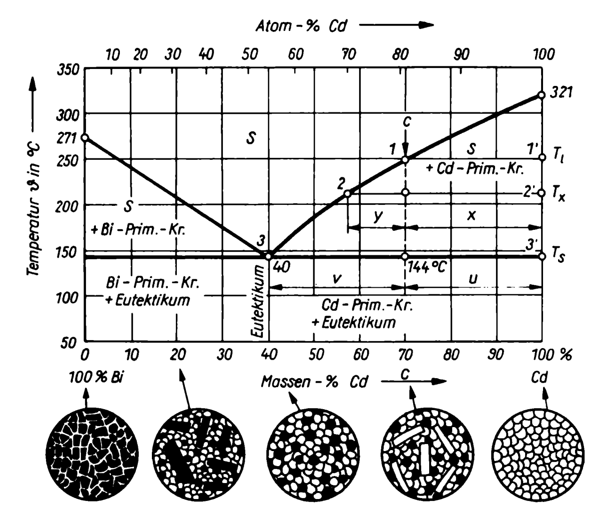


Bild 8. Phasenanteile, Phasenkonzentration und Gefügeanteile im System Wismut—Kadmium. c betrachtete Konzentration; T_l Erstarrungsbeginn; T_s Erstarrungsende; T_x beliebige Temperatur im Erstarrungsintervall; 1—2—3 Konzentration der Schmelze bei T_l, T_s und T_x; 1—1′, 2—2′ und 3—3′ Konoden

Legierungen mit völliger Löslichkeit ihrer Komponenten im flüssigen Zustand und Unlöslichkeit im festen Zustand

Im flüssigen Zustand sind die beiden Komponenten völlig ineinander löslich, im festen Zustand bilden sie ein Kristallgemisch, d. h., sie sind völlig unlöslich, die Kristalle der beiden Komponenten liegen nebeneinander vor.

Zustandsdiagramm (Bild 9): Die Schmelzpunkte S_A und S_B der *reinen Komponenten* entsprechen ihren Erstarrungspunkten, deshalb sind sie gleichzeitig Punkte der Liquidus- und Soliduslinie. Bei der eutektischen Konzentration K_e erstarren beide Komponenten gleichzeitig bei konstanter Temperatur.

Schema der eutektischen Reaktion:

$$\text{Schmelze (S)} \xrightarrow{T\text{-konst.}} \text{A-Kristalle} + \text{B-Kristalle}$$

Neben der Unlöslichkeit im festen und der völligen Löslichkeit im flüssigen Zustand bilden die Komponenten A und B bei bestimmter Konzentration eine *intermetallische Phase* V (intermetallische Verbindung), die ohne Zersetzung schmilzt und erstarrt. Sie entspricht also in ihrem Verhalten einer reinen Komponente.

Zustandsdiagramm (Bild 10): Die drei Schmelzpunkte S_A, S_B und S_V sind mit den jeweiligen Erstarrungspunkten identisch, womit sie auch gleichzeitig zu Punkten der Liquidus- und der Soliduslinie werden. znfolge der intermetallischen Verbindung sind außerdem zwei eutektische Konzentrationen K_{e1} und K_{e2} Iu beobachten. Zwischen der Komponente A und der intermetallischen Verbindung V ist bei A- bzw. V-reichen Konzentrationen mit Primärkristallbildung von A bzw. V zu rechnen, wobei eine Konzentrationsänderung der Restschmelze eintritt, die nach Erreichen der eutektischen Konzentration K_{e1} den gleichen Vorgang wie bei der eutektischen Legierung auslöst, nur mit dem Unterschied, daß es sich hier um die Komponenten A und V handelt. Bei den Konzentrationen zwischen V und B verlaufen die Vorgänge sinngemäß.

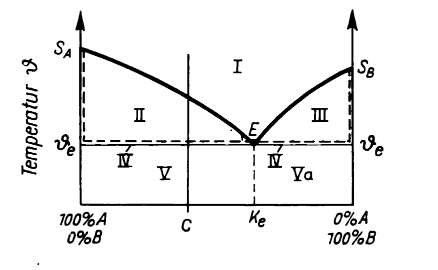


Bild 9. Einfaches System mit Eutektikum (Schema zum Realdiagramm) und Phasen bzw. Gefügebestandteile dazu (im untereutektischen Bereich). S_A Schmelzpunkt der Komponente A; S_B Schmelzpunkt der Komponente B; ϑ_e eutektische Temperatur; K_e eutektische Konzentration; E eutektischer Punkt; I, II, III, IV, V charakteristische Phasen- und Gefügefelder; —— Liquiduslinie; ---- Soliduslinie

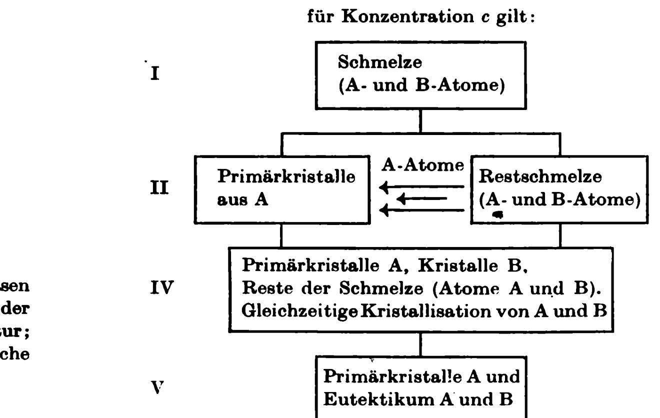
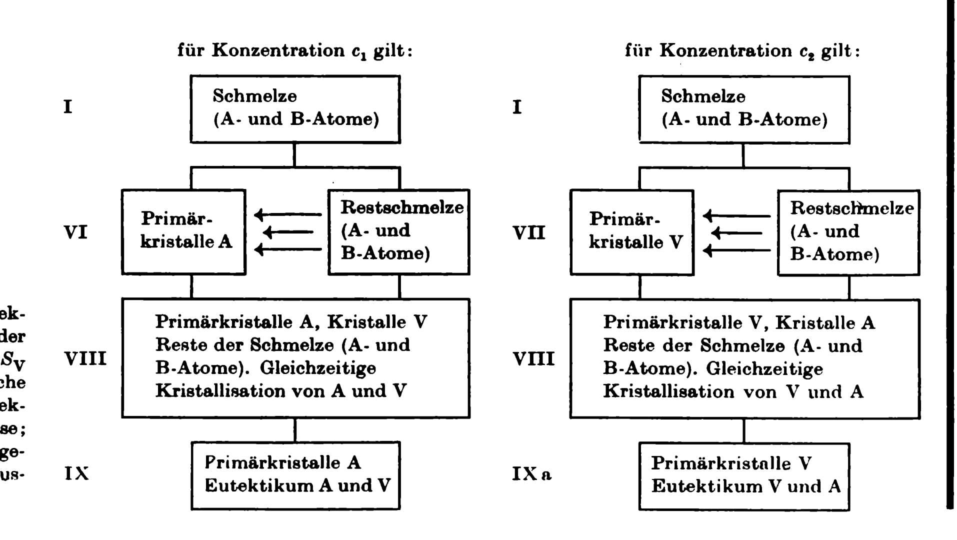


Bild 10. System mit intermetallischer Phase und zwei Eutektika sowie Phasen und Gefüge dazu. S_A Schmelzpunkt der Komponente A; S_B Schmelzpunkt der Komponente B; S_V Schmelzpunkt der intermetallischen Phase; ϑ_e eutektische Temperaturen; K_e eutektische Konzentrationen; E_1, E_2 eutektische Punkte; V Konzentration der intermetallischen Phase; $I, VI, VII, VIII, IX$ charakteristische Phasen- und Gefügefelder des linken Bereichs des Diagramms; —— Liquiduslinie; ---- Soliduslinie



Legierungen mit völliger Löslichkeit ihrer Komponenten im flüssigen und festen Zustand

Die Komponenten weisen *völlige Mischbarkeit* in beliebiger Konzentration auf und bilden somit eine *ununterbrochene Mischkristallreihe* (Beispiel: Cu—Ni). Abkühlvorgang einer Legierung *c*:
Während des Erstarrungsprozesses ändert sich die Konzentration der entstehenden Mischkristalle entsprechend S_1 — S_2. Analog verändert die Schmelze ihre Zusammensetzung nach l_1 — l_2 (Bild 11).
Der Konzentrationsausgleich (Einstellung des Gleichgewichtszustands) erfolgt durch *Diffusion* (thermisch aktivierter Prozeß der Wanderung von Atomen) im festen Zustand. Dieser Ausgleich stellt sich bei den technischen Abkühlgeschwindigkeiten meist nicht ein. Die Erscheinung der verbleibenden Konzentrationsunterschiede nennt man *Kristallseigerung.*
Obwohl in der Regel bei Systemen völliger Löslichkeit im flüssigen und festen Zustand der Schmelzpunkt der einen Komponente durch Zusatz der anderen Komponente kontinuierlich verändert wird, bis er den Schmelzpunkt der anderen Komponente erreicht hat, sind auch Systeme bekannt, wo es dabei zu Maximum- und Minimumbildung kommt. Dieser Fall ist für ein Schmelzpunktminimum in Bild 12 dargestellt, da der umgekehrte Fall noch nicht bei Metallen festgestellt wurde. Einen solchen Verlauf zeigen z. B. Cr—Fe (80% Fe), Au—Ni (17% Ni) u. a.

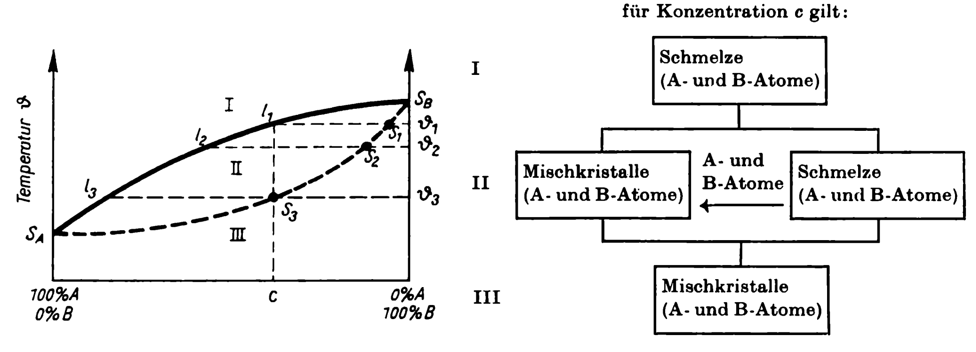


Bild 11. System der ununterbrochenen Mischkristallreihe und Phasen dazu. S_A Schmelzpunkt der Komponente A; S_B Schmelzpunkt der Komponente B; *c* beliebige Konzentration; l_1, l_2, l_3 Schnittpunkte mit der Liquiduslinie; S_1, S_2, S_3 Schnittpunkte mit der Soliduslinie; *I, II, III* charakteristische Phasenfelder; ——— Liquiduslinie; ---- Soliduslinie

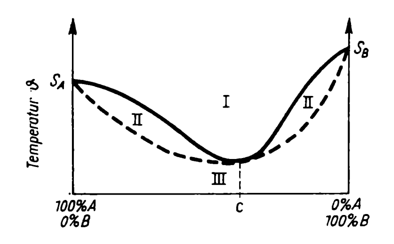


Bild 12. System der ununterbrochenen Mischkristallreihe mit Schmelzpunktminimum

Legierungen mit völliger Löslichkeit ihrer Komponenten im flüssigen und begrenzter Löslichkeit im festen Zustand

Wenn die Bedingungen zur Mischkristallbildung nur annähernd erfüllt sind, dann wird die lückenlose MK-Reihe von einer *Mischungslücke* unterbrochen. Es kommt nur zu einer begrenzten MK-Bildung; das Aufnahmevermögen der Komponenten für die andere ist beschränkt. Die Breite der Mischungslücke ist auch von der Temperatur abhängig, mit absinkender Temperatur wird sie größer. Aus der Schmelze scheiden sich nunmehr nicht die reinen Komponenten A und B, sondern die Mischkristalle α und β aus (Bild 13).

Schema der eutektischen Reaktion:

$$\text{Schmelze} \xrightarrow{T\text{-konst.}} \alpha\text{-Mischkristalle } (\alpha\text{-MK}) + \beta\text{-Mischkristalle } (\beta\text{-MK})$$

Temperatur ϑ

S_A S_B I II III IV V VI VII ϑ_e E a b c d

100% A 0% B c_1 K_1 c_2 K_e K_2 0% A 100% B

für Konzentration c_1 gilt:

I Schmelze (A- und B-Atome)

II α-MK | Rest-schmelze

IV α-MK

VII α- und β-MK

für Konzentration c_2 gilt:

I Schmelze (A- und B-Atome)

II α-MK | Rest-schmelze

VI α- und β-MK und Schmelze. Gleichzeitige Kristallisation von α- und β-MK

VII α- und β-MK (Mischungslücke)

Bild 13. System mit Mischungslücke sowie Phasen und Gefüge dazu im untereutektischen Bereich des Diagramms. S_A Schmelzpunkt der Komponente A; S_B Schmelzpunkt der Komponente B; ϑ_e eutektische Temperatur; K_e eutektische Konzentration; K_1, K_2 Maximalkonzentrationen der beiden Mischkristallphasen; E eutektischer Punkt; *I, II, IV, VI, VII* charakteristische Phasen- und Gefügefelder; $a-b$ bzw. $c-d$ Löslichkeits- oder Sättigungslinie; —— Liquiduslinie; ---- Soliduslinie

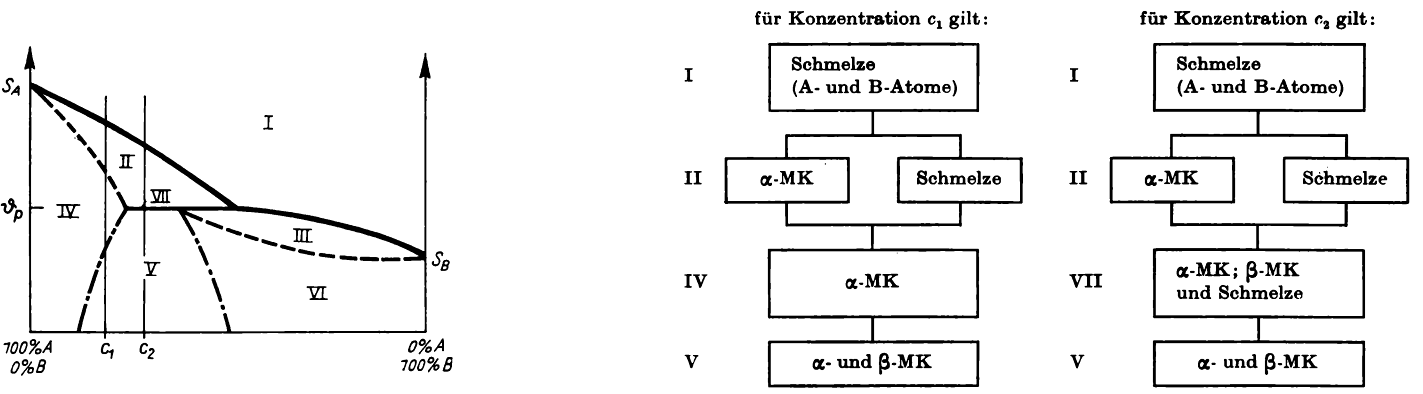


Bild 14. Peritektisches System und Phasen dazu. S_A Schmelzpunkt der Komponente A; S_B Schmelzpunkt der Komponente B; ϑ_p peritektische Temperatur; *I, II, IV, V, VII* charakteristische Phasen- bzw. Gefügefelder; —— Liquiduslinie; ---- Soliduslinie; -·-·- Umwandlung bzw. Entmischung im festen Zustand

Peritektisches System

Eine peritektische Reaktion ist dadurch gekennzeichnet, daß unter Freiwerden von Wärmeenergie aus der Schmelze und einer kristallisierten Phase (α) eine zweite feste Phase (β) entsteht (Bild 14).
Technisch bedeutsam ist die Tatsache, daß durch Umschließen der zuerst gebildeten Kristallart (peri — rundherum) ein Gefüge aus *Zonenmischkristallen* entsteht.

Schema der peritektischen Reaktion:

$$S + \alpha\text{-MK} \xrightarrow{T\text{-konst.}} \beta\text{-MK}$$

Legierungen mit völliger Unlöslichkeit ihrer Komponenten im flüssigen und festen Zustand (Pseudolegierungen)

Einige Metallpaare sind auch im flüssigen Zustand nicht ineinander löslich. Gibt man sie geschmolzen in einen Tiegel, dann trennen sie sich entsprechend ihren unterschiedlichen Dichten in zwei deutlich voneinander zu unterscheidende Schichten. Das Zustandsdiagramm hat dementsprechendes Aussehen, nur daß nicht die Dichte, sondern der Schmelzpunkt der wesentliche Unterschied ist (Bild 15). Die Schmelzpunkte der Komponenten bleiben durch den Zusatz der anderen unbeeinflußt.

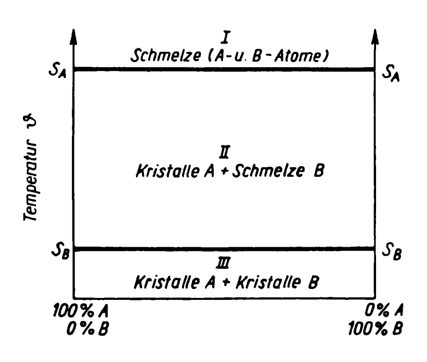


Bild 15. Pseudolegierung. S_A Schmelzpunkt der Komponente A; S_B Schmelzpunkt der Komponente B; *I, II, III* charakteristische Phasen- bzw. Gefügefelder

2.1.4.2. Metastabiles Zweistoffsystem Eisen — Eisenkarbid

Nach der Darstellung verschiedener einfacher Zweistoffsysteme soll das folgende System Fe—Fe_3C als Beispiel für ein *Realdiagramm* erläutert werden.
Tatsächlich aufgenommene Zustandsdiagramme (Realdiagramme) haben oft ein kompliziertes Aussehen. Die idealisierten Diagramme und erläuternden Schemata erleichtern das Verständnis, da sie in gewissem Sinne als Grundtypen aufgefaßt werden können, die in Realdiagrammen wiederkehren.

Das System wird aus den Komponenten Fe und *Zementit* oder *Eisenkarbid* Fe_3C, einer intermetallischen Phase, gebildet (Bilder 16 und 17). Eisenkarbid hat 6,67% C gebunden (rechte Diagrammbegrenzung). Die Liquiduslinie ist die Linie *ABCD* und die Soliduslinie die Linie *AHIECFD* (Bild 16). Aus dem Zustandsdiagramm ist zu erkennen, daß die Allotropie des reinen Eisens den Linienverlauf entscheidend bestimmt. Links oben ist ein peritektisches System zu erkennen, das allerdings für die Praxis von relativ geringer Bedeutung ist. Ferner hat die Gitterumwandlung von Fe einen eutektoiden Zerfall zur Folge (*Eutektoid* $\triangleq$ Eutektikum einer Umwandlung fest—fest).
Das Eutektikum des Systems Fe—Fe_3C liegt bei 4,3% C und trägt als Gefüge den Namen *Ledeburit*. Es besteht aus γ-Mischkristallen und Zementit (Primärzementit) bis 723 °C. Die γ-Mischkristalle, die den Gefügenamen *Austenit* tragen, sind kubisch-flächenzentrierte Eisenkristalle, die maximal 2,06% C bei 1147 °C (siehe Punkt *E* im Diagramm) lösen können. Die Aufnahmefähigkeit für Kohlenstoff sinkt bei Abkühlung auf 723 °C auf 0,8% C (siehe Punkt *S*). Der überschüssige Kohlenstoff wird entsprechend der Sättigungslinie *SE* in Form von *Sekundärzementit* im Gefüge abgelagert.
Die α-Mischkristalle (kubisch-raumzentriert) können maximal nur 0,04% C bei 723 °C (siehe Punkt *P*) lösen. Der Gefügebestandteil trägt den Namen *Ferrit*. Das feinlamellare, aus Ferrit und Zementit bestehende eutektoide Gefüge heißt *Perlit*.

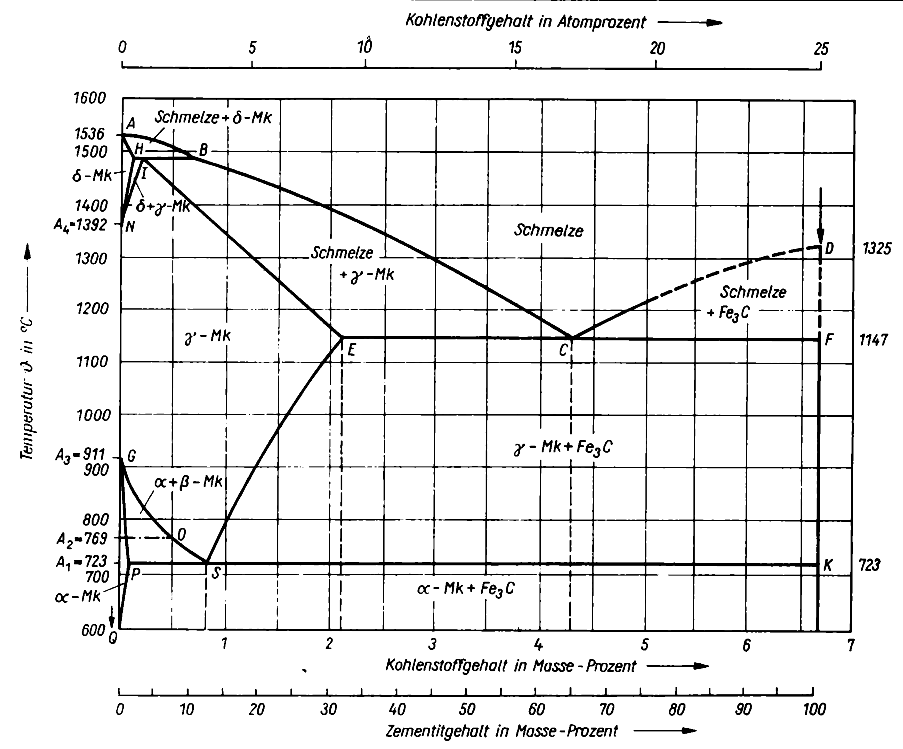


Bild 16. System Fe—Fe₃C mit Phasenbezeichnungen

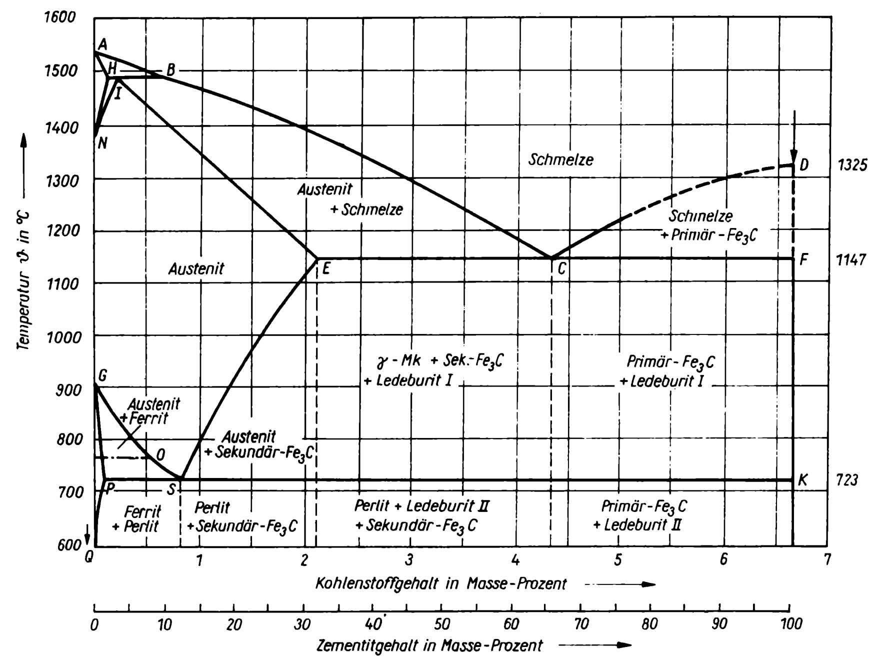


Bild 17. System Fe—Fe₃C mit Gefügebezeichnungen

Die Austenitumwandlung und das sich um Größenordnungen unterscheidende Lösungsvermögen des Austenits und Ferrits für Kohlenstoff bilden die funktionelle Grundlage für einige wesentliche Wärmebehandlungsverfahren (z. B. Härten, Normalglühen).
Neben dem metastabilen System Fe—Fe_3C existiert das stabile System Fe—C.

Werkstoffbeispiele. Metastabiles System: Stahl, weißes Gußeisen: *stabiles und metastabiles System:* grau erstarrtes Gußeisen, Temperguß.

2.1.4.3. Dreistofflegierungen

An Dreistoff- oder ternären Legierungen sind drei Komponenten A, B und C beteiligt, deren Konzentration durch eine Fläche dargestellt wird. Als Konzentrationsfläche benutzt man ein gleichseitiges Dreieck, das *Konzentrationsdreieck* (Bild 18a), dessen Seiten *a*, *b* und *c* die Konzentrationsachsen der drei Systeme A—B, B—C und C—A, aus denen sich das ternäre System aufbaut, darstellen.
Die Zusammensetzung einer bestimmten Legierung wird durch die Lage des *Konzentrationspunkts K* (Bild 18b) im Konzentrationsdreieck angegeben. Seine Koordinaten heißen *Dreieckskoordinaten.*

Konstruktion der Dreieckskoordinaten. Zieht man durch einen Punkt *K* (Bild 18b) des gleichseitigen Dreiecks *ABC* die Seitenparallelen, so erhält man drei gleichseitige Teildreiecke T_A, T_B und T_C sowie drei dazwischenliegende Teilparallelogramme. Die Teildreiecksseiten s_A, s_B und s_C sind die Dreieckskoordinaten des Punkts *K*.

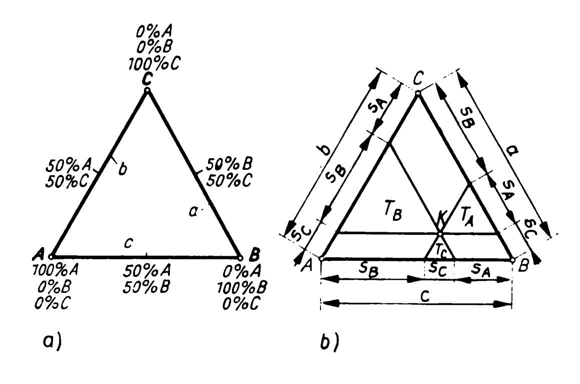


Bild 18. Konzentrationsdreieck eines Dreistoffsystems. a) Bezeichnung der Konzentrationsachsen; b) Konstruktion der Dreieckskoordinaten

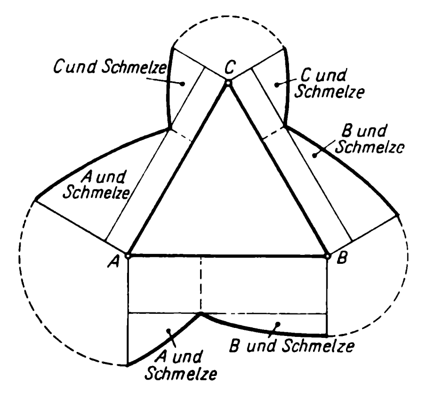


Bild 19. Konzentrationsdreieck mit „umgeklappten" Randsystemen

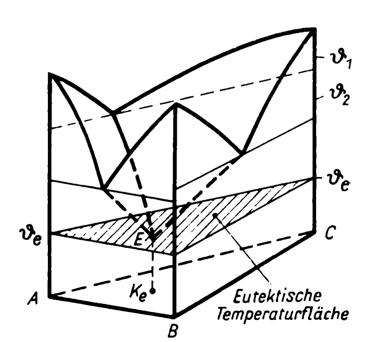


Bild 20. Räumliches ternäres Zustandsdiagramm mit Eutektikum (idealisiert)

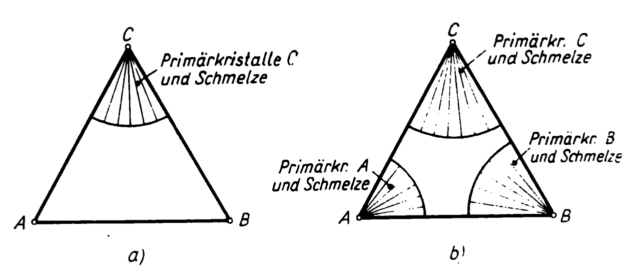


Bild 21. Isotherme Schnitte. a) in Höhe von ϑ_1 (Bild 20); b) in Höhe von ϑ_2 (Bild 20)

Konzentrationsachsen und Konzentrationspunkt. Die Seiten *a*, *b* und *c* des Dreiecks *ABC* sind gleich der Summe der Dreieckskoordinaten s_A, s_B und s_C. Nimmt man nun an, daß s_A, s_B und s_C die Konzentrationen der Komponenten A, B und C eines Dreistoffsystems sind, so sind *a*, *b* und *c* die Konzentrationsachsen und *K* der Konzentrationspunkt dieses Systems.
Im Bild 19 sind die drei Randsysteme, um die Konzentrationsachsen in die Zeichenebene hineingedreht, dargestellt. Angenommen wurden drei eutektische Systeme zwischen den Komponenten A, B und C.

Das (räumliche) ternäre Zustandsdiagramm (Bild 20) erhält man, indem die Randsysteme hochgeklappt werden. Aus den Liquidus- und Soliduslinien werden *Liquidus-* und *Solidusflächen*. Über das Verhalten einer Legierung von der Zusammensetzung K_1 informieren dann die Durchstoßpunkte der Konzentrationssenkrechten mit der Liquidus- und Solidusfläche. Diese Schnitte dienen zur Ermittlung von Mengenverhältnissen zwischen den Komponenten. Man unterscheidet *isotherme Schnitte* und *Schnitte parallel zur Temperaturachse.*

Isotherme Schnitte (Bild 21), auch Schnitte gleichbleibender Temperatur genannt, werden parallel zum Konzentrationsdreieck für eine bestimmte Temperatur durch das räumliche Zustandsdiagramm des ternären Systems gelegt. Sie schneiden die Liquidus- und Solidusflächen so, daß die Schnittlinien als ebene Kurven in der Schnittebene erscheinen. Auf diesen Kurven (Isothermen) liegen miteinander im Gleichgewicht stehende Phasen, deren Mengenverhältnis durch das Hebelgesetz bestimmt werden kann.

Schnitte parallel zur Temperaturachse (Konzentrationsschnitte, vertikale Schnitte oder sogenannte quasibinäre Schnitte) werden oft zur Verdeutlichung bestimmter Vorgänge bei Dreistofflegierungen, z. B. Fe—C—Si (Bild 22), Al—Mg—Si usw., verwendet.

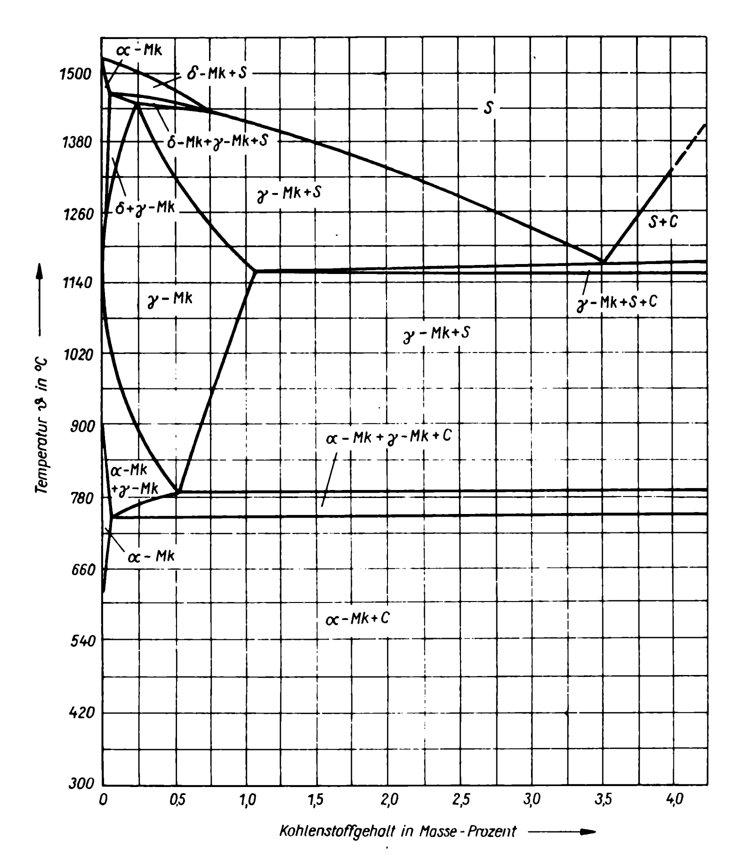


Bild 22. Quasibinärer Schnitt durch das Zustandsdiagramm des ternären Systems Fe—C—Si bei 2,4% Si

2.1.5. Verformung und Rekristallisation

2.1.5.1. Elastische und plastische Verformung

Maßgebend für die Formbarkeit eines Metalls ist sein elastisches und plastisches Verhalten. Die Grenzen beider Bereiche werden beispielsweise für eine reale Zugbeanspruchung prismatischer Körper durch den Zugversuch*) ermittelt.

Elastischer Bereich. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist die Streckgrenze, die Bereiche der elastischen und plastischen Formänderung in erster Näherung voneinander abtrennt, kenntlich gemacht.

Plastischer Bereich. Die Dehnung eines über die Streckgrenze hinaus belasteten Stabs geht nach Rückgang der Belastung nicht zurück; der Stab erleidet eine dauernde Formänderung. Für die Kaltumformung ist daher nur der Bereich oberhalb der Streckgrenze von praktischer Bedeutung.**)

2.1.5.2. Vorgänge und Eigenschaftsänderungen bei plastischer Verformung (Kaltumformung)

Die Verfahren einer beabsichtigten Formänderung faßt man unter dem Begriff *Umformen* zusammen.

An Schliffbildern kalt umgeformter Metalle sieht man, daß die Kristallite in Richtung der Umformung eine Streckung erfahren haben, die dem Umformgrad etwa proportional ist. Der kristalline Charakter und der Gittertyp des Metalls bleiben jedoch unverändert.

Grob stellt sich der Umformvorgang innerhalb eines Kristallits so dar, daß sich einzelne Gitterbereiche (plattenförmige „Gleitpakete") auf den kristallografisch definierten *Gleitebenen* in bestimmten Gleitrichtungen gegeneinander verschieben. Je höher die Symmetrie eines Raumgitters ist, um so mehr Gleitebenen und Gleitrichtungen können sich ausbilden, und um so größer ist demnach das Formänderungsvermögen. Das zeigt das Beispiel der Metalle mit kfz-Gitter, z. B. Au, Ag, Pb, Cu, Ni, Al, die sich alle zu dünnsten Drähten oder Folien umformen lassen. Genauer betrachtet, erfolgt das Gleiten nicht auf der ganzen Fläche der Gleitpakete, sondern durch einzelne Sprünge von Atomen, sogenannte *Versetzungen*, die andere nach sich ziehen. So wandert eine Versetzungsfront entlang der Gleitebene durch den Kristall hindurch. Die Gleitung beginnt auf den Gleitebenen, die in Richtung der maximalen Schubspannung liegen, und ergreift bei weiter zunehmender Beanspruchung schließlich alle Kristallite (Bild 23).

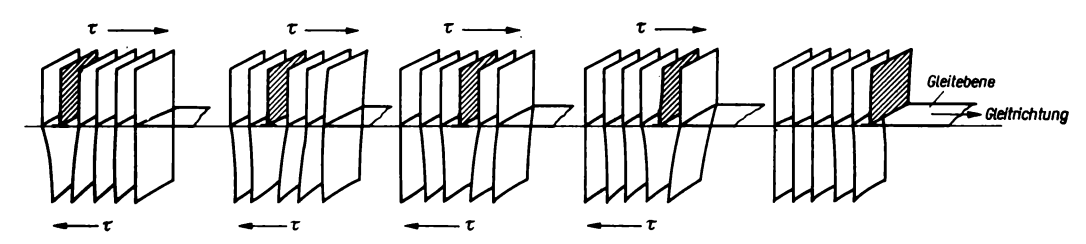


Bild 23. Wanderung einer Stufenversetzung

Verformungstextur. Bei stärkerer Beanspruchung drehen sich die Gleitebenen außerdem noch in die Beanspruchungsrichtung ein. Dadurch erhalten die Kristallite eine mehr oder weniger gleiche Orientierung im Gefüge. Es kommt zur Ausbildung einer Verformungstextur. Bild 24 zeigt eine solche für ein kubisches Gitter, bei dem die Raumdiagonale in die Verformungsrichtung eingeschwenkt ist. Bei Vielkristallen stören die Korngrenzen den gleichmäßigen Ablauf der Gleitung.

Die Gleitung kann innerhalb eines bestimmten Gleitsystems einen Grenzwert nicht überschreiten, ohne daß der Zusammenhalt des Gitters verlorengeht. Der Kraftaufwand muß mit zunehmendem Umformgrad

*) siehe Abschn. Werkstoffprüfung

**) Auf den praktisch wenig brauchbaren Begriff der *Elastizitätsgrenze* wird verzichtet.

immer größer werden, damit weitere Gleitsysteme wirksam werden. Ein bereits kaltumgeformtes Metall läßt sich deshalb schwieriger weiterformen als ein geglühtes, es ist härter und fester geworden. Diese typische Erscheinung bei Metallen nennt man *Verfestigung* (Tabelle 6). Kaltverfestigte Bleche oder Drähte widerstehen höheren Belastungen als geglühte.

Will man größere Umformgrade erreichen, dann muß oftmals eine *Zwischenglühung* (*Rekristallisationsglühung*) erfolgen, damit das Metall wieder weich und formbar wird.

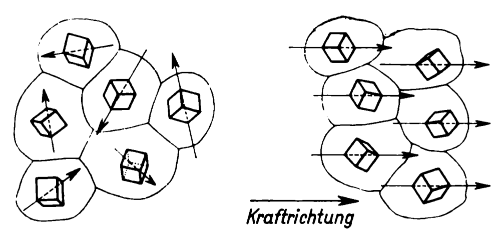


Bild 24. Schematische Darstellung der Entstehung einer Verformungstextur

Tabelle 6. Tendenzen der Eigenschaftsänderung durch Kaltumformung

Eigenschaft	Nach der Behandlung	Eigenschaft	Nach der Behandlung
Streckgrenze	größer als vorher	Bruchdehnung	kleiner als vorher
Brinellhärte	größer als vorher	Tiefziehbarkeit	kleiner als vorher
Zugfestigkeit	größer als vorher	Elektrisches Leitvermögen	kleiner geworden (stark bei W und Mo)
Korrosionsbestreben	größer als vorher		
Koerzitivfeldstärke (magnetische Metalle)	stark erhöht bei ferromagnetischen Werkstoffen (Abnahme der Permeabilität)	Thermische Urspannung	größer oder kleiner als vorher
		Gitterkonstante	konstant geblieben

2.1.5.3. Kristallerholung und Rekristallisation

Die Erwärmung kaltverformter metallischer Werkstoffe führt oberhalb bestimmter Temperaturgrenzen zur teilweisen und schließlich zur völligen Beseitigung des instabilen Zustands. Damit erhält man Eigenschaftswerte zurück, wie sie vor der Kaltverformung vorhanden waren. In der ersten Phase, der *Kristallerholung*, ist eine strukturelle Veränderung, z. B. durch die Messung des spezifischen elektrischen Widerstands, nachweisbar.
Nach Ablauf der relativ komplizierten und nur am Realkristall erklärbaren Vorgänge der Kristallerholung kommt es bei höheren Temperaturen zur Kristallneubildung. Diese zweite Phase bezeichnet man als *Rekristallisation*. Ausgehend von einer Keimbildungsphase kommt es zu einem Kornwachstum, und schließlich entsteht unter Aufzehrung des kaltverformten Gefüges ein neues Gefüge. Dieser Vorgang ist mit erheblichen Änderungen aller bei der Kaltverformung erzielten Stoffeigenschaften verbunden (Tabelle 6).

Das Verfahren, mit dem diese Eigenschaftsänderungen erzielt werden (z. B. zwischen den Stufen einer mehrstufigen Kaltumformung), nennt man *Rekristallisationsglühen*.

Der Vorgang der Rekristallisation gliedert sich in:

– Keimbildung
– Kornwachstum
– Kornvergröberung
} *Primärrekristallisation*
– *Sekundärrekristallisation*

Die Primärrekristallisation kann als abgeschlossen angesehen werden, wenn sich die Kornflächen der neugebildeten Kristallite allseitig berühren. Technisch unerwünscht ist die Sekundärrekristallisation. Sie ist mit einer extremen Kornvergröberung verbunden.

Die Ausbildung des Gefüges, besonders die Korngröße, ist für die Eigenschaften des rekristallisierten Metalls sehr wichtig. Folgende Faktoren bestimmen die Korngröße (Bild 25):

Grad der vorangegangenen Kaltumformung. Je stärker das Metall umgeformt wurde, um so mehr Keime sind vorhanden, um so feinkörniger wird also das Rekristallisationsgefüge. Allerdings ist ein bestimmter kritischer Umformgrad (z. B. bei Al 2···3%, bei weichen Stählen 8···12%) erforderlich, damit überhaupt Rekristallisation eintritt. Bei diesem kritischen Umformgrad wird das Gefüge besonders grobkörnig sein.

Rekristallisationstemperatur. Mit zunehmender Rekristallisationstemperatur steigt im allgemeinen die Korngröße. Am günstigsten ist deshalb eine Glühung dicht oberhalb der Rekristallisationsschwelle. Überhitzung führt zu Grobkornbildung.

Glühdauer. Je länger man glüht, um so mehr besteht die Gefahr, daß einzelne Kristallite auf Kosten anderer, auch bereits kristallisierter, weiterwachsen. Die damit verbundene Kornvergröberung führt zu ungünstigen mechanischen Eigenschaften.

Wirkung von Fremdstoffen. Sehr saubere, reine Metalle neigen besonders zur Grobkornbildung. Bei Legierungen mit heterogenem Gefüge oder bei Anwesenheit einer rekristallisationshemmenden Korngrenzensubstanz ist diese Gefahr geringer.

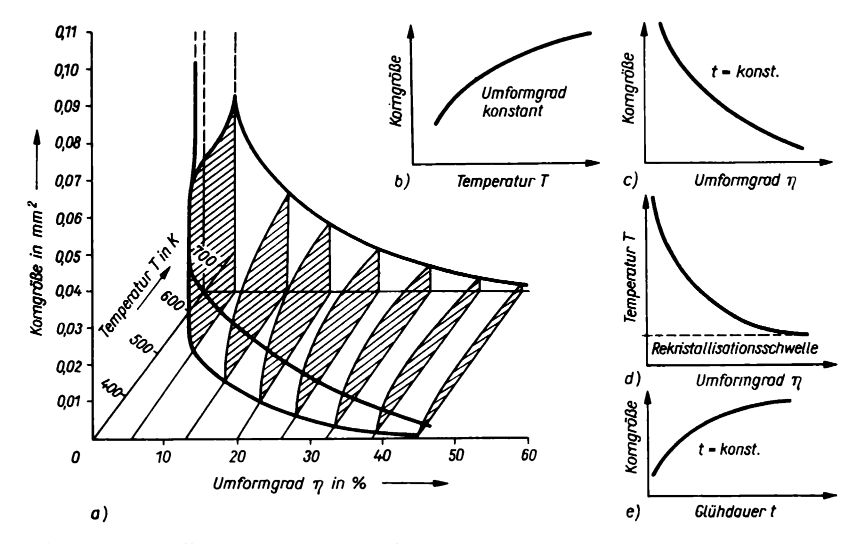


Bild 25. Rekristallisationsdiagramm üblichen Typs. a) Zusammenhang Umformgrad, Glühtemperatur und entstehende Korngröße; b) Korngröße in Abhängigkeit von der Temperatur bei konstantem Verformungsgrad; c) Korngröße in Abhängigkeit vom Umformgrad bei konstanter Temperatur: d) Temperatur in Abhängigkeit vom Umformgrad, bezogen auf eine bestimmte Korngröße; e) Einfluß der Glühdauer

Die wichtigsten Einflüsse auf die Korngröße sind Rekristallisationstemperatur und Umformgrad. Ihre Einflüsse faßt man im *Rekristallisationsdiagramm* zusammen (Bild 25a). Da es nicht alle Einflüsse berücksichtigt, hat es für die Praxis jedoch nur bedingten Wert. Damit man ein feines Rekristallisationsgefüge erhält, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein (gilt für Primärrekristallisation):

hoher Umformgrad; Glühung dicht oberhalb der Rekristallisationsschwelle; Einhaltung der richtigen Glühzeit.

Durch Rekristallisation werden die Eigenschaftsänderungen infolge der Kaltumformung wieder aufgehoben, insbesondere wird das Metall wieder weich und formbar. Bei manchen Metallen liegt die Rekristallisationsschwelle unterhalb der Raumtemperatur, z. B. bei Pb und Sn; solche Metalle lassen sich deshalb auch nicht bei Raumtemperatur verfestigen.

2.1.5.4. Verformung oberhalb der Rekristallisationsschwelle (Warmumformung)

Um ein Metall warm umformen zu können, bedarf es einer Erwärmung auf eine Temperatur, die oberhalb seiner Rekristallisationsschwelle liegt. Da letztere vom Schmelzpunkt des Metalls abhängig ist, ist der jeweils erforderliche Umformtemperaturbereich spezifisch für das betreffende Metall (Tabellen 3 und 7).

Tabelle 7. Mindestrekristallisationstemperaturen verschiedener Metalle

Metall	Rekristallisations-temperatur in °C	Metall	Rekristallisations-temperatur in °C
Aluminium	150	Zinn	0
Kupfer	250	Tantal	1000
Eisen	450	Wolfram	1200
Nickel	600	Zink	20.
Blei	0		

Die bei Warmumformung sofort einsetzende Rekristallisation macht eine Verfestigung unmöglich. Deshalb und weil das Formänderungsvermögen bei höherer Temperatur ohnehin besser ist, lassen sich bei *Warmumformung* viel höhere Umformgrade bei geringerem Kraftaufwand erreichen.

2.1.6. Korrosion und Oberflächenschutz

Literatur: [4, 8, 10, 71, 79]

Unter *Korrosion* (*Metallkorrosion*)[1]) wird die von der Oberfläche ausgehende chemische oder elektrochemische Reaktion eines Metalls mit seiner Umgebung verstanden. Es ist dabei gleichgültig, in welcher Form diese Reaktion in Erscheinung tritt.

2.1.6.1. Chemische Korrosion

Unter *chemischer Metallkorrosion* versteht man einen Angriff in einem elektrisch schlecht- oder nichtleitenden Medium (z. B. trockene Gase, nichtwäßrige organische Flüssigkeiten), bei dem Oxydation und Reduktion in einem Vorgang erfolgen.

Die Metalle (außer Edelmetalle) sind in der Natur überwiegend in chemischen Verbindungen anzutreffen. Sie neigen unter den Bedingungen der Umwelt hauptsächlich zur Reaktion mit dem gasförmigen Sauerstoff der Luft. Die Reaktion eines Metalls bei der chemischen Korrosion ist eine Reaktion seiner Atome, die an der Oberfläche beginnt. Das *Korrosionsprodukt*, die chemische Verbindung, lagert sich an der Oberfläche ab und bildet oft sehr dünne Schichten, deren Vorhandensein nur mit empfindlichen Meßmitteln wahrgenommen werden kann. In größeren Dicken sind Korrosionsprodukte wegen ihrer Färbung mit bloßem Auge wahrnehmbar und lassen auch auf die Temperatur des Metalls schließen, da die Dicke der Schicht von der Temperatur und der Einwirkungsdauer der Atmosphäre abhängig ist (Anlaßfarben).

Die Temperaturabhängigkeit des Reaktionsablaufs entspricht einer Exponentialfunktion. Ähnlich der Schwingungsenergie der Atome wächst die Reaktionsgeschwindigkeit bei Temperaturerhöhung um 10···15 K auf das Dreifache. Das Wachstum der Schichtdicke verläuft in der Regel nach einem parabolischen oder logarithmischen Gesetz (Bild 26). Parabolische Gesetzmäßigkeit gilt vor allem für dicke Schichten. Hier kommt es auch leicht zum Abblättern der Schicht infolge Rißbildung, wodurch das angreifende Medium bis zur blanken Metalloberfläche vordringen und die bereits gebildete Schicht absprengen kann. Solche Schichten bieten keinen dauernden Korrosionsschutz.

Bei gewisser Dicke und Dichte der Deckschicht tritt jedoch bei bestimmten Metallen und Legierungen entsprechend dem Charakter der Metalle und des Reaktionsprodukts ein Stillstand im Reaktionsablauf ein (z. B. bei Al, Cr). Die Deckschicht wird zur Schutzschicht und macht das Metall oder die Legierung *passiv* (nicht reagierend) gegen das angreifende Medium.

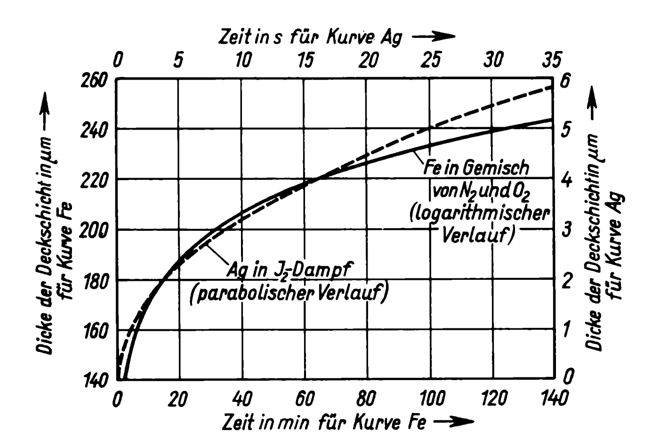


Bild 26. Beispiele für den Verlauf der Schichtbildung bei chemischer Korrosion

2.1.6.2. Elektrochemische Korrosion

Unter *elektrochemischer Metallkorrosion* versteht man den Angriff eines Metalls in Gegenwart eines Elektrolyten, wobei elektrische Ladungsträger auftreten. Die Gesamtreaktion besteht aus mindestens zwei gleichzeitig ablaufenden Teilreaktionen, einer anodischen, bei der Elektronen frei werden, und einer katodischen, bei der Elektronen gebunden werden.

Man versteht unter einem *Wasserstoffkorrosionstyp* eine Korrosionsreaktion, bei deren katodischer Teilreaktion Wasserstoff entsteht. Demgegenüber bezeichnet man mit *Sauerstoffkorrosionstyp* eine Korrosionsreaktion, bei der die katodische Teilreaktion in der Reduktion von Sauerstoff zu Hydroxidionen oder Wasser besteht.

Elektrolytischer Lösungsdruck. Zu dem charakteristischen Verhalten der Metalle gehört ihr Bestreben, positive Ionen (Kationen) an wäßrige Lösungen abzugeben. Dieses Bestreben wird elektrolytischer *Lösungsdruck* genannt. Er ist abhängig von der Art des Metalls und für edlere Metalle niedriger.

*Elektrochemische Spannungsreihe**). Dem elektrolytischen Lösungsdruck eines Metalls wirkt im Elektrolyten der *osmotische Druck*, d. h. das Bestreben der gelösten Metallionen, in den Gitterverband des Elektrodenmetalls wieder einzutreten, entgegen. Überwiegt bei einem Metall der Lösungsdruck den osmotischen Druck, so ist es *unedel*. Im umgekehrten Falle ist es *edel*.

Beispiel. Taucht man einen Zinkstab in eine Lösung aus Zinksulfat und einen Kupferstab in eine Lösung aus Kupfersulfat und verbindet die beiden Stäbe durch einen Draht elektrisch leitend, während die beiden Lösungen durch eine halbdurchlässige Wand voneinander getrennt werden, so zeigt ein in den Draht eingeschaltetes Meßinstrument eine elektrische Spannung an. Infolge des unterschiedlichen Verhältnisses von Lösungsdruck und osmotischem Druck haben die Stäbe (Elektroden) einen Potentialunterschied. Es liegt ein *galvanisches Element* vor, in dem chemische Energie in elektrische umgewandelt wird. Dabei löst sich der Zinkstab unter Entsendung von Zinkionen in den Elektrolyten auf, während sich am Kupferstab die äquivalente Menge der gelösten Kupferionen als das edlere der beiden Metalle im Gitterverband abscheidet.

*) siehe auch Abschn. CHEMIE, Elektrochemie

Tabelle 8. Normalpotentiale einiger Metalle bei 25 °C, bezogen auf die Normal-Wasserstoffelektrode

Galvanisches Halbelement	$K/K^{\cdot}$	$Na/Na^{\cdot}$	$Mg/Mg^{\cdot\cdot}$	$Al/Al^{\cdot\cdot\cdot}$	$Zn/Zn^{\cdot\cdot}$	$Fe/Fe^{\cdot\cdot}$
Potential in V	−2,925	−2,715	−2,34	−1,69	−0,77	−0,45
Galvanisches Halbelement	$Cd/Cd^{\cdot\cdot}$	$Co/Co^{\cdot\cdot}$	$Ni/Ni^{\cdot\cdot}$	$Sn/Sn^{\cdot\cdot}$	$Pb/Pb^{\cdot\cdot}$	$H_2/H^{\cdot}$
Potential in V	−0,40	−0,29	−0,25	−0,156	−0,132	±0
Galvanisches Halbelement	$Cu/Cu^{\cdot}$	$Hg/Hg^{\cdot\cdot}$	$Ag/Ag^{\cdot}$	$Pt/Pt^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$	$Au/Au^{\cdot\cdot\cdot}$	
Potential in V	+0,52	+0,7928	+0,7987	+1,20*)	+1,42*)	

*) Wert wegen Komplexionenbildung unsicher

Tafel 3. Einige Erscheinungsformen der Korrosion

Korrosionsart	Auswirkung
Ebenmäßige Korrosion	Die Reaktion schreitet, von der Oberfläche ausgehend, gleichmäßig fort (parallel zur Oberfläche).
Lochfraß	Das Grundmetall wird stellenweise lochartig an- und durchgefressen, wobei die übrige Oberfläche wenig oder gar nicht in Mitleidenschaft gerät.
Narbige Korrosion	Durch die Korrosion treten örtlich begrenzte narbenartige Schäden auf.
Interkristalline Korrosion	Von außen gar nicht oder kaum wahrnehmbar, da die Korrosion an den Korngrenzen verläuft.
Transkristalline Korrosion	Die Korngrenzensubstanz bleibt erhalten, denn die Korrosion bevorzugt das Korninnere.
Selektive Korrosion	Korrosionsangriff auf bestimmte Gefüge- oder Legierungsbestandteile.
Schichtkorrosion	Bei verformten Körpern! Korrosion, die bevorzugt parallel zur Verformungsrichtung eines Metalles fortschreitet.

Wenn man eine bestimmte Bezugselektrode wählt (die sogenannte *Normal-Wasserstoffelektrode*, deren Potential man gleich Null setzt), dann kann man jedem Metall ein bestimmtes *Normalpotential* (Tabelle 8) zuschreiben. Ordnet man die Metalle nach diesem Normalpotential, so erhält man die *elektrochemische Spannungsreihe* der Elemente. Alle Metalle links vom Wasserstoff (mit negativem Potential) sind unedler als dieser, sie lösen sich in Säuren unter Wasserstoffentwicklung auf. Die nachfolgenden Metalle sind edler als Wasserstoff.

Allerdings kennzeichnet die Stellung eines Metalls in der Spannungsreihe nicht immer das tatsächliche Korrosionsverhalten. Dieses wird vielmehr oft von sekundären Erscheinungen, besonders von der Bildung dichter Schutzschichten aus dem betreffenden Korrosionsprodukt (Passivierung), bestimmt. So ist nach der Spannungsreihe Al sehr unedel, doch widersteht es vielen Korrosionsangriffen durch Bildung einer Schutzschicht aus Al_2O_3.

Die meisten Korrosionserscheinungen der Praxis haben elektrochemische Ursachen (Tafel 3).

2.1.6.3. Allgemeines über den Schutz gegen Korrosion (Oberflächenschutz)[2]

Natürlicher Oberflächenschutz und Legieren

Die Oberflächenstruktur eines Metalls ist niemals vollständig gleichförmig. Sie weist Bearbeitungsspuren, Vertiefungen, örtliche Verformungs- und Verfestigungsstellen, Einschlüsse von Fremdstoffen usw. auf. Diese Stellen der Oberfläche, besonders Verformungsstellen, korrodieren bevorzugt. Das ist durch den unterschiedlichen elektrolytischen Lösungsdruck solcher Stellen erklärt. Also müssen sich bei Gegenwart eines Elektrolyten an der Oberfläche der Metalle eine Vielzahl von kleinsten galvanischen Elementen (*Lokalelementen*) befinden.

Es gibt kein Metall, das absolut korrosionsfest ist. Unter elektrochemischen und chemischen Einflüssen entstehen jedoch Reaktionsprodukte, die sich u. U. als gleichmäßige Schicht an der Oberfläche der Metalle ablagern und so ein weiteres Korrodieren verhindern können, wenn sie homogen, dicht und frei von Rissen sind. Die schützenden Eigenschaften sind abhängig vom Metall und vom angreifenden Medium und nicht allen Metallen eigen, so daß wirksame Deckschichten nur in wenigen Fällen erzielt werden. Es gelingt aber häufig, die Eigenschaften auf andere Metalle zu übertragen.

Beispiel. Eisen besitzt weder große Beständigkeit gegenüber Luft noch gegenüber Wasser. Durch Zulegieren von mehr als 13% (Resistenzgrenze) Chrom erhält man einen sehr beständigen Fe—Cr-Mischkristall (nichtrostender Stahl).

Auch die *Zunderbeständigkeit* wird durch Zulegieren von Cr, Al und Si weitgehend beeinflußt, da sich die Legierungsanteile infolge ihres geringen Diffusionsvermögens langsam an der Oberfläche anreichern und so das Grundmetall passivieren.

Möglichkeiten des Metallschutzes

Aus dem Korrosionsverhalten der Metalle im Zusammenhang mit den angreifenden Medien ergeben sich verschiedene Möglichkeiten zum Schutz der Metalle vor Korrosionseinflüssen. Bei der Beurteilung der Wirksamkeit einer Schutzschicht darf nicht vergessen werden, daß die Metallteile bestimmte mechanische Funktionen zu erfüllen haben und daher auch die mechanische Beanspruchung eine wesentliche Rolle bei der Beurteilung der Brauchbarkeit eines Korrosionsschutzes spielt.
Grundsätzlich geht es stets darum, das Metall gegen das angreifende Medium resistent zu machen. Diese Resistenz kann erreicht werden durch:

- geeignete Auswahl des Metalls im Hinblick auf das angreifende Medium und sonstige Beanspruchung;
- Funktionskopplung zwischen Grundmetall und Schutzmetall;
- geeignete Beeinflussung des angreifenden Mediums;
- isolierende, Metall und angreifendes Medium trennende Schutzschichten.

2.1.6.4. Oberflächenschutztechnik

Vorbehandlung. Vor der Behandlung der Metalle mit Korrosionsschutzmitteln muß ihre Oberfläche vollständig sauber sein. Ziel der Vorbereitung ist es in jedem Fall, die Oberfläche von sämtlichen Verunreinigungen zu befreien. Die Art der Vorbereitung ist daher von der Art der Verunreinigung abhängig.

Metallischer Oberflächenschutz

Schmelztauchen[3]). Halbzeuge oder Fertigteile werden in das flüssige Überzugsmetall getaucht. Es finden hierfür vorwiegend Metalle mit niedrigem Schmelzpunkt Anwendung (Zn, Sn, Pb). Die Einfachheit und das Ausfüllen von Poren und Unebenheiten im Grundmetall sind Vorteile des Verfahrens. Die *Feuerverzinkung* besitzt mit Abstand die größte Bedeutung hinsichtlich der Anwendung der Verfahren des metallischen Oberflächenschutzes (Tabelle 9, Bild 27).

Tabelle 9. Tauchverfahren für metallische Überzüge

Verfahren	Verwendung
Feuerverzinken	Bleche, Bänder, Rohre, Drähte, Baubeschläge, Fässer, Behälter usw.
Feuerverzinnen	Apparate und Geräte der Nahrungs- und Genußmittelindustrie
Feuerverbleien	Schutz gegen Rauchgase, Seewasser und H_2SO_3. (Dem Blei müssen andere Metalle, z. B. Antimon, zugesetzt werden, damit es an Fe haftet.)



Bild 27. Oberfläche von verzinktem Stahlblech (einzelner Kristallit hervorgehoben)

Thermochemische Verfahren (siehe unter Eisenwerkstoffe, thermische Verfahren)

Spritzen. Das Überzugsmetall gelangt als Draht in eine Spritzpistole, wo es geschmolzen und durch Druckluft auf das Grundmetall geschleudert wird. Überzugsmetalle haben niedrigen Schmelzpunkt. Man bevorzugt Aluminium und Aluminiumlegierungen; aber auch Kupferlegierungen werden verwendet. Das Verfahren ist sehr einfach zu handhaben. Man braucht auf die Gestalt der Oberfläche keine Rücksicht zu nehmen. Der Überzug hat allerdings keine gleichmäßige Dicke, ist wenig beständig und hat körniges Gefüge.

Plattieren. Das Schutzmetall wird mechanisch (Walzen, Gießen) oder durch Diffusion (Legierungsbildung) aufgetragen. Im Vordergrund steht das Plattieren von Eisen und Stahl. Aber auch nicht korrosionsbeständige kupferhaltige Aluminiumlegierungen werden mit beständigeren Al-Legierungen oder Reinaluminium plattiert. Eisen und Stahl plattiert man in erster Linie mit resistenten Stählen und Nickel.

Galvanische Überzüge[4][5]). Das Werkstück wird als Katode in eine Lösung gehängt, in der das Salz des Überzugsmetalls gelöst vorliegt. Als Anode verwendet man eine Elektrode aus Überzugsmetall oder eine unlösliche Elektrode; durch Galvanisieren sind bei sparsamstem Metallverbrauch vollkommen gleichmäßige Schutzschichten, unabhängig von der Werkstückform, erzielbar. Das Verfahren ist auch für Überzugsmetalle verwendbar, die einen hohen Schmelzpunkt haben und auf anderem Wege auf Metalle mit niedrigerem Schmelzpunkt gar nicht aufgebracht werden könnten, und garantiert Haftfestigkeit und Maßhaltigkeit. Nachteilig wirkt sich die Porigkeit der Überzüge (außer Zink und Kadmium) aus (Verwendung s. Tabelle 10).

Tabelle 10. Galvanische Behandlung von Eisen, Zink und Aluminium

Grundmetall	Überzugs-metall	Besonderheiten
Eisen und Eisen-legierungen, Zink	Kupfer	im Kaliumzyanidbad Schichtdicke beschränkt, Verstärkung im sauren Bad möglich, begrenzter Rostschutz
	Nickel	erst Kupferschicht, dann in schwach saurem Bad behandeln, gut anlaufbeständig, wenig rostschützend
Eisen, Zink und Aluminium (hart)	Chrom	nur auf geschliffenem Stahl ohne Zwischenschicht rostschützend, Hartverchromung ohne Zwischenschicht für verschleißfeste Oberflächen, als Rostschutz auf Zwischenschichten von Kupfer und Nickel ausgezeichnet anlaufbeständig
Eisen und Eisen-legierungen	Zink	sehr guter Rostschutz, mäßig anlaufbeständig, alkalische und saure Bäder, Glanzverzinkung an Stelle der Vernicklung
	Kadmium	sehr guter Rostschutz, mäßig anlaufbeständig, Kaliumzyanidbäder
	Zinn	geringer Rostschutz, gut anlaufbeständig, saure und alkalische Bäder

Nichtmetallischer Oberflächenschutz

Allgemeine Anforderungen. Gas- und Dampfundurchlässigkeit; Übereinstimmung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Überzugs mit dem des Grundmetalls bzw. genügende Elastizität zum Ausgleichen von Wärmedehnungen; gutes Haftvermögen; Unlöslichkeit gegenüber den zu erwartenden Angriffsmedien; passives Verhalten gegenüber dem Grundmetall.

Anstrichstoffe[6])[7])[8]). Etwa 75% aller zu schützenden Flächen werden mit verschiedenen Anstrichstoffen der Lack- und Farbenindustrie versehen.

Oxidschichten. Bei Stahl und Eisen ist durch Oxidschichten allein kein besonderer Korrosionsschutz zu erzielen. Aluminium bildet an der Luft selbst eine korrosionspassive Oxidschicht, die auf chemischem oder elektrochemischem Wege verstärkt werden kann. Üblich ist besonders das letztere; es wird als anodische Oxydation bezeichnet (auch Eloxalverfahren).

Chemische Verfahren. Zink und Zinklegierungen können bei 12···15°C in Dichromatlösungen getaucht werden. Dies ergibt guten Korrosionsschutz, die Schicht ist aber nicht abriebfest. Elektrochemisches *Chromatieren*[9]) führt zu abriebfesten und dickeren Chromatüberzügen.

Emaillieren. Es findet vorwiegend für Stahl und Gußeisen Verwendung, aber auch für andere Metalle mit hohem Schmelzpunkt. Der Emailleüberzug hat glasartigen Charakter, ist recht beständig gegen chemische Angriffe, aber stoß- und schlagempfindlich.

Phosphatieren[10]). Vorwiegend bei Stahl wird durch dieses Verfahren ein gewisser Oberflächenschutz durch die Bildung von Phosphatüberzügen erzielt.



2.2. Eisenwerkstoffe*)

Literatur: [11, 13, 17, 18, 19, 20, 24, 39, 40, 47, 53, 65, 77]

2.2.1. Reineisen

Reineisen ist ein weiches, sehr gut plastisch formbares Metall. Aufgrund seiner niedrigen Festigkeitseigenschaften ist seine Anwendung in der Technik auf Sonderfälle begrenzt. Als Weicheisen findet es Verwendung für Dichtungen, als weichmagnetischer Werkstoff in der Elektrotechnik (Relaiseisen) usw.; hauptsächlich bildet Reineisen jedoch das Ausgangsmaterial für Sonderlegierungen.

2.2.2. Stahl und Stahlguß

Ausgangsprodukt für die Stahlgewinnung ist das im Hochofenprozeß*) erschmolzene *weiße Roheisen.* Im Frischprozeß der Stahlerzeugung erfolgt die Reduzierung des Kohlenstoffgehalts auf Werte unter 2,06%. Die übrigen, zum Teil unerwünschten Beimengungen anderer Elemente im Roheisen werden auf ein Minimum gebracht. Der gewünschte Gehalt an bestimmten Zusätzen wird gesteuert.

Unlegierte Stähle (*Kohlenstoffstähle*) liegen vor, wenn folgende Anteile der Beimengungen (*Stahlbegleitelemente*) nicht überschritten werden:

0,1% Al; 0,2% Cu; 0,8% Mn; 0,45% Si; 0,1% Ti; 0,1% P; 0,06% S.

Die Eigenschaften unlegierter Stähle werden wesentlich durch den C-Gehalt bestimmt. So steigen Zugfestigkeit, Streckgrenze und Dauerfestigkeit mit zunehmendem C-Gehalt, während Zähigkeit, Umformbarkeit und Schweißbarkeit verringert werden.

Nach der typischen Wärmebehandlung teilt man ein:

— *Baustähle* (Maschinenbaustähle)
1. Einsatzstähle, 0,1···0,2% C
2. Vergütungsstähle, 0,3···0,6% C
— *Werkzeugstähle,* 0,6···1,7% C

Annähernd besitzt diese Einteilung auch Gültigkeit für legierte Stähle, die für Wärmebehandlung vorgesehen sind.

Unlegierte Stähle herrschen im Stahlbau (Tabellen 11 und 12) und im allgemeinen Maschinenbau (Tabellen 21, 22, 23) vor. Auch für viele Werkzeuge werden unlegierte Stähle verwendet (Tabelle 13). Liegen die oben genannten Elemente mit höheren Gehalten vor oder sind weitere Zusätze vorhanden, so spricht man von *legierten Stählen.* Typische Einflüsse der wichtigsten Legierungselemente faßt Tabelle 14 zusammen.
Kennzahlen und Kennfarben von Stählen siehe in [12]).

2.2.2.1. Stähle — geordnet nach ihrer Hauptbeanspruchung

Bei *Konstruktionsstählen* werden im wesentlichen folgende Eigenschaften gefordert: hohe Festigkeit bei guter Zähigkeit, Verschleißfestigkeit, Korrosionsbeständigkeit, Hitzebeständigkeit.

Ausführliche Informationen über die Zusammensetzung, Eigenschaften sowie Be- und Verarbeitbarkeit der Stähle sind den einschlägigen Standards, den Lieferkatalogen und der angeführten weiterführenden Literatur zu entnehmen.
Die in den Tabellen 11 bis 23 näher bezeichneten Verwendungsgruppen tragen nur Beispielcharakter.

Warmfestigkeit. Warmfeste Stähle haben auch bei höheren Temperaturen (bis 550 °C) noch ausreichende Festigkeitseigenschaften; sie weisen ferritisch-perlitisches Gefüge auf. Unlegierte oder niedriglegierte

*) über Eisen und Eisenmetallurgie siehe auch Abschn. CHEMIE.

Stähle mit ferritisch-perlitischem Gefüge sind bis zu Temperaturen von 350 °C verwendbar. Sie enthalten bis 1,5% Mn und geringe Mengen von Cr, Mo und Ni. — Niedriglegierte ferritisch-perlitische Stähle enthalten Legierungszusätze von Cr, Mo und V. Sie sind bis zu Temperaturen von 550 °C einsetzbar und werden im geglühten oder vergüteten Zustand verwendet. Verwendungsgebiete liegen im Dampfkessel- und Turbinenbau sowie in der chemischen Industrie.
Hochwarmfeste Stähle werden bei Temperaturen über 550 °C verwendet. Sie haben überwiegend austenitisches Gefüge. Die hochwarmfesten Stähle haben als Basis Cr—Ni, Cr—Ni—Co und Cr—Co. Sie enthalten außerdem einen oder mehrere der folgenden Legierungsbestandteile: Si, Mn, Mo, W, V, Nb, Ta, Ti, Cu und Al. Ist Zunderbeständigkeit erforderlich, so wählt man höhere Gehalte an Cr, Si und Ni. Die Eigenschaften der hochwarmfesten Stähle werden an Hand der Zeitdehnungsgrenze und der Zeitstandfestigkeit (Prüfzeiten > 10000 h) bei den entsprechenden Temperaturen beurteilt.
Hochschmelzende Metalle. Für Temperaturen über 1000 °C verwendet man Legierungen hochschmelzender Metalle.

Verschleißfestigkeit. Verschleißfeste Stähle sind solche, die auf Grund ihrer Zusammensetzung und Gefügeausbildung beständig gegen Reibbeanspruchung sind.
Niedriglegierte Stähle enthalten Mn (≈ 1%), Mn + Si oder Cr. Das Gefüge ist *perlitisch.* Sie werden für Schienen, Gleitbahnen, Spindeln, Rutschen u. ä. verwendet. *Austenitische* verschleißfeste Stähle sind gegen Druckbeanspruchung besonders widerstandsfähig und eignen sich deshalb sehr gut für Kaltverfestigung. Bekannt ist der Mn-Hartstahl mit 1,2% C und 12,5% Mn. — *Ledeburitische* Stähle mit 12% Cr sind wegen des hohen Karbidanteils im Gefüge gegen Abrieb beständig.

Tabelle 11. Allgemeine Baustähle[11]) (nach [4])

Gütegruppe	Stahlmarke*)	C-Gehalt in %	Streckgrenze σ_S in MPa mindestens für Dicken			Zugfestigkeit σ_B in MPa	Bruchdehnung in %	
			20 mm	20 ··· 40 mm	40 ··· 100 mm		δ_5	δ_{10}
1	St 33	keine Forderungen				≧ 330	22	18
	St 34	≦ 0,15	220	210	200	340 ··· 420	30	26
	St 38	≦ 0,20	240	230	220	380 ··· 470	25	21
	St 38S	≦ 0,20	240	230	220	380 ··· 470	25	21
	St 42	≦ 0,24	260	250	240	420 ··· 520	23	19
	St 50	≈ 0,32	300	250	280	500 ··· 620	19	15
	St 60	≈ 0,44	340	330	320	600 ··· 720	14	11
	St 70	≈ 0,55	370	360	350	700 ··· 850	10	8
2	St 34u-2 St 34hb-2 St 34b-2	0,09 ··· 0,15	wie St 34			wie St 34		
	St 38u-2 St 38hb-2 St 38b-2	0,12 ··· 0,20	wie St 38			wie St 38		
	St 42u-2 St 42hb-2 St 42b-2	0,17 ··· 0,24	wie St 42			wie St 42		
	St 50-2	0,28 ··· 0,37	wie St 50			wie St 50		
	St 60-2	0,38 ··· 0,49	wie St 60			wie St 60		
	St 70-2	0,50 ··· 0,62	wie St 70			wie St 70		
3	St 34-3	0,09 ··· 0,15	wie St 34			wie St 34		
	St 38-3	0,12 ··· 0,18	wie St 38			wie St 38		
	St 42-3	0,15 ··· 0,22	wie St 42			wie St 42		
	St 52-3	0,14 ··· 0,20	360**)	350***)	340****)	520 ··· 620	22	18

*) u unberuhigt, b beruhigt, hb halbberuhigt vergossen
) für Dicken bis 16 mm, *) für Dicken 16 ··· 30 mm, ****) für Dicken 30 ··· 50 mm

Tabelle 12. Anwendungsbeispiele für allgemeine Baustähle[11]) (nach [4])

Stahlmarke	Verwendung
St 33	Geländer, Abdeckplatten, Distanzbuchsen, Lenkrollen. Für Schweißkonstruktionen nicht geeignet!
St 34	Schmiedestücke, Schrauben, Bolzen, Flansche
St 34u-2	spanlos kaltumzuformende Teile, z. B. Felgen
St 38	Schweißkonstruktionen niedriger statischer Beanspruchung bis 12 mm Dicke, Schraub- und Nietkonstruktionen, sonst wie St 33
St 38S	statisch beanspruchte Schweißkonstruktionen, Schraub- und Nietkonstruktionen
St 38u-2 St 38hb-2 St 38b-2	tragende Bauteile in Schweißkonstruktionen
St 38-3 St 42-3	dynamisch hochbeanspruchte Schweißkonstruktionen, die auch niedrigen Betriebstemperaturen ausgesetzt sind
St 42u-2 St 42hb-2 St 42b-2	In Schweißkonstruktionen bedingt einsetzbar! gering beanspruchte Wellen, Achsen, Stirnräder
St 50-2	stärker belastete Wellen, Pumpenwellen, Kurbeln, Spindeln, Knotenbleche; für Teile, die aus Verschleißgründen eine gewisse Härte haben müssen, wie z. B. Kolben- und Schieberstangen, Schrauben für Sonderzwecke, ungehärtete Zahnräder
St 52-3	schweißbarer Stahl hoher Festigkeit, verringerte Konstruktionsmasse durch um 50% höhere zulässige Spannung gegenüber St 38b-2
St 60-2	Paßstifte, Keile, Ritzel, Schnecken, Preßspindeln
St 70-2	ungehärtete Verschleißteile

Tabelle 13. Unlegierte Werkzeugstähle[13]) und ihre Anwendung (nach [4])

Stahlmarke	Anwendung
C110W1	als Silberstahl für Schnitte, Stanzen, Kaltschlagmatrizen, Prägewerkzeuge, Reibahlen, Gewindeschneidwerkzeuge, Ziehwerkzeuge, Holzfräser, Hobeleisen, Marmorbohrer
C100W1	wie C110W1, Leder- und Tuchmesser, Lochstempel, Lochmatrizen, Druckluftwerkzeuge
C130W2	Feilen, Reibahlen, Fräser, Messer für Hartgummi und Plaste, Ziehmatrizen, -dorne, Band- und Bügelsägen, Steinbearbeitungswerkzeuge, Porzellangußwerkzeuge, chirurgische Instrumente
C120W2	Schneidwerkzeuge, Reibahlen, Lochdorne, Gewindebohrer, Drehdorne
C110W2	Zieheisendorne, Profilfeilen, Steinbearbeitungswerkzeuge für hartes Gestein, Holzbeitel, Hobelmesser, Hobeleisen
C100W2	Schnitte, Stanzen, Schneidmesser, Drück- und Biegewerkzeuge, Gesenke für Hohlprägung
C90W2 C80W2	große Schnitte und Matrizen, Prägewerkzeuge, größere Hämmer, Kalt- und Warmschrotmeißel, Spannwerkzeuge, Schraubstock- und Maschinenbacken, Holzkreissägen, Holzmesser, Landmaschinenmesser, Tuch-, Papier- und Blechscheren, Lederfräser
C70W2	Abgratwerkzeuge, Kalt- und Warmschrotmeißel, Nietsetzer, Schmiede-, Setz- und Zuschlaghämmer, Äxte, Beile, Zangen, Hacken, Spaten
C75W3	Warmgesenke, Warmwalzen, Spannzangen, Gesteinsägeblätter, Mähmaschinenmesser, Pflugschare
C60W3	Schmiedewerkzeuge, Warmgesenke, Warmkreissägeblätter, Hämmer aller Art, Zangen, Schraubenzieher, Stein- und Holzbearbeitungswerkzeuge
C85WS	Hand-, Gatter-, Schrot-, Kreissägen
C55WS	Bergbauwerkzeuge, große Spannzangen, Zangen, Messer, verstählte Äxte und Beile, Hacken

Tabelle 14. Einfluß wichtiger Legierungselemente des Stahls

	Fe—Mn	Fe—Si	Fe—Ni	Fe—Cr	Fe—W
System, Gefüge	kompliziertes Zweistoffsystem aus zwei allotropen Metallen im festen Zustand Mischungslücke in peritektischer Form γ-Gebiet erweitert, bei > 30% Mn Austenit bis Raumtemperatur beständig. Mn bildet mit Fe das Doppelkarbid $(Fe, Mn)_3C$ praktische Bedeutung haben Mn-Stähle mit perlitischem und mit austenitischem Gefüge	eutektisches Zweistoffsystem mit intermetallischen Verbindungen Fe_3Si_2; FeSi und $FeSi_2$ γ-Gebiet abgeschnürt, bei > 1,7% Si unterbleibt γ-α-Umwandlung (ferritischer Stahl) bei höheren C-Gehalten (Werkzeugstähle) kann Si Zementitzerfall bewirken (Schwarzbruch)	Zustandsdiagramm mit vollständiger MK-Reihe Bildung einer Überstruktur $FeNi_3$ γ-Gebiet erweitert, ab 30% Ni auch bei langsamer Abkühlung austenitisches Gefüge Ni setzt den Perlitpunkt herab, fördert den Zementitzerfall	vollständige MK-Reihe mit Schmelzpunktminimum abgeschnürtes γ-Gebiet zwischen 40 und 50% Cr intermetallische Phase FeCr (σ-Phase), die bei 950 °C zerfällt Cr bildet mit Fe das Doppelkarbid $(FeCr)_3C$, bei höheren Cr-Gehalten entstehen die Sonderkarbide Cr_4C_3 und Cr_7C_3 technische Bedeutung: Cr-Gehalte bis 30%, Gefüge ferritisch, perlitisch und ledeburitisch	Zustandsdiagramm noch nicht vollständig bekannt bis 30% W MK-Bildung intermetallische Phase bei ≈ 70% W abgeschnürtes γ-Gebiet, ab 8% W unterbleibt die α-γ-Umwandlung W bildet Sonderkarbide, besonders WC
Wärmebehandlung	Mn verringert die kritische Abkühlgeschwindigkeit und erhöht die Härtetiefe bei Mn-Gehalten > 1% Ölhärter, bei höherem C-Gehalt auch Lufthärter Mn-Stähle sind überhitzungs- und anlaßempfindlich bei 2% C und 2% Mn nach Abschrecken austenitisches Gefüge	bei ferritischen Stählen Glühbehandlung nur durch Rekristallisation starke Neigung zur Grobkornbildung geringere Si-Gehalte erniedrigen die kritische Abkühlgeschwindigkeit und verbessern die Durchhärtung Stähle mit geringem Si-Gehalt sind wenig überhitzungsempfindlich und anlaßbeständig Si hemmt die Aufkohlung bei Einsatzhärtung	Ni verringert die kritische Abkühlgeschwindigkeit Stahl mit 10% Ni und 0,2% C ist Lufthärter Ni-Stähle neigen zur Anlaßsprödigkeit	Cr erniedrigt stark die kritische Abkühlgeschwindigkeit neben Mn deshalb Hauptlegierungselement in Vergütungs- und Einsatzstählen Stähle mit 12 ··· 14% Cr und 0,5 ··· 1% C sind lufthärtend. Martensitpunkt zu tieferen Temperaturen verschoben überhitzungsunempfindlich und anlaßbeständig	W erniedrigt die kritische Abkühlgeschwindigkeit nur wenig (reine W-Stähle sind Wasserhärter) anlaßbeständig bis 500 °C; W verzögert Anlaßsprödigkeit und verringert Überhitzungsempfindlichkeit

Mechanisch-technologische Eigenschaften	Mn steigert die Festigkeit und verbessert die Schweißbarkeit austenitischer Mn-Stahl (12% Mn) ist besonders verschleißfest gegen Schlag und Stoß, nicht aber gegen Abrieb. Schwierig spangebend bearbeitbar	Si setzt Umformungsvermögen herab. Kaltwalzen bis 3% Si, Schmieden bis 6% Si möglich Zugfestigkeit und Streckgrenze werden erhöht Si ist Bestandteil der Federstähle	Ni verfeinert das Gefüge, steigert damit die Zähigkeit und den Widerstand gegen Schlag und Stoß die Dehnung wird verbessert	Cr erhöht die Zugfestigkeit, Dehnung nur wenig erniedrigt verbessert die Schneidfähigkeit	W steigert Warmfestigkeit und Schneidhaltigkeit (Sonderkarbide!)
Chemische Eigenschaften		Si erhöht die Säurebeständigkeit zusammen mit Al und Cr verbessert es die Zunderbeständigkeit	Ni-Stähle sind widerstandsfähig auch gegen nichtoxydierende Säuren (18%iger Cr—Ni-Stahl), empfindlich aber gegen schwefelhaltige Gase	bei > 12% Cr wird der Stahl beständig gegen Wasser und viele Säuren und Gase. Verbessert die Zunderbeständigkeit	
Physikalische Eigenschaften	austenitische Mn-Stähle sind unmagnetisch	Si ist wichtiges Legierungselement in weichmagnetischen Werkstoffen (Dynamo- und Trafo-Stahl). Verringert die Wirbelstromverluste	Ni verringert bis 36% stark die Wärmeausdehnung (Invarstahl) Ni ist wichtiges Legierungselement sowohl in weichmagnetischen als auch in Dauermagnet-Werkstoffen		

	Fe—Mo	Fe—V	Fe—Ti, Ta, Nb	Fe—Al	Fe—Cu
System, Gefüge	eutektisches Zustandsdiagramm mit intermetallischer Phase Fe_3Mo_2 bei ≈ 53% Mo starke Abschnürung des γ-Gebietes, ab 3% Mo unterbleibt die α-γ-Umwandlung Mo bildet Sonderkarbid Mo_2C	vollständige MK-Reihe mit Schmelzpunktsminimum γ-Gebiet abgeschnürt zwischen 30 und 60% V intermetallische Phase FeV V bildet Sonderkarbide, besonders V_4C_3	Zustandsdiagramme mit intermetallischen Verbindungen γ-Gebiet stark abgeschnürt Bildung beständiger Karbide	γ-Gebiet stark abgeschnürt, ab 1% Al keine α-γ-Umwandlung mehr (ferritischer Stahl) Al bildet mit Fe Doppelkarbid, begünstigt den Zementitzerfall	Zustandsdiagramm ähnlich Fe-C-Diagramm Mischungslücke im flüssigen Zustand durch abnehmende Löslichkeit des Cu in α-Fe Möglichkeit der Aushärtung

Tabelle 14 (Fortsetzung)

	Fe—Mo	Fe—V	Fe—Ti, Ta, Nb	Fe—Al	Fe—Cu
Wärme-behandlung	Mo begünstigt die Durchhärtung fördert die Bildung von Zwischenstufengefügen verringert Überhitzungsempfindlichkeit und Anlaßsprödigkeit	V verringert die Durchhärtung die Anlaßbeständigkeit wird erhöht, die Überhitzungsempfindlichkeit verringert		geringe Al-Gehalte verringern die Überhitzungsempfindlichkeit, aber auch die Härtbarkeit	
Mechanisch-technologische Eigenschaften	Mo verbessert die Warmfestigkeit und erhöht die Schneidfähigkeit (Sonderkarbid!)	V verbessert die Warmfestigkeit und erhöht die Schneidfähigkeit (Sonderkarbide!)	Zugfestigkeit und Zähigkeit werden verbessert (Abbinden von N und O!)	Al setzt das Umformungsvermögen herab. Bis 8% kaltumformbar, bis 14% warmumformbar geringe Warmfestigkeit Neigung zum Verspröden	Cu erhöht Zugfestigkeit, Streckgrenze und Härte, die Dehnung wird bei Gehalten über 0,5% erniedrigt höhere Cu-Gehalte führen zu Warmbrüchigkeit
Chemische Eigenschaften	Mo verbessert die Beständigkeit gegen schweflige Säure und verdünnte Salzsäure		Verringerung der Gefahr der interkristallinen Korrosion bei Cr—Ni-Stählen (Schweißqualitäten)	höhere Al-Gehalte (0,1 bis 0,5%) verbessern die Laugenbeständigkeit durch Beseitigung der interkristallinen Korrosion Al verbessert die Hitzebeständigkeit durch Bildung stabiler Oxidschichten	Stähle mit > 0,15% Cu sind rostträge und beständiger gegen verdünnte Säuren
Physikalische Eigenschaften	Mo ist wichtiger Zusatz in Dauermagnetstählen			Zusätze von 9 ··· 14% Al in Dauermagneten	in ferritischen Dauermagnetstählen auf der Basis Al—Ni—Cr bis 5% Cu zur Erhöhung der Koerzitivfeldstärke

Tabelle 15. Rost- und säurebeständige Stähle[14] (nach [4])

Stahlmarke	Gefüge	Streckgrenze σ_S in MPa	Zugfestigkeit σ_B in MPa	Bruchdehnung δ_{5min} in %	Brucheinschnürung ψ in %
X 10Cr 13	Ferrit Troostit	450	600 ··· 750	18	60
X 20Cr 13	Troostit Sorbit	450	650 ··· 950	14	50
X 40Cr 13	Martensit	—	1950	—	—
X 8CrTi 17	Ferrit	300	450 ··· 600	20	60
X 22CrNi 17	Troostit Sorbit	600	800 ··· 950	14	45
X 35CrMo 17	Martensit	600	800 ··· 950	14	—
X 90CrMoV 18	Martensit	—	2100	—	—
X 10CrNi 18.9	Austenit	250	550 ··· 750	50	60
X 5CrNi 18.10	Austenit	220	500 ··· 700	50	55
X 8CrNiTi 18.10	Austenit	270	550 ··· 750	40	50
X 8CrNiMoTi 18.11	Austenit (Spuren von Ferrit)	270	550 ··· 750	40	50
X 12MnCr 18.12	Austenit (Ferrit)	400	600 ··· 750	45	45

Korrosionsbeständigkeit. Nichtrostende und säurebeständige Stähle enthalten mehr als 12% Cr. Am bekanntesten sind die Cr—Ni-Stähle mit 18% Cr und 8% Ni. Sie haben austenitisches Gefüge und sind sowohl gegen oxydierende als auch viele nichtoxydierende Angriffsmittel beständig, allerdings neigen sie zur Spannungskorrosion. Stähle mit erhöhtem Rostwiderstand enthalten geringe Mengen von Cu und P zur Verdichtung der Rostschicht, die dadurch als Schutzschicht wirken kann (Tabelle 15).

Hitzebeständigkeit. Hitzebeständige Stähle sind bei Temperaturen über 550 °C ausreichend zunderfest. Die Eigenschaft wird durch Zusatz von Legierungselementen, besonders von Cr, aber auch von Si und Al, erreicht, die zur Ausbildung dichter oxidischer Schutzschichten führen. Sollen hitzebeständige Stähle auch warmfest sein, so setzt man noch Ti, Ta, Co, W und V zu. Das Gefüge kann ferritisch-perlitisch oder austenitisch sein. In bestimmten Temperaturbereichen neigen die hitzebeständigen Stähle zur Versprödung.

Magnetische Eigenschaften. Weichmagnetische Stähle sind solche, die sich leicht und ohne große Verluste ummagnetisieren lassen. Sie sollen hohe magnetische *Permeabilität* sowie einen bestimmten Restmagnetismus (*Remanenz*) aufweisen und eine nur kleine Feldstärke zum Ummagnetisieren benötigen (Koerzitivfeldstärke).

Verwendung: Für Transformatoren- und Dynamobleche verwendet man Fe—Si-Legierungen mit maximal 4% Si. Durch besondere Verarbeitung und Wärmebehandlung erzielt man eine Textur, bei der in Längsrichtung besonders niedrige Verluste beim Ummagnetisieren auftreten. Eine weitere Legierungsgruppe sind die Fe—Ni-Legierungen (≈ 75% Ni, Rest Fe). Ihr Verwendungsgebiet ist die Schwachstromtechnik.

Hartmagnetische Stähle (Dauermagnete) sollen nach einer Magnetisierung einen hohen Anteil magnetischer Energie behalten. Die wichtigsten Legierungsgattungen der hartmagnetischen Stähle sind: gehärtete Cr- und Cr—Co-Stähle, ausscheidungsgehärtete Al—Ni- und Al—Ni—Co-Stähle (Formgebung nur durch Gießen der pulvermetallurgischen Verfahren), ausscheidungsgehärtete Cu—Ni—Co-, Cu—Ni—Fe- oder Cu—V-Legierungen. Verwendung besonders in der Rundfunk- und Nachrichtentechnik.

Elastizität. Von Federstählen verlangt man hohe Elastizitätsgrenze, andererseits aber auch ausreichendes plastisches Formänderungsvermögen (zur Herstellung der Feder) und genügend hohe Wechselfestigkeit. Federstähle enthalten besonders Mn (bis ≈ 1,5%) und Si (bis ≈ 1,5%), außerdem Cr und V. Sie zeigen sehnige Struktur. Die geforderten Eigenschaften erreicht man durch Kaltverfestigung und Vergütung.

Zerspanbarkeit. Besonders Stähle, die auf Automaten bearbeitet werden, müssen ausgezeichnete Zerspanungseigenschaften haben. Dies erreicht man durch höhere Schwefelgehalte (0,18 ··· 0,30%), die Sulfid-

einschlüsse unterbrechen das Gefüge und bewirken die kurze, bröcklige Spanbildung. Den gleichen Effekt erzielt man durch Pb-Zusatz. Durch geringe Zugaben von P, Zr und Se läßt sich die Zerspanbarkeit weiter verbessern. Verwendung der Automatenstähle: Massenerzeugnisse, wie Schrauben, Muttern, Fahrradteile u. ä.

Ausdehnungsverhalten. Das Ausdehnungsverhalten des Eisens kann durch Zusatz von Ni beeinflußt werden. Stahl mit niedrigster thermischer Ausdehnung enthält ≈ 36% Ni (Invar). Er wird für feinmechanische und physikalische Apparate und Meßdrähte verwendet. — Für Metall-Glas-Verbindungen (Röhrenindustrie) braucht man Stähle mit genau definiertem Ausdehnungskoeffizienten entsprechend dem des Glases. Diese Stähle enthalten außer Ni unter Umständen noch Cr und Co. Stähle für Feinmeßwerkzeuge sollen besonders maßbeständig sein, außerdem aber noch gut bearbeitbar und härtbar. Man verwendet (α linearer Ausdehnungskoeffizient bei 20 °C):

- niedriglegierte Stähle $\alpha = (10{,}5 \cdots 12) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$
- hochchromhaltige Stähle $\alpha = (9{,}5 \cdots 10{,}5) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$
- austenitische Stähle $\alpha = (16 \cdots 17) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$

Werkzeugbeanspruchung. Die Werkzeugstähle werden für Werkzeuge zum Trennen, Zerkleinern und Umformen verwendet.

Stähle für Kaltarbeitswerkzeuge. Stähle für spanabhebende Werkzeuge (Drehmeißel, Feilen, Sägen), für Umformwerkzeuge (Stanz-, Ziehwerkzeuge, Messer u. ä.), für Zerkleinerungswerkzeuge (Mühlen u. ä.), für Meßzeuge, für landwirtschaftliche Werkzeuge u. a. (Tabelle 16).

Tabelle 16. Legierte Kaltarbeitsstähle[15]) und ihre Anwendung (nach [4])

Stahlmarke	Anwendungsbeispiele
6CrMo 18.5	sehr gut kalteinsetzbarer Einsatzstahl, gut polierbar, direkthärtbarer Stahl mit hoher Maßbeständigkeit, vorwiegend für Thermoplast-Spritzgußformen
13NiCr 18	Einsatzstahl für hochbeanspruchte und komplizierte Plast-Spritzgußformen, nicht direkt härtbar
16MnCr 5	Einsatzstahl für mittlere und große Plastpreßformen
20MnCr 5	Plastpreßformen aller Größen, hohe Kernfestigkeit
22CrMo 4	Plastpreßformen einfacher Ausführung und großer Abmessungen
35NiCr 18	Druckluftwerkzeuge, Kaltlochstempel, Kaltscherenmesser
38CrSi 6	Besteckstanzen, Einsenkstempel (Pfaffen), Meßbügel in Kraftmeßdosen, Prägematrizen und -stempel
40NiCrMo 15	Druckluftwerkzeuge, Kaltscherenmesser, Kaltlochstempel, Lochdorne, Holzbearbeitungswerkzeuge
45CrSiV 6	Kaltscherenmesser für große und schwere Profile, Druckluftwerkzeuge, Lochmatrizen und Lochstempel, Biegestanzen
45WCrV 7	Besteckstanzen, Einsenkstempel, Bijouteriegesenke, Medaillenstempel, Kraftmeßbügel
50NiCr 13	Kaltscherenmesser, Schnittstempel, Leichtmetallschnitte, Fließpreßwerkzeuge, Zähne für Kettensägen, Abgratschnitte, Prägewerkzeuge
55WCrV 7	Scheren- und Maschinenmesser, Knüppelscherenmesser, Holzbearbeitungswerkzeuge
67SiCr 5	Sägen für Holzbearbeitung
80CrV 3	Messer für die Holz-, Papier-, Tabak-, Leder- und Textilindustrie
80WCrV 8	rostbeständige Fleischmaschinenmesser, schneidende chirurgische Instrumente
X 90CrMoV 18	Meßwerkzeuge (Lehren, Kaliber, Endmaße), Schnitte, Stempel, Matrizen, Gewindeschneidwerkzeuge
90MnV 8	Fräser, Spiralbohrer, Gewindeschneidwerkzeuge, Holzbearbeitungswerkzeuge
90SiCr 5	Fließpreßwerkzeuge, Druck- und Biegewerkzeuge, Ziehringe, Ziehstempel, Gewindeschneidwerkzeuge, Meßwerkzeuge (Endmaße, Lehren, Kaliber), Holzbearbeitungswerkzeuge

Tabelle 16 (Fortsetzung)

Stahlmarke	Anwendungsbeispiele
100Cr6	Kaltschlagwerkzeuge, Stauchmatrizen
100V3	Gewindeschneideisen und -backen, Gewindefräser, Gewindesträhler, Spiralbohrer, Reibahlen, Räumnadeln
105MnCr4	Schnitte, Gewindefräser, -bohrer, -strähler, Fräser, Räumnadeln, Holzbearbeitungswerkzeuge, Meßwerkzeuge
105WCr6	Ziehdorne für Näpfchenzug, Nähmaschinennadeln, Zahnbohrer, Gewindeschneidwerkzeuge, Feilen, Reibahlen, Spiralbohrer, Schaber
110Cr2	Maschinenmesser in der Leder-, Papier- und Gummiindustrie, formschwierige Gewindeschneidwerkzeuge
110WCrV5	Spiral-, Zentrier-, Stehbolzen- und Zahnbohrer, Reibahlen, Schraubenzieher, Fräser
115CrV3	Gewindeschneidbohrer, Spiralbohrer, Reibahlen, Gewindelehren
120WV4	Fräser, Gewindeschneidbohrer, Spiralbohrer, Stanzen, Schnitte, Holzbearbeitungswerkzeuge
125CrSi5	Feilen, Gravierwerkzeuge, Glasschneiderädchen, Schaber
130Cr2	Kaltziehringe und -matrizen, Ziehstempel zum Rohrziehen, Fließpreßringe und -matrizen, Gewindesträhler
130W19 135WCrV20	spanende Werkzeuge mit höchster Schneidhärte, für Schneidentemperaturen $< 200\,°C$ und niedrige Schnittgeschwindigkeit
140Cr2	Hochleistungsfeilen, Dreh-, Hobel- und Bohrmeißel, Glasschneiderädchen, Glasbohrer
142WV13	spanende Werkzeuge mit hoher Verschleißbeanspruchung, Drehmeißel zur Bearbeitung von Glas, Porzellan, Plast, Hartgummi
145CrV6	spanende Werkzeuge, Schnitte, Stanzen, Gummischneidmesser, Meßwerkzeuge, Gewindewalzbacken, Ziehmatrizen, -dorne für Kaltrohrzug
165CrMoWV46 210Cr46 210CrW46	Hochleistungsschnitte bis 3 mm Schneidgutdicke (einschließlich Trafobleche, Rotor- und Dynamoschnitte) Gewindewalzbacken und -rollen, Spritzmatrizen zum Fließpressen von Stahl, Tiefziehwerkzeuge, Bördelrollen, Zieheisen, -matrizen und -dorne, Räumnadeln, Drehmeißel für Porzellan, Graphit, Kohleelektroden, Schiefer, Gewindefräser, Meßwerkzeuge, Endmaße

Stähle für Warmarbeitswerkzeuge. Stähle für Schmiede- und Preßgesenke, für Strangpreßwerkzeuge, für Warmwalzen, für Spritz- und Preßgießformen.

Werkzeugstähle enthalten im wesentlichen:

$>$ 6% C zur Erhöhung der Festigkeit und Härte;
Mn zur Erhöhung der Verschleißfestigkeit, Verbesserung der Härtbarkeit;
Cr zur Verbesserung der Härtbarkeit, der chemischen Beständigkeit und der Schneidfähigkeit;
Ni zur Erhöhung der Zähigkeit;
W zur Erhöhung der Schneidfähigkeit und der Warmfestigkeit;
Mo und V zur Erhöhung der Warmfestigkeit;
Si zur Verbesserung der Federungseigenschaften.

Schnellarbeitsstähle siehe Tabelle 17.

2.2.2.2. Stahlguß

Stahlguß vereinigt die Vorteile der gießtechnischen Formgebung mit den guten Eigenschaften des Stahls. Der Konstrukteur muß jedoch bestrebt sein, den hohen Stahlgußanteil an der Gesamtgußerzeugung im Austausch durch Gußeisenarten entscheidend zu verringern, da diese sehr oft den Anforderungen genügen und wesentlich billiger sind. Im allgemeinen werden die meisten Schmiedestähle ebenfalls vergossen (Tabelle 18).

Tabelle 17. Schnellarbeitsstähle[16]) und ihre Anwendung (nach [4])

Stahlmarke	Anwendungsbeispiele
X 97 WMo 3.3	Werkzeuge aller Art: Drehmeißel, Spiralbohrer, Fräser, Reibahlen, Metallkreissägen
X 82 WV 9.2	Drehmeißel, Fräser, Gewindeschneidwerkzeuge, Reibahlen, Metallkreissägen, Schlitzfräser
X 74 WV 18.1	Werkzeuge aller Art; ähnlich X 82 WV 9.2
X 86 WV 12.2	Hochleistungsstahl für Werkzeuge aller Art; Segmente von Kreissägen
X 82 WMo 6.5 X 100 WMo 6.5	Spiralbohrer, Fräser, Dreh-, Hobel- und Stoßmeißel; auch für Kaltarbeitswerkzeuge geeignet
X 125 WV 12.4	Drehmeißel, Fräser, Schneidräder, Reibahlen u. a., für Schlichtarbeiten an kurzspanenden Werkstoffen: GGL, GGG, CuZn-Legierungen, Kunstharze, Marmor
X 133 WCo 12.5	Hochleistungswerkzeuge aller Art; sowohl für Schlichtarbeiten als auch für schwere Schrupparbeiten geeignet
X 79 WCo 18.5	Schruppwerkzeuge, Schnitte, Scherenmesser zum Schneiden von Federstahl bis 50 HRC
X 85 WMoCo 6.5.5	Hochleistungsstähle mit hoher Warmfestigkeit; für schwere Hobel- und Fräsarbeiten auf Stahl und Stahlguß; Hochleistungsfräser
X 105 WMoCo 6.5.5	Dreh-, Hobel- und Stoßmeißel, Spiral- und Gewindebohrer
X 76 WCo 18.10	Dreh-, Hobel- und Stoßmeißel; ähnliche Eigenschaften wie X 79 WCo 18.5
X 110 MoCo 9.8	Fräser, Schneidräder, Konvoidmesser; für Schrupp- und Schlichtarbeiten an hochwarmfesten und Titanlegierungen

Tabelle 18. Unlegierter Stahlguß[17]) (nach [4])

Qualität	Zugfestigkeit σ_B in MPa	Streckgrenze σ_S in MPa	Bruchdehnung δ_S in %	Bedingungen für Faltversuch*) ($\alpha = 180°$)
GS-40	400	—	20	—
GS-40.1	400	200	25	—
GS-40.2	400	200	25	$D = 2a$
GS-40.3	400	200	25	—
GS-40.5	400	200	25	$D = 2a$
GS-40.9	400	—	20	—
GS-45	450	—	17	—
GS-45.1	450	230	22	—
GS-45.2	450	230	22	$D = 3a$
GS-45.3	450	230	22	—
GS-45.5	450	230	22	$D = 3a$
GS-45.9	450	—	17	—
GS-50	500	—	14	—
GS-50.1	500	260	20	—
GS-50.2	500	260	20	$D = 4a$
GS-50.3	500	260	20	—
GS-50.5	500	260	20	$D = 4a$
GS-60	600	—	8	—
GS-60.1	600	320	15	—

*) α Biegewinkel, D Dorndurchmesser, a Probendicke

2.2.3. Metallurgisch bedingte Eigenschaften und Erscheinungen bei Stahl und Stahlguß

Der stets vorhandene Temperaturgradient bei der realen Erstarrung in der Kokille bzw. in der Form und die verschiedene, temperaturabhängige Löslichkeit der Legierungs- bzw. Begleitelemente bilden die Hauptursachen für einige, in der Praxis oft recht störend wirkende Erscheinungen:

Lunker sind Hohlräume, die beim Walzen nicht verschweißen. Sie führen zu *Dopplungen*. Damit werden die daraus gefertigten Werkstücke in der Regel Ausschuß. *Seigerungen* (Blockseigerungen) sind Konzentrationsunterschiede (z. B. C, S, P) im Gußblock bzw. -teil. Die Rekombination von Wasserstoff, der in atomarem Zustand in Stahlteile (meist in Bleche beim Beizvorgang) eingedrungen ist, zu H_2 führt zu *Sprödigkeit* und *Blasenbildung*. Die *Flockenbildung* hat prinzipiell die gleichen Ursachen. *Nichtmetallische Einschlüsse* verschiedener Art (u. a. hervorgerufen durch Desoxydation mit Al und Si) machen sich vor allem bei spanender Bearbeitung störend bemerkbar.
Warm- und Kaltbrüchigkeit werden durch verschiedene Elemente verursacht. Sobald der Gehalt an Schwefel, Phosphor, Sauerstoff und Stickstoff den für die Stahlsorte zulässigen Wert überschreitet, macht sich dies nachteilig bemerkbar. Die *Rot- oder Heißbrüchigkeit* als Einfluß von Sauerstoff oder/und Schwefel ist auf die Bildung eines Eutektikums und die damit in den Korngrenzen wirksame Schmelzpunktherabsetzung zurückzuführen. Phosphor und Stickstoff verringern die Zähigkeit der Stähle, was sich besonders bei tiefen Temperaturen auswirkt.
Von *beruhigt vergossenem Stahl* spricht man, wenn bereits im flüssigen Zustand die in der Stahlschmelze gelösten Gase (vorrangig Sauerstoff) durch Zugabe von Desoxydationsmitteln (Si, Al und Mn) chemisch verbunden werden. Der Block wird nahezu seigerungsfrei.

2.2.4. Gußeisen

Unter Gußeisen versteht man Fe—C—Si-Legierungen mit mehr als 2,06% C, deren Formgebung durch *Urformen* (Gießen) erfolgt. Nach dem Aussehen des Bruchgefüges unterscheidet man *graues Gußeisen* (GGL, GGG), bei dem der Kohlenstoff in erheblicher Menge ungebunden als Graphit vorliegt, und *weißes Gußeisen* (Hartguß, ledeburitischer Guß), bei dem der Kohlenstoff völlig in Form von Zementit gebunden ist.
Den duktileren *Temperguß* erhält man durch eine thermische Langzeitbehandlung von weißem Gußeisen (Temperrohguß) mit dem Ziel einer Sekundärausscheidung von ungebundenem Kohlenstoff (Temperkohle) in Nestform.

Die Erstarrungsverhältnisse und die möglichen Wärmebehandlungsverfahren sind aufgrund des starken Einflusses des Si zweckmäßigerweise am binären Schnitt des Zustandsdiagramms Fe—C—Si erklärbar (Bild 22).

Grau erstarrtes Gußeisen

Wegen der guten Gießbarkeit, des niedrigen Preises und der günstigen Eigenschaften ist Grauguß der wichtigste Gußwerkstoff. Er ist das Ausgangsmaterial für rund 80% der gesamten Gußfertigung.

Außer C enthält Grauguß noch an Beimengungen:

Si (0,3 ··· 3%)	fördert die Graphitausscheidung;
Mn (0,3 ··· 1,2%)	wirkt karbidstabilisierend, also dem Si entgegen;
P (0,1 ··· 0,6%)	macht dünnflüssig und steigert die Verschleißfestigkeit, wirkt allerdings auch versprödend;
S	unerwünschtes Begleitelement.

Als Legierungszusätze, die allerdings seltener als bei Stahl verwendet werden, sind besonders Ni, Cr, Mo, Ti und Cu zu nennen. — Die Zusammensetzung einiger Graugußarten enthalten Tabellen 19 und 20.

Die mechanischen Eigenschaften von Grauguß sind besonders deutlich vom Gefügeaufbau abhängig. Das Gefüge besteht aus einer metallischen Grundmasse mit Graphiteinlagerungen. Besonders die Graphitausbildung hat großen Einfluß, und durch ihre zweckmäßige Beeinflussung ist es in letzter Zeit gelungen, besonders hochwertigen Grauguß herzustellen.

Tabelle 19. Richtlinien für den Einsatz von Gußeisen mit Lamellengraphit[18]) (nach [4])

Gußeisensorten	Sättigungsgrad S_c	Einsatz für Gußstücke bei Wanddicken in mm					Anwendungsbeispiele
		nicht möglich	erfordert gießtechnische Sondermaßnahmen und erhöhten Bearbeitungsaufwand	bevorzugt bei hoher Festigkeits- und Verschleißbeanspruchung	mittlere Festigkeit und Härte bei bester Bearbeitbarkeit	nicht zu empfehlen; nur für Sonderzwecke	
GGL-15	1,00 ··· 1,06	< 2	2 ··· 4	4 ··· 8	8 ··· 20	> 20	Maschinenbetten, Ständer, Traversen, Tische, Heizkörper, Muffen-, Abfluß-, Flanschrohre
GGL-20	0,94 ··· 1,00	< 4	4 ··· 8	8 ··· 15	15 ··· 30	> 30	
GGL-25	0,88 ··· 0,94	< 6	6 ··· 15	15 ··· 25	25 ··· 50	> 50	Gußteile für Werkzeugmaschinen, allg. Maschinenbau
GGL-30	0,82 ··· 0,88	< 10	10 ··· 25	25 ··· 40	> 40	—	
GGL-35	0,76 ··· 0,82	< 15	15 ··· 40	40 ··· 80	> 80	—	Maschinen- und Apparateteile mit erhöhten Festigkeitsansprüchen
Ausbildung des Grundgefüges		zunehmend ← ledeburitisch		perlitisch		zunehmend → ferritisch	

Tabelle 20. Legiertes Gußeisen mit besonderen Eigenschaften bei chemischer Beanspruchung[19])

Gußeisensorte	Wanddicke in mm	Zugfestigkeit σ_B in MPa	Härte *HB* 5/7500	Anwendungsbeispiele
GGL-X 280 NiCuCr 14.6	6 ··· 100	150	200	korrosionsbeständig gegen oxydierende anorganische Säuren, Alkalien, Salzlösungen; Gußstücke der chemischen, Fahrzeug-, Schiffbau- und Erdölindustrie
GGG-X 290 Ni 18	10 ··· 100	400	180	
GGG-X 270 NiCr 19	10 ··· 100	400	200	
GGG-X 270 NiCuCr 18.3	10 ··· 100	500	200	
GGG-X-230 NiSiCr 19.4	10 ··· 100	400	240	
GGL-320 NiCr 7.2	25 ··· 150	300	260	erhöhte Beständigkeit gegen Laugen und alkalische Wässer; Rührkessel für verdünnte und konzentrierte Alkalilaugen
GGL-340 NiCr 7.2	10 ··· 50	250	240	
GGL-320 NiCr 12.3	25 ··· 150	300	260	
GGL-340 NiCr 12.3	10 ··· 50	250	240	
GGG-330 Ni 7	10 ··· 100	500	300	Vakuumkonzentrationsapparate für Ätzalkalien, Schmelztiegel für Blei, Zink, Aluminium
GGG-330 Ni 12	10 ··· 100	600	300	

Graphiteinlagerungen. Im normalen Grauguß (GGL) liegt der Graphit in Form von Nadeln (Lamellen) im Gefüge vor. Diese unterbrechen den Gefügezusammenhalt um so weniger, je feiner sie sind. Durch *Modifizierung* (Impfen mit Si) gelingt es, die Graphitausbildung zu verfeinern. Besonders günstig ist eine kugelige (globuläre) Graphitausbildung, wie sie durch Behandlung der Gußeisenschmelze mit Mg erzielt wird — ***Gußeisen mit Kugelgraphit*** (GGG). Ein solcher Werkstoff ist das Zwischenglied zwischen Grau- und Stahlguß und verdrängt letzteren aus vielen Anwendungsgebieten.



Die metallische Grundmasse kann wie bei Stahl ferritisch, perlitisch oder (bei legiertem Grauguß) austenitisch sein. Die Ausbildung sowohl des Graphits wie auch der Grundmasse hängt von der Zusammensetzung, der Schmelzbehandlung und der Abkühlgeschwindigkeit ab. C, P und Si wirken graphitisierend, damit ferritbildend. Mn und die übrigen Legierungselemente steigern die Festigkeit.

Schmelzbehandlung. Die Graphitausbildung läßt sich durch Überhitzung und durch Modifizieren verfeinern.

Abkühlgeschwindigkeit. Je langsamer die Abkühlung erfolgt, um so ferritreicher ist das Gefüge, und die Festigkeit sinkt. Die mechanischen Eigenschaften sind stark von der Wanddicke abhängig. Langsame Abkühlung fördert die Graphitausscheidung. Bei rascher Abkühlung erstarrt das Gußeisen weiß.

Weiß erstarrtes Gußeisen

Weißes Gußeisen wird in der Technik als Hartguß verwendet. Man unterscheidet zwischen *Vollhartguß* und *Schalenhartguß*.

Beim Vollhartguß ist der gesamte Querschnitt weiß (karbidisch) erstarrt, dagegen ist beim Schalenhartguß infolge rascher Abkühlung nur eine dünne Oberflächenschicht weiß, der Kern jedoch grau erstarrt. Die Dicke der weiß erstarrten Schicht ist die Schrecktiefe; sie hängt von der Abkühlgeschwindigkeit und von der Zusammensetzung ab: Mn, S, Cr und Mo vergrößern, Si und P verringern die Schrecktiefe.

Temperguß[20])

Diesen Werkstoff erhält man durch Tempern von weißem Gußeisen (Temperrohguß). Man unterscheidet in neutralen Mitteln geglühten und entkohlend geglühten Temperguß. Die ferritisch-perlitische Gefügegrundmasse mit der nestförmigen Temperkohleeinlagerung macht diesen Gußwerkstoff für dynamische Beanspruchung und dünnwandige Teile anwendbar. Hierfür sprechen zahlreiche Beispiele aus der Automobilindustrie, dem landwirtschaftlichen Maschinenbau usw.

2.2.5. Wärmebehandlung der Eisenwerkstoffe

2.2.5.1. Allgemeines

Die Wärmebehandlung der Stähle umfaßt einen großen Komplex thermischer, chemisch-thermischer und mechanisch-thermischer Verfahren zur Beeinflussung der Realstruktur dieser Werkstoffe zur Erzielung optimaler Gebrauchseigenschaften. Dabei spielen die Allotropie des reinen Eisens und das sich um Größenordnungen unterscheidende Lösungsvermögen der Eisenkristalle für C die bestimmende Rolle bei wesentlichen Wärmebehandlungsverfahren für Stahl und Gußeisen.

Die Kurven des Eisen-Eisenkarbid-Diagramms (Bilder 16 und 17) gelten für Gleichgewichtsvorgänge, die sich nur bei unendlich langsamer Abkühlung einstellen. Bei rascher Abkühlung werden die Umwandlungsvorgänge unterkühlt. Mit zunehmender Abkühlgeschwindigkeit wird der durch Zerfall des *Austenits* entstehende *Perlit* immer feinstreifiger, bis er schließlich lichtmikroskopisch kaum mehr auflösbar wird. Sein Anteil im Gefüge wird immer größer. Rein perlitisches Gefüge tritt nun nicht mehr nur bei 0,8% C auf, sondern innerhalb eines Konzentrationsbereichs. Der Perlitpunkt verschiebt sich zu immer tieferen Temperaturen (Bild 28).
Bei einer bestimmten kritischen Abkühlgeschwindigkeit, die von der Zusammensetzung des Stahls abhängt, unterbleibt die Kohlenstoffausscheidung aus dem Austenit überhaupt. Nur das kubisch-flächenzentrierte γ-Gitter geht in das kubisch-raumzentrierte α-Gitter über, in dem noch der gesamte Kohlenstoff gelöst ist. Durch diese Zwangslösung wird das Gitter „verzerrt" — der Werkstoff wird hart. Das entstandene Gefüge heißt *Martensit*.
Gewöhnlich geht nicht überall das Austenitgitter in Martensit über, sondern es bleibt eine mehr oder weniger große Menge *Restaustenit* im Gefüge, der erst bei weiterer Abkühlung auf tiefe Temperaturen verschwindet.
Erfolgt die Umwandlung in einem bestimmten Temperaturgebiet oberhalb des Martensitpunkts, dann entsteht ein Gefüge aus nadeligem Ferrit mit eingelagerten Karbiden, das Zwischenstufengefüge (*Bainit*). Ein solcher Stahl ist bei hoher Festigkeit ausreichend zäh (Bild 29).
Wird ein martensitisches Gefüge wieder erwärmt (angelassen), dann spielen sich eine Reihe von Vorgängen ab: Bei Erwärmung auf 100···200 °C scheiden sich aus dem Martensit feinste Karbide aus, ohne daß die

Härte wesentlich abfällt (angelassener Martensit, im Schliffbild dunkel). Bei 200 ··· 250 °C wandelt sich der Restaustenit um. Bei weiterem Anlassen werden die Karbide gröber. Die Struktur des Gefüges bleibt jedoch erhalten (*Anlaßgefüge*). Bei legierten Stählen sind die Vorgänge infolge Ausscheidung von Sonderkarbiden noch komplizierter.

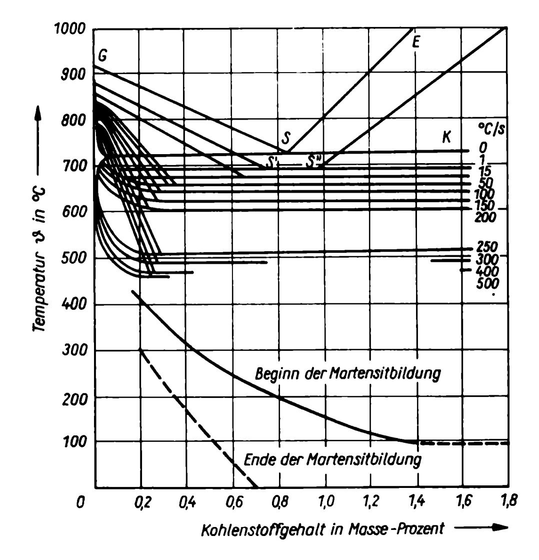


Bild 28. Veränderung der Umwandlungslinien des Fe—Fe_3C-Diagramms in Abhängigkeit von der Abkühlgeschwindigkeit

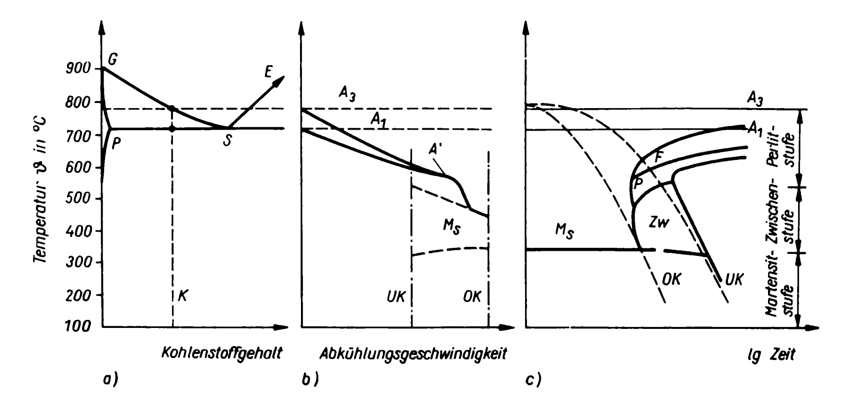


Bild 29. Schematische Darstellung der Veränderung der Umwandlungstemperaturen mit steigender Abkühlgeschwindigkeit. a) Ausschnitt aus dem Fe—Fe_3C-Zustandsdiagramm mit Konzentration K (≙ 0,5% C); b) Einfluß der Abkühlgeschwindigkeit auf die Umwandlung für die Konzentration K. *UK* untere kritische Abkühlgeschwindigkeit; *OK* obere kritische Abkühlgeschwindigkeit; M_s Martensitbildungsbeginn; c) Einfluß der Zeit auf die Umwandlung für die Konzentration K (Zeit-Temperatur-Umwandlungsdiagramm)

2.2.5.2. Thermische Verfahren

Glühen

Unter Glühen versteht man Erwärmung auf eine bestimmte Temperatur, Halten und nachfolgendes Abkühlen zur Erzielung einer bestimmten Gefügeausbildung oder zur Verminderung vorhandener Spannungen (Bild 30).

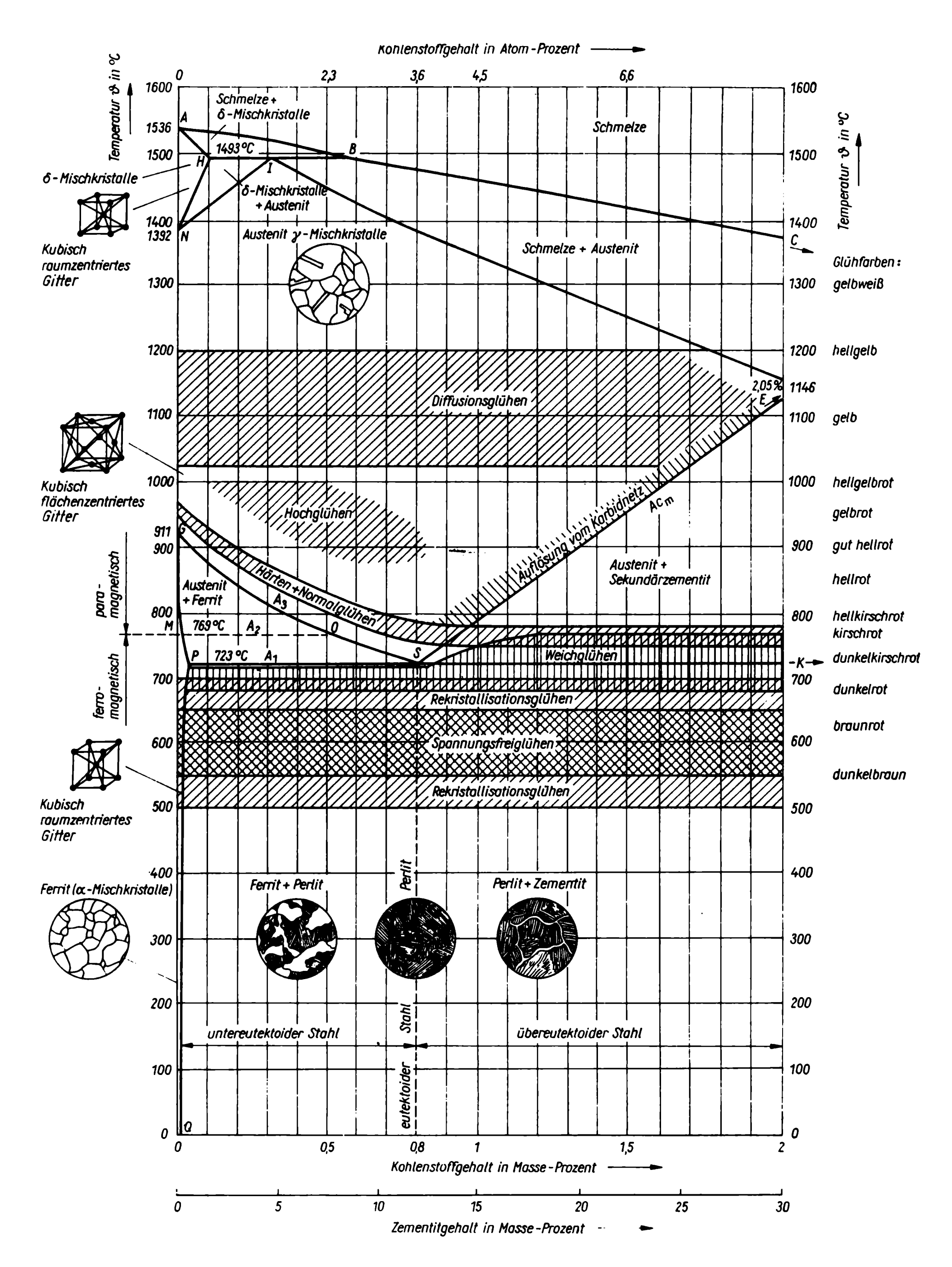


Bild 30. Temperaturbereiche verschiedener thermischer Verfahren für Stahl (eingezeichnet in das System $Fe-Fe_3C$, dargestellt bis 2% C)

Weichglühen. Glühen bei einer Temperatur um Ac_1 mit anschließendem langsamem Abkühlen zur Erzielung überwiegend körnigen Zementits (Einformung des Zementits). Dieses Verfahren dient der Verbesserung der Bearbeitbarkeit der Stähle.

Spannungsarmglühen. Glühen bei Temperaturen unterhalb Ac_1. Anschließend langsames Abkühlen zur Verminderung der Eigenspannungen der Werkstücke ohne Änderung der Gefügestruktur. Die bei der Erwärmung verminderte Streckgrenze erlaubt den Abbau innerer Spannungen durch plastische Verformung oberhalb des Spannungswerts der Warmstreckgrenze während des Glühprozesses.

Normalglühen (*Normalisieren*). Glühen bei einer Temperatur oberhalb Ac_3, bei übereutektoidem Stahl oberhalb Ac_1, mit nachfolgendem Abkühlen zum gleichmäßigen Verteilen der Gefügebestandteile. Dieses Verfahren hat eine sehr große Bedeutung erlangt, weil mit ihm grobes oder ungleichmäßiges Gefüge (z. B. nach Gießen, Schweißen, Warmumformung, fehlerhafter Wärmebehandlung usw.) in eine feinkörnige und relativ gleichmäßige Struktur umgewandelt wird. Ursache hierfür ist das zweimalige Durchlaufen des Zweiphasengebiets Ferrit/Austenit und die damit verbundene zweimalige *Umkörnung* (Bild 31). Die Glühtemperatur liegt bei Stählen bis 0,8% C etwa 30 ··· 50 K oberhalb der Linie *GOS*. Zu langes Glühen (*Überzeiten*) und zu hohe Temperaturen (*Überhitzen*) sind wegen der Gefahr der Gefügevergröberung zu vermeiden.

Zu hohe Abkühlgeschwindigkeiten führen bei Stählen mit mehr als 0,2% C zu Aushärtungserscheinungen.

Anmerkung: Diffusionsglühen, Grobkornglühen, Perlitglühen, Lösungsglühen und Ferritglühen werden in der genannten weiterführenden Literatur behandelt.

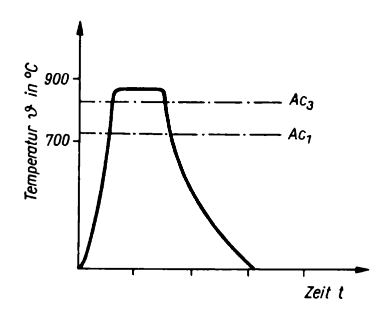


Bild 31. Temperatur-Zeit-Verlauf beim Normalglühen (schematisch)

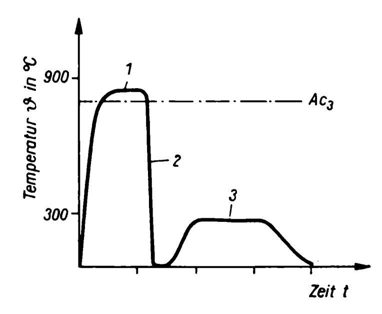


Bild 32. Temperatur-Zeit-Verlauf beim Volumenhärten (kontinuierliches, direktes oder einfaches Härten). *1* Austenitisieren (Härtetemperatur); *2* Abschrecken (z. B. in Wasser oder Öl); *3* Anlassen

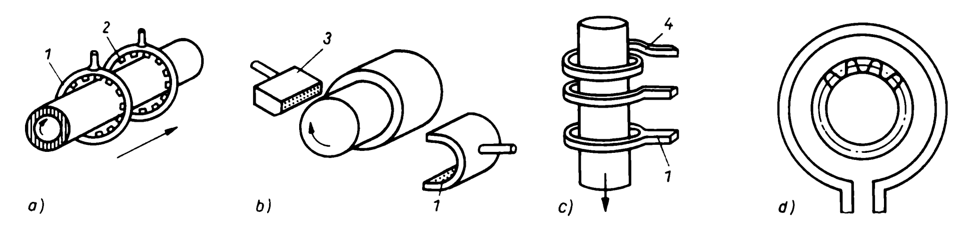


Bild 33. Technologische Varianten einer Oberflächendirekthärtung von Vergütungsstahl. a) Flammhärten (Umlaufvorschubverfahren); b) Flammhärten (Standumlaufverfahren); c) Induktionshärten (Vorschubhärten); d) Induktionshärten (Standhärten — Allzahnhärten). *1* Abschreckbrause; *2* Ringbrenner; *3* Brenner; *4* Heizschleife (Cu-Rohr)

Härten

Unter Härten versteht man eine Erwärmung auf Austenittemperatur (Härtetemperatur), Halten und nachfolgendes Abkühlen mit einer die kritische Abkühlgeschwindigkeit des Stahls überschreitenden Abkühlgeschwindigkeit zur Erzielung des Härtegefüges *Martensit*. Die Behandlung kann sich auf das gesamte Volumen (*Volumenhärten*) oder auf bestimmte Randzonen der Werkstücke (*Oberflächenhärten*, z. B. Flammenhärtung, Induktionshärtung — Tabelle 21) erstrecken (Bilder 32, 33 und 36).

Tabelle 21. Stähle für Flammen- (F) und Induktionshärtung (I)[21])

Stahlmarke	Härte-verfahren	Abschreck-mittel*) bei 20 °C	50 °C	Werkstück-durchmesser in mm	Einhärte-tiefe in mm	Oberflächenhärte *HRC*
C 35	I	W		10 ··· 30	0,5 ··· 1,5	45 ··· 52
	I	W		> 30	1,5 ··· 4,0	
	F	W		> 30	1,5 ··· 4,0	
C 45	I	W		10 ··· 30	0,5 ··· 1,5	51 ··· 57
	I	W		> 30	1,5 ··· 4,0	
	F	W		> 30	1,5 ··· 4,0	
C 60	I		W	20 ··· 30	0,5 ··· 1,5	57 ··· 62
	I		W	> 30	1,5 ··· 4,0	
	F		W	> 30	1,5 ··· 4,0	
40 Mn 4	I		W	20 ··· 30	1,5 ··· 4,0	53 ··· 59
	I		W	30 ··· 60	4,0 ··· 12,0	
	F		W	30 ··· 60	4,0 ··· 12,0	
37 MnSi 5	I	WL		20 ··· 30	1,5 ··· 4,0	50 ··· 56
	I	WL		> 30	> 4,0	
	F		W	> 30	4,0 ··· 8,0	
42 MnV 7	I	WL		30 ··· 60	4,0 ··· 8,0	54 ··· 60
	I		W	> 60	> 8,0	
	F		W	> 30	6,0 ··· 12,0	
40 Cr 4	I		W	20 ··· 30	1,5 ··· 4,0	51 ··· 57
	I		W	30 ··· 60	4,0 ··· 12,0	
	F		W	30 ··· 60	4,0 ··· 12,0	
34 CrMo 4	I	WL		20 ··· 30	1,5 ··· 4,0	51 ··· 57
	I	WL		30 ··· 60	4,0 ··· 12,0	
	F		W	30 ··· 60	4,0 ··· 12,0	
42 CrMo 4	I	WL		30 ··· 60	4,0 ··· 8,0	54 ··· 60
	I	WL		> 60	> 8,0	
	F		W	> 60	6,0 ··· 12,0	
50 CrV 4	I	WL		30 ··· 60	4,0 ··· 8,0	57 ··· 62
	I	WL		> 60	> 8,0	
	F		W	> 60	6,0 ··· 12,0	

*) W Wasser, L Luft

Härtetemperatur. Bei unlegierten Stählen liegt sie 30 ··· 50 K über der Linie *GOSK* des Systems $Fe-Fe_3C$ (Bild 30). Legierte Stähle haben höhere Härtetemperaturen, besonders dann, wenn sie Legierungselemente enthalten, die schwerauflösbare Sonderkarbide bilden. Neben der chemischen Zusammensetzung wirken sich die Austenitisierungsbedingungen bestimmend auf das Härtbarkeitsverhalten der Eisenwerkstoffe aus.

Abkühlung. Die erforderliche Abkühlgeschwindigkeit zur Erzielung des Härtegefüges Martensit muß die kritische Abkühlgeschwindigkeit des betreffenden Stahls sicher überschreiten. Der Beginn der Umwandlung (Umwandlungslinie im *Zeit-Temperatur-Umwandlungsdiagramm*, kurz ZTU-Diagramm genannt) darf vom Abkühlverlauf nicht geschnitten werden.
Unlegierte Stähle müssen in Wasser abgeschreckt werden (*Wasserhärter, Schalenhärter*), legierte dagegen können in Öl oder sogar in bewegter Luft zur Erzielung des Martensitgefüges abgekühlt werden (*Öl- und Lufthärter*).

Anlassen. Unter Anlassen versteht man ein Erwärmen nach vorangegangenem Härten auf Temperaturen unterhalb Ac_1, Halten und nachfolgendes zweckentsprechendes Abkühlen zur Umwandlung des Gefüges in einen dem Gleichgewicht näheren Zustand.

Anlassen bei niedrigen Temperaturen (100 ··· 200 °C, bei legierten Stählen höher) dient der Entspannung des Martensits und der Maßstabilisierung der Werkstücke. Anlassen bei höheren Temperaturen nennt man *Vergüten.*

Gebrochenes Härten und Warmbadhärtung. Während beim ersten Verfahren zunächst schroff in Wasser, anschließend langsamer in Öl abgekühlt wird, beinhaltet das modernere und technologisch besser beherrschbare Verfahren der Warmbadhärtung ein isothermes Halten kurz oberhalb des Beginns der Martensitbildung. Der Temperatur-Zeit-Verlauf beider Verfahren kann aus Bild 34 entnommen werden. Die Gefahr der Ausbildung starker Eigenspannungen, der Rißbildung usw. wird durch diese Verfahren stark eingeschränkt.

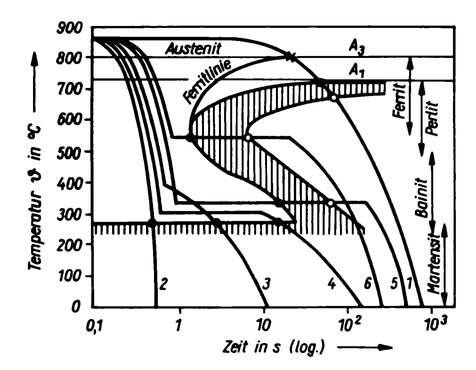


Bild 34. Schematisches ZTU-Diagramm eines Stahls mit eingetragenen Wärmebehandlungsverfahren.
1 Normalglühen; *2* Härten; *3* gebrochenes Härten; *4* Warmbadhärten; *5* Zwischenstufenvergüten; *6* Patentieren; * Beginn der voreutektoiden Ferritausscheidung; ● Beginn der Austenitumwandlung in Perlit, Bainit oder Martensit; ○ Ende der Austenitumwandlung

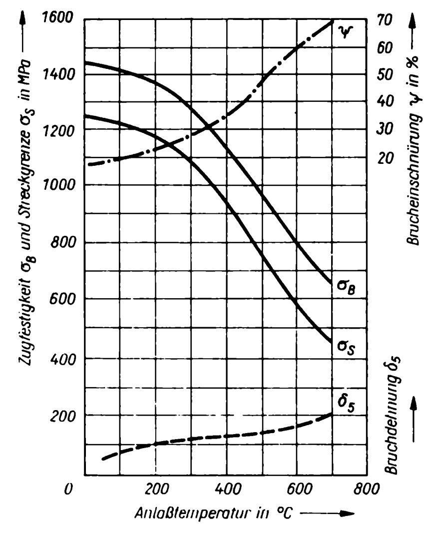


Bild 35. Anlaßdiagramm (Vergütungsdiagramm) für den Stahl 25CrMo 4[21]) bei 60 mm Durchmesser (Härten bei 840 °C, Wasserabschreckung)

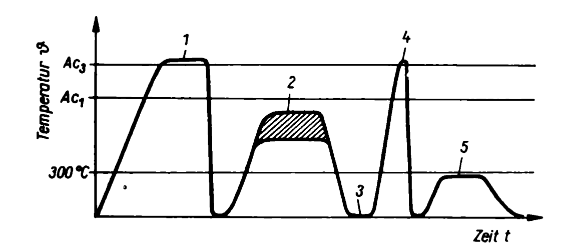


Bild 36. Temperatur-Zeit-Verlauf beim Oberflächenhärten mit Vorvergütung (schematisch). *1* Härten; *2* Anlassen bei höheren Temperaturen; *3* Bearbeiten; *4* Oberflächenhärten; *5* Anlassen bei niederen Temperaturen

Vergüten

Der Zweck einer Vergütung ist die Veränderung der mechanischen Eigenschaften, insbesondere die Steigerung der Streckgrenze, die Erhöhung des Streckgrenzenverhältnisses (Streckgrenze/Zugfestigkeit) und die Beibehaltung oder Steigerung der Zähigkeit. Es werden hierfür *Vergütungsstähle* verwendet. Beim Vergüten ist darauf zu achten, daß einige zur *Anlaßversprödung* neigen (Tabelle 22). Hinsichtlich der Gefügeausbildung und des technologischen Ablaufs können heute folgende Verfahren unterschieden werden:

Anlaßvergüten. Dieses Verfahren besteht aus normalem Härten und anschließendem Anlassen bei höheren Temperaturen. Die mechanischen Eigenschaften können durch entsprechende Wahl der Anlaßtemperatur (etwas 350 ··· 650 °C) in relativ weiten Grenzen variiert werden. Das Anlaßdiagramm (Bild 35), das für die meisten Vergütungsstähle vorliegt, gibt dem Ingenieur die erforderlichen Informationen.

Tabelle 22. Vergütungsstähle[31]) (nach [4])

Stahlmarke	Mindest-Festigkeits- und Verformungswerte nach dem Vergüten							
	Durchmesser bzw. Dicke							
	16 ··· 40 mm				40 ··· 100 mm			
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	σ_B in MPa	δ_5 in %	ψ in %	$\sigma_{0,2}$ in MPa	σ_B in MPa	δ_5 in %	ψ in %
C 25	310	500 ··· 650	21	50	—	—	—	—
C 35	370	600 ··· 750	18	45	330	550 ··· 650	20	50
C 45	400	650 ··· 800	16	40	360	600 ··· 720	18	45
C 60	490	750 ··· 900	14	35	440	700 ··· 850	15	40
40 Mn 4	550	800 ··· 950	14	45	450	700 ··· 850	15	50
30 Mn 5	550	800 ··· 950	14	45	450	700 ··· 850	15	50
34 Cr 4	650	900 ··· 1 050	12	45	550	800 ··· 950	14	50
40 Cr 4	650	900 ··· 1 050	12	45	550	800 ··· 950	14	50
30 MnSi 4	650	900 ··· 1 050	12	40	550	800 ··· 950	14	45
37 MnSi 5	650	900 ··· 1 050	12	40	550	800 ··· 950	14	45
42 MnV 7	800	1 000 ··· 1 200	11	35	700	900 ··· 1 050	12	40
25 CrMo 4	550	800 ··· 950	14	50	450	700 ··· 850	15	60
34 CrMo 4	650	900 ··· 1 050	12	50	550	800 ··· 950	14	55
42 CrMo 4	800	1 000 ··· 1 200	11	45	700	900 ··· 1 050	12	50
50 CrMo 4	900	1 100 ··· 1 300	10	40	800	1 000 ··· 1 200	11	45
50 CrV 4	900	1 100 ··· 1 300	10	40	800	1 000 ··· 1 200	11	45
58 CrV 4	—	—	—	—	900	1 100 ··· 1 300	8	—
36 CrNiMo 4	800	1 000 ··· 1 200	11	50	700	900 ··· 1 050	12	55
30 CrMoV 9	1 050	1 250 ··· 1 450	9	35	900	1 100 ··· 1 300	10	40

Zwischenstufenvergüten. Bei diesem Verfahren erhält man ein Vergütungsgefüge unmittelbar aus der Austenittemperatur. Die Stähle werden in einem Warmbad (300 ··· 500 °C) abgeschreckt und isotherm bis zur völligen Umwandlung in der Zwischenstufe gehalten. Danach kann beliebig abgekühlt werden. Die Struktur des Zwischenstufengefüges (Bainit) führt zu sehr günstigen mechanischen Eigenschaften (Bild 34).

Vergütete Maschinenelemente können Kräfte und Momente bei verringertem Querschnitt übertragen. Die richtige Anwendung des Vergütens bringt neben der richtigen Auswahl der Werkstoffe einen sehr wichtigen Beitrag zur Materialökonomie.
Die wesentlichen Wärmebehandlungsverfahren sind schematisch im Bild 34 dargestellt. Den typischen Verlauf einer direkten Oberflächenhärtung von Vergütungsstahl zeigt Bild 36.

2.2.5.3. Thermochemische Verfahren

Unter thermochemischen Verfahren versteht man Wärmebehandlungsverfahren, bei denen bestimmte Gebrauchseigenschaften durch Verbinden thermischer und chemischer Einwirkungen zwecks Verändern der chemischen Zusammensetzung vorzugsweise in der Randzone verbessert oder erreicht werden.
Hauptziele sind Erhöhung des *Verschleißwiderstands* und Verbesserung der *Dauerschwingfestigkeit.* Die Auswahl des Verfahrens wird durch die Art der mechanischen, thermischen und evtl. chemischen Beanspruchung bestimmt.
Die *Reaktionsmedien* können fest, flüssig oder gasförmig sein.

Thermochemische Behandlungsverfahren laufen in der Regel nach folgenden Teilprozessen ab:

1. Herstellung und Bereitstellung eines reaktionsfähigen Wirkmediums, Ablauf chemischer Reaktionen im Reaktionsmedium;
2. Diffusionsvorgänge im Wirkmedium;
3. Reaktionen an der Oberfläche des Werkstücks (Phasengrenzflächen- und Stoffübergangsreaktionen);
4. Transport der Anreicherungselemente in das Werkstückinnere durch Diffusion;
5. chemische Reaktionen im Werkstück.

Beispiele thermochemischer Verfahren

Nichtmetalldiffusionsverfahren:

Aufkohlen	Anreichern mit Kohlenstoff
Nitrieren	Anreichern mit Stickstoff
Karbonitrieren	Anreichern mit Kohlenstoff + Stickstoff
Entkohlen	Entzug von Kohlenstoff
Dehydrierung	Entzug von Wasserstoff

Metalldiffusionsverfahren:

Aluminieren	Anreichern mit Aluminium
Chromieren	Anreichern mit Chrom
Aufzinken (Sherardisieren)	Anreichern mit Zink
Chromaluminieren	Anreichern mit Chrom + Aluminium

Metall-Nichtmetall-Diffusionsverfahren:

Chromsilizieren	Anreichern mit Chrom + Silizium
Titankarbidbehandlung	Anreichern mit Titan + Kohlenstoff

Tabelle 23. Einsatzstähle[32]) (nach [4])

Stahlmarke	Einsatztemperatur in °C	(Mindest-) Festigkeitswerte im Kern nach dem Härten	
		Streckgrenze σ_S in MPa	Zugfestigkeit σ_B in MPa
C 10	880 ··· 920	250	420 ··· 550
C 15	880 ··· 920	300	500 ··· 650
15 Cr 3	880 ··· 920	400	600 ··· 900
16 MnCr 5	880 ··· 920	600	800 ··· 1 100
20 MnCr 5	880 ··· 920	700	1 000 ··· 1 300
15 CrNi 6	850 ··· 900	650	900 ··· 1 200
18 CrNi 8	850 ··· 900	800	1 200 ··· 1 450
20 MoCr 5	900 ··· 950	600	800 ··· 1 100
18 CrMnTi 5	900 ··· 950	750	950 ··· 1 200

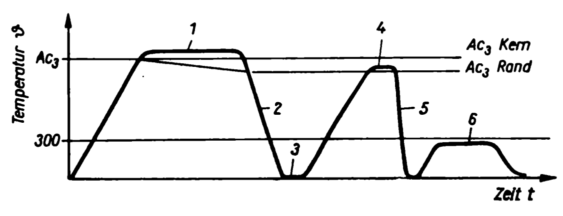


Bild 37. Temperatur-Zeit-Verlauf beim Einsatzhärten ohne Kernrückfeinen (schematisch). *1* Aufkohlen; *2* langsames Abkühlen; *3* mechanisches Bearbeiten (wenn notwendig); *4* Austenitisieren der Randschicht; *5* Abschrecken; *6* Anlassen

Einsatzhärtung als Beispiel für kombinierte Verfahren

Einsatzstähle siehe Tabelle 23.
Bei diesem Verfahren, das in sehr vielen Varianten (verschiedene Temperatur-Zeit-Verläufe) durchgeführt wird, liegt als Grundprinzip folgende Kombination vor (Bild 37):

- *Aufkohlen* (thermochemisches Verfahren zur C-Anreicherung in der Randzone eines Einsatzstahls),
- *Härten* (thermisches Verfahren zur Erzielung von Martensit in der Randzone) und
- *Anlassen* (thermisches Verfahren zum Zwecke der Entspannung des Martensits).

Während die Wirkung der Aufkohlung sich technisch aus der *Aufkohlungstiefe* (= Abstand von der Werkstückoberfläche bis zum Erreichen des Kern- oder Ausgangskohlenstoffgehalts) bestimmen läßt, kann die *Einsatzhärtungstiefe* am Querschliff einer Probe definitionsgemäß bei 500 HV (≈ 48 HRC) abgelesen werden.
Die Einsatzhärtungstiefe ist für die Beurteilung der Werkstückeigenschaften die wesentliche Größe. Sie wird durch die Aufkohlungstiefe, die chemische Zusammensetzung des Stahls, die Austenitisierungsbedingungen und das Härteverfahren bestimmt.

Ebenso wie bei der Einsatzhärtung liegt bei der *Karbonitrierung* bei höheren Temperaturen (zur Unterscheidung von Karbonitrierung bei niedrigen Temperaturen ohne zusätzliche Wärmebehandlung auch *Karbonitrierhärten* genannt) eine nachträgliche Martensithärtung vor.

2.2.5.4. Thermomechanische Verfahren

Thermomechanische Verfahren (auch umformungsthermische Verfahren genannt) sind Wärmebehandlungsverfahren, bei denen bestimmte Gebrauchseigenschaften durch Verbinden thermischer Einwirkung und plastischer Umformung verbessert oder erreicht werden. Diese relativ neue und noch stark in Entwicklung befindliche Verfahrensgruppe hat eine gezielte

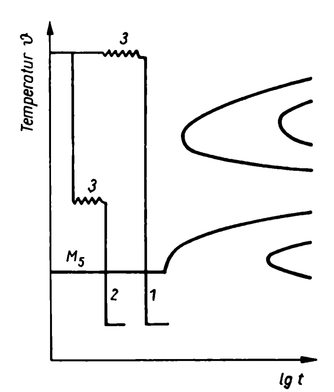


Bild 38. Beispiele thermomechanischer Verfahren (ohne nachfolgende Behandlung dargestellt).
1 Austenitumformung; *2* Ausformung; *3* Umformvorgang

Beeinflussung der Realstruktur durch die genannte Verfahrenskombination zum Gegenstand. Dabei sind günstige, z. T. erhebliche Eigenschaftsänderungen erreichbar. Die Prozesse werden in zunehmendem Maße anlagentechnisch beherrscht.
Beispiele sind die Umformung von stabilem Austenit und anschließendes isothermes Glühen bis zum Beginn der Umwandlung oder in das Zwischenstufengefüge hinein (Bild 38).

2.3. Nichteisenmetalle

Literatur: [5, 6, 11, 14, 23, 26, 28, 31, 32, 35, 41, 42]

2.3.1. Allgemeines*)

2.3.1.1. Wirtschaftliche Bedeutung und Standardisierung

Lange bevor der Mensch Eisenmetalle gewinnen und verarbeiten konnte, wurden die Buntmetalle (Zinn, Blei) und die Edelmetalle als Gebrauchsmetalle verwendet. Die bekannten Erzvorkommen dieser Metalle sind schon jetzt weitgehend abgebaut, zumal auch die verwertbaren Vorkommen in der Erdrinde gering sind. Der Verbrauch dürfte diese Vorkommen in etwa 20···50 Jahren erschöpfen. Letzteres gilt auch für eine Reihe weiterer Metalle, wie Kadmium, Zink, Molybdän, Mangan**). Damit sind all diese Metalle zu Sparstoffen geworden. Ihr Einsatz sollte nur dort erfolgen, wo eine Substitution gegen leichter verfügbare Werkstoffe nicht möglich ist. Das betrifft auch solche Metalle, die in einzelnen Ländern nicht oder nur in ungenügenden Vorkommen vorhanden sind.

Auf dem Gebiet der Nichteisenmetalle sind zahlreiche Normen ausgearbeitet worden. In der DDR sind die meisten NE-Metalle und ihre Legierungen durch Standards (TGL) festgelegt.
Die Tabellen in diesem Abschnitt enthalten bei den Metallen, für die Standards existieren, die standardisierten Legierungen. Ausnahmen bilden die Titan-Legierungen und die Zinn-Druckguß-Legierungen. Begriffe für die Wärmebehandlung von Gußstücken aus NE-Metallen sind ebenso standardisiert[23]) wie Angaben zu Sorten und Lieferbedingungen von NE-Metallschrott[24]).

2.3.1.2. Benennung der Legierungen

Die Systematik der Kurzzeichen für NE-Metalle, NE-Metall-Legierungen und NE-Metall-Halbzeug[25])[26]) legt fest:

- *Kurzzeichen für Lieferform und Abmessungen* (z. B. L- für Lote, S- für Schweißzusatzwerkstoffe, G- für Formguß u. a.);
- *Kurzzeichen für Zusammensetzung*, wonach dem Kurzzeichen für das Basismetall ohne Zahlenangabe für seinen Anteil die Kurzzeichen der Komponenten in der Reihenfolge fallender Anteile mit Zahlenangaben folgen. Dabei sind für Komponenten und Anteile nur so viele Angaben beizufügen, wie für die Unterscheidung zu ähnlichen Legierungen erforderlich sind. Ausnahmen in der Reihenfolge sind möglich, wenn bei Mehrstofflegierungen der Anteil der charakteristischen Komponente niedriger als der Anteil weiterer Komponenten ist;
- *Kurzzeichen für Eigenschaften* (z. B. F 36 für Mindestzugfestigkeit $\sigma_B \approx 360$ MPa),
- *Kurzzeichen für die Oberflächenbeschaffenheit* (z. B. gb gebeizt, bk blank, dopol doppelseitig poliert u. a.).

Messing, Bronze und Neusilber sind nunmehr in diese Systematik einbezogen: z. B. hat Ms 60 nun die Bezeichnung CuZn40, AlBz 5 nun CuAl15 und Ns 5712 nun CuNi12Zn30Pb.

Für NE-Metalle und ihre Legierungen sind die Benennungen der Vorprodukte (z. B. Massel, Barren, Anode, Warmbad usw.) und die Benennungen der Halbzeuge (z. B. Blech, Butzen, Stange, Profil, Rohr usw.) standardisiert[27]).
In den Tabellen 24 bis 43 sind wichtige Kennwerte und Merkmale für den Anwender enthalten. Die Abkürzungen haben, wenn nicht besonders vermerkt, folgende Bedeutungen:

Ba Barren, *Bä* Bänder, *Bl* Bleche, *Blö* Blöcke, *Dr* Drähte, *F* Folien, *Gr* Granalien, *N* Niete, *Pl* Platten, *Pr* Profile, *Prt* Preßteile, *Pu* Pulver, *Ro* Rohre, *Sch* Schmiedestücke, *St* Stäbe, *Sta* Stangen, *Str* Streifen, *G* Sandguß, *GC* Strangguß, *GD* Druckguß, *GK* Kokillenguß, *GV* Verbundguß, *GZ* Schleuderguß.

---

*) Im Abschn. WERKSTOFFE werden die Nichteisenmetalle nur in bezug auf ihre Anwendung beschrieben. Physikalische, chemische Eigenschaften und Herstellung siehe Abschn. CHEMIE.
**) In jüngster Zeit gewinnt der Abbau submariner Lagerstätten immer mehr an Bedeutung.

2.3.2. Leichtmetalle

2.3.2.1. Aluminium und Aluminiumlegierungen

Hüttenaluminium und Reinstaluminium

Reinstaluminium und Aluminium (Tabelle 24) werden als selbständige Metalle vielseitig verwendet. Mit wachsendem Reinheitsgrad sinkt die Festigkeit; es steigen Dehnung, Korrosionsbeständigkeit und elektrische Leitfähigkeit. Bei der Kaltverformung kann die Festigkeit um mehr als 100% gesteigert werden, während die Dehnung zurückgeht. Aluminium besitzt geringe Warmfestigkeit, in der Kälte versprödet es.

Standardisierung: Aluminium und Aluminium-Legierungen (Übersicht, Kennzeichnung, Transport, Lagerung, Oberflächenbehandlung, Bearbeitung, Niet- und Schraubenverbindung)[28]; Reinst- und Hüttenaluminium[29]; Reduktionsaluminium[29]; Aluminium-Katoden für galvanische Elektrolyse[30]; Aluminium-Pulver[31])

Aluminiumlegierungen

Es werden unterschieden: Aluminium-Knetlegierungen (Tabelle 25) sowie Aluminium-Guß- und -Druckgußlegierungen (Tabelle 26).

Einfluß der Legierungselemente:

Cu: senkt Korrosionsbeständigkeit;
Cu mit Mg: wirkt aushärtend. Die Aushärtbarkeit wird bedingt durch das Vorhandensein einer Mischungslücke im Zustandsdiagramm, wobei die Aufnahmefähigkeit der Mischkristalle für die Atome der Legierungselemente mit sinkender Temperatur erheblich abnimmt;
Cu mit Si: erhöht Festigkeit und Härte sowie Gießbarkeit und Formfüllungsvermögen;
Cr: vermindert die Spannungskorrosionsempfindlichkeit;
Mg: erhöht Zugfestigkeit, Streckgrenze, Härte und Korrosionsbeständigkeit, z. T. die Warmfestigkeit, senkt die Gießbarkeit;
Mg mit Si: wirkt aushärtend, erhöht Dauerfestigkeit;
Mn: erhöht Festigkeit und Korrosionsbeständigkeit, senkt die elektrische Leitfähigkeit, vermindert Grobkornbildung bei Rekristallisation;
Mn und Si: erhöhen den Formänderungswiderstand;
Na: verschiebt den eutektischen Punkt zu höheren Si-Gehalten, verfeinert die Si-Kristalle in der Grundmasse (Veredlung);
Pb: senkt die Festigkeit, steigert jedoch die Zerspanbarkeit besonders bei Automatenbearbeitung;
Si: verbessert die mechanischen Eigenschaften;
Zn: erhöht den Verformungswiderstand.

Standardisierung: Aluminium-Knetlegierungen[32]; Auswahl aus Aluminium und Aluminium-Knetlegierungen[33]; Aluminium-Gußlegierungen, Zusammensetzung und Eigenschaften von Gußstücken[34]; Aluminium-Kolbengußlegierungen in Masseln[35]; Niederdruck-Kokillenguß für Aluminiumlegierungen[36])

Stoffwirtschaft

Mengenmäßige Einsparung kann erreicht werden durch Verwendung hochwertiger Legierungen (dadurch schwächere Querschnitte), durch Plattierung chemisch hochbeständiger Legierungen auf hochfeste Legierungen oder Stahl. Bei stationären elektrischen Anlagen können Stromschienen aus Aluminium gegen solche aus Magnesium mit entsprechend größeren Querschnitten ausgetauscht werden.

2.3.2.2. Magnesium und Magnesiumlegierungen

Reinmagnesium

Reinmagnesium wird als selbständiges Metall nur für dicke Leitschienen in der Elektrotechnik verwendet, ist aber sonst wegen des zu geringen Formänderungswiderstands ohne Bedeutung.

Standardisierung: Hüttenmagnesium in Masseln[37]; Magnesium-Pulver, rein[38]; Magnesiumanoden[39])

Tabelle 24. Hüttenaluminium, Reinstaluminium und Legierungen

Benennung		Hüttenaluminium	Aluminium in Strängen und Halb-	
		Al 98	Al 99	Al 99,5
Anteil Mg in %		–	–	–
Zulässige Begleitelemente		←		Si, Fe,
Summe } in Masse-%		2,00	1,00	0,5
Sonst. } in Masse-%		0,06	0,04	0,03
Festigkeitswerte weich	σ_B in MPa	80···120	80···110	70···100
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	25···70	20···60	15···25
	δ in %	24···5	36···5	28···16
hart	σ_B in MPa	140···220	140···210	130···200
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	110···180	100···170	100···160
	δ in %	4···2	5···2	6···2
Dauerfestigkeit weich	σ_{bW} in MPa	50···60	50···60	50···60
($50 \cdot 10^6$ LW) hart	σ_{bW} in MPa	50···70	50···70	50···70
Elastizitätsmodul E	in GPa	60···65	60···65	60···65
Längenausdehnungskoeffizient α	in 10^{-6} K^{-1}	23,9	23,9	23,9
Dichte ϱ	in 10^3 kg/m³	2,70	2,70	2,70
Lieferformen Abk. siehe S. 58		Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt, N, Pu, F	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt, N, Pu, F, G	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt, N, Pu, F G, GK, GD, GZ
Anwendungsbeispiele		allg. Zwecke, Verpackung (Kapseln, Röhrchen); *nicht* für Geschirr u. chem. beanspruchte Teile	allg. Zwecke, Dachabdeckung, Dachrinnen, Küchengeschirr	chem. Industrie, Elektrotechnik; Schiffbau, Verpackung, Milchkannen
Bearbeitung	Schmieden in °C	450···500	450···500	450···500
	Schmelzen in °C	≈ 658	≈ 658	≈ 658
	Gießen in °C	≈ 690	≈ 690	680···720
	Schwindmaß in %	≈ 1,6 (G); ≈ 1,8 (GK)	≈ 1,6 (G); ≈ 1,8 (GK)	≈ 1,6 (G); ≈ 1,8 (GK)
	spanende Formung	←	hart gut, weich nur bei kleinem Keilwinkel,	
	Schweißen	sehr gut	sehr gut	sehr gut
	Festigkeitsminderung bei Kaltverfestigung	ja	ja	ja
	Weichglühen in °C	300···400	360···400	360···400
	Kühlung (L Luft, W Wasser)	L, W	L, W	L, W
	Dauer in h	2···6	2···6	2···6
	Lösungsglühen in °C	450···550	450···550	450···550
	Dauer in h	4···6	4···6	4···6



zeugen		Reinstaluminium	Legierungen		
Al99,7	Al99,8	Al99,99R	AlMg0,5	AlMg1	AlMg2
	–	–	0,4···0,7	0,8···1,2	1,8···2,4
Ti, Cu, Zn ———→					+ Mn
0,3	0,2	0,01	0,01	0,02	0,02
0,02	0,01	Ti + Fe < 0,005	Ti + Fe < 0,005	Ti + Fe < 0,005	Ti + Fe < 0,005
70···100	70···110	35···60	≈ 120	≈ 120	≈ 120
15···25	15···35	13···22	≈ 40	≈ 40	≈ 40
30···6	40···25	50···40	≈ 29	≈ 29	≈ 29
130···200	130···200	110···138	≈ 210	≈ 210	≈ 210
90···150	100···140	100···128	≈ 200	≈ 200	≈ 200
6···2	8···2	5···4	≈ 3	≈ 3	≈ 3
50···60	50···60				
50···70	50···70				
60···65	60···65	72,2	60···65	60···65	60···65
23,9	23,9	23,58			
2,70	2,70	2,6989	2,7	2,7	2,7
Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt, N, Pu, F G, GK	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt, N, Pu, F G, GK	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt, F	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt	Sch, Bl, Bä, Pr, Sta, Dr, Ro, Prt
chem. Industrie für hohe Ansprüche, Verpackung, Freileitungsseile	chem. Industrie für hohe Ansprüche, Verpackung	chem. Industrie, Lebensmittelindustrie, Verpackung, Spiegel, Reflektoren, Elektrotechnik	mit chemisch und elektrolytisch erzeugtem Hochglanz z. B. für Reflektoren, dekorative Teile in der Architektur und im Fahrzeugbau, Beschläge, hochwertiges Geschirr, Kunstgewerbe AlMg0,5 auch als Aufspritzdrähte		
450···500	450···500	300···350	300···350	300···350	300···350
≈ 658	≈ 658	660,24	≈ 655	≈ 655	≈ 655
≈ 690	≈ 690	–	–	–	–
≈ 1,6 (G); ≈ 1,8 (GK)	≈ 1,6 (G); ≈ 1,8 (GK)	–	–	–	–
hohe Schnittgeschwindigkeit ———→			← mit kleinem Keilwinkel, hohe Schnittgeschindigkeit →		
sehr gut	sehr gut	sehr gut	sehr gut	sehr gut	sehr gut
ja	ja	ja	ja	ja	ja
360···400 L, W 2···6	300···400 L, W 2···6	300···320 L 2···6	300···330	300···330	300···330
450···550 4···6	450···550 4···6				

Tabelle 25. Aluminium-Knetlegierungen

Benennung		AlCu 4 Mg 1	AlMgSi 0,5
Zusammensetzung in Masse-%	Cu	3,5 ··· 4,8	
	Mg	0,4 ··· 1,1	0,4 ··· 0,9
	Mn	0,4 ··· 1,0	
	Si	0,2 ··· 0,7	0,3 ··· 0,7
	Cr		
	Zn		
Zulässige Begleitelemente		Fe, Zn, Ti, Ni	Fe, Zn, Cu, Mn Ti, Ni
Festigkeitswerte von Blechen	weich σ_B in MPa	180 ··· 300	320 Draht kalt gereckt, angelassen
	weich $\sigma_{0,2}$ in MPa	80 ··· 180	290
	weich δ_{10} in %	18 ··· 8	8
k kalt, w warm	hart σ_B in MPa	440 ··· 480 a	
a ausgehärtet	hart $\sigma_{0,2}$ in MPa	290 ··· 340 a	
hh halbhart	hart δ_{10} in %	20 ··· 10 a	
Dauerfestigkeit	weich σ_{bW} in MPa		
(50 · 10⁶ Lastwechsel)	hart σ_{bW} in MPa	160 ··· 170 a	
E-Modul	E in GPa	70 ··· 72	60
Längenausdehnungskoeffizient	α in 10^{-6} K^{-1}	23,4	23
Dichte	ϱ in 10^3 kg/m^3	2,8	2,69
Lieferformen	Abk. siehe S. 58	Bl, Bä, Sta, Pr, Ro, Dr, N, Prt, Sch	Sta, Pr, Ro, Dr
Anwendungsbeispiele		mechanisch hochbeanspruchte Teile; bei hohen Ansprüchen an Korrosionsbeständigkeit plattiert	Drähte mit guter elektrischer Leitfähigkeit
Bearbeitung	Schmieden in °C	360 ··· 450	450 ··· 500
	Schmelzen in °C	520 ··· 650	650
	spanende Formung		
	Schweißen	gut	gut
	Festigkeitsminderung	ja	
	Auslagern in °C	20	150 ··· 160
	Dauer	> 5 d	3 ··· 8 h
	Weichglühen in °C	350 ··· 380 L	300 ··· 400 L
	Dauer in h	1 ··· 6	1 ··· 5
	Lösungsglühen in °C	490 ··· 505 W	500 ··· 530 W
	Dauer in min	20 ··· 60	20 ··· 60
L Luftkühlung W Wasserkühlung	Kleben mit Plastkleber	wenn plattiert	



AlMg 3	AlMg 5	AlMg 3 Si	AlZn 5 Mg 1	AlZnMg Cu 0,5	AlZnMg Cu 1,5 pl
				0,4 ··· 1,0	1,2 ··· 2,0
2,7 ··· 3,3	4,3 ··· 5,5	2,3 ··· 3,5	0,9 ··· 1,3	2,4 ··· 3,8	2,1 ··· 2,9
		0,3 ··· 0,8	0,2 ··· 0,4	0,1 ··· 0,6	bis 0,3
		0,5 ··· 0,8			bis 0,3
			0,1 ··· 0,8	0,1 ··· 0,3	0,18 ··· 0,4
			4,2 ··· 5,5	3,8 ··· 5,2	5,1 ··· 6,1
Fe, Ti, Si, Zn, Cu	Fe, Ti, Si, Zn, Cu	Fe, Ti, Zn, Cu, Ni	Fe, Ti, Si, Cu, Ni	Fe, Ti, Si, Ni	Fe, Ti plattiert mit Al 99,5
180 ··· 210	240 ··· 280	$\geqq$ 180	400 ka (Profile)	$<$ 210	$<$ 210
80 ··· 120	110 ··· 150	$\geqq$ 80	260 ka (Profile)	$<$ 120	$<$ 110
22 ··· 15	20 ··· 15	15	δ_5 = 10 ka (Profile)	$>$ 10	$>$ 12
260	320	$\geqq$ 260	480 wa (Profile)	280	280
180	240	$\geqq$ 180	400 wa (Profile)	220	220
3	3	3	δ_5 = 8 wa (Profile)	2	2
110 ··· 130					
120 ··· 150	130 ··· 150		160 wa		
66 ··· 72	63 ··· 68	59 ··· 63	72		
24	24	24			
2,66	2,64	2,65	2,77	2,78	2,8
Bl, Bä, Sta, Pr, Ro, Dr, Sch, N, Prt	Bl, Bä, Sta, Pr, Ro, Dr, Sch, N, Prt	Bl, Bä, Dr	Sta, Pr, Ro	Sta, Pr, Ro, Dr, Sch	Bl, Bä
bei mittlerer und hoher Beanspruchung mit hoher Korrosionsbeständigkeit auch gegen Seewasser; chemische und Lebensmittelindustrie; AlMg 5 auch als Spritzdraht		bei mittlerer Beanspruchung hoch witterungsbeständig; Behälterbau, Schweißkonstruktionen	mechanisch hochbeanspruchte Teile bei guter chemischer Beständigkeit	mittlere Beanspruchung ohne Korrosionsbeständigkeit	allgemeiner Bedarf mit Korrosionsbeständigkeit
400 ··· 450	330 ··· 360	400 ··· 450			
610 ··· 640	580 ··· 620	610 ··· 640		525 ··· 630	
bedingt	gut	bedingt	gut	gut	
gut	gut	sehr gut	ausreichend	gut	
ja	ja	ja	ja	ja	
		150 ··· 190 und kalt			
360 ··· 400 0,25 ··· 0,5	300 ··· 400	320 ··· 350		350	
		500 ··· 540	450 LW		
möglich	möglich	möglich	möglich		möglich

Tabelle 26. Aluminium-Guß- und -Druckgußlegierungen

Benennung		Aluminium-Gußlegierungen			
		G-AlMg 3	G-AlMg 5 Si 1	G-AlSi 6 Cu 1	G-AlSi 7 Cu 1
Zusammensetzung in Masse-%	Mg	2,0 ··· 4,0	4,0 ··· 6,0	0,25 ··· 0,6	0,2 ··· 0,6
	Si	0,05 ··· 0,5	0,8 ··· 1,3	5,0 ··· 6,5	6,5 ··· 8,0
	Cu			1,0 ··· 1,5	1,0 ··· 2,0
	Ni				
	Mn	0,1 ··· 0,5	0,1 ··· 0,5	bis 0,5	0,2 ··· 0,5
	Ti				
Zulässige Begleitelemente		Fe, Zn, Cu, Ti, Ni, Pb, Sn	Fe, Zn, Cu, Ti, Ni, Pb, Sn	Fe, Ni, Zn Pb, Ti, Sn	Fe, Zn, Ni, Pb, Sn, Ti
Festigkeitswerte (Mindestwerte)	weich σ_B in MPa	130 GK	130	150	140
	weich $\sigma_{0,2}$ in MPa	60 GK	80	90	100
	weich δ_5 in %	4 GK	1	1	0,5
a ausgehärtet, g geglüht	hart σ_B in MPa	160 a	140 GK	190 a	150 GK
	hart $\sigma_{0,2}$ in MPa	120 a	80 GK	160 a	110 GK
	hart δ_{10} in %	2 a	1 GK	0,5 a	0,5 GK
Dauerfestigkeit ($50 \cdot 10^6$ Lastwechsel)	weich σ_{bW} in MPa		60	65 ··· 85	60 ··· 70
	hart σ_{bW} in MPa	70 GK	75 GK	85 ··· 95 GK	90
E-Modul	*E* in GPa	70	70	75	75
Längenausdehnungskoeffizient	α in 10^{-6} K^{-1}	24,5	25	23,5	23
Dichte	ϱ in 10^3 kg/m^3	2,7	2,65	2,7	2,7
Lieferformen	Abk. siehe S. 58	GK	G, GK	G, GK	G, GK
Anwendungsbeispiele		mechanisch mittel- und hochbeanspruchte Teile im Schiff- und Schiffsmaschinenbau; in der chemischen und Lebensmittelindustrie; Armaturen, Apparate	Gußteile aller Art, auch verwickelte, mit erhöhtem Cu-Gehalt hoch- und warmfest, aber nicht korrosionsbeständig	verwickelte Gußstücke (auch dünnwandige), schwing- und höchstfest. *Nicht* für hohe Korrosionsansprüche!	
Bearbeitung	Schmelzen in °C	640 ··· 590	560 ··· 630	500 ··· 620	570 ··· 630
	Gießen in °C	700 ··· 780	690 ··· 740	700 ··· 750	690 ··· 750
	Schwindmaß in %	1 ··· 1,5 (G) 0,8 ··· 1 (GK)	1 ··· 1,5 (G) 0,8 ··· 1,3 (GK)	1,1 (G) 1 (GK)	1,1 (G) 1 (GK)
	spanende Formung	ausgezeichnet	ausgezeichnet	←———	starker
	Schweißen	Ga / Li	Ga / Li	Ga / Li	Ga / Li
	Vorwärmen auf °C	250 ··· 350 / —	250 ··· 350 / —	250 ··· 350 / —	250 ··· 350 / —
	Kaltauslagern in °C	20	—	20	—
	Dauer in Tagen			5	
Ga Gasschmelzschweißung	Warmauslagern in °C	160 ··· 165	—	160 ··· 165	—
	Dauer in h	10		10	
Li Lichtbogenschweißung	Lösungsglühen in °C	565 W		520 W	
	Dauer in h	4		4	
W Wasserkühlung	Weichglühen in °C			300 ··· 350 L	
L Luftkühlung	Dauer in h			3	



	Aluminium-Kolbenlegierungen		Aluminium-Druckgußlegierungen		
G-AlSi10Mg	G-AlSi20CuNi	G-AlSi12CuNi	GD-AlSi10Mg	GD-AlSi7Cu2	GD-AlMg9Si
0,2 ··· 0,4	0,6 ··· 0,9	1,0 ··· 1,5	0,2 ··· 0,5	0,2 ··· 0,7	7,0 ··· 10
8,5 ··· 10	20 ··· 23	11,5 ··· 13,5	8,5 ··· 10	6,5 ··· 8,0	0,1 ··· 0,6
	1,1 ··· 1,6	1,0 ··· 1,5		1,0 ··· 2,0	
	0,8 ··· 1,1	0,8 ··· 1,1			
bis 0,4	0,1 ··· 0,3	0,3 ··· 0,5			0,1 ··· 0,6
	0,05 ··· 0,20	0,05 ··· 0,20			
Fe, Ti, Zn, Cu, Ni, Pb, Sn	Fe, Zn	Fe, Zn	Fe, Ti, Zn, Cu, Ni, Mn, Pb, Sn	Fe, Ti, Zn, Ni, Mn, Pb, Sn	Fe, Ti, Ni, Cu, Zn, Pb, Sn
150	200 GK g	150 ··· 200 GK g	210	200	200
80	170 GK g	170 GK g	120	140	120
2	0,2 GK g	0,5 ··· 0,3 GK g	1,5	1	1,5
200 a	230 GK a	250 GK a			
170 a	190 GK a	210 GK a			
1 a	0,5 GK a	0,5 GK a			
75 ··· 100	100	70 bei 40 · 10^6 LW			
90 ··· 110 GK			80 GD		60 GD
75	86	75	70	70	65
22,5	18 ··· 19	21 ··· 22	22,5	23	25
2,65	2,7	2,7	2,65	2,7	2,6
G, GK, GD	G, GK, Sch	GK	G, GK, GD	G, GK, GD	GD
verwickelte Gußteile (auch dünnwandige), schwing- und höchstfest; Motoren- und Getriebegehäuse, Zylinder, Räder, Bremsnaben	Kolben für Verbrennungsmotoren, wasser- und luftgekühlt; Zylinder	Kolben für Verbrennungsmotoren. *Nicht* für Korrosionsansprüche!	Gußstücke aller Art mit hoher chemischer Beständigkeit	verwickelte Gußstücke (auch flüssigkeitsdichte); gute chemische Beständigkeit	Gußstücke aller Art mit hoher chemischer Beständigkeit und guter Polierbarkeit
570	520 ··· 700	520 ··· 600	500 ··· 600	570	600 ··· 650
700 ··· 750	770 ··· 790	750			
1 ··· 1,4 (G)					
0,5 ··· 0,8 (GK)	1,0 (GK)		0,5 ··· 0,8 (GD)	0,5 ··· 0,8 (GD)	0,5 ··· 0,8 (GD)
Werkzeugverschleiß ⟶					sehr gut
Li	—	—	gut	gut	—
200					
160 ··· 165	185	185	—	—	—
10	16	16			
520 W	490 W	490 W			
4	5	5			

Tabelle 27. Magnesium-Knet- und Gußlegierungen

Benennung		Magnesium-Knetlegierungen		
		MgAl3Zn	MgAl6Zn	G-MgAl6Zn3
Zusammensetzung in Masse-%	Mn	0,05 ··· 0,4	0,05 ··· 0,4	0,15 ··· 0,50
	Al	2,5 ··· 3,5	5,5 ··· 7,0	3,5 ··· 6,5
	Zn	0,5 ··· 1,5	0,5 ··· 1,5	2,5 ··· 3,5
Zulässige Begleitelemente in Masse-%	Si	$\leqq$ 0,20	$\leqq$ 0,20	$\leqq$ 0,30
	Cu	$\leqq$ 0,05	$\leqq$ 0,05	$\leqq$ 0,20
Festigkeitswerte	σ_B in MPa	210	280 *)	130 G
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	70	200 *)	80 G
g geglüht	δ in %	10	10 *)	1,5 G
G Sandguß	σ_B in MPa	unbehandelt	280 **)	
GK Kokillenguß	$\sigma_{0,2}$ in MPa		180 **)	
GD Druckguß	δ in %		8 **)	
Dauerfestigkeit	σ_{bW} in MPa	55	150 ··· 170***)	70 ··· 90
	σ_{zdW} in MPa			42
E-Modul	E in GPa	36 ··· 47	44	44
Längenausdehnungskoeffizient	α in 10^{-6} K^{-1}	27,1	27,3	27,6
Dichte	ϱ in 10^3 kg/m^3	1,78	1,8	1,84
Lieferformen	Abk. siehe S. 58	Sch, Pt, Sta, Dr	Sch, Pt, Bl, Ro, Sta, Dr	G
Anwendungsbeispiele		Bauteile mittlerer Beanspruchung	Bauteile mittlerer Beanspruchung im Kraftfahrzeug- und allgemeinen Maschinenbau	dauerbeanspruchte Gußstücke hoher Festigkeit, Flugzeug- und Motorenbau, Motorengehäuse
Bearbeitung	Schmelzen in °C	500 ··· 630	430 ··· 600	400 ··· 635
	Gießen in °C	—	—	680 ··· 800
	Schwindmaß in %	—	—	1,4 (G)
	Schmieden in °C	270 ··· 330	270 ··· 330	—
	Spanende Formung	←————	————	sehr gut möglich,
	Schweißen		Ga möglich	schwierig
	Flußmittel			←————
	Vorwärmen auf °C			300
	Lösungsglühen in °C		270 ··· 330	
Ga Gasschmelzschweißung (unter Schutzgas, ohne Flußmittel)	Spannungsfreiglühen in °C	280 ··· 320 O		280 ··· 320 O
L Luftkühlung				
O Ofenkühlung	Dauer in h	2 ··· 4		2 ··· 4

*) Vollstangen mit A < 5000 mm^2; **) Vollstangen mit A > 5000 mm^2; ***) Blech von 1 mm Dicke

Magnesium-Gußlegierungen					
G-MgAl6Zn3S	G-MgAl8Zn1	G-MgAl9Zn1	G-MgAl9Zn2	GD-MgAl8Zn1	GD-MgAl9Zn2
0,15 ··· 0,50 5,0 ··· 6,5 2,5 ··· 3,5	0,15 ··· 0,50 7,5 ··· 8,7 0,3 ··· 1,0	0,15 ··· 0,50 8,5 ··· 10,0 0,3 ··· 1,0	0,15 ··· 0,50 7,5 ··· 10,0 0,5 ··· 2,0	0,15 ··· 0,50 7,5 ··· 8,7 0,3 ··· 1,0	0,15 ··· 0,50 7,5 ··· 10,0 0,5 ··· 2,0
≦ 0,20 ≦ 0,02	≦ 0,25 ≦ 0,15	≦ 0,25 ≦ 0,15	≦ 0,50 ≦ 0,35	≦ 0,25 ≦ 0,15	≦ 0,50 ≦ 0,35
130 G 80 G 1 G	130 G 80 G 1 G	170 G 90 G 3 G } homogenisiert	120 G 80 G 1 G		
nicht vorgeschrieben	170 GK 80 GK 4 GK } homogenisiert	170 GK g 120 GK g 1,5 GK g	120 GK 80 GK 1 GK	200 GD 140 GD 1 GD	200 GD 140 GD 0,5 GD
70 ··· 90 42	80 ··· 90	80 ··· 90	80 55	55	46
46	46	46	46	46	46
27,6	27,4	27,0	27,0	27,0	27,0
1,84	1,81	1,82	1,83	1,81	1,83
G, GK	G, GK	G, GK	G, GK	GK, GD	GK, GD
dauerbeanspruchte Gußstücke hoher Festigkeit. *Nicht* für korrosionsbeanspruchte Teile!	stoßbeanspruchte, nicht zu verwickelte Gußstücke, Flugzeug- u. Motorenbau, Kamerateile	stoßbeanspruchte Gußstücke bei nicht zu verwickelter Formgebung; Kamerateile	dauer-, stoß- und wärmebeanspruchte Gußstücke höchster Festigkeit; Flugzeug- u. Motorenbau, Kfz-Hinterachsgehäuse	Druckgußstücke aller Art mit hoher Festigkeit, auch schwierigster Herstellbarkeit; Ölpumpen, Ventilatorflügel, Getriebegehäuse u. -deckel für Kfz	Druckgußstücke aller Art; ohne besondere Korrosionsbeanspruchung
400 ··· 635	430 ··· 600	430 ··· 600	430 ··· 600	430 ··· 600	430 ··· 600
680 ··· 800	680 ··· 800	680 ··· 800	680 ··· 800	700 ··· 720	750 ··· 780
1,4 (G)	1,4 ··· 1,5 (G)	1,4 (G) 0,5 ··· 1,0 (GK)	1 ··· 1,4 (G) 0,5 ··· 1,0 (GK)	— 0,5 ··· 1,0 (GK)	— 0,5 ··· 1,0 (GK)
—	—	—	—	—	—
jedoch feine Späne feuergefährlich →					
schwierig	← Ga möglich →				
← Lithiumchloridsalze →					
300	300	300	300 390 bzw. 410 L (8 bzw. 10 h)		
280 ··· 320 O	280 ··· 320 O	280 ··· 320 O			
2 ··· 4	2 ··· 4	2 ··· 4			

Magnesiumlegierungen (Tabelle 27)

Einfluß der Legierungselemente:

Al: erhöht Zugfestigkeit und Dehnung bei Sandguß bis etwa 6% Al-Gehalt, erhöht die Spannungskorrosion, senkt ab etwa 8% Al die Dehnung, senkt die Verformbarkeit;
Zn: senkt die Löslichkeit des Aluminiums in magnesiumreichen Mischkristallen;
Mn: bei MgAlZn und MgAl: erhöht die Korrosionsbeständigkeit; bei MgMn: erhöht die Schweißbarkeit, Verformbarkeit und Korrosionsbeständigkeit;
Ce: verbessert die Festigkeitseigenschaften.

Standardisierung: Magnesium-Knetlegierungen[40]); Magnesium-Gußlegierungen[41]); Halbzeuge aus Mg-Legierungen[42])

Stoffwirtschaft

Der Schrott von Magnesium und seinen Legierungen ist, nach Sorten getrennt, der Wiederverwendung zuzuführen. Feuergefahr beim Transport! Magnesium und seine Legierungen sind Austauschstoffe für Buntmetalle und andere Sparstoffe. Die Querschnitte sind sinngemäß geometrisch zu vergrößern. Spannungsspitzen sind wegen großer Kerbempfindlichkeit zu vermeiden.

2.3.2.3. Titan und Titanlegierungen

Reintitan (Tabelle 28)

Titan ist ein wegen der schwierigen Reindarstellung noch wenig verwendeter selbständiger Werkstoff. Seine wertvollen Eigenschaften lassen jedoch eine steigende Verwendung erwarten.

Tabelle 28. Titan und Titanlegierungen

Benennung			Reintitan		
			EMO-Ti 110	EMO-Ti 140	Ti 180
Zusammensetzung in Masse-%		C	< 0,05	< 0,08	
		Fe	< 0,15	< 0,25	
		N	< 0,04	< 0,05	
		O	< 0,10	< 0,20	
		H	< 0,008	< 0,010	
		Ti	99,7	99,5	
Festigkeitswerte	σ_B in MPa		300 ··· 420	400 ··· 550	550 ··· 700
	σ_S in MPa		≧ 200	≧ 300	450 ··· 600
	δ in %		30	22	23 ··· 18
	HB		90 ··· 140	130 ··· 180	150 ··· 200
E-Modul	*E* in 10^3 MPa		114	114	118
Dichte	ϱ in 10^3 kg/m³		4,50	4,50	4,50
Bearbeitung	weichglühbar in °C		600 ··· 700	600 ··· 700	600 ··· 700
L Luftkühlung	warmformbar bei °C (L)		700 ··· 1000	700 ··· 1000	
	rekristallisierbar bei °C (L)		650 ··· 700	650 ··· 700	

Anwendungsbeispiele: chemischer Apparatebau; Schiffbau; stark beschleunigte Teile in Textil- und Rechenmaschinen, im Flugzeugbau für hochbeanspruchte Teile aus Blechen, für Bolzen und Schrauben; für spezielle Korrosionsansprüche in Chlorionen enthaltenden Medien; auch als Konstruktionswerkstoff; wegen der hohen Festigkeit und Zeitstandfestigkeit der Ti-Legierungen Einsatz im Flugzeug- und Trieb-

Bei guter Dehnung besitzt Titan eine hohe Festigkeit. Damit ist es festigkeitsmäßig dem Stahl ähnlich und hat eine Korrosionsfestigkeit ähnlich einem Edelmetall (beständig gegen Salpetersäure, Königswasser und Seewasser). Mit Stickstoff oder Ammoniak ist es oberflächenhärtbar. Trotz starker Kerbwirkung ist hohe Dauerfestigkeit vorhanden. Mit steigender Temperatur sinkt die Festigkeit rasch, z. B. bis 200 °C um etwa 35%. Titan weist eine erhebliche Kaltverfestigung auf.

Standardisierung: EMO-Titan[43])

Titanlegierungen (Tabelle 28)

Einfluß der Legierungselemente:

Al + Cr: härten Titan bei Wasser- und Ölkühlung;
Al + V: erhöhen die Zugfestigkeit;
Mo: erhöht die Korrosionsbeständigkeit;

Al in Verbindung mit Cr, Fe, Si, Mn, Pa oder Mo: erhöht die Warmhärte.

2.3.2.4. Legierungen zum Schweißen und Löten der Leichtmetalle

Die in Tabelle 29 angegebenen Legierungen sind nur für Reinaluminium und Aluminiumlegierungen vorgesehen.

Standardisierung: Schweißzusatzwerkstoffe[44]); Hartlote[45]); Weichlote[46])

		Titanlegierungen				
Ti 200		TiAl 6 V 4		TiAl 5 Sn 2,5	TiAl 8 Co 4	TiAl 2 Mn 2
	Al	6		5	8	2
	V	4				
	Sn			2,5		
	Co				4	
	Mn					2
	Ti	Rest		Rest	Rest	Rest
650 ··· 800		910 ··· 1060	1020 ··· 1270	800 ··· 950	1340	730
550 ··· 700		840 ··· 1020	950 ··· 1230	700 ··· 850	1060	600
20 ··· 10		18 ··· 8	10 ··· 5	20 ··· 10	11	22
> 200		geglüht	vergütet	geglüht	(α + β)-behandelt	geglüht
118						
4,50		4,45	4,45	4,47	4,52	4,51

600 ··· 700

werksbau; Raumfahrtindustrie; wegen hoher Festigkeit bei niedriger Dichte für Bauteile mit hoher Drehgeschwindigkeit (Zentrifugen, Turbinenschaufeln, Strahltriebwerke) und für schnellbeschleunigte Teile (Pleuelstangen in Verbrennungsmotoren).

Tabelle 29. Schweißzusatzwerkstoffe, Hartlote und Weichlote für Aluminium und Aluminiumlegierungen

Benennung		Schweißzusatzwerkstoffe					Hartlote		Weichlote	
		S-AlRMg 0,5	S-Al 99,5 Ti	S-AlMg 3 Si	S-AlSi 5	S-AlSi 12	L-AlSi 12	L-ZnAl 30	L-SnZn 40	L-CdZn 40
Zusammensetzung in Masse-%	Al	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	29,5 ··· 32,5		
	Mg	0,4 ··· 0,6		2,3 ··· 3,5						
	Ti		0,1 ··· 0,2	< 0,2	< 0,2	< 0,2				
	Mn			0,3 ··· 0,8		< 0,5		0,1 ··· 0,5		
	Cr			< 0,3						
	Si			0,5 ··· 0,8	4,5 ··· 5,5	11 ··· 13,5	11 ··· 13,5			
	Zn							67 ··· 70	30 ··· 50	55 ··· 65
	Sn								50 ··· 70	
	Cd									35 ··· 45
Zulässige Begleitelemente		← Cu, Mn, Fe, Ti, Zn, Mg, Si →					Cu, Mn, Fe, Ti, Zn, Sn, Pb, Cd, Si			
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³		2,69	2,71	2,65	2,68	2,66	2,7	5,9	7,2	7,4
Arbeitstemperatur in °C							590	520	260 Reiblöten	300 Reiblöten
Schmelzbereich in °C		645 ··· 658	647 ··· 658	588 ··· 635	573 ··· 625	573 ··· 585				
Lieferformen Abk. siehe S. 58		← Dr, St →					Dr, St	Dr, St	St	St
Grundwerkstoffe der zu verbindenden Teile		Reinst-Al, Al 99,99 u. Al 99,9, AlRMg 0,5, AlRMg 1	Al 99,5 u. Al 99 für Dicken über 8 mm	AlMg 3 Si, AlMg 3, AlMgSi 1, G-AlMg 3	AlMgSi 1, AlZnMg-Leg., AlSi-Guß-legierung bis 7% Si	AlSi-Guß-legierung mit über 7% Si	Aluminium und Al-Legierung außer AlMg	Aluminium und Al-Guß-legierung	Aluminium und Al-Legierungen	Leichtmetallguß
Anwendungsbeispiele			Geräte für chemische Industrie			Gußstücke, Bleche, Drähte, Profile	Gußstücke nur aus G-AlSi 12, Bleche, Drähte, Profile	Kabel und Gußstücke	feine Drähte bis 0,2 mm, Folien	Gußstücke
Weitere Sorten		S-Al 99,5; S-AlMg 3; S-AlMg 5; S-AlMg 5 Si					—	—	L-ZnSnCd 25 L-CdZn 30	L-CdZn 20

2.3.3. Schwermetalle

2.3.3.1. Kupfer und Kupferlegierungen

Reinkupfer (Tabelle 30)

Kupfer wird als selbständiger Werkstoff in großem Umfang verwendet. Es besitzt gute mechanische Eigenschaften, ist sehr korrosionsbeständig und kaltverformbar. Die Leitfähigkeit für elektrischen Strom und Wärme ist sehr hoch, mit steigender Verunreinigung sinkt sie stark ab. Schon geringe Sauerstoffgehalte rufen beim Glühen über 500 °C in reduzierender Atmosphäre die Wasserstoffkrankheit hervor, wodurch die Verformbarkeit herabgesetzt wird und die Gefahr des Auftretens von Rissen besteht. Kupfer ist nicht gut gießbar, Guß wird durch Gasaufnahme porig. Zusatz von geringen Mengen an Zn, Mg, Sn, Pb, Mn, Ni, Cd, Be, Li, P, Si (insgesamt $\leqq$ 1%) verbessert die Gießbarkeit.

Standardisierung: Kupfer, Sorten[46]; Drahtbarren[47][48]; Kupferkatoden[49]; Kupferanoden[46][50]; Metallpulver aus Kupfer und Kupferlegierungen[51])

Tabelle 30. Kupfer

Benennung	Katodenkupfer	Sauerstofffreies Elektrolytkupfer	Raffinadekupfer, desoxydiert	Elektrolytkupfer		Gußkupfer
	KE-Cu 99,95	SE-Cu 99,95	DR-Cu 99,7	E-Cu 99,9	R-Cu 99,7	Cu 99
Zulässige Begleitelemente	← Bi, Sb, As, Sn, Ni, Fe, Pb, Zn, S, Ag, P →					
Festigkeitswerte						
weich: σ_B in MPa		200	200	200	200	
weich: $\sigma_{0,2}$ in MPa		40 ··· 100	40 ··· 100	40 ··· 100	40 ··· 100	
weich: δ_5 in %		40	40	40	40	
halbhart: σ_B in MPa		250	250	250	250	
halbhart: $\sigma_{0,2}$ in MPa		$\geqq$ 150	$\geqq$ 150	$\geqq$ 150	$\geqq$ 150	
halbhart: δ_5 in %		10 ··· 15	10 ··· 15	10 ··· 15	10 ··· 15	
hart: σ_B in MPa		300 ··· 370	300 ··· 370	300 ··· 370	300 ··· 370	
hart: $\sigma_{0,2}$ in MPa		250 ··· 330	250 ··· 330	250 ··· 330	250 ··· 330	
hart: δ_5 in %		6 ··· 3	6 ··· 3	6 ··· 3	6 ··· 3	
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³	8,9	8,9	8,9	8,9	8,9	8,85
Spezifischer elektrischer Widerstand in $10^{-9}\ \Omega \cdot m$	$\leqq$ 17,54	$\leqq$ 17,54		$\leqq$ 18,4		
Elektrische Leitfähigkeit γ in 10^6 S/m	$\geqq$ 57	$\geqq$ 57		55 ··· 57		
Lieferformen Abk. siehe S. 58		*weich, halbhart, hart:* Bl, Bä, Str, Ro, Sta, Dr; *weich:* Sch Ba		Ba		
Anwendungsbeispiele	Katoden, Einsatz für Schmelzungen hoher Reinheit	Anoden mit geforderter elektrischer Leitfähigkeit	Rohre für Kleinkälteanlagen und Kondensatoren	Anoden, Leitkupfer in der Elektrotechnik, Thermoelemente	Halbzeug	Formgußstücke, Kupferlegierungen, Bimetallfolien

Tabelle 31. Kupfer-Knetlegierungen

Benennung		Knetmessing				Knet-Sondermessing	
		CuZn40Pb2	CuZn40	CuZn37	CuZn30	CuZn35Al1Ni	CuZn29Al
Frühere Benennung		Ms 58	Ms 60	Ms 63	Ms 72	SoMs 59	SoMs 70
Zusammensetzung in Masse-%	Cu	56…60	59…62	62…65	69,5…73	57…62	67…71
	Pb	1,0…3,5					
	Zn	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest
	Sn						
	Ni					2…3	
	Fe						
	Al					0,3…1,5	0,5…2,0
	Mn					1,5…2,5	
	Si						0,3…0,7
	P						
Zulässige Begleitelemente		Fe, Sn, Al, Mn, Pb	Fe, Sn, Al, Mn, Pb	Fe, Sn, Al, Mn, Pb	Fe, Sn, Al, Mn, Pb	Al, Sn, Mn, Fe, Pb, Si	Al, Sn, Mn, Fe, Pb, Si
Festigkeitswerte							
weich	σ_B in MPa	370	340	300	280	nach besonderer Vereinbarung	370
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	≦ 280	≦ 220	≦ 180	≦ 180		≦ 100
	δ_5 in %	30	36	46	46		50
hart	σ_B in MPa	500	480	450	430		≧ 600
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	≧ 400	≧ 360	≧ 350	≧ 330		≧ 450
	δ_5 in %	6	9	12	12		federhart
Dauerfestigkeit							
weich σ_{bW} in MPa		170		130	110		
hart σ_{bW} in MPa		240		250	220		
E-Modul E in GPa		100	74,4	112	115		110
Längenausdehnungskoeffizient α in 10^{-6} K^{-1}		19	19	20,2…20,8	19,8		
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3		8,4	8,4	8,45	8,55	8,3	8,4
Lieferformen Abk. siehe S. 58		Sch, Bl, Bä, Sta, Pr, Dr, Ro G, GK, GD	Sch, Bl, Bä, Sta, Pr, Dr, Ro	Sch, Bl, Bä, Sta, Pr, Dr, Ro	Sch, Bl, Bä, Sta, Pr, Dr G, GK, GZ	Sta, Ro	Bl, Bä
Anwendungsbeispiele		Hauptlegierung für spanende Formung, Graviermessing, Uhrenräder, Schrauben u. Drehteile, Maschinenbau u. Elektrotechnik, Bauprofile	Kondensatorböden, Warmpreßteile, Schrauben u. Drehteile, Beschlag- u. Schloßteile	Hauptlegierung für Kaltverformung durch Ziehen, Drücken, Stauchen, Walzen, Rollen v. Gewinde, Ätzbleche, Messinganoden sowie Spritzdrähte	mit Flußstahl gut plattierbar, Rohre für Wärmeaustauscher, tiefgezogene Hülsen, Instrumentenrohre, für Kontaktbimetall	Konstruktionswerkstoff mittlerer bis hoher Festigkeit mit guter Korrosionsbeständigkeit gegen Seewasser. Vorzugsweise für gepreßte Profile	Federn aus Blechen, Bändern und Drähten, Anlauf- u. Dämpferstäbe in der Elektrotechnik
Bearbeitung							
Schmiedebereich in °C		600…870	600…870	600…870	820…870		
Schmelzbereich in °C		885…960	890…905	905…920	925…965		
Gießbereich in °C		970…1050	980…1050	1000…1100	1050…1125		
Schwindmaß		1,4…1,67 (G) 1,9…2,2 (GK)	— —	— —	1,76 (G) 1,87 (KG)		
Abschrecken in °C		750 W	750 W				
Weichglühen in °C		600…650 L	550…580 L	550…580	620…640		
Dauer in h		2		2…3	2…3		
Entspannung in °C		200…250 L	225…250	225…300	225…350		
Dauer in h		2			2		

W Wasserkühlung
L Luftkühlung

Zinnbronze und Mehrstoff-Zinnbronze		Aluminiumbronze u. Mehrstoff-Aluminiumbronze		Neusilber	
CuSn6	**CuSn4Zn4Pb4**	**CuAl5**	**CuAl10Fe3Mn1**	**CuNi12Zn30Pb**	**CuNi12Zn24**
SnBz 6	MSnBz4Pb	AlBz 5	AlBz10Fe	Ns5712Pb	Ns6512
Rest	Rest	92,5···96,0	80,0···86,5	55···59	63···67
	3···5			≦ 2,5	≦ 0,05
	3···5			Rest	
5,6···7,0	3···5				
				11···13	11···13
			2,0···4,0	≦ 0,5	≦ 0,03
		4,0···6,0	9,0···11,0		
			1,0···2,0	≦ 0,5	≦ 0,5
≦ 0,4					
Pb, Zn, Fe	Pb, Zn, Fe	Fe, Mn, Zn, Pb, Si, P	Si, Zn, Fe, Mn, Pb, P	Mn, Fe, 0,1 sonstige	Mn, Fe, Pb, 0,1 sonstige
360	nicht festgelegt	320	nicht festgelegt	500··· ≧ 600	350
≦ 260		≧ 10		—	≦ 300
55		46		8···3	45
480		450		obige Werte in 2 Festigkeitsstufen	490
≧ 380		≧ 250			≧ 38
15		16			11
$\tau_{tw} = \pm 100$					
100		≈ 125		≈ 110	130
17,5		18	17	18···21	18
8,8	8,9	8,2	7,4	8,7	8,7
Sch, Bl, Bä, St, Pr, Ro, Dr, G, GK, GD GZ, GV	Bl, Bä	Sch, Bl, Bä, St, Pr, Ro, Dr, G, GK, GD GZ, GV	Sch, Bl, Bä, St, Ro, Dr	Bl, Bä, St, Pr, Dr	Bl, Bä, St, Pr, Ro, Dr
Federn aller Art, Bourdonrohre, Membranen, Drahtgewebe; Spritzdrähte, Kontaktbimetall	Bleche, Bänder für gerollte Buchsen	chem. Industrie, Bergbau, Kaliindustrie, Salinen, Kondensatorrohre, Bremsbänder	Wellen, Spindeln, Bolzen, Schrauben, Muttern; Verschleißteile wie Getrieberäder, Schnecken, hoch- und stoßbelastete Lagerorgane, Heißdampfarmaturen, Steuerelemente der Hydraulik	für spanende Bearbeitung, Feinmechanik, Optik, Schlüssel, Medizintechnik	Tiefziehteile, Tafelgerät, kunstgewerbliche Gegenstände, Bauwesen, Innenarchitektur, Federn, ärztliche Instrumente; Kontaktbimetall
700···850		740···800	≦ 800	600···750	600···750
930···1040		≈ 1070	≈ 1000	≈ 1020	≈ 1050
1100		1150···1200	1150···1200		≈ 1120
1,66 (G)		2 (G, GK)	—	1,8 (G)	1,8 (G)
			—	2,0 (GK)	2,0 (GK)
550···600 L		≈ 650	650	600···750	600···750
≈ 300		≈ 250		längeres Auskochen in Wasser	

Tabelle 32. Kupfer-Gußlegierungen

Benennung		Zinnbronzen und Zinn-Mehrstoffbronzen				Bleibronzen und Blei-Mehrstoffbronzen		
		G-CuSn10	G-CuSn10P1	G-CuSn10Zn3	G-CuSn6Zn7Pb4	G-CuPb10Sn10	G-CuPb15Sn7	G-CuPb22Sn5
Frühere Benennung		G-SnBz10	–	Rotguß 10	Rotguß 5	–	G-SnPbBz15	G-SnPbBz22
Zusammensetzung in Masse-%	Sn	9,0···11,0	9,0···11,0	8,5···11,0	5,0···7,0	9,0···11,0	6,0···8,0	4,0···6,5**)
	Zn			1,0···4,0	5,5···9,0			
	Pb				2,5···5,0	8,0···11,0*)	13,0···17,0	18,0···27,0
	P		0,5···1,1					
*) für GV 8,0 bis 12,0% Pb	Cu	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest
	Al							
	Mn							
**) für GV 2,0 bis 6,0% Sn	Fe							
	Ni							
	Si							
Zulässige Begleitelemente		← Fe, Ni, Pb, Zn, As, Bi, P, Sb, S, Mn →				← Sn, Fe, Ni, Zn, P, Sb, Mn, Al, S →		
Gesamt in %		1,5	1,9	2,0	1,3	1,0; 1,5 (GV)	3,7	3,7; 5,5 (GV)
Festigkeitswerte								
G	σ_B in MPa	220	220	200	150	180	180	Werte nicht vorgeschrieben
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	120	150	120	80	100	80	
	δ_5 in %	15	3	8	10	10	8	
	HB	60	80	65	60	70	55	45
GK GZ	σ_B in MPa	220		220	250		180	
	$\sigma_{0,2}$ in MPa	150		150	100		100	
	δ_5 in %	5		7	12		8	
	HB	70		80	70		65	
GV	*HB*	90				80		45
Biegewechselfestigkeit σ_{bW} $(25 \cdot 10^6)$ in MPa		100	–	90	80	100	90	
E-Modul *E* in GPa		112	75	98	95	80	75	70
Längenausdehnungskoeffizient α in 10^{-6} K^{-1}		18,4	17,5	18,0	19,1	19,2	19,2	19,2
Elektrische Leitfähigkeit γ in 10^6 S/m		7	4	8	8	7	8	7
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3		8,6	8,5	8,6	8,6	9,0	9,3	9,5
Substitution für				G-CuSn10	G-CuSn10, G-CuSn10Zn3, G-CuSn14		G-CuPb22Sn5 aus gießtechnischen Gründen	
Lieferformen Abk. siehe S. 58		G, GK, GZ, GC, GV	G	G, GK, GZ	G, GK, GZ, GC	G, GV	G, GK, GZ	G, GV
Anwendungsbeispiele		Wellenbezüge, Schnecken- u. Zahnräder, Leit- und Laufräder, Armaturen, Verbundgußteile	Gleitlager, Spindelmuttern, Schnecken- u. Zahnräder	Gleitlager, Schiffswellenbeläge, Schneckenräder	universelle Cu-Legierung für mittlere bis hohe Anforderung an Verschleißfestigkeit; für Wasser- u. Dampftemperaturen bis 225 °C	Gleitlager, Kalanderwalzen, Fahrzeuglager, Lager für Warmwalzwerke, Verbundlager, Verbundgußteile	Gleitlager, säurebeständige Teile	Gleitlager, Verbundlager
Bearbeitung								
Schmelzbereich in °C		840···1000	840···1000	1000	1000			
Gießbereich in °C		1100···1150	1100···1150	1120	1120			
Schwindmaß in %		1,39 (G) 1,44 (GK)	1,4 (G)	1,5 (G)	1,5 (G)			



	Al-Mehrstoffbronze	Mn-Mehrstoffbronze	S-Mehrstoffbronze	Gußmessing und Gußsondermessing		
G-CuPb25	G-CuAl10Fe3Mn2	G-CuMn10 Zn8Al6NiFe	G-CuSi3Zn5	G-CuZn33Pb2	G-CuZn38Al	G-CuZn37Mn3AlFe
G-PbBz25	G-FeAlBz F45	—	—	G-Ms64	G-Ms60 u. 62	G-SoMs57 F45
		7,1···9,2	4,0···6,0	Rest	Rest	Rest
18,0···25,0				0,5···3,0		
Rest	Rest	Rest	Rest	63···67	58···62	55···61
	8,5···11,0	5,0···6,5			0,1···1,0	0,8···1,5
	1,0···3,0	9,0···11,5				2,0···4,0
	2,0···4,0	1,5···3,0				0,7···1,5
		1,0···3,5				
			2,0···4,0			
——→	Zn, Ni, Sn, Si, Pb	Sn, Si, Pb	Mn, Pb, Sn, Fe, Al, Mg, P, Sb, Bi	←Sn, Si, Al, Pb, Mn, Fe, Ni→		
4,0	2,0	0,4	0,35 ohne Mn	1,7 ohne Ni	2,3 ohne Ni	1,0 ohne Ni
	450	600	300	150		450
	150	250	100	60		150
	10	19	25	10		15
	100	145	80	50		100
	430		300		250	500
	170		100		100	160
	15		15		10	12
	105		80		75	110
27						
	230	230	120	70	135	170
	110	115	100			105
18	18	18	18,5	18,5	18,5	19
9	4	< 4	4	16	8	8
9,6	7,5	7,5	8,5	8,5	8,5	8,5
	G-CuSn10 aus gießtechnischen Gründen		G-CuSn- und G-CuSnZn-Legierungen			
GV	G, GK, GZ	G	G, GK, GZ	G	GK, GD	G, GK, GZ
Verbundlager mit hoher Beanspruchung, Pleuellager in Verbrennungsmotoren	Gußstücke für chemische u. Lebensmittel-Industrie, säurebeständige Armaturen, Laufräder, Schnecken, Schnecken- u. Zahnräder, Gleitführungen	Schiffsschrauben, Lauf- u. Leiträder, Verschleißteile, Schnecken u. Schneckenräder, Gleitlager, Druckmuttern	Gas- u. Wasserarmaturen, Gleitlager, Schneckenradkränze, Buchsen, Schiffsteile	Armaturen, Gehäuse, Konstruktionsteile mit guter elektrischer Leitfähigkeit, Beschlagteile	Armaturen, Beschlagteile mit blanker Oberfläche, Teile der Elektrotechnik	Armaturen, hochbeanspruchte Konstruktionsteile, Druckmuttern für Walzwerke u. Spindelpressen, Grund- u. Stopfbuchsen, Schiffsschrauben
960···1020	1000	890···905		> 905	890···905	885···900
1100	1150···1200	980···1050		1000···1100	960···1050	970···1050
1,4 (G)	2 (G)	1,5···1,75 (G) 1,85 (GK)		1,5 (G) 1,8 (GK)	1,5···1,75 (G) 1,85 (GK)	1,4···1,7 (G) 1,9···2,2 (GK)

Kupferlegierungen (Tabellen 31 und 32)

Bei Kupfer-Gußlegierungen werden folgende Gattungen unterschieden:

- *Guß-Zinnbronze* (CuSn);
- *Rotguß* (CuSnZn), mit zusätzlichem Ni als *Mehrstoffbronze* bezeichnet;
- *Guß-Messing* (CuZn), mit zusätzlichem Fe und Mn bzw. Al, Fe und Mn als *Guß-Sondermessing* bezeichnet;
- *Guß-Aluminiumbronze* (CuAl), mit zusätzlichem Fe und Mn bzw. Ni; Fe und Mn als *Mehrstoff-Aluminiumbronze* bezeichnet;
- *Guß-Neusilber* (CuNi), daneben auch Mn und Zn;
- *Guß-Bleibronze* (CuPb), mit mehr als 2% Sn als *Guß-Bleizinnbronze* bezeichnet.

Einfluß der Legierungselemente bei Messing:

Zn: senkt die elektrische und Wärmeleitfähigkeit, erhöht die Festigkeit;
Pb: erhöht die Zerspanbarkeit, senkt die Warmverarbeitbarkeit.

Einfluß der Legierungselemente bei Sondermessing und Neusilber:

Ni: erhöht Festigkeit, Dehnung, Zähigkeit, Warmfestigkeit, Dichte des Gusses, Korrosionsbeständigkeit und Feinkörnigkeit. Ab 15% Ni wird die Kupferfarbe unterdrückt;
Al: erhöht Festigkeit, Härte, Gußdichte, Korrosionsbeständigkeit und Zunderbeständigkeit;
Mn: erhöht Warmfestigkeit, Korrosionsbeständigkeit, Zugfestigkeit und Dehnung;
Sn: erhöht Seewasserbeständigkeit und Härte;
Si: erhöht Elastizität und Verschleißfestigkeit;
Pb: erhöht Zerspanbarkeit;
Fe: erhöht Zugfestigkeit und Dehnung, verfeinert das Korn, wirkt aushärtend;
Sb, As, Cd, Mg, P, S, Se und Bi: verspröden das Messing.

Einfluß der Legierungselemente bei Bronzen:

Sn: erhöht Härte, Festigkeit, Kaltverformbarkeit, Korrosionsbeständigkeit, verbessert die Gleiteigenschaften, elektrische und Wärmeleitfähigkeit werden gesenkt;
Al: erhöht Warmfestigkeit, Korrosions- und Zunderbeständigkeit, Festigkeit, Streckgrenze und Härte;
Fe (+ Ni): erhöht Festigkeit und Dehnung bei vorhandenem Al, verfeinert das Korn;
Pb: verbessert Gleit- und Notlaufeigenschaften, senkt die Festigkeit, letzteres nicht bei Anwesenheit von Sn;
Be: wirkt aushärtend, erhöht Korrosionsbeständigkeit;
Mn: erhöht Warmfestigkeit, Kaltverfestigung und Korrosionsbeständigkeit. Ab 12% Mn wird die Kupferfarbe unterdrückt;
Mn + Ni, Mn + Al: erhöhen den elektrischen Widerstand;
Ni: verbessert Gießeigenschaften und erhöht Festigkeit. Ab 15% Ni wird die Kupferfarbe unterdrückt.

Standardisierung: Kupfer-Zink-Knetlegierungen (Messing)[52]; Kupfer-Zink-Knetlegierungen (Sondermessing)[53]; Kupfer-Zinn-Knetlegierungen (Zinnbronze)[54]; Kupfer-Nickel-Zink-Knetlegierung (Neusilber)[55]; Kupfer-Nickel-Knetlegierungen[56]; Kupfer-Aluminium-Knetlegierungen (Aluminiumbronze)[57]; Kupfer-Beryllium-Knetlegierungen (Berylliumbronze)[58]; Metallpulver aus Kupfer und Kupferlegierungen in Masseln[51]; Kupfer-Gußlegierungen in Gußstücken[59]; Kupfer-Chrom-Vorlegierungen[60])

Stoffwirtschaft

Werkstoffsubstitution und Einsparung siehe Tabelle 1.
Es sind folgende Substitutionsmöglichkeiten zu überprüfen: zinnarme Legierungen anstelle zinnreicher (Rotguß oder SoMs für SnBz); zinnfreie Legierungen statt zinnarmer (Ms für Rotguß oder SoMs); Zink für Messing; oberflächengeschütztes Eisen für Zink; Plaste oder Porzellan anstelle von Messing usw.



2.3.3.2. Zink und Zinklegierungen

Feinzink (Tabelle 33)

Es wird als selbständiges Metall sehr viel verwendet. Bei mäßiger Festigkeit gute Dehnung. Zn ist besser verformbar als Mg, da es praktisch keine Kaltverfestigung aufweist. Die Rekristallisation erfolgt etwa bei Raumtemperatur. Die Korrosionsbeständigkeit ist gut.

Standardisierung: Zink in Masseln und Platten[61])

Zinklegierungen (Tabelle 33)

Einfluß der Legierungselemente:

Al und Cu: erhöhen Feinkörnigkeit, Formänderungswiderstand, führen jedoch zur Alterung. Bei Vorhandensein von Al und Cu dürfen die zulässigen Beimengungen nur in geringsten Mengen auftreten;
Pb und Cd: erhöhen bei vorhandenem Al die selektive Korrosion, daher Höchstgehalte vorgeschrieben;
Sn: senkt die Eignung für bildsame Formgebung und die Korrosionsbeständigkeit, letzteres bei vorhandenem Al;
Al: erhöht mit etwa 4% Al-Gehalt das Formfüllungsvermögen;
Mg: wirkt dem Einfluß von Pb, Cd und Sn entgegen.

Standardisierung: Feinzink-Gußlegierungen[62])

Stoffwirtschaft

Sparmaßnahmen. Anstelle von Zinküberzügen kann in geeigneten Fällen der Oberflächenschutz durch Phosphatieren oder Chromatieren erfolgen.
Werkstoffsubstitution. Überall dort, wo für Zink Stahl, Plaste oder Keramik verwendet werden können. Damit wird Zink zum Ersatz für Messing frei.

2.3.3.3. Nickel und Nickellegierungen

Reinnickel (Tabelle 34)

Nickel wird als selbständiges Metall verwendet, z. B. für Katalysatoren. Nickel besitzt gute Festigkeit und Dehnung, läßt sich sehr gut kaltumformen und kaltverfestigen, ist warmfest und bis etwa 365 °C ferromagnetisch. Bei sonst hoher Korrosionsbeständigkeit wird es jedoch von schwefelhaltigen Verbindungen angegriffen.

Standardisierung: Nickel und Nickellegierungen[63]); Nickelanoden[64]); Nickelkatoden[65]); Nickelpulver[66]); Aluminium-Nickel-Pulver[67])

Nickellegierungen (Tabelle 34)

Einfluß der Legierungselemente:

Mn: erhöht Festigkeit und Schwefelbeständigkeit;
Cu: senkt Festigkeit, erhöht Kalt- und Warmverformbarkeit, Gießbarkeit und Korrosionsbeständigkeit. Bei 30 ··· 32% Cu hohe Warmfestigkeit;
Si: erhöht die Gießbarkeit (wenn 30 ·· 33% Cu);
Be: wirkt aushärtend, erhöht Formänderungswiderstand und Korrosionsbeständigkeit;
Cr: erhöht Hitzebeständigkeit und Warmfestigkeit, senkt Verarbeitbarkeit und elektrische Leitfähigkeit.

Standardisierung: Nickellegierungen[68])

Stoffwirtschaft

Sparmaßnahmen. Vollnickel durch nickelplattierte Teile ersetzen, wenn es die Korrosionsbeständigkeit erfordert.
Werkstoffsubstitution. Anstelle von Nickelüberzügen solche aus Chrom oder Zink wählen. Unternickeln durch Unterkupfern austauschen. Gegebenenfalls Farbanstriche oder chemische Behandlung als Oberflächenschutz.

Tabelle 33. Zink und Feinzink-Knet- und Gußlegierungen

Benennung		Feinzink			Hüttenzink
		Zn 99,99	Zn 99,975	Zn 99,9	Zn 98,5
Zusammensetzung in Masse-%	Al				
	Cu				
	Mg				
	Zn	99,99	99,975	99,9	98,5
Zulässige Begleitelemente		Pb, Cd Sn, Fe, Cu	Pb, Cd Sn, Fe, Cu	Pb, Cd, Sn, Fe, Cu	Pb, Cd, Sn, Fe, Cu*)
Festigkeitswerte					
*) gepreßt **) gewalzt	G σ_B in MPa	30 ··· 40			
	G δ_{10} in %	0,5 ··· 0,3			
ku kalt umgeformt	GK σ_B in MPa	140 ··· 150*)	bis 150 ku	120**)	< 150 ku
	GK δ_{10} in %	50 ··· 40*)	≈ 35 ku	50**)	≈ 35 ku
	GD σ_B in MPa	120 ··· 140**)			
	GD δ_{10} in %	60 ··· 52**)			
Dauerfestigkeit σ_{bW} in MPa					
E-Modul E in GPa		110	110	110	110
Längenausdehnungskoeffizient α in 10^{-6} K^{-1}		≈ 30	≈ 30	≈ 30	≈ 30
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3		7,14	7,14	7,14	7,2
Lieferformen Abk. siehe S. 58		F	Bl, Bä, F, Dr	Bl, Bä, Dr	Bl, Bä, Dr
Anwendungsbeispiele (*nicht* für Geräte u. Gegenstände, die mit Lebensmitteln in Berührung kommen)		lösliche Anoden, Feinzinklegierungen, Tiefziehmessing und -neusilber	Behälter, Dachrinnen, Regenrohre, Dacheindeckungen, Orgelpfeifen; Tiefziehmessing und -neusilber, Feinzinklegierungen; Spritzdraht	Behälter, Dachrinnen, Regenrohre, Dacheindeckungen, Orgelpfeifen; Messing, Neusilber	Behälter, Dachrinnen, Regenrohre, Dacheindeckungen, Orgelpfeifen; Verzinkung, Farben, Rotguß, Messing, Neusilber
Bearbeitung					
Anreißen		← Bleche und Bänder nicht mit Reißnadel →			
Warmformen in °C		← 150 ··· 140 oder 120 ··· 90 →			
Blechwalzen in °C				75	75
Schwindmaß in %		1,7	1,7		

Umschmelzzink	Feinzink-Knetlegierungen		Feinzink-Gußlegierungen		
UZn 96	ZnAl 4 Cu 1	ZnCu 1	GD-ZnAl 4	GD-ZnAl 4 Cu 1	G-ZnAl 6 Cu 1
	3,5 ··· 4,3	< 0,2	3,5 ··· 4,3	3,5 ··· 4,3	5,6 ··· 6,0
	0,6 ··· 1,0	0,6 ··· 1,2	< 0,6	0,6 ··· 1,0	1,2 ··· 1,6
	0,02 ··· 0,05	< 0,005	0,02 ··· 0,05	0,02 ··· 0,05	
96	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest
Pb, Cd, Sn, Fe, Cu	Pb, Cd, Sn, Fe	Pb, Cd, Sn, Fe	Pb, Cd, Sn, Fe	Pb, Cd, Sn, Fe	Pb, Cd, Sn, Mg, Fe
			≧ 160	≧ 180 GZ	≧ 180
	300		δ_5 ≧ 0,5	≧ 0,5 GZ	≧ 1
	≧ 300*)	≧ 200*)	≧ 180	≧ 200	≧ 220
	≧ 5*)	≧ 20*)	δ_5 ≧ 1	≧ 1	≧ 1,5
			≧ 250	≧ 270	
			≧ 1,5	≧ 2	
	130		70	130	
110	130		130	130	
≈ 30	27		27	27	
7,2	6,7	7,1	6,7	6,7	6,5
	Bl, Bä Sta, Pr	Bl, Bä Sta, Pr	GD, G, GK	GD, GK, GZ	G, GK
Verzinkung, Farben	Zieh- und Druckteile, Stanzteile	Autoschlauchventile	Gußstücke aller Art, besonders bei höheren Anforderungen an Maßbeständigkeit	Gußstücke aller Art, Lager, Schneckenräder und andere Gleitorgane	gießtechnisch schwierige Stücke
	200 ··· 280	200 ··· 240			
			1,1	1,1	1,1

Tabelle 34. Reinnickel und Nickellegierungen

Benennung		Elektrolytnickel	Reinnickel		Nickellegierungen			
		E-Ni 99,8	E-Ni 99,8 Co	Ni 99,2	NiMn 0,7	NiMn 4	NiCu 32	NiW 7
Zusammensetzung in Masse-%	Ni	99,8	99,8 (Ni + Co)	99,2 (Ni + Co)	Rest	Rest	Rest	92,7 ··· 93,9
	Mn				0,6 ··· 0,8	3 ··· 4	0 ··· 1,5	
	Cu						30 ··· 32	
	W							6,7 ··· 7,3
Zulässige Begleitelemente		Fe, S, Cu, Pb, Zn, S	Cu, Fe, Zn, Pb, S	Mg, C, Cu, Pb, S, Si, Zn, Fe	Mg, Fe, Si, Cu, C, S	Mg, Fe, Cu, Si, C, S	Si, Fe	Mn, Si, Fe, Cu, S, Al, C, Pb, Zn, Cd, As
Festigkeitswerte	σ_B in MPa	nicht festgelegt			580	500	ohne Angabe	
	δ_{10} in %				4	10		
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³		8,90	8,90	8,90	8,9	8,8	8,9	9
Lieferformen	Abk. siehe S. 58	Gr, Bl (zerschn.)	Anoden, elektrolytisch erzeugt	Anoden, gewalzt	Dr	Bl, Dr	Dr	Bä, St, Dr, Ro
Anwendungsbeispiele		Nickellegierungen, nickelhaltige NE-Metall-Legierungen, nickelhaltige Stähle	Hochglanz- und Starkvernickelung	für galvanische Elektrolyte	Dentaltechnik	Zündkerzen	Schweißdrähte für Gußeisen	warmfeste Innenteile von Elektronenröhren
Bearbeitung	Schmieden in °C	1 100	1 100	1 100			800 ··· 1 150	
	Gießen in °C	1 550 ··· 1 600	1 550 ··· 1 600	1 550 ··· 1 600			1 200 ··· 1 600	
	Schwindmaß in %	2 ··· 2,3	2 ··· 2,3	2 ··· 2,3				
	Weichglühen in °C	> 750	> 750	> 750				
Substitution durch			Verchromen, Glanzverzinken	Verchromen, Glanzverzinken	soweit möglich — rost- und anlaßbeständige Stähle	Stähle mit 30% Cr für Mittelelektroden in Zündkerzen	soweit möglich Stähle mit 14% Cr	

Tabelle 35. Blei, Zinn, Antimon

Benennung	Feinblei		Hüttenblei			Zinn			Antimon		
	Pb 99,99	Pb 99,985	Pb 99,97	Pb 99,95	Pb 99,9	Sn 99,75	Sn 99,5	Sn 99	Sb 99,9	Sb 99,15	Sb 98,7
Zusammensetzung in Masse-% Pb	99,99	99,985	99,97	99,95	99,9						
Sn						99,75	99,5	99,0			
Sb									99,9	99,15	98,7
Zulässige Begleitelemente	← Sn, Sb, Ag, Cu, Zn, Bi, As, Fe →					← Pb, Sb, Cu, Bi, As, Fe, S →			← Pb, Sn, Cu, As, Fe →		
Gesamt in %	0,010	0,015	0,030	0,050	0,100	0,250	0,500	1,000	0,10	0,85	1,30
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3	11,34	11,34	11,34	11,34	11,34	7,28	7,28	7,28	6,68	6,68	6,68
Lieferformen Abk. siehe S. 58	Bl, Ro	Bl, Bä, F, Ro, Dr	Bl, Ro	Bl, Bä, Ro	Bl, Dr, Ro	Ba, Pl, Bl, F, Sta, Dr, Pu, Gr	Ba, Pl, Bl, F, Sta, Dr, Pu, Gr	Ba, Pl, Bl, F, Sta, Dr, Pu, Gr	Ba	Ba	Ba
Anwendungsbeispiele	hochwertige Hartbleilegierungen für Akkumulatoren, aktive Massen in Akkumulatoren, Bleioxid	spezielle Zwecke im chemischen Apparatebau	chemische Industrie, säurefeste Apparate	Futter in säurefesten Apparaten, Kabelummantelungen, Legierungen für d. chem. Industrie, Spritzdrähte		Weißblech für Konservendosen, träge Schmelzsicherungen, Verzinnen von Gegenständen für Lebensmittel, für reine Legierungen	Herstellung von Legierungen	Verzinnen von Gegenständen, die nicht mit Lebensmitteln in Berührung kommen, für Legierungen, Kernstützen	für Hartblei für Akkumulatoren	Lager- und Lettermetalle, Galvanostereotypie, Bleiakkumulatoren	Kupfer- u. Bleilegierungen, Bleiakkumulatoren

Tabelle 36. Blei-Antimon-Legierungen

Benennung		Hartblei							Sonderhartblei		
		PbSb 1	PbSb 2	PbSb 4	PbSb 6	PbSb 7	PbSb 8	PbSb 10	PbSb 3 As	PbSb 5 As	PbSb 5,5 As
Zusammensetzung in Masse-%	Pb	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	96,9 ··· 96,3	95,0 ··· 94,3	92,0 ··· 91,0
	Sb	0,8 ··· 1,2	1,8 ··· 2,2	3,8 ··· 4,4	6,5 ··· 7,0	6,8 ··· 7,4	7,8 ··· 8,5	9,8 ··· 10,5	2,8 ··· 3,4	4,8 ··· 5,3	5,2 ··· 5,8
	As								< 0,2	< 0,2	0,8 ··· 1,0
	Sn										1,7 ··· 1,9
Zulässige Begleitelemente		← As, Ag, Cu, Bi, Sn, Fe, Zn →							← Ag, Cu, Bi, Sn, Fe, Zn →		
Gesamt in %		0,15	0,15	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3		11,3	11,25	11,16	11,1	11,0	11,0	10,9	11,2	11,1	11,1
Lieferformen Abk. siehe S. 58		Ba, Blö, Bl, Bä, Ro	Ba, Blö, Bl, Bä, Ro	Ba, Blö, Bl, Bä, Ro	Ba, Blö, Bl, Bä, Ro	Ba, Blö, Bl, Bä	Ba, Blö, Bl, Bä	Ba, Blö	Ba, Blö	Ba, Blö	Ba, Blö
Anwendungsbeispiele		Rohre für Trink-, Betriebs-, Abwasserleitungen	industrielle Anwendung		industrielle Anwendung	Akkumulatoren, korrosionsfester Werkstoff für Sonderzwecke		Anoden für galvanische Verchromungsbäder, Armaturen-Formguß, auch in der chemischen Industrie	Auswuchtkörper	Akkumulatoren, korrosionsfester Werkstoff für Sonderzwecke	Überzugsblei für Kaltband (temporärer Korrosionsschutz)
		Auskleidungen in chemischen Anlagen									

Tabelle 37. Lagermetalle auf Blei- und Zinngrundlage

Benennung		WM 5	WM 10	Cu-freies WM 10	Cd-haltiges WM 9	WM 80	Cu-freies WM 80	Cd-haltiges WM 80
		LgPbSn 5	LgPbSn 10 Cu	LgPbSn 10	LgPbSn 9 Cd	LgSn 80	LgSn 80 Sb 18	LgSn 80 Cd
Zusammensetzung in Masse-%	Sn	4,5 ··· 5,5	9,5 ··· 10,5	9,5 ··· 10,5	8,0 ··· 10,0	79,0 ··· 81,0	79,0 ··· 81,0	79,5 ··· 81,5
	Cu	0,5 ··· 1,5	0,5 ··· 1,5	—	0,8 ··· 1,2	5,0 ··· 7,0	—	5,0 ··· 6,0
	Sb	14,5 ··· 16,5	14,5 ··· 16,5	14,5 ··· 16,5	13,0 ··· 15,0	11,0 ··· 13,0	16,0 ··· 20,0	11,0 ··· 13,0
	Pb	Rest	Rest	Rest	Rest	1,0 ··· 3,0	1,0 ··· 3,0	
	Cd				0,3 ··· 0,7			1,0 ··· 1,4
	As				0,3 ··· 1,0			0,3 ··· 0,7
	Ni							0,2 ··· 0,4
Zulässige Begleitelemente		← Fe, Al, Zn, Bi, Cu, As, Pb →						
Härte *HB*		22	23	23	27	28	26	35
Längenausdehnungskoeffizient α in $10^{-6}\,K^{-1}$		23 ··· 25	23 ··· 25	23 ··· 25	23 ··· 25	22	22	22
Dichte ϱ in $10^3\,kg/m^3$		10,10	9,75	9,75	9,80	7,46	7,27	7,34
Bearbeitung Schmelzen	in °C	240 ··· 340	240 ··· 340	240 ··· 340	240 ··· 340	230 ··· 400	230 ··· 400	240 ··· 420
Gießen	in °C	420 ··· 450	420 ··· 450	420 ··· 450	450 ··· 520	450 ··· 490	450 ··· 490	490 ··· 520
Schwindmaß	in %	0,5 ··· 0,6	0,4 ··· 0,6	0,4 ··· 0,6	0,4 ··· 0,6	0,4 ··· 0,5	0,4 ··· 0,5	0,4 ··· 0,5
Anwendungsbeispiele		Schienenfahrzeugbau, Brikettpressen, allgemeiner Maschinenbau		Lager bei Auftreten ammoniakhaltiger Medien	Abraum- und Kohlewagen, Schlagmühlen, Kolbenkompressoren, allgemeiner Maschinenbau	Lager mit höherer Belastung bei Schlag und Stoß	Lager bei Auftreten ammoniakhaltiger Medien	Lager von Dieselmotoren
Anwendung bis p_{stat} in MPa		25	25	25	25,5	30	30	

2.3.3.4. Blei, Zinn und Antimon sowie ihre Legierungen

Reinblei, Reinzinn, Reinantimon (Tabelle 35)

Blei wird vielfach als reines Metall verwendet. Es ist sehr weich, besitzt geringe Festigkeit bei guter Dehnung, ist zäh, leicht verarbeitbar, gut gießbar und chemisch beständig. Bleisalze und -oxide sind giftig!
Zinn hat ähnliche Eigenschaften wie Blei bei etwas größerer Festigkeit und noch besserer Gießbarkeit. Zinn ist ungiftig. Antimon wird als selbständiger Werkstoff nicht verwendet.

Standardisierung: Blei, Feinblei, Hüttenblei[69]); Zinn[70]); Zinnanoden[70])[71]); Antimon[72])

Legierungen auf Blei- und Zinnbasis

Es werden unterschieden: Blei- und Zinnlegierungen (Tabelle 36), Lagermetalle auf Blei- und Zinngrundlage (Tabelle 37), Blei- und Zinn-Druckgußlegierungen (Tabelle 38), Blei- und Zinnlote (Tabelle 39).

Einfluß der Legierungselemente auf Blei:

Sn: verbessert Gleit- und Notlaufeigenschaften, erhöht Härte und Festigkeit;
Sb: erhöht Festigkeit und Härte sowie Feinkörnigkeit und Gießbarkeit;
Sb + Sn: erhöhen Schmelz- und Gießbarkeit sowie Formfüllungsvermögen;
Cu (mit Sb): erhöht die Härte;
As: erhöht die Härte; ersetzt teilweise Sb (Arsen ist giftig!)

Standardisierung: Blei-Antimon-Legierungen[73]); Bleilegierungen für die grafische Industrie[74]); Lagermetalle auf Blei- und Zinn-Grundlage[75]); Blei-Druckgußlegierungen[75]); Weichlote ohne Flußmittelfüllung für Schwermetalle[45])

Stoffwirtschaft

Blei und Zinn sind Sparstoffe.
Sparmaßnahmen. Löten: Lote mit Kadmiumzusatz verringern den Zinnverbrauch; Verzinnen: Antimonzusatz bis 10% spart Zinn ein.
Werkstoffsubstitution. Beispiele siehe Tabelle 1. Die Anwendung muß von Fall zu Fall geprüft werden! Beachtung ist der steigenden Anwendung von Plasten zu schenken.

Tabelle 38. Blei- und Zinn-Druckgußlegierungen

Benennung		Blei-Druckgußlegierungen			Zinn-Druckgußlegierungen		
		GD-Pb 97	GD-Pb 85	GD-Pb 46	GD-Sn 78	GD-Sn 70	GD-Sn 50
Zusammensetzung in Masse-%	Pb	96 ··· 98	84 ··· 86	45 ··· 47	0 ··· 1,5	9,5 ··· 11,5	32 ··· 34
	Sn		4 ··· 6	39 ··· 41	77 ··· 79	69 ··· 71	49 ··· 51
	Sb	2 ··· 4	9 ··· 11	11 ··· 13	16 ··· 18	14 ··· 16	12 ··· 14
	Cu			1,5 ··· 2,5	3,5 ··· 4,5	4,0 ··· 5,0	3,5 ··· 4,5
Zulässige Begleitelemente		← Fe, Cd, As →					
Festigkeitswerte							
σ_B in MPa		50	75	80	115	100	80
δ_{10} in %		20	8	4	2,5	1,1	1,9
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³		11,1	9,8	8,6	7,1	7,4	8,0
Anwendungsbeispiele		Gußstücke für Schwungmassen, Pendel, Teile für Meßgeräte, Drucklettern			Gußstücke für Elektrizitätszähler, Gasmesser, Geschwindigkeitsmesser, sonstige Zähler		
Andere Legierungen		GD-Pb 87, GD-Pb 59			GD-Sn 75, GD-Sn 60		

Tabelle 39. Weichlote ohne Flußmittelfüllung für Schwermetalle

Benennung		Antimonhaltige Lote			Antimonarme Lote			Antimonfreie Lote	Weichlote mit Silber	Sonderweichlot
		LSn 25 Sb	LSn 40 Sb	LSn 60 Sb	LSn 8 (Sb)	LSn 30 (Sb)	LSn 90 (Sb)	LSn 50	LSn 63 Ag 1,5	LPbAg 3
Zusammensetzung in Masse-%	Sn	24,5 ··· 25,5	39,5 ··· 40,5	59,5 ··· 60,5	7,5 ··· 8,5	29,5 ··· 30,5	89,5 ··· 90,5	49,5 ··· 50,5	62,5 ··· 63,5	—
	Sb	0,2 ··· 1,7	0,5 ··· 2,0	0,5 ··· 2,0	0,12 ··· 0,5	0,12 ··· 0,5	0,12 ··· 0,5			
	Pb	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest
	Ag								1,3 ··· 1,5	2,5 ··· 3,5
Zulässige Begleitelemente		← Cu, As, Ni, Fe, Bi, Al, Zn, Cd →								
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³		9,8	9,1	8,5	10,6	9,7	7,6	8,9	8,4	11,1
Arbeitstemperatur in °C		260	225	190	305	225	219	215	178	315
Lötarten*)		F, T	F, T, K	F, T, K	F, T	F, T	F, K	F, T, K	T	F, K
Lieferformen		← Blöcke, Platten, Stangen, Drähte, Fäden, Pulver →								
Anwendungsbeispiele		Kühler	Kühler, Klempnerarbeiten	Feinblech, Klempnerarbeiten	Kühler gute Eignung für Lötungen an Zink	Zinkblech	Feinlötungen	Elektrotechnik	Gedruckte Schaltungen	Elektromotorenbau
Weitere Sorten		LSn 30 Sb, LSn 33 Sb, LSn 50 Sb			LSn 33 (Sb), LSn 40 (Sb), LSn 60 (Sb), LSn 60 (Sb)			LSn 2, LSn 60, LSn 63	mit Kupfer LSn 60 Cu 1,5	LSnAg 3, LSnSb 5, LSnPbCd 18, LCdZn 17

*) F Flammenlöten, T Tauchlöten, K Kolbenlöten

Tabelle 40. Hartlote und Schweißzusatzwerkstoffe auf Kupferbasis

Benennung		Hartlote		
		LCuZn 40	LCu	LCuP 8
Zusammensetzung in Masse-%	Cu	58 ⋯ 62	99	Rest
	Sn		< 0,5	
	Zn	Rest	< 0,5	
	Ag			
	P		< 0,05	7,5 ⋯ 8,5
	Si	0,1 ⋯ 0,3		
Zulässige Begleitelemente		←		Al, Fe, Mn,
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³		8,4	8,9	8,0
Arbeitstemperatur in °C		900	1070	710
Lieferformen Abk. siehe S. 58		St, Dr	St, Dr	Kornlot
Werkstoff der zu verbindenden Teile		Stahl, Temperguß, Kupfer und Kupferlegierungen, Nickel und Nickellegierungen	Kupfer	Kupfer und Kupfer-Zink-Legierungen
Verwendungsbeispiele		Rohrleitungen, Fahrzeugbau, Instandsetzung		Austausch von Silberlot bei geringer Dehnungsbeanspruchung

Tabelle 41. Silberlote

Benennung		LAg 12	LAg 15 P	LAg 25	LAg 27	LAg 30 Cd 22	LAg 34 Cd 20
Zusammensetzung in Masse-%	Ag	11 ⋯ 13	14 ⋯ 16	24 ⋯ 25	26 ⋯ 28	29 ⋯ 31	33 ⋯ 35
	Cu	50 ⋯ 52	Rest	41 ⋯ 43	38 ⋯ 40	26 ⋯ 28	21 ⋯ 33
	Zn	Rest		Rest	Rest	Rest	Rest
	Cd					21 ⋯ 23	19 ⋯ 21
	Mn				8 ⋯ 10		
	Ni				4 ⋯ 6		
	P		4 ⋯ 6				
Zulässige Begleitelemente, gesamt in %		0,8	0,5	0,6	0,8	0,6	0,6
Dichte ϱ in 10^3 kg/m³		8,5	8,4	8,8	8,7	9,2	9,1
Schmelzbereich in °C		800 ⋯ 830	640 ⋯ 800	680 ⋯ 795	680 ⋯ 830	600 ⋯ 690	600 ⋯ 665
Lieferformen Abk. siehe S. 58		Bl, Bä (außer LAg 15P), Str, Sta, Dr, Kornlot; LAg 49 Mn 2 nur in plattierten					
Vorzugsweise Anwendung bei		Fe, Stahl, Cu-Leg., maschinellem Löten	Cu, Cu-Legierung	Fe, Stahl, Cu, Cu-Legierung	Stahl, Hartmetallen	Stahl, Cu, Cu-Legierung, Ag, Ag-Legierung, Ag-Platt., Au, Pt, maschinellem Löten	Stahl, Cu-, Cu-Legierung, Ag, Ag-Legierung, Au, Pt, maschinellem Löten
Weitere Sorten		LAg 12 Cd 17	LAg 20 Cd 15	LAg 25 Cd 14		LAg 30 Cd 12	

Schweißzusatzwerkstoffe			
SCuZn 40	**SCu**	**SCuAg**	**SCuSn 6**
58 ··· 62	99	98,5	93
	$<$ 0,5		6 ··· 7
Rest	$<$ 0,5		
		0,8 ··· 1,2	0,2 ··· 0,4
	$<$ 0,05	0,02 ··· 0,05	
0,1 ··· 0,3			
Pb, Sn, Zn, As →	→	→	→
8,4	8,9	9,0	8,7
900	1070	1000	1000
Dr	Dr	Dr	Dr
Kupfer-Zink-Legierungen mit mehr als 63% Kupfer	Kupfer	Kupfer	CuSn 2- bis CuSn 6-Legierungen, Kupfer, CuSnZn-Legierungen
	chemische und elektrische Geräte		

LAg 40 Cd 20	LAg 44	LAg 49 Mn 7	LAg 49 Mn 2	LAg 50 Cd 10	LAg 65 Cu 26	LAg 72
35 ··· 41	43 ··· 45	48 ··· 50	48 ··· 50	49 ··· 51	64 ··· 66	70,5 ··· 72,5
17 ··· 19	30 ··· 32	16 ··· 18	26 ··· 28	23 ··· 25	25 ··· 27	Rest
Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	Rest	
18 ··· 22				8 ··· 12		
		6 ··· 8	2 ··· 3			
		3 ··· 5	0,3 ··· 0,7			
0,6	0,5	0,8	0,8	0,6	0,5	0,5
9,3	9,1	8,9	8,9	9,5	9,7	10,0
595 ··· 630	680 ··· 740	630 ··· 705	670 ··· 680	635 ··· 660	670 ··· 720	780
Blechen und Streifen (Lot-Kupfer-Lot)						
Stahl, Cu, Cu-Legierung, Ag-Platt., Au, Pt, maschinellem Löten	Stahl, Cu, Cu-Legierung, Bandsägen	Edelstahl, Hartmetallen	Stahl, Hartmetallen, Lotplattierungen	Cu, Cu-Legierung, Ag, Ag-Legierung	Cu, Cu-Legierung, Ag-Legierung, maschinellem Löten	Stahl, Edelstahl, Fe—Ni-Legierung, Cu, maschinellem Löten, Schutzgas- und Vakuumlöten
				LAg 60 Sn 10	LAg 65 Cu 29 LAg 65 Cu 23 LAg 65 Cu 20	

2.3.3.5. Legierungen zum Schweißen und Hartlöten

Es finden folgende Legierungen Verwendung: Schweißdrähte zum Schweißen der Schwermetalle und Eisenwerkstoffe (Tabelle 40), Messing- und Silberlote (Tabellen 40 und 41) zum Hartlöten der Schwermetalle und Eisenwerkstoffe (Tabelle 41) und Silberlote zum Hartlöten von Edelmetallen (Tabelle 41).

Standardisierung: Hartlote und Schweißzusatzwerkstoffe auf Kupferbasis[45]); Silberlote[45]); Silberlote für Hochvakuumtechnik[76])

Stoffwirtschaft

Bei den Loten ist jeweils zu überprüfen, ob anstelle der hochsilberhaltigen solche mit niedrigen Silbergehalten verwendet werden können; bei den Loten mit niedrigen Silbergehalten ist zu untersuchen, ob auch die Messinglote dafür eingesetzt werden können.

Tabelle 42. Höchstschmelzende Metalle Wolfram, Molybdän, Tantal

Benennung		Wolfram			
		W-KD-A	W-NS	W-NS-D	W-NS-S
Reinheitsgrad in Masse-%	Stäbe	≦ 0,01 Th ≦ 0,05 Mo			
	Drähte	≦ 0,01 Th ≦ 0,03 Mo	≦ 0,01 Th ≦ 0,03 Mo	≦ 0,01 Th ≦ 0,03 Mo	≦ 0,01 Th ≦ 0,03 Mo
	Besonderheiten	ohne Zusätze, kurzkristallin	mit Zusätzen zur Förderung der Langkristallbildung		
Festigkeitswerte					
σ_B	Stäbe in MPa	> 350	–	–	–
	Drähte in MPa	> 1500	> 1500	> 1500	> 1500
δ in %		< 4	< 4	< 4	< 4
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3		19,8			
Spezif. elektrischer Widerstand in $10^{-9}\,\Omega \cdot m$		55	55	55	55
Schmelztemperatur in °C		3380			
Lieferformen					
Stäbe ⌀ in mm		1 ··· 10			
Drähte ⌀ in mm		< 2,5	< 2,5	< 2,5	< 1
Bänder, Bleche: Dicke in mm					
Anwendungsbeispiele		Aufbauteile in Elektronenröhren, Schweißelektroden, Kontakte	Drähte u. Wendeln für Leuchtkörper und Glühlampen	Drähte in Elektronenröhren	stoßfeste Drähte und Wendeln für Leuchtkörper und Glühlampen
Weitere Sorten		W-KD-E für Einschmelzstifte für Stromdurchführungen in Gläsern, Kontakte			

*) 25 ··· 200 µm Durchmesser, **) 1 ··· 1,6 mm Durchmesser



2.3.4. Metalle für technische Sonderzwecke

2.3.4.1. Höchstschmelzende Metalle Wolfram, Molybdän und Tantal

Eigenschaften

Wolfram ist hochzugfest und warmfest, stark kaltverfestigend, besonders gegen Säuren korrosionsbeständig (Tabelle 42). Molybdän ist ebenfalls hochzugfest und kaltverfestigend sowie besonders gut korrosionsbeständig (Tabelle 42). Tantal ist gut kaltverformbar, nimmt leicht Gase auf (Tabelle 42).

Verwendung

Wolframteile werden in Elektronen- und Röntgenröhren sowie in Gleichrichtern verwendet. In der Elektrotechnik wird Wolfram als Kontaktwerkstoff eingesetzt (z. B. Unterbrecherkontakte in Zündmaschinen usw.). Wolfram wird weiterhin in den Sinterhartmetallen in Form von Wolframkarbid, legiert mit Kobalt oder mit Titankarbid und Kobalt, verwendet.

Molybdän					Tantal
Mo-A	Mo-Ha	Mo-Hz	Mo-Ke	Mo-Gi	Ta 99
					Ta + Nb $\geqq$ 99,5
$\leqq$ 0,005 W	$\leqq$ 0,005 W	$\leqq$ 0,005 W	$\leqq$ 0,005 W	$\leqq$ 0,005 W	davon Nb $\leqq$ 3
nach Auflösung ohne Rückstände					
—	—	—	900**)	—	Halbzeug:
nicht festgelegt	850*)	nicht festgelegt	1 200*)	850*)	weich 500 hart 1100
	8···15		< 5	11···14	weich 20 hart 2
10,2					16,6
52	52	52	52	52	124
2622					≈ 3000
1···16					
< 2,5	< 2,5	< 2,5	< 1,6	< 1	0,1···2,0
					0,005···2,0
Aufbau von Elektronenröhren und Glühlampen	Bauteile für Heizleiter Glühlampen, Elektroöfen als Aufspritzdrähte für dünne Verschleißschutzschichten		Kerndrähte zur Herstellung von Wendeln aus Wolframdraht	Drähte für Gitter in Elektronenröhren	für Gasabsorption
Mo-E für Einschmelzstifte für Stromdurchführungen in Gläsern Molybdänpulver rein					Tantalpulver

Diese Hartmetalle finden ihren Einsatz als Schneidenwerkstoffe in der spanenden Formung, Ziehsteine für Drähte, Sandstrahldüsen usw. Außerdem ist Wolfram ein Legierungsmetall des Stahls.
Molybdän wird in Form von Haltedrähten in Glühlampen wie auch als Heizleiter in der Elektrotechnik eingesetzt und findet außerdem Verwendung als Legierungsmetall des Stahls zur Erhöhung der Warmfestigkeit und Korrosionsbeständigkeit.
Tantal wird wegen seiner leichten Gasaufnahme als Fangstoff für Gase (Getter) in der Hochvakuumtechnik verwendet.

Standardisierung: Wolframpulver[77]; Molybdänpulver[78]; Tantalpulver[79]; Wolfram, Stäbe und Drähte[81]; Tantal[82])

2.3.4.2. Legierungsmetalle Chrom und Mangan

Eigenschaften

Chrom ist sehr hart und spröde bei hoher Korrosionsbeständigkeit, die durch Zusatz von Kohlenstoff noch erhöht werden kann. *Mangan* ist sehr hart und spröde.

Verwendung

Chrom dient als Legierungsmetall im Stahl zur Erhöhung der Korrosions- und Hitzebeständigkeit. Als Überzugsmetall wird es durch Elektrolyse oder Diffusionsverfahren aufgebracht.
Mangan dient bei der Stahlherstellung als Desoxydationsmittel. Als Legierungselement im Stahl senkt es dessen Heiß- und Rotbrüchigkeit. Es wird auch als Legierungsmetall in Kupfer-, Aluminium- und Magnesiumlegierungen verwendet.

Tabelle 43. Ausgewählte Edelmetalle und ihre Legierungen

Benennung		Silber		Silberlegierungen			Gold
		Ag99,96	E-Ag99,9	AgCu8 (Ag 925)	AgCu20 (Ag 800)	AgPd30	Au99,96
Zusammensetzung in Masse-%	Ag	≧ 99,96	99,9	91,7···92,5	79,2···80,0	69,8···70,3	
	Au						≧ 99,96
	Pt						
	Ir						
	Pd					29,5···30,0	
	Rh						
	Cu			7,3···8,1	19,8···20,6		
	Ni						
Zulässige Verunreinigungen in Masse-%		≦ 0,04	≦ 0,01	≦ 0,2	≦ 0,2	≧ 0,2	≧ 0,04
Festigkeitswerte σ_B in MPa			160···200	270···300		330···380	
Härte *HB* 10/2,5			32···40	64···76		70···80	
Spezifische elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$ in 10^6 S/m			60	50		4,8	
Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3		10,5	10,5	10,35		11,4	19,3
Schmelzbereich in °C			961	800···900		1230···1290	1063
Lieferformen Abk. siehe S. 58		Ba, Gr	Str, Bä, Bl, F, Dr, Sta	Bl, Dr, Pr	Bl, Dr, Pr	Str, Bä, Bl, F, Dr, Sta	Ba, Bä
Anwendungsbeispiele		Halbzeuge, Legierungen, Silberpulver	Leit- und Kontaktmetall der Elektrotechnik, Laborgeräte, Elektroden, Tiegel, Schalen	Schmuck, Gegenstände für den individuellen Gebrauch		Leit- und Kontaktmetall für Elektrotechnik	Halbzeuge, Legierungen, Goldpulver



2.3.4.3. Edelmetalle und ihre Legierungen

Eigenschaften (Tabelle 43)

Silber ist gut verformbar und bearbeitbar. Bei guter Korrosionsbeständigkeit wird es jedoch von Schwefel und dessen Verbindungen angegriffen. Nickelzusatz erhöht die Festigkeit und verringert die Korngröße.
Gold ist sehr weich und dehnbar, hat hohe elektrische Leitfähigkeit und ist sehr korrosionsbeständig, außer gegen Königswasser. Durch Zusatz von Kupfer, Silber oder Platin nimmt seine Härte zu.
Platin ist härter als Silber und Gold, besitzt gute Festigkeit, Warmfestigkeit und Korrosionsbeständigkeit.

Verwendung

Silber wird verwendet für Geräte in der Medizin und Chemie, in der Zahnheilkunde, als Kontaktwerkstoff in der Elektrotechnik, für Lote (s. Tab. 41), Bestecke, Münzen und Schmuck.
Gold findet ebenfalls Verwendung für Geräte in Chemie, Medizin und Stomatologie, als Überzugsmetall (elektrolytische und Feuer-Vergoldung), für Kontaktplattierungen in der Elektrotechnik sowie für Münzen und Schmuck.
Platin ist wichtig als Katalysator in der chemischen Industrie, als Werkstoff für chemische Geräte, in der Elektrotechnik wird es für Elektroden und als Kontaktwerkstoff verwendet.

Standardisierung: Silber[83]); Silberlegierungen[84]); Gold[85]); Goldlegierungen[86]); Edelmetalle und Edelmetallegierungen[87])[88]); Platinmetalle[89]); Golddublee[90])

Goldlegierungen				Platin		Platinlegierungen			
Au900	Au585	Au333	AuNi5	Pt99,99	Pt99,9	PtIr5	PtIr10	PtRh	
									Ag
89,5···90,0	58,0···58,5	32,8···33,3	94,5···95,0						Au
Rest: Ag, Pd, Cu, Zn, Ni und andere Metalle entsprechend den Forderungen für Farbe und/oder mechanische Eigenschaften				$\geqq$ 99,99	$\geqq$ 99,9	$\geqq$ 94,5	$\geqq$ 89,5	90	Pt
						4,8···5,3	9,5···10,5		Ir
									Pd
								10	Rh
									Cu
			4,8···5,3						Ni
$\geqq$ 0,3	$\geqq$ 0,3	$\geqq$ 0,3	$\geqq$ 0,2		$\geqq$ 0,2	0,2	0,2		
			400···450		180···230	250···300	350···400		
			102···115		40···50	75···85	95···105		
			7,2	9,5	9,5	5,2	4,0	5,17	
			18,3	21,4	21,4	21,5	21,6		
			995···1020	1769		1775···1785	1785···1800		
Bl, Dr, Pr	Bl, Dr, Pr	Bl, Dr, Pr	Str, Bä, Bl, F, Dr, Sta	Pu, Dr, Ba	Str, Bä, Bl, F, Dr, Sta	Str, Bä, Bl, F, Dr, Sta	Str, Bä, Bl, F, Dr, Sta	Dr	
Schmuck, Gegenstände für den individuellen Gebrauch				f. Legierungen für Thermoelemente	Tiegel, Schalen, Elektroden, Laborgeräte, Leit- und Kontaktmetall der Elektrotechnik	Tiegel, Schalen, Elektroden, Leit-und Kontaktmetall der Elektrotechnik	Elektroden, Laborgeräte, Leit- und Kontaktmetall der Elektrotechnik	f. Legierungen für Thermoelemente	

2.3.4.4. Verbundmetalle

Sie werden angewendet, um wichtige Eigenschaften verschiedener Metalle zu koppeln (z. B. Festigkeit und elektrische Leitfähigkeit, Festigkeit und Wärmeleitfähigkeit, Festigkeit und Notlaufeigenschaften usw.).

Wichtige Herstellungsverfahren sind:

Verbundguß. Verbundlager, Verbundschneckenräder, Verbundschraubenräder. Dabei Stahl mit Blei-Zinn-Bronze[91]) oder mit Lagermetallen auf Blei- und Zinn-Grundlage[92]) (d + g, e, o)*). Rippenzylinder, Kolben, Wärmeaustauscher, Bremstrommeln, Lager. Dabei Stahl- oder Gußteile mit Aluminium[93]) (d + k)*). Auch Riemenscheiben (d + f)*).
Verbundschienen. Stahlprofil mit Kupferstromschiene (d + c, o)*).

Schleudergußverfahren. Verbundgußwalzen. Kern und Mantel werden entsprechend den Anforderungen aus verschiedenen Legierungen gegossen (a)*).

Walzschweißen, Walzplattieren, Aufspritzen. Bleche, Streifen, Bänder aus Stahl, plattiert mit Aluminium, Nickel oder nichtrostendem Stahl[94]) (d + i, o)*). Rohre (i, o)*). Streifen und Bänder für Bimetallkontakte, einseitig mit Leitwerkstoff plattiert[95]) (d + b, c)*). Bimetallfolien für Flachdruck[96]) (a)*). Trimetallplatten aus Stahl, Kupfer und Chrom für Flachdruck[97]) (a)*). Federkontakte für hohe Federbeanspruchung mit CuSn als Trägerwerkstoff und Kontaktplattierung (d + m, c)*). Aufgespritzte Metallschichten als Korrosionsschutz, für Lagerzwecke, als Oberflächenveredlung und als Verschleißschutz (d + i, g, o)*). Bleche und Streifen aus Aluminium und Al-Legierungen, lotplattiert[98]) (a)*). Verbundmetalle können auch auf pulvermetallurgischem Wege durch Sintern hergestellt werden (a)*).

2.3.4.5. Sinterwerkstoffe

Sinterwerkstoffe werden aus Metallpulver, rein oder gemischt, durch Kaltpressen, Diffusionsglühen in reduzierender Atmosphäre und gegebenenfalls durch Nachkalibrieren hergestellt. Die Glühtemperatur muß dabei unterhalb des Schmelzpunkts mindestens eines Bestandteils liegen. Durch Sinterverfahren werden hergestellt:

*Sinterhartmetalle***)*

Sie bestehen aus hochschmelzenden Metallkarbiden (z. T. auch aus Nitriden und Boriden von Wolfram, Titan, Tantal, Niob, Zirkonium, Hafnium), die meist mit Kobalt, Eisen oder Nickel als Bindemittel zu Hartmetallformstücken verarbeitet werden. Man unterteilt Sinterhartmetalle in drei Zerspanungshauptgruppen, die durch bestimmte Buchstaben (P, M, K) und Kennfarben (blau, gelb, rot) gekennzeichnet sind.
Anwendung: Bestückung von Werkzeugen der spanenden und Umformtechnik, Einsatz in Ziehwerkzeugen, Bestückung von Maschinenteilen mit starkem Verschleiß usw. (h + m)*).
Standardisierung: Gesinterte Hartmetalle[99])[100])

Sinterverbundmetalle

a) Herstellung erfolgt aus nicht oder schwierig im Schmelzfluß mischbaren Metallen. Hierzu zählen die Kontaktstoffe aus Wolfram mit Kupfer oder Silber, Molybdän mit Kupfer oder Silber (teilweise auch als Tränklegierungen, bei denen der poröse Preßling aus dem höherschmelzenden Metall mit der Schmelze des niedrigerschmelzenden Metalls getränkt wird), z. B. auch Schweißelektroden mit 33 ··· 66% Wolfram, Silber mit Nickel oder Graphit oder Kadmiumoxid, Schleifkohlen aus Graphit mit Kupfer oder Silber, (b + c)*), gesinterte Fertigformteile als Magnete aus AlNi-Stahl oder AlNiCo-Stahl, Katalysatoren aus Aluminium und Nickel, außerdem Sintermessing für Feinwerktechnik (n)*). Daneben gibt es auch Sinterlegierungen aus Beryllium und Zirkonium für den Kernreaktorbau. Hierbei werden statt der Metallpulver die Hydride der Metalle zu Preßlingen verarbeitet, die im Vakuum unter Abgabe von Wasserstoff gesintert werden. Sie erreichen eine Festigkeit von etwa 750 MPa bei 5% Dehnung (a)*).

---

*) Die Buchstaben in den Klammern haben folgende Bedeutung: (a) Kopplung günstiger Eigenschaften, (b) Abbrandfestigkeit, (c) elektrische Leitfähigkeit, (d) Festigkeit, (e) Flächenpressung, (f) Massenverringerung, (g) Gleitaufeigenschaft, (h) Härte, (i) Korrosionsschutz, (k) Wärmeleitfähigkeit, (l) Warmfestigkeit, (m) Zähigkeit, (n) Einsparung der nachfolgenden Bearbeitung, (o) Einsparung von NE-Metallen.
**) siehe auch Fachwissen des Ingenieurs, Band 3, Abschn. MSF

b) Herstellung erfolgt aus Metall und Metalloxid (Mischkeramik). Hierzu gehören Aluminium mit 12 ··· 15% Aluminiumoxid, woraus z. B. nach dem Sintern hochwarmfeste Kolben für Zweitaktmotoren zur Steigerung der Drehzahl und der Kompression gefertigt werden, Festigkeit bei 500 °C etwa 100 MPa. Auf ähnliche Weise werden auch Gasturbinenschaufeln, Thermoelementschutzrohre, Heizleiter u. ä. hergestellt (d + l)*).

Reine Metalle

Dies trifft zu für Metalle, die sich nicht oder schwierig im Schmelzfluß erzeugen lassen (Wolfram, Molybdän, Tantal und Niob), sowie für Metalle, die sehr rein dargestellt werden sollten (Reinsteisen, Reinstnickel usw.).

Sintereisen und Sinterstahl

Herstellung von Formstücken in großen Stückzahlen für Kleinmaschinen, Apparate, Beschlag- und Schloßteile, Haushaltgeräte, Lagerbuchsen, Filter u. a. (Masse bis etwa 1 kg), wobei möglichst gleiche Zähigkeit und Festigkeit wie beim kompakten Werkstoff erreicht werden sollen. Die sonst notwendige spanende Formung oder Umformung wird hierbei jedoch eingespart (n)*).
Die Porosität der Sinterkörper wird besonders bei Lagern (Öltränkung), bei Filtern (Schmutzaufnahme), bei Katalysatoren (Vergrößerung der Wirkfläche) und zur Herstellung von Tränklegierungen nutzbar gemacht.

Standardisierung: Al-Pulver[31]); Al—Ba-Getterpulver[101]); Al—Ni-Pulver für Nickelkatalysatoren[67]); Co-Pulver[102]); Metallpulver aus Kupfer und Kupferlegierungen[51]); Mg-Pulver, rein[38]); Mo-Pulver, rein[78]); Ni-Pulver für Dauermagnete, Hartmetalle, Kontaktwerkstoffe und Akkumulatorenplatten[66]); Se-Pulver, rein[103]); Ta-Pulver[79]); W-Pulver[77])

2.3.4.6. Metalle für galvanische Elektrolyse

Für die galvanische Elektrolyse existiert eine Reihe von reinen Metallen und Legierungen als Anoden- und Katodenmaterial (Tabelle 44).

Standardisierung: Technische Lieferbedingungen für Elektroden, Anoden und Katoden[110]); Typentechnologien für galvanische Kupfer- und Chromüberzüge auf Stahl[4]); galvanische Überzüge für Oberflächenschutz[112])

Tabelle 44. Metalle und Legierungen für die galvanische Elektrolyse

Benennung	Kurzzeichen	Standardisierung	Reinheitsgrad	Dichte ϱ in 10^3 kg/m^3
Aluminiumkatoden	Al 99,5	[30])	99,5% Al	2,73
Hartbleianoden	PbSb 10	[73]), [104])	9,8 ··· 10,5% Sb, Rest Pb	11,4
Kadmiumanoden	Cd 99,91	[105]), [106])	99,91% Cd	8,6
Kupferanoden	E-Cu 99,9 SE-Cu 99,95 SE-Cu 99,9	[50]), [46])	99,9% Cu 99,95% Cu 99,9% Cu	8,9
Messinganoden	CuZn 37	[107]), [52])	62 ··· 65% Cu	8,45
Nickelanoden	Ni 99,2 Ni 99 SiC E-Ni 99,8 Co	[64])	99,2% Ni + Co 99% Ni + Co 99,8% Ni + Co	8,9
Elektrolytnickelkatoden		[108])		8,9
Magnesiumanoden		[39])		
Zinnanoden	Sn 99,9	[71]), [72])	99,9% Sn	7,4
Zinnlegierungsanoden	Sn 75	[109]), [110])	73 ··· 77% Sn, Rest Zn	7,33
Zinkanoden	Zn 99,975	[111]), [61])	99,975% Zn	7,1

*) siehe Fußnote Seite 92

3. Hochpolymere Werkstoffe

Literatur: [4, 27, 29, 33, 36, 37, 41, 44, 46, 48, 52, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 70, 72, 73, 81, 82, 83, 84]

3.1. Allgemeines

Hochpolymere (auch makromolekulare) Werkstoffe sind Stoffe, die aus großen organischen Molekülen (*Makromolekülen*) mit einer relativen Molekülmasse $\bar{M} > 10000$ bestehen. Ist die relative Molekülmasse kleiner, so werden die Stoffe als *Oligomere* ($\bar{M} < 1500$), *Hemikolloide* ($\bar{M} = 1500 \cdots 5000$) und *Mesokolloide* ($\bar{M} = 5000 \cdots 10000$) bezeichnet.
Hochpolymere Werkstoffe, also Materialien, die durch Bearbeitung in Fertigerzeugnisse und Bauteile verwandelt werden, kommen in der Natur vor (z. B. Zellulose) oder werden durch Synthese aus gleichen oder verschiedenartigen Ausgangsstoffen (Monomeren, Vorprodukten) gewonnen. Im Fall der Synthese zu Makromolekülen oder der chemischen Veränderung von Naturstoffen werden die entstehenden Produkte auch als *Plaste*[129])[142]) (oder Kunststoffe) bezeichnet. Nach ihrer Verhaltensweise werden sie in *Thermoplaste*[131]), *Duroplaste* (Duromere)[163]) und *Elaste* (Elastomere)[149]) unterteilt.
Hochpolymere sind eine wichtige Werkstoffgruppe, die insbesondere durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist:

- geringe *Dichten* von etwa $(0,9 \cdots 1,4) \cdot 10^3$ kg/m³, bei gefüllten und verstärkten Materialien darüber,
- *Moduln*, die gegenüber Stahl bei Thermoplasten 2···3 Zehnerpotenzen, bei Elasten etwa 4···5 Zehnerpotenzen geringer sind; durch Glasfasern und andere Füllstoffe kann z. B. der Elastizitätsmodul erhöht werden,
- hohe *Dehnungen* bei den meisten Thermoplasten bis zum Bruch und damit hohes Arbeitsaufnahmevermögen,
- *Zugfestigkeiten*, die bis zu zwei Zehnerpotenzen unter denen der Metalle liegen (bei den meisten Thermo- und Duroplasten im Bereich zwischen 40···80 MPa); bei glasfaserverstärkten Materialien im Bereich der Metalle,
- hohe *Beständigkeit* gegenüber einwirkenden Medien sowie Alterung,
- leichte *Verarbeitbarkeit*, vorwiegend über Ur- und Umformprozesse; dabei wegen der relativ niedrig liegenden Schmelz- und Erweichungstemperaturen geringe Energieaufnahme.

Die hochpolymeren Werkstoffe haben auf allen Gebieten der Wirtschaft und Technik wesentliche Einsatzgebiete gefunden und dabei kostengünstigere und technisch neue Lösungen bei Erhöhung des Gebrauchswerts ermöglicht. Insbesondere hat in unserer Zeit des wissenschaftlich-technischen Fortschritts die ökonomische Lösung eine ganz erhebliche Bedeutung. Es kommt darauf an, mit möglichst geringem Aufwand an Material und Energie so zu produzieren, daß möglichst viele Erzeugnisse mit hohem Gebrauchswert entstehen. Die hochpolymeren Werkstoffe haben gerade an dieser Entwicklung einen großen Anteil.

3.1.1. Herstellung

3.1.1.1. Aufbaureaktionen

Aufbaureaktionen sind Reaktionen, die von niedermolekularen *Monomeren* zu *Polymeren* führen. Man unterscheidet Stufen- und Kettenreaktionen.

Stufenreaktionen

Stufenreaktionen laufen ab, wenn die Monomermoleküle mindestens zwei reaktionsfähige Stellen besitzen. Makromoleküle entstehen dadurch, daß sich nebeneinander und stufenweise Monomermoleküle zu einem größeren Molekül verbinden. Die Reaktionsschritte sind voneinander unabhängig. Die Verknüpfungen können durch Polykondensationen, Polyadditionen oder Polyrekombinationen erfolgen.

Die *Polykondensation* ist die Verbindung von Monomermolekülen mit zwei oder mehr reaktionsfähigen Gruppen bei gleichzeitigem Entstehen eines niedermolekularen Nebenprodukts in stöchiometrischen Mengen. Bifunktionelle Moleküle ergeben lineare Makromoleküle. Bei trifunktionellen Molekülen laufen verzweigende, dann vernetzende Polykondensationen ab. Die Polykondensation ist eine Gleichgewichtsreaktion.

Beispiel. Bildung von Polyamiden aus Diaminen und Dikarbonsäuren (erster Reaktionsschritt):

$$H_2N-R-NH_2 + HOOC-R'-COOH \rightarrow H_2N-R-NHCO-R'-COOH + H_2O$$

Werden nicht gleiche, sondern verschiedenartige polykondensationsfähige Verbindungen eingesetzt, entstehen *Kopolykondensate.*

Die *Polyaddition* ist eine Verknüpfungsreaktion von Monomermolekülen mit zwei oder mehr reaktionsfähigen Gruppen ohne Entstehung von Nebenprodukten.

Beispiel. Anlagerung von Diolen an Diisozyanate:

$$O=C=N-R-N=C=O + HO-R'-OH \rightarrow O=C=N-R-NH-COO-R'-OH$$

Verwendet man bei der Polyaddition mehr als zwei Komponenten, erhält man Kopolyadditionsprodukte.

Bei der *Polyrekombination* entstehen die Verknüpfungen zwischen gesättigten Grundmolekülen ohne spezielle funktionelle Gruppen. Durch Abspaltung von Atomen werden die Grundmoleküle zu *Radikalen.* Rekombinieren zwei solcher Radikale, so verlieren sie unter Vergrößerung des Moleküls ihren radikalischen Charakter. Erst durch die erneute Abspaltung eines Atoms entsteht wieder ein Radikal.

Beispiel. Übertragung: $2R^{\cdot} + 2H-R'-H \rightarrow 2H-R'^{\cdot} + 2R-H$
Rekombination: $2H-R'^{\cdot} \rightarrow H-R'-R'-H$

Kettenreaktion

Eine Kettenreaktion besteht aus Kettenstart, Wachstumsphase und Abbruchreaktion. Beim *Kettenstart* entstehen Teilchen in einem reaktionsfähigen Zustand, an die sich in der *Wachstumsphase* in rascher Folge Monomermoleküle anlagern. Die Startreaktion kann durch thermische, mechanische, elektrische oder elektromagnetische Energie (Strahlungsenergie) oder durch Beschleunigersubstanzen ausgelöst werden. Die Reaktionsschritte der Kettenreaktion sind voneinander abhängig. Das Kettenwachstum wird durch eine *Abbruchreaktion* beendet, wobei der aktive reaktionsfähige Zustand der wachsenden Kette verlorengeht (durch Rekombination oder Übertragung). Die Polymerisation ist eine Kettenreaktion ungesättigter oder ringförmiger Monomermoleküle. Der reaktionsfähige Zustand ist dabei radikalisch oder ionisch (anionisch, kationisch), oder er liegt in einem Metallkomplex (Ziegler-Katalysatoren) mit bestimmter Elektronenverteilung vor.

Beispiel. Radikalische Polymerisation:

Start durch Einwirkung eines Initiators B: $B \rightarrow 2R^{\cdot}$
$R^{\cdot} + M \rightarrow R-M^{\cdot} = P_1$
Wachstumsreaktion: $P_1^{\cdot} + M \rightarrow P_2^{\cdot}$
Kettenabbruch durch Rekombination: $P_n^{\cdot} + P_m^{\cdot} \rightarrow P_{n+m}$

Bei der *Metallkomplex-Polymerisation* ist unter bestimmten Bedingungen eine Orientierung der Monomermoleküle möglich; es entstehen stereoreguläre Polymere.
Neben der Polymerisation gleicher Monomermoleküle (*Homopolymerisation*) ist auch eine Zusammenlagerung verschiedener Monomerarten in einer Kettenreaktion, die *Kopolymerisation,* möglich. Dabei ist die Neigung der Monomere zur Kopolymerisation verschieden, sie entspricht nicht der Polymerisationsfähigkeit mit sich selbst. Das Verhältnis der Monomere im Kopolymer wird durch die Kopolymerisationsparameter und die Konzentration der Monomere im Anfangsgemisch bestimmt. Da im allgemeinen die Makromoleküle die Monomere nicht im gleichen Verhältnis wie im Anfangsgemisch enthalten, sind sie chemisch heterogen. Liegen zwei Monomerarten (A und B) vor, kann der Einbau der Monomere *statistisch, alternierend* oder *in Blockform* erfolgen.
Polymerisieren Monomere nicht miteinander, entstehen Mischungen (*Polyblends*), die den Kopolymerisaten ähnlich sind.

3.1.1.2. Technische Durchführung der Aufbaureaktionen

Polykondensationsverfahren

Polykondensation in der Schmelze. Die reinen Ausgangsstoffe werden in ein Reaktionsgefäß (Rührautoklav) gebracht und bei hoher Temperatur (die eine große Reaktionsgeschwindigkeit zur Folge hat) in der Schmelze mit Hilfe von Katalysatoren polykondensiert. Zur Entfernung der flüchtigen Nebenprodukte der Reaktion wird häufig das Reaktionsgefäß evakuiert. Anwendung z. B. zur Herstellung von Polyamiden, Polyestern, Phenoplasten und Aminoplasten.

Polykondensation in Lösung. Die Kondensation wird am Siedepunkt des Lösungsmittels mit Hilfe von Katalysatoren durchgeführt. Das flüchtige Nebenprodukt wird mit dem Lösungsmitteldampf entfernt und das Lösungsmittel zurückgewonnen.

Fällungspolykondensation. Die Kondensation erfolgt in einem Lösungsmittel ohne Abtrennung des Nebenprodukts. Ab einer bestimmten Größe fallen die entstehenden Makromoleküle aus der Lösung aus.

Polykondensation an der Phasengrenze. Die Polykondensation zweier verschiedener Komponenten kann unter Lösung je einer Komponente in miteinander nicht mischbaren Lösungsmitteln an der Grenzfläche durchgeführt werden. Das entstehende Polymer wird an der Phasengrenze abgezogen. Anwendung z. B. zur Herstellung von Polykarbonat.

Polykondensation in fester Phase. Polykondensate mit freien funktionellen Gruppen können nachkondensieren (Anstieg der relativen Molekülmassen, Schrumpfen).

Polyadditionsverfahren

Die technischen Polyadditionsverfahren gehen meist von der flüssigen Phase aus. Sie sind Stufenreaktionen ohne Entstehen eines Nebenprodukts. Beispiele für Polyadditionsreaktionen sind die Herstellung von Polyoxymethylen, die Härtung von Epoxidharz, die Herstellung von Polykaprolaktam.

Polymerisationsverfahren

Voraussetzung der Polymerisation ist eine hohe Reinheit der Reaktionsprodukte zur Verhinderung von Nebenreaktionen und des Einbaus von Fremdmolekülen sowie die Aufrechterhaltung der Polymerisationsbedingungen (homogene Produkte). Im allgemeinen erfolgt die Polymerisation unter Schutzgasatmosphäre.

Substanzpolymerisation. Es ist eine Polymerisation des reinen, unverdünnten Polymers bei ruhendem Reaktionsgut, z. B. bei der Formpolymerisation des Methylmethakrylats. Der Nachteil besteht in der schlechten Ableitung der Reaktionswärme. Verbesserung durch Bewegung des Reaktionsguts in Durchflußreaktoren (z. B. bei PS-BW glasklar) oder bei der Extruderpolymerisation. Neben der Polymerisation flüssiger Monomersubstanzen oder kristalliner Monomere ist auch die Polymerisation in der Gasphase (z. B. bei der Hochdruckpolyäthylenerzeugung) möglich.

Lösungspolymerisation. Zur besseren Wärmeabfuhr erfolgt die Polymerisation in Gegenwart eines Lösungsmittels, in dem sowohl Monomer als auch Polymer löslich sind. Vorteilhaft ist, wenn diese Lösung technisch angewendet wird (z. B. Polyvinylazetatpolymerisation). Lösungsmittelfreie Polymerisate erhält man durch Aufbereitungsstufen.

Fällungspolymerisation. Das Monomer ist in einem Lösungsmittel löslich, das Polymer aber unlöslich (d. h., es fällt aus). Die Aufbereitung des lösungsmittelfreien Polymerisats ist einfacher als bei der Lösungspolymerisation. Anwendung z. B. bei der Isobutylenpolymerisation in BF_3.

Suspensionspolymerisation. Die Suspensions- oder *Perlpolymerisation* wird in einer Flüssigkeit durchgeführt (meist in Wasser), in der Polymer und Monomer nicht löslich sind. Durch Zerteilung des Monomers in kleine Tröpfchen und anschließende Polymerisation entstehen feste Perlen. Durch Zusätze zum Wasser wird das Verkleben der Perlen vermieden. Aufbereitung durch Zentrifugieren oder Filtrieren. Anwendung z. B. bei Polymerisation von Polystyrol P 60, P 70 oder S-PVC.

Emulsionspolymerisation. Unter Anwendung eines Emulgators (Fettsäure, kationische Seife) bilden sich in einer wäßrigen Phase durch Dispergieren neben Monomertröpfchen *Mizellen* (Zusammenlagerungen von Emulgatormolekülen) aus, die Monomermoleküle einlagern. Die Monomermoleküle polymerisieren durch Primärradikale aus der wäßrigen Phase. In einer Mizelle wächst jeweils nur eine Kette; der Kettenabbruch erfolgt durch Eindringen eines zweiten Primärradikals in die Mizelle. Durch erneute Monomereinlagerung in die Mizelle und Polymerisation entstehen Latexkügelchen. Der *Latex* wird durch Koagulation oder durch Verdampfen des Wassers zum festen Polymerisat aufbereitet (Emulgator im Polymerisat).

3.1.1.3. Umwandlungsreaktionen

Neben den Aufbaureaktionen sind auch Umwandlungsreaktionen zur Herstellung hochpolymerer Werkstoffe geeignet. Umwandlungsreaktionen sind Reaktionen, die von Makromolekülen ausgehen und den Polymerisationsgrad erhöhen (Pfropfungs- oder Vernetzungsreaktionen) oder den Polymerisationsgrad beibehalten (polymeranaloge Umsetzungen).

Pfropfungs- oder Vernetzungsreaktionen

Sind in einer Kette aktive oder aktivierbare Moleküle vorhanden, so können Monomermoleküle an das aktive Atom der Polymerkette angelagert werden. Es entstehen *Pfropfpolymerisate*. Werden bei der Pfropfung verschiedene Makromoleküle miteinander verbunden, so entsteht ein *Netzwerk* (Vernetzungsreaktion). Die vernetzten Produkte sind unlöslich und unschmelzbar. Die Pfropfung und Vernetzung kann durch Ketten- oder durch Stufenreaktion erfolgen.

Kettenreaktion. Im Ausgangspolymer sind kopolymerisationsfähige Gruppen (ungesättigte Polymere) oder Initiatorgruppen vorhanden. Anlagerung eines polymerisierbaren Monomers. *Beispiel.* Vulkanisation von Kautschuk mit Schwefel.

Stufenreaktion. Es sind seitenständige funktionelle Gruppen vorhanden, die mit dem Monomer in einer Polykondensations- oder Polyadditionsreaktion reagieren. *Beispiel.* Härtungsreaktion bei Pheno- und Aminoplasten.

Erfolgt die Anlagerung am Kettenende, so spricht man vom *Blockkopolymer*. *Segment*- oder *Mosaikpolymere* enthalten mehrere Blöcke. Auch Blockkopolymere lassen sich durch Ketten- oder Stufenreaktionen erzeugen. Voraussetzung ist, daß die Polymerisation an den Kettenenden beginnt. Kettenreaktionen werden durch polymerisationsfähige Gruppen (z. B. Doppelbindungen) oder Initiatorgruppen eingeleitet, Stufenreaktionen durch Überschuß einer Komponente oder spezielle Initiatoren.

Polymeranaloge Umsetzungen

Sind über die gesamte Polymerkette reaktionsfähige Gruppen verteilt (z. B. in jeder Monomereinheit), so kann durch chemische Umsetzungen das Polymer ohne Veränderung des Polymerisationsgrads modifiziert werden. Die makromolekulare Ausgangssubstanz kann sowohl durch *Synthese* hergestellt sein (z. B. Herstellung von Polyvinylalkohol aus Polyvinylazetat) als auch aus *Naturstoff* bestehen (z. B. Herstellung von Zelluloseazetat aus Zellulose).

3.1.1.4. Abbau- und Schädigungsreaktionen

Hochpolymere Werkstoffe werden durch verschiedene Beanspruchungsbedingungen verändert. Dabei wird das Makromolekül abgebaut oder auf andere Weise schädlich beeinflußt. Von besonderer Bedeutung sind:

— *mechanischer Abbau.* Die Energie zur Spaltung von Bindungen des Makromoleküls oder zur Auslösung von Oxydationsvorgängen wird durch mechanische Kräfte aufgebracht. *Beispiele.* Scherbeanspruchung bei der Verformung, spanende Bearbeitung.

— *thermischer Abbau.* Hierzu gehören die durch die thermische Energie ausgelöste Zerlegung des Makromoleküls (Depolymerisation) und die Schädigung von Seitengruppen (z. B. Abspaltung).

Beispiel. Depolymerisation von Polytetrafluoräthylen zu 95% bei einer Halbwertstemperatur von 509 °C; Seitenkettenabspaltung von Polyvinylazetat unter Doppelbindungsbildung (Polyene) bei 200 °C.

— *oxydative Schädigung.* Bei der praktischen Beanspruchung von Hochpolymeren ist meist Sauerstoff schädigend beteiligt. Die oxydative Schädigung erfolgt nach Radikalbildung und Sauerstoffanlagerung sowie Übertragung auf ein weiteres Makromolekül (Hydroperoxidbildung). Die Oxydation kann autokatalytisch beschleunigt sein. Dadurch werden Abbaureaktionen erleichtert. Durch Zusatzstoffe (Antioxydantien), die in den Makromolekülverband eingearbeitet werden, kann die Schädigung verhindert bzw. verringert werden. Die chemischen Veränderungen können vielfältige Eigenschaftsänderungen hervorrufen (z. B. Festigkeitsabnahme, Zunahme des dielektrischen Verlustfaktors, Versprödung).

- *Strahlenschädigung.* Licht und UV-Strahlen führen zu Schädigungen des Makromoleküls, wenn die Strahlung absorbiert wird und die Energie zu einer Aktivierung ausreicht. Je nach Art des Polymers kommt es zur Vernetzung oder zum Abbau. Zur Stabilisierung werden *Lichtschutzstoffe* verwendet; sehr wirksam ist die Rußzumischung (2 ··· 3%).
- *Abbau durch Chemikalien.* Hochpolymere werden bei Chemikalieneinwirkung durch Hydrolyse, Oxydation oder Quellung geschädigt. Hydrolysebeständige Verbindungen werden durch Säuren, Laugen und Salzlösungen nicht abgebaut (z. B. Polyolefine, Phenoplaste). Oxydationsmittel (konzentrierte Salpetersäure, Halogene, Wasserstoffperoxid) greifen fast alle Hochpolymere an; beständig sind dagegen Fluorpolyolefine. Reduktionsmittel (geschmolzene Alkalimetalle) reagieren besonders mit halogenhaltigen Polymeren. Organische Flüssigkeiten führen zur Quellung oder Auflösung der Polymere. Sie erleichtern die weitere Schädigung durch andere Chemikalien.

3.1.2. Aufbau

3.1.2.1. Konstitution, Konfiguration und Konformation

Zur Konstitution organischer hochpolymerer Werkstoffe gehören:

Art des Grundbausteins bzw. der Grundbausteine

Hochpolymere können aus einer oder mehreren Arten von Grundbausteinen aufgebaut sein. Bei synthetischen Hochpolymeren sind diese durch die Art und die Anzahl der Ausgangsstoffe (meist der Monomere) gegeben, bei natürlichen Makromolekülen (z. B. im Holz) können sie durch Abbau isoliert werden. Mit der Art und der Anzahl der Grundbausteine in der polymeren Kette sind die Haupt- und Nebenvalenzbindungen im wesentlichen festgelegt. Das Verhalten dieser Bindungen bei äußeren Einflüssen (Temperatur, mechanische Kräfte, elektrische Felder) bestimmt die Eigenschaften (Kennwerte) bzw. Kennwertfunktionen der Hochpolymere.

Verknüpfung der Grundbausteine

Ist das Makromolekül durch Verknüpfung einer Art von Grundbausteinen aufgebaut, wobei die Verknüpfungsstellen nicht gleich sind, so ergeben sich folgende Kombinationen (die Verknüpfungsstellen werden als *Kopf* und als *Schwanz* bezeichnet):

a) ... — Kopf/Schwanz — Kopf/Schwanz — ...
b) ... — Kopf/Schwanz — Schwanz/Kopf — ...
c) zufällige Anlagerung nach a) und b)

Beispiel. Bei der Polymerisation von Monovinylverbindungen sind die Anlagerungsmöglichkeiten:

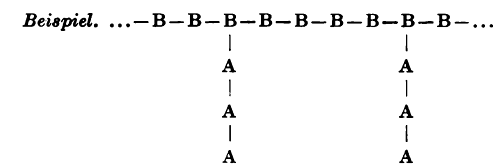
```
...—CH₂—CH—CH₂—CH—...  und  ...—CH₂—CH—CH—CH₂—...
        |       |                   |   |
        x       x                   x   x
```

sowie die zufällige Anordnung möglich. Durch spektroskopische Untersuchungen wurde nachgewiesen, daß die Anlagerung fast ausschließlich nach der ersten Möglichkeit erfolgt.

Werden zwei monomere Ausgangsstoffe (A und B) durch Polymerisation zum Makromolekül verknüpft — Voraussetzung ist, daß die Polymerisationsparameter ein Zusammenpolymerisieren (Kopolymerisation) erlauben —, ergeben sich folgende Anordnungsmöglichkeiten:

- *alternierende Kopolymerisation:* ...—A—B—A—B—A—B—...
- *statistische Kopolymerisation:* ...—A—B—B—A—B—A—A—B—B—...
- *Block-Kopolymerisation:* ...—A—A—A—A—A—B—B—B—B—B—A—...

Wird eine Komponente (A) auf ein Monopolymer (B) oder ein Kopolymer aufgepfropft, so entstehen *Pfropf-Polymere.*



Die Block- und Pfropf-Kopolymere haben andere Eigenschaften als die aus den gleichen Ausgangsstoffen aufgebauten Kopolymere bei statistischer oder alternierender Polymerisation bzw. die durch Mischen der aus den Ausgangsstoffen hergestellten Homopolymere und die daraus erzeugten Produkte (Polymergemische oder Polyblends).
Technisch wichtige Kopolymere sind die Polymere von Styrol mit Akrylnitril (SAN) und mit Butadien (BS). Die Polymerisation aller drei Komponenten miteinander ergibt das Terpolymer ABS.

Endgruppen

Sind lineare Polymere durch eine Polykondensations- oder Polyadditionsreaktion aus bifunktionellen Ausgangsstoffen (Monomeren) entstanden, so hat das Makromolekül (je nachdem, ob eine Ausgangssubstanz zwei verschiedene reaktionsfähige Endgruppen trägt oder zwei Ausgangsstoffe jeweils gleiche Endgruppen haben, die miteinander reagieren können) entweder gleiche oder unterschiedliche Endgruppen. Entstehen Makromoleküle mit unterschiedlichen Endgruppenkombinationen, so wird dies als *Polymeruneinheitlichkeit* bezeichnet.
Da Endgruppen durch die Start-, Abbruch- und Übertragungsreaktionen gebildet werden, sind die Makromoleküle bei der Polymerisationsreaktion noch uneinheitlicher aufgebaut als nach der Polykondensations- oder Polyadditionsreaktion. Außerdem entstehen durch die Übertragungsreaktionen Verzweigungen. Obwohl die Anzahl der Endgruppen in hochpolymeren Werkstoffen gering ist, sind sie für das chemische Verhalten (z. B. Beständigkeit gegen Säuren oder Alkalien) und den thermischen Abbau von großer Bedeutung.

Mittlere relative Molekülmasse und ihre Verteilung

Bedingt durch die Herstellung sind die meisten Hochpolymere keine einheitlichen Verbindungen. Sie sind polymolekulare Stoffe, d. h. Gemische von Makromolekülen unterschiedlicher relativer Molekülmasse mit gleichartigem Bau. Eine übliche Verteilungsfunktion zeigt Bild 39. Zur Charakterisierung des hochpolymeren Stoffs muß also sowohl ein Mittelwert der relativen Molekülmasse verwendet als auch die Verteilung beschrieben werden. Da die Mittelwerte unterschiedliche Momente der Verteilung darstellen, kann die Uneinheitlichkeit (Verteilung) auch durch das Verhältnis von Mittelwerten dargestellt werden, z. B. durch das Verhältnis Gewichtsmittel M_w : Zahlenmittel M_n. Die Mittelwerte werden durch verschiedene Bestimmungsmethoden erfaßt; z. B. durch Endgruppenbestimmung, Kryoskopie, Ebullioskopie, Osmometrie, Lichtstreuung, Sedimentation und Sedimentationsgleichgewicht in der Ultrazentrifuge, Viskosimetrie.
Die Eigenschaften eines hochpolymeren Stoffs sind nicht nur von der mittleren Molekülmasse, sondern auch von der Verteilung abhängig, so z. B. ihr elastisches Verhalten, die Viskosität und die Löslichkeit.

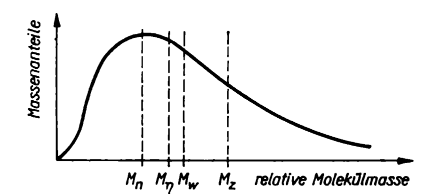


Bild 39. Verteilung der relativen Molekülmasse eines hochpolymeren Werkstoffs (M_n Zahlenmittel, M_w Gewichtsmittel, M_η Viskositätsmittel, M_z z-Mittel)

Verzweigungen (Lang- und Kurzketten) und Vernetzung

Die Bildung von Verzweigungen tritt dann ein, wenn entweder in nicht zu hoher Anzahl trifunktionelle oder mehr als trifunktionelle Stoffe bei der Polyreaktion vorliegen und in die Kette eingebaut werden oder wenn an bifunktionellen Ausgangsstoffen Nebenreaktionen stattfinden. Verzweigungen können bei allen Polyreaktionen auftreten. Von besonderer Wichtigkeit sind die Verzweigungen bei Polymerisaten. Sie werden durch Übertragungsreaktionen hervorgerufen und sind von der Temperatur, vom Umsatz und vom Initiator abhängig. Nach der Länge der Kettenabzweigungen unterscheidet man *Lang-* und *Kurzkettenverzweigungen* (Bild 40).
Die Eigenschaften der Hochpolymere werden von den Verzweigungen unterschiedlich beeinflußt. Langkettenverzweigungen wirken sich vor allem auf die Viskosität und die Fließeigenschaften aus, Kurzketten verändern hauptsächlich den Kristallisationsgrad und damit Festigkeit, Löslichkeit und Erweichungsverhalten.

Beispiel. Hochdruckpolyäthylen (PE-ND) ist stark verzweigt und hat deshalb eine geringere Kristallisationsneigung als PE-HD und damit auch eine geringere Festigkeit.
Lineare oder verzweigte Makromolekülketten verhalten sich thermoplastisch, d. h., sie erweichen bei

höheren Temperaturen. Sie werden deshalb als *Thermoplaste* bezeichnet. Dabei werden die Ketten nur durch zwischenmolekulare Kräfte (Dipolkräfte, Induktionskräfte, Dispersionskräfte, Wasserstoffbrücken) sowie Verhakungen und Verschlaufungen zusammengehalten.

Ist der Anteil von tri- und mehrfunktionellen Verbindungen bei der Polyreaktion groß, so tritt nicht Verzweigung, sondern *Vernetzung* ein. Vernetzung ist die Bildung eines im allgemeinen dreidimensionalen Netzpolymers (Bild 41). Vernetzungen können auch dadurch erzeugt werden, daß lineare Makromoleküle durch *chemische Umsetzungen* (z. B. Härtung von Epoxid- oder Polyesterharzen, Vulkanisation von Kautschuk) oder Einwirkung *energiereicher Strahlung* (z. B. Vernetzung von Polyäthylen) verknüpft werden.

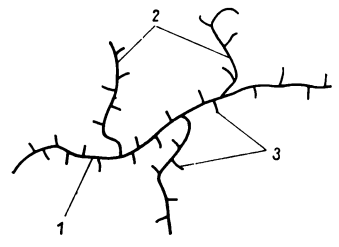


Bild 40. Lang- und Kurzkettenverzweigungen in einem Makromolekül. *1* Hauptkette; *2* Langkettenverzweigung; *3* Kurzkettenverzweigung

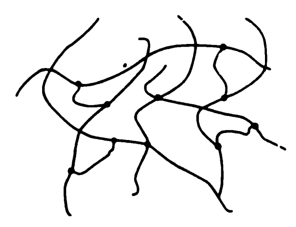


Bild 41. Vernetzung eines Polymers

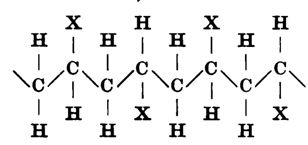
Vernetzte Polymere sind unlöslich und nicht schmelzbar, sie können quellen und werden bei hohen Temperaturen zersetzt. Die meisten Eigenschaften ändern sich in einem weiten Temperaturbereich nur gering. Sind die Makromolekülketten miteinander nur gering vernetzt, so zeigen sie oberhalb einer bestimmten Temperatur (Einfriertemperatur) *Gummielastizität*. Liegt die Einfriertemperatur unterhalb der Raumtemperatur, so sind diese Hochpolymere bei Raumtemperatur gummielastisch und werden als *Elaste* oder *Elastomere* bezeichnet. Hochvernetzte makromolekulare Stoffe sind immer sehr hart und werden deshalb *Duromere* oder *Duroplaste* genannt.

Bei gleicher chemischer Struktur der Makromoleküle können *stereoisomere Formen* entstehen. Sie entsprechen räumlich unterschiedlichen Anlagerungen von Substituenten oder Seitengruppen und werden als *Konfigurationen* bezeichnet. Es gibt die ataktische, die isotaktische und die syndiotaktische Form (Struktur):

isotaktische Struktur
(Anordnung der Substituenten X auf einer Seite)

```
      X     X     X
 H    |  H  |  H  |  H
 |    C  |  C  |  C  |
 \C/  | \C/ | \C/ | \C/
 |    H  |  H  |  H  |
 H       H     H     H
```

syndiotaktische Struktur
(Anordnung der Substituenten X abwechselnd auf beiden Seiten)



Bei der *ataktischen Struktur* ist die Anordnung der Substituenten X unregelmäßig. Die regelmäßigen Strukturen werden durch stereospezifische Polymerisation hergestellt. Isotaktische und syndiotaktische Polymere haben auf Grund ihres regelmäßigen Aufbaus eine hohe Kristallisationsneigung, hohe Schmelztemperaturen und gute mechanische Eigenschaften.

Durch Drehen um einfache kovalente Bindungen (Hauptvalenzbindungen) können verschiedene Atomanordnungen in einem Molekül entstehen. Sie werden als *Konformationen* bezeichnet. Die Konformation um eine kovalente Bindung (σ-Bindung) wird durch den Rotationswinkel erfaßt. Die Konformation der Makromolekülkette kann durch eine mittlere Konformation der einzelnen, an den kovalenten Bindungen existierenden Konformationen beschrieben werden; man bezeichnet sie als *Makrokonformation* oder *Molekülgestalt*. Die Molekülsegmente können in den Richtungen statistisch verteilt sein (Knäuelstruktur) oder bestimmte energetisch bevorzugte Stellungen einnehmen. Im Falle der vollständigen Ausrichtung des Makromoleküls spricht man von der *Zickzackform* der Kette, bei schraubenförmiger Anordnung von einer *Helix*.

In niedrigkonzentrierten Lösungen von Makromolekülen treten vorwiegend *Knäuelstrukturen* oder *gestreckte Ketten* auf. Die Zickzackkette existiert z. B. im kristallinen Polyäthylen. Polymere, die eine Helix (Schraube) aufbauen, sind z. B. Polytetrafluoräthylen, isotaktisches Polystyrol und Polyoxymethylen.

Konstitution, Konfiguration und Konformation beschreiben die molekulare Struktur des Polymers. Neben dieser molekularen Struktur ist für das Verhalten des Hochpolymers auch die *übermolekulare Struktur*, die Struktur des Polymerverbands, von entscheidender Bedeutung.

3.1.2.2. Kristalliner und amorpher Zustand

Im kristallinen Zustand ist eine regelmäßige Anordnung von Molekülabschnitten in drei Raumrichtungen, die nicht in einer Ebene liegen, vorhanden. Die primären kristallinen Bereiche werden als *Kristallite* bezeichnet. Polymere kristallisieren niemals vollständig, am Ende der Kristallisation liegt immer ein Gemisch von kristallinen und nichtkristallinen Anteilen vor. Im nichtkristallinen Bereich sind die Makromoleküle *Schlaufen*, die die Kette in den Kristallit zurückführen, *Ketten*, die verschiedene Kristallite miteinander verbinden, und *freie Kettenenden*. Der ungeordnete oder schlecht geordnete Bereich wird auch als *amorph* bezeichnet (2-Phasen-Modell: amorphe und kristalline Phase). Je größer der Anteil der einzelnen Bereiche ist, um so wesentlicher ist ihr Einfluß auf die Eigenschaften. Mit zunehmender Kristallinität steigen Festigkeit, Härte und Elastizitätsmodul, die Deformationsfähigkeit wird verringert. Die Kristallisationsneigung wird durch den Aufbau des Polymers bestimmt; gleicher Aufbau der Makromoleküle (z. B. bei Polyäthylen) und niedrige relative Molekülmasse begünstigen die Kristallisation ebenso wie zwischenmolekulare Kräfte (z. B. bei Polyamid).

Die Kristallisation wird durch die Verarbeitung beeinflußt. Mit steigender Abkühlgeschwindigkeit verringert sich die kristalline Phase, bei langsamer Abkühlung bildet sich eine hochkristalline regelmäßige Struktur aus. Aus den primären kristallinen Bereichen, in denen die Makromoleküle in Bündeln (*Bündelmodell*) oder in einer Ebene gefaltet (*Faltenkettenmodell*) vorliegen, entstehen weitere übermolekulare Strukturen (*Fibrillenstruktur* bei hochgeordneten amorphen Polymeren, *Streifenstruktur* bei Polymeren im gummielastischen Zustand, *Sphärolithe* in kristallinen Polymeren).

Der *amorphe Zustand* ist dadurch gekennzeichnet, daß keine Ordnung (Fernordnung) von Makromolekülabschnitten über größere Bereiche vorhanden ist. Die Makromoleküle können ihre statistische Knäuelung behalten und nebeneinander existieren, sich gegenseitig durchdringen, so daß ein filzartiges Knäuel entsteht, oder in Form von Bündeln mit Zwischenbereichen (Bündelmodell) vorliegen (Bild 42). Die Bündel entsprechen nahgeordneten Bereichen. Vollständige Unordnung in polymeren Stoffen ist nur in Schmelzen und Lösungen bei hohen Temperaturen möglich.

Der vollständig amorphe und der vollständig kristalline Zustand sind Grenzfälle in einem hochpolymeren Werkstoff.

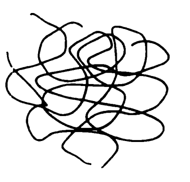


Bild 42. Knäuelmodell und Bündelmodell

3.1.2.3. Orientierung und energieelastische Eigenspannung

Wird ein hochpolymerer Stoff stark deformiert, so richten sich die Makromoleküle in Verformungsrichtung aus. Im Idealfall der vollständigen Ausrichtung (Orientierung), der praktisch nicht erreicht werden kann, sind die Eigenschaften in Verformungsrichtung durch die in Kettenrichtung wirkenden Hauptvalenzbindungskräfte und senkrecht dazu durch die Nebenvalenzbindungskräfte bestimmt.

Durch die Orientierung werden die Eigenschaften *anisotrop*. In Kettenrichtung steigen z. B. die mechanischen Eigenschaften (Zugfestigkeit, Schlagbiegefestigkeit) an, senkrecht dazu fallen sie gegenüber dem

isotropen Zustand ab. Bei kristallisierenden Polymeren werden durch die Orientierung der Makromoleküle das Kristallisationsverhalten und der Aufbau der übermolekularen Struktur beeinflußt.
Bei Urformprozessen (z. B. Extrudieren, Spritzgießen) erfolgt eine von Strömungsgeschwindigkeit, Masse- und Werkzeugtemperatur abhängige Orientierung. Sie ist meist in der Nähe der Randschicht am größten.

Energieelastische Eigenspannungen sind molekulare Veränderungen der Bindungswinkel und -abstände. Sie entstehen im Halbzeug oder Fertigteil durch die zeitlich und örtlich unterschiedliche Abkühlung, durch Dekompression bei der Entformung, als verformungsbedingte Spannungen und als Spannungen molekularer und übermolekularer Ordnungsprozesse.
Energieelastische Eigenspannungen sind aus Gleichgewichtsgründen über dem Formteilquerschnitt nicht konstant, meist liegen die maximalen Zugeigenspannungen in der Querschnittsmitte, die maximalen Druckeigenspannungen am Rand oder in Randnähe. Sie wirken sich störend aus, da sie das Formteil zusätzlich beanspruchen und bei Einfluß von Medien zur *Spannungsrißkorrosion* beitragen.

3.1.2.4. Zusatzstoffe

Polymere werden aus anwendungstechnischen, verarbeitungstechnischen und/oder ökonomimischen Gründen zur Verbesserung der Eigenschaftswerte mit *Zusatzstoffen* versehen. Das bei dieser Modifikation der Polymere entstehende Produkt wird als *Formmasse* bezeichnet.

Beispiele für Zusätze sind:

- Füllstoffe, z. B. aktive Füllstoffe (auch als Verstärkungsmaterial bezeichnet) wie Glasfasern, Ruß, Gewebe,
- Weichmacher,
- Farbstoffe, Pigmente,
- Verarbeitungshilfsstoffe (z. B. Gleitmittel),
- Alterungsschutzmittel,
- Antistatika, UV-Stabilisatoren,
- flammhemmende Zusätze,
- Zusätze gegen Schimmelpilzbefall u. a.

3.1.3. Eigenschaften

3.1.3.1. Allgemeine Eigenschaften

Für den Einsatz der hochpolymeren Werkstoffe sind bestimmte einzelne Eigenschaften oder bei kombinierter Beanspruchung ein Spektrum von Eigenschaftswerten von Bedeutung. Die zur Konstruktion erforderlichen Kennwerte sind also von den Beanspruchungsbedingungen abhängig und je nach Erzeugnis unterschiedlich.

Mechanische Eigenschaften

Hochpolymere verhalten sich *viskoelastisch*. Aus diesem Grund sind fast alle Eigenschaftswerte (z. B. Elastizitätsmodul, Schubmodul, Zugfestigkeit) nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Beanspruchungsdauer und der Frequenz der Beanspruchung abhängig.
Die mechanischen Eigenschaften werden bestimmt bei:

- zügiger Beanspruchung,
- ruhender Beanspruchung und
- dynamischer Beanspruchung.

Während die Untersuchung des Verhaltens bei *zügiger Beanspruchung* (Kurzzeitprüfung) im Zug-[120])[125]), Druck-[119])[159]) und Biegeversuch[117])[118]) sowie bei Torsionsbeanspruchung[152]) vorwiegend der Materialcharakterisierung dient, sind die Kennwerte bzw. Kennwertfunktionen, die bei ruhender[151]) und *dynamischer Langzeitbeanspruchung* gewonnen werden, für die Dimensionierung erforderlich. Dabei wird das Verhalten in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur sowie weiteren äußeren Einflüssen (z. B. Chemikalien) bestimmt. Dem Konstrukteur kann somit eine die praktischen Beanspruchungsfälle betreffende, hinreichend genaue Beschreibung des Stoffverhaltens gegeben werden. Die Ergebnisse werden z. B. in Form von *Dauerbruchlinien* und *Kriechmodullinien* bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Bild 43 zeigt

den Zusammenhang zwischen Spannung und Belastungsdauer bis zum Bruch für verschiedene Hochpolymere bei Raumtemperatur. Die Kriechmoduln (in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur) sind die Werte, die sich aufgrund der zeit- und temperaturabhängigen Verformung bei bestimmten Spannungen ergeben (Bild 44).
Die Ergebnisse der dynamischen Beanspruchung werden als *Dauerfestigkeits-Diagramm* nach SMITH oder als WÖHLER-Kurven (Bild 45) aufgezeichnet. Aus den WÖHLER-Kurven werden die Dauerschwingfestigkeiten oder -verformungen bestimmt. Das sind die Spannungs- bzw. Verformungsausschläge, die nach einer bestimmten Lastspielzahl N zum Bruch oder zu einer Schädigung führen. Das Diagramm nach SMITH ist die Zusammenfassung dieser Werte für verschiedene Beanspruchungsbereiche. Weitere Kennwerte bei mechanischer Beanspruchung sind Härte[134])[138])[164]), Reibungszahl und Verschleiß.

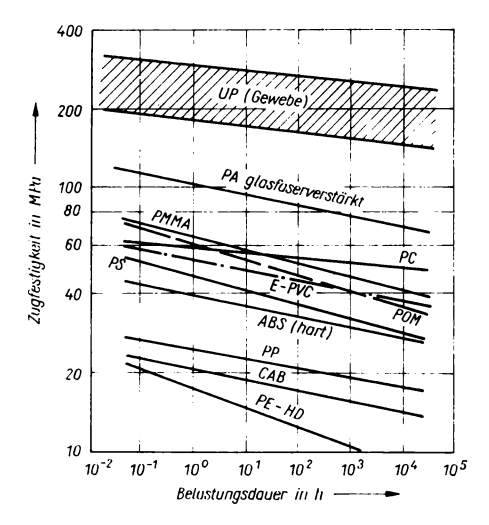


Bild 43. Zeitbruchlinien verschiedener hochpolymerer Werkstoffe bei Raumtemperatur, ermittelt im Zeitstandversuch (nach OBERBACH)

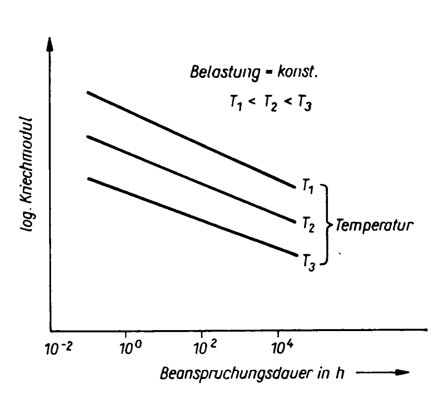


Bild 44. Abhängigkeit des Kriechmoduls von der Beanspruchungsdauer bei verschiedenen Temperaturen

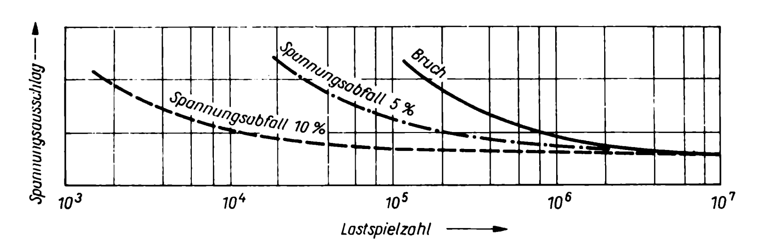


Bild 45. WÖHLER-Kurven von glasfaserverstärktem ungesättigtem Polyesterharz mit 40% Glasfasermatte (nach [72])

Elektrische Eigenschaften*)

Die elektrischen Eigenschaften der Hochpolymere sind von der *Temperatur*, der *Frequenz* und oft auch von der *Prüfkörperdicke* abhängig.
Wichtige Kennwerte bzw. Kennwertfunktionen sind:

- relative Dielektrizitätskonstante und dielektrischer Verlustfaktor[167]),
- Durchgangs- und Oberflächenwiderstand[128]),
- Durchschlagfestigkeit[168]),
- Lichtbogenfestigkeit und Kriechstromfestigkeit[169]) und
- elektrostatisches Verhalten.

*) s. auch Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG

Thermische Eigenschaften*)

Wichtige thermische Kennwerte[147][170] sind der thermische Volumen- oder Längenausdehnungskoeffizient, die Wärmeleitfähigkeit und die spezifische Wärmekapazität.

Optische Eigenschaften

Die optischen Eigenschaften der Hochpolymere werden durch folgende Größen charakterisiert: Reflexionsgrad, Transmissionsgrad, Absorptionsgrad, Streuvermögen, Halbwertswinkel, Leuchtdichtekoeffizient, Brechzahl. Weitere Eigenschaften, die für den Einsatz der Hochpolymere von Bedeutung sind:

- Formbeständigkeit[121][130],
- akustische Eigenschaften (Schallisolierung, Schallabsorption, Schwingungsdämpfung),
- Maßhaltigkeit der Erzeugnisse[122][143][146] (Schwindung und Nachschwindung),
- Verhalten gegenüber äußeren Einflüssen[126][127][148][150][157][161] (z. B. Chemikalien, klimatische Einflüsse, Mikroorganismen),
- Brandverhalten[139],
- physiologische Wirkung.

3.1.3.2. Temperaturverhalten und Zustandsbereiche

Amorphe Thermoplaste

Die Zustandsbereiche amorpher Thermoplaste zeigt Bild 46. Bei tiefen Temperaturen (unterhalb der Einfriertemperatur) sind die molekularen Bewegungen eingefroren, die Thermoplaste sind in diesem Bereich glasartig hart und mehr oder weniger spröde. Dabei ist nur eine geringe Temperaturabhängigkeit des dynamischen Elastizitätsmoduls und des Verlustfaktors vorhanden. Kleine Temperaturdispersionen (Nebenerweichung) weisen auf sekundäre molekulare Relaxationsprozesse hin. Die dynamischen Elastizitätsmoduln (Glasmoduln) liegen unterhalb der Einfriertemperatur bei etwa 4 GPa, im Einfrierbereich fallen sie um etwa 3 Zehnerpotenzen ab. Oberhalb der *Einfrier-* oder *Glastemperatur* T_G werden die Molekülhauptketten beweglich (Mikro-BROWNsche Bewegung) und können Platzwechsel ausführen (Haupterweichungsbereich). Die *dynamische Einfriertemperatur* T_{dyn} liegt etwa 20 ··· 30 K oberhalb der Einfriertemperatur T_G, die durch den Knickpunkt des spezifischen Volumens bei geringer Heizgeschwindigkeit markiert ist. Die Einfriertemperatur hängt von der Beweglichkeit der Molekülketten ab; zwischenmolekulare Kräfte und sterische Behinderung beeinflussen sie stark.

Beispiel. Die Einfriertemperatur von Polystyrol liegt bei 95 °C (starke sterische Behinderung durch Benzolringe), von Polymethylmethakrylat bei 103 °C (sterische Behinderung durch Seitengruppen), von Polyakrylnitril bei 106 °C (hohes Dipolmoment der Seitengruppen).

Nach dem Übergangsbereich folgt der *quasi-gummielastische Bereich.* Das Netzwerk wird durch physikalische Vernetzungsstellen (Verhakungen, Verschlaufungen) gebildet. Diese Stellen lösen sich mit steigender Temperatur, so daß sich an den gummielastischen Bereich ein Bereich *gummielastischen Fließens* (entropieelastische und viskose Deformation) anschließt, der wiederum in einen Bereich überwiegend *viskosen Fließens* der Schmelze einmündet.

Teilkristalline Thermoplaste

Bild 47 zeigt die Abhängigkeit des dynamischen Elastizitätsmoduls und des Verlustfaktors von der Temperatur. Da amorphe und kristalline Bereiche nebeneinander vorliegen, treten charakteristische Änderungen dieser Bereiche auf. Im Glaszustandsbereich sind die Ketten eingefroren. Oberhalb T_G ist bei teilkristallinen Thermoplasten das starke Absinken des dynamischen Elastizitätsmoduls nicht zu verzeichnen, weil die Beweglichkeit der Ketten durch die kristallinen Bereiche behindert ist. Teilkristalline Polymere haben deshalb bis nahe an den Kristallitschmelzpunkt T_S einen hornartigen Charakter. Im Bereich des Aufschmelzens der Kristallite fällt der Modul stark ab (Schmelzbereich). Bei den teilkristallinen Polymeren gibt es ebenfalls sekundäre molekulare Relaxationsprozesse. Die Dispersionsgebiete werden in der Reihenfolge zu tieferen Temperaturen mit α-, β-, γ-Prozeß usw. bezeichnet.

---

*) s. auch Abschn. WERKSTOFFPRÜFUNG



Elastomere (Elaste)

Bild 48 zeigt die Temperaturabhängigkeit für einen schwach vernetzten amorphen hochpolymeren Werkstoff (Elast).

Im *Glaszustand* und im *Haupterweichungsbereich* (Einfrierbereich der Mikro-BROWNschen Bewegung) verhalten sich Elaste wie amorphe Thermoplaste. Nach dem Haupterweichungs- oder Übergangsbereich folgt bei Elasten der *gummielastische Bereich*. Da die Makromoleküle durch Hauptvalenzbindungen untereinander verknüpft sind und die Vernetzungsdichte gering ist, sind hohe reversible Dehnungen in einem breiten Temperaturbereich möglich. Die Makromoleküle werden dabei aus ihrem geknäuelten Zustand

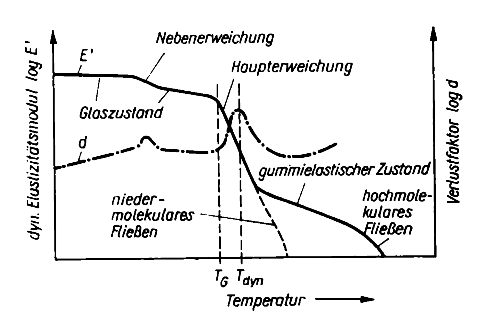


Bild 46. Temperaturverhalten und Zustandsbereiche amorpher Thermoplaste

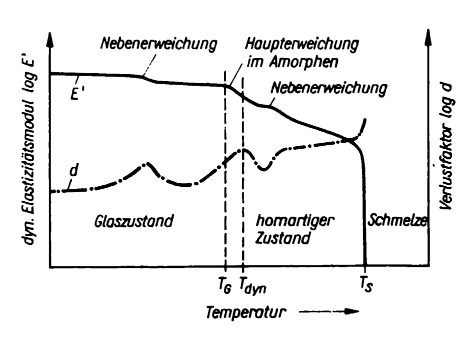


Bild 47. Temperaturverhalten und Zustandsbereiche teilkristalliner Thermoplaste

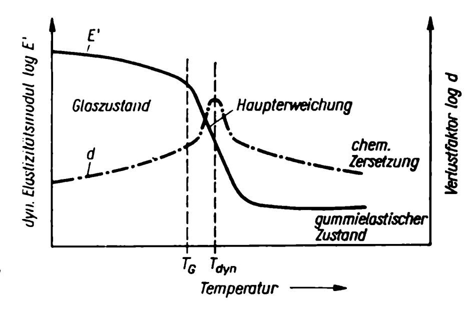


Bild 48. Temperaturverhalten und Zustandsbereiche von Elastomeren (Elasten)

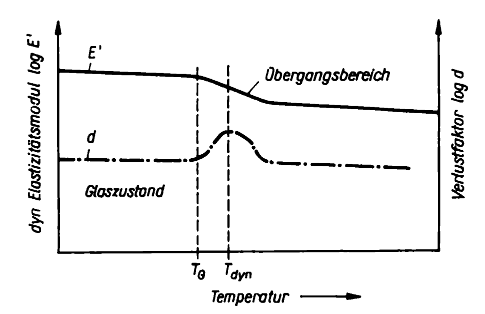


Bild 49. Temperaturverhalten und Zustandsbereiche von Duromeren (Duroplasten)

in einen Zustand geringer Entropie (höherer Ordnung) gebracht; die Gummielastizität wird deshalb auch als *Entropieelastizität* bezeichnet. Der gummielastische Bereich wird durch den bei höheren Temperaturen beginnenden Abbau der Hauptvalenzbindungen (Zersetzung) begrenzt.

Die Einfriertemperatur liegt bei Elasten etwa im Bereich von $-30 \cdots -70\,°C$. Der Elastizitätsmodul beträgt im gummielastischen Bereich (Gleichgewichtsmodul) etwa $0{,}1 \cdots 10$ MPa.

Duromere (Duroplaste)

Bild 49 zeigt die Temperaturabhängigkeit. Durch die enge Vernetzung der Makromoleküle ist die molekulare Beweglichkeit schon unterhalb der Einfriertemperatur stark behindert. Der Übergangsbereich oder Haupterweichungsbereich ist deshalb entweder nur gering sichtbar oder wird überhaupt nicht markiert.

Modul, Festigkeit und Härte bleiben bei kurzzeitiger Beanspruchung bis zur Zersetzungstemperatur der Duroplaste erhalten. Nachteilig wirken sich bei der Verwendung von Duroplasten die bei höheren Temperaturen auftretende Formänderung (Nachschwindung) und Festigkeitsminderung durch Versprödung und Zersetzung aus. Das Verhalten wird sowohl durch das Harz als auch die üblicherweise zugesetzten organischen oder anorganischen Füllstoffe beeinflußt.

3.1.3.3. Temperaturbereiche für die Anwendung

Das Verhalten der Hochpolymere in Abhängigkeit von der Temperatur wird durch den Verlauf des Elastizitätsmoduls, des Schubmoduls und der Dämpfung charakterisiert. Bild 50 zeigt den Verlauf des Schubmoduls für verschiedene Formmassen. Der *Schubmodul* ist weiterhin von der Beanspruchungsdauer und bei schwingender Beanspruchung von der Frequenz sowie von den äußeren Bedingungen abhängig. Der *Elastizitätsmodul* kann aus der Kurve durch Multiplikation mit dem Faktor 2,7 bestimmt werden, da $E = 2G(1 + \mu)$, wobei $\mu \approx 0{,}35$.

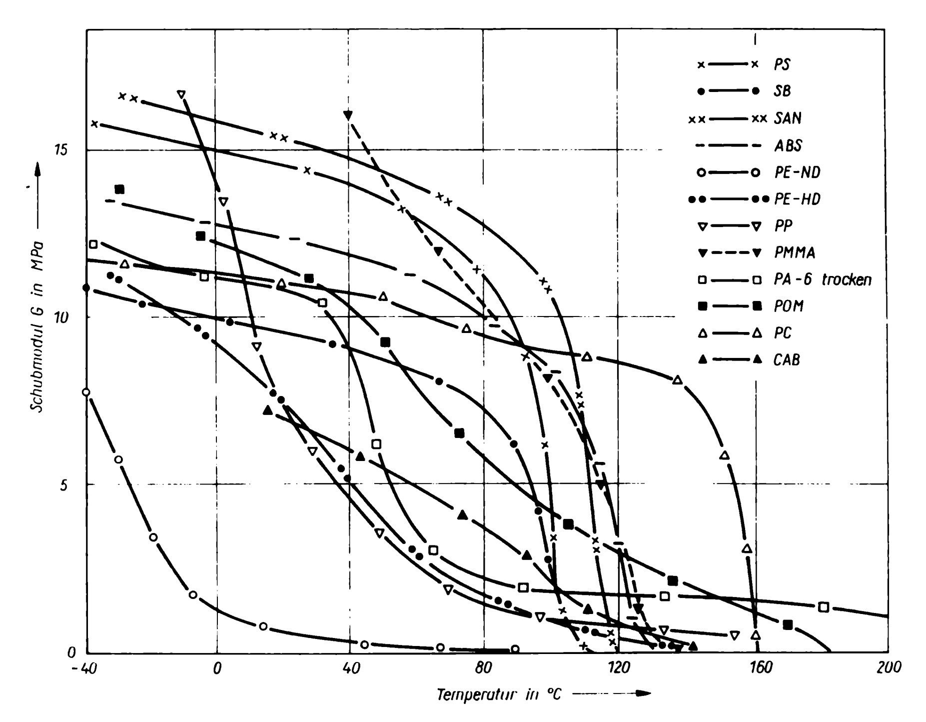


Bild 50. Schubmodul-Temperatur-Diagramm für verschiedene hochpolymere Werkstoffe (nach [72])

Obwohl der Modul maßgebend für den Formänderungswiderstand des Werkstoffs ist, reicht er allein zur Festlegung des Temperaturbereichs für die Anwendung nicht aus. Dazu muß die gesamte im Anwendungsfall vorliegende Beanspruchung berücksichtigt werden, also z. B. auch Einflüsse durch Chemikalien, energiereiche Strahlen, Witterungseinflüsse (Feuchtigkeit) usw. Die Tabellen 48, 51 und 52 enthalten die maximalen Anwendungstemperaturen ohne Belastung in Luft, die ständig (Monate bis Jahre) bzw. kurzzeitig (bis zu einigen Stunden) ertragen werden können.

3.1.3.4. Übertragbarkeit der Eigenschaftswerte auf Formteile

Die Eigenschaften der Hochpolymere (besonders die mechanischen) hängen in viel stärkerem Maße von den bei der Verarbeitung auftretenden physikalischen Änderungen der Struktur ab als z. B. bei den Metallen. Außerdem beeinflussen die Prüfkörpergeometrie[123][134][158][160] und die Prüfbedingungen (z. B. die Belastungsgeschwindigkeit) das Prüfergebnis. Diese Abhängigkeiten sind in jedem Fall zu berücksichtigen, wenn man an einem Prüfkörper ermittelte Werte zur Dimensionierung eines Formteils verwenden will.



Tabelle 45. Übersicht über Verarbeitungsverfahren für hochpolymere Werkstoffe

Fertigungsverfahren	Verarbeitungsverfahren		Anwendung
Urformen	Pressen	Formpressen Spritzpressen Schichtpressen	Duromere, Elastomere, Thermoplaste (PCTFE, PVC-h)
	Spritzgießen Extrudieren		Duromere, Thermoplaste, Elastomere
	Hohlkörperblasen	Extrusionsblasen Spritzgießblasen Tauchblasen	Thermoplaste
	Gießen	Formgießen Foliengießen Schleudergießen Rotationsgießen	Duromere, Thermoplaste (Vorprodukte)
	Kalandrieren		Thermoplaste
	Tauchen		Thermoplaste (Pasten, Pulver), Elastomere (Dispersionen, Lösungen)
	Schäumen	Schaumschlagverfahren Druckgasverfahren Treibmittelverfahren Kaltgießverfahren	Thermoplaste, Duromere, Elastomere
	GFP-Formen	Handverfahren Vakuumsackverfahren Drucksackverfahren Vakuumsaugverfahren Preßverfahren	Polyesterharz, Epoxidharz
	Sintern	Preßsintern	Polyfluorkarbone
		Rotationssintern Permporössintern	Thermoplaste
Umformen	Tiefziehen	Ziehformen Streckformen	Thermoplaste
	Biegen	Abbiegen Abkanten Bördeln Runden	Thermoplaste
Fügen	Schweißen	Heißgas-, Heizelement-, Heizkeil-, Wärmeimpuls-, Preßstumpf-, Reibungs-, HF- und Ultraschallschweißen	Thermoplaste
	Kleben	mit Haft-, Kontakt- und Festklebstoffen sowie Kleblacken	Thermoplaste, Duromere, Elastomere
	mechanisches Verbinden	Verschrauben Nageln Nieten	
Beschichten	Kaschieren Streichen	Tauch-, Walzen-, Streich-, Kalander- und Schneckenpressenauftrag	Thermoplaste

Tabelle 45 (Fortsetzung)

Fertigungsverfahren	Verarbeitungsverfahren		Anwendung
Beschichten	Flammspritzen Wirbelsintern		Thermoplaste
	Auskleiden		Thermoplaste, Elastomere
Trennen	Schneiden	Formstanzen, Lochen, Ausschneiden	
	Spanen	Bohren, Fräsen, Drehen, Sägen, Gewindeschneiden	Thermoplaste, Duromere
Veredeln	Oberflächenbehandlung	Metallisieren, Galvanisieren, Beflocken, Polieren, Prägen	Thermoplaste, Duromere
	Veränderung der Struktur	Tempern, Bestrahlen	

Tabelle 46. Mechanische, thermische und elektrische Eigenschaften von Thermoplasten

	Eigenschaft		Polyäthylen		Polyvinyl-
			PE-HD	PE-ND	E-PVC
Mechanische	Zugfestigkeit	in MPa	18,0 ··· 33,0	9,0 ··· 15,0	50,0 ··· 65,0
	Reißdehnung	in %	100 ··· 200	500 ··· 1000	20 ··· 50
	Elastizitätsmodul	in GPa	0,5 ··· 1,1	0,1 ··· 0,5	2,0 ··· 3,0
	Schubmodul	in GPa	0,2 ··· 0,5	0,05 ··· 0,15	1,0
	Schlagbiegefestigkeit	in kJ/m²	ohne Bruch	ohne Bruch	ohne Bruch
	Kerbschlagbiegefestigkeit	in kJ/m²	5 ··· 20	ohne Bruch	2 ··· 4
	Druckfestigkeit	in MPa			80,0
	Kugeldruckhärte 60	in MPa	25,0 ··· 65,0	13,0 ··· 20,0	110,0 ··· 120,0
Thermische	Formbeständigkeit				
	— nach VICAT	in °C	60 ··· 70	40 ··· 55	80 ··· 85
	— nach MARTENS	in °C			70
	lin. Ausdehnungskoeffizient	in K^{-1}	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}0 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7 \cdot 10^{-4}$
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,38 ··· 0,51	0,30 ··· 0,35	0,16
	spez. Wärmekapazität	in kJ/(kg · K)	1,7 ··· 2,0	2,1 ··· 2,5	0,92 ··· 1,0
Elektrische	spez. Volumenwiderstand	Ω · m	$10^{18} \cdots 10^{20}$	$10^{18} \cdots 10^{20}$	10^{17}
	Durchschlagfestigkeit	in MV/m	> 40,0	> 40,0	20,0 ··· 40,0
	relative Dielektrizitätskonstante bei 800 Hz (10^6 Hz)		2,4 (2,3)	2,3 (2,3)	2,5 ··· 3,7 (2,5 ··· 3,7)
	dielektrischer Verlustfaktor bei 800 Hz (10^6 Hz)		$< 5 \cdot 10^{-4}$ ($< 5 \cdot 10^{-4}$)	$< 3 \cdot 10^{-4}$ ($< 3 \cdot 10^{-4}$)	0,03 (0,03)
	Kriechstromfestigkeit	Stufe	T 5	T 5	



Die Eigenschaften der Formmassen werden meist an Prüfkörpern bestimmt, die im *Preßverfahren* hergestellt wurden (Grundniveau-Prüfkörper) oder an Spritzgußprüfkörpern, die eine bestimmte Schrumpfung bei Warmlagerung aufweisen. Zur Überprüfung der am Formteil erreichten Eigenschaftswerte werden auch direkt am Formteil oder an daraus hergestellten Prüfkörpern Messungen vorgenommen.

3.1.4. Verarbeitungsverfahren

Tabelle 45 enthält eine Übersicht über die wichtigsten Verarbeitungsverfahren für hochpolymere Werkstoffe (aufgeteilt nach Verarbeitungsgruppen).*)

3.2. Thermoplaste

Die wichtigsten Kennwerte von Thermoplasten sind in Tabelle 46 zusammengefaßt. Handelsnamen von Thermoplasten enthält Tabelle 47, Anwendungstemperaturen Tabelle 48.

*) siehe auch Fachwissen des Ingenieurs, Band 3, Abschn. Maschinen der Urformtechnik — Plastverarbeitungsmaschinen

chlorid		Polystyrol			
S-PVC	mit 40% Weichmacher	Homo-polymerisat	SB	ABS	SAN
50,0 ··· 65,0	12,5 ··· 22,0	30,0 ··· 65,0	30,0 ··· 50,0	40,0 ··· 50,0	70,0 ··· 75,0
20 ··· 50	300 ··· 375	3 ··· 6	20 ··· 30	5 ··· 15	5 ··· 6
2,0 ··· 3,0	3,0 ··· 38,0	3,0 ··· 3,5	1,8 ··· 2,8	2,6 ··· 3,8	3,5 ··· 3,6
	bis 1	1,1 ··· 1,25		0,6 ··· 1,0	
ohne Bruch	ohne Bruch	15 ··· 30	60 ··· 85	ohne Bruch	30 ··· 32
2 ··· 4	ohne Bruch	2 ··· 3	10 ··· 15	10 ··· 25	3 ··· 4
80,0		100,0		40,0 ··· 80,0	
110,0 ··· 120,0	bis 70,0	100,0 ··· 150,0	120,0 ··· 140,0	60,0 ··· 100,0	150,0 ··· 160,0
80 ··· 85		80 ··· 100	85 ··· 105	100 ··· 120	97 ··· 108
70		65 ··· 75	67 ··· 72	70 ··· 80	75 ··· 78
$0,7 \cdot 10^{-4}$		$0,8 \cdot 10^{-4}$	$(0,8 \cdots 1) \cdot 10^{-4}$	$(0,8 \cdots 0,85) \cdot 10^{-4}$	$(0,7 \cdots 0,8) \cdot 10^{-4}$
0,16	0,15 ··· 0,17	0,13 ··· 0,17	0,10 ··· 0,12	0,16 ··· 0,17	0,16
0,92 ··· 1,00	1,05 ··· 1,47	1,34	1,21	1,55	1,17
10^{18}	$10^{13} \cdots 10^{15}$	$> 10^{18}$	$10^{16} \cdots 10^{18}$	$10^{15} \cdots 10^{17}$	$10^{17} \cdots 10^{18}$
20,0 ··· 40,0	20,0 ··· 40,0	> 50,0	> 30,0	30,0 ··· 40,0	> 50
2,5 ··· 3,7 (2,5 ··· 3,7)	6 ··· 6,5	2,5 (2,5)	2,8 ··· 3,0 (2,8 ··· 3,0)	4,2 ··· 4,6 (3,7)	2,9 ··· 3,0 (2,9 ··· 3,0)
0,02 (0,02)	0,01 ··· 0,02	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$200 \cdot 10^{-4}$	$80 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 46 (Fortsetzung)

	Eigenschaft		Polyamid und Polyurethan		
			6-PA	6-PA 2,5% Feuchtigkeit	6-PA 30% Glasfaser
Mechanische	Zugfestigkeit	in MPa	60,0 ··· 80,0	60,0 ··· 80,0	100,0
	Reißdehnung	in %	50 ··· 80	200 ··· 300	7
	Elastizitätsmodul	in GPa	2,0 ··· 3,0	1,0 ··· 1,5	5,0
	Schubmodul	in GPa	1,0		
	Schlagbiegefestigkeit	in kJ/m^2	ohne Bruch	ohne Bruch	40
	Kerbschlagbiegefestigkeit	in kJ/m^2	4 ··· 6	ohne Bruch	17
	Druckfestigkeit	in MPa		90,0	
	Kugeldruckhärte 60	in MPa	100,0 ··· 130,0	50,0 ··· 70,0	110,0
Thermische	Formbeständigkeit				
	— nach VICAT	in °C	> 180	210 ··· 220	200
	— nach MARTENS	in °C	50 ··· 55	50 ··· 55	190
	lin. Ausdehnungskoeffizient	in K^{-1}	$(0,7 \cdots 1,2) \cdot 10^{-4}$		$0,3 \cdot 10^{-4}$
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,35		0,23
	spez. Wärmekapazität	in kJ/(kg · K)	1,68 ··· 2,09	1,68 ··· 2,09	1,47
Elektrische	spez. Volumenwiderstand	Ω · m	10^{16}	10^{13}	10^{17}
	Durchschlagfestigkeit	in MV/m	30,0	10,0	
	relative Dielektrizitätskonstante bei 800 Hz (10^6 Hz)		4,1 (3,6)		
	dielektrischer Verlustfaktor bei 800 Hz (10^6 Hz)		0,03 (0,04)		
	Kriechstromfestigkeit	Stufe			

Tabelle 46 (Fortsetzung)

	Eigenschaft		Polyfluorkarbon		
			PTFE	PCTFE	PFEP
Mechanische	Zugfestigkeit	in MPa	20,0 ··· 38,0	32,0 ··· 35,0	19,0 ··· 25,0
	Reißdehnung	in %	250 ··· 500	100 ··· 200	250 ··· 350
	Elastizitätsmodul	in GPa	0,75	0,9 ··· 1,0	0,35
	Schubmodul	in GPa	0,18		
	Schlagbiegefestigkeit	in kJ/m^2	ohne Bruch	ohne Bruch	ohne Bruch
	Kerbschlagbiegefestigkeit	in kJ/m^2	10 ··· 15	8 ··· 9	
	Druckfestigkeit	in MPa	7,0 ··· 12	40,0 ··· 70,0	15
	Kugeldruckhärte 60	in MPa	30,0	67,0 ··· 80,0	
Thermische	Formbeständigkeit				
	— nach VICAT	in °C	110	75 ··· 90	
	— nach MARTENS	in °C		55 ··· 65	
	lin. Ausdehnungskoeffizient	in K^{-1}	$(1,6 \cdots 2,5) \cdot 10^{-4}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$0,95 \cdot 10^{-4}$
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,23 ··· 0,46	0,12 ··· 0,35	0,20
	spez. Wärmekapazität	in kJ/(kg · K)	1,05	0,92	1,17
Elektrische	spez. Volumenwiderstand	Ω m	$10^{19} \cdots 10^{20}$	$10^{19} \cdots 10^{20}$	10^{20}
	Durchschlagfestigkeit	in MV/m	20,0 ··· 40,0	20,0 ··· 100,0	20,0 ··· 40,0
	relative Dielektrizitätskonstante bei 800 Hz (10^6 Hz)		2,0 ··· 2,1	2,6 (2,4)	2,0 ··· 2,1
	dielektrischer Verlustfaktor bei 800 Hz (10^6 Hz)		$< 10^{-4}$	0,025 (0,01)	$< 10^{-4}$
	Kriechstromfestigkeit	Stufe		T 5	

11-PA	PUR „mittel"	Zelluloseester CA	CP	CAB
25,0 ··· 60,0	45,0 ··· 50,0	30,0 ··· 65,0	20,0 ··· 60,0	26,0 ··· 37,0
200 ··· 300				25 ··· 50
0,5 ··· 1,2	1,2	1,5 ··· 2,0	1,0 ··· 2,5	1,5
		1,0	1,0	
ohne Bruch		50 ··· 80	ohne Bruch	ohne Bruch
15 ··· 40	8	6 ··· 20	5 ··· 30	2 ··· 20
		28,0 ··· 60,0	20,0 ··· 50,0	25,0 ··· 50,0
50,0		40,0 ··· 100,0	30,0 ··· 80,0	43,0 ··· 71,0
	160 ··· 165	50 ··· 80	70	70 ··· 105
		48 ··· 55	40	40 ··· 50
$1,5 \cdot 10^{-4}$	$(1,8 \cdots 1,9) \cdot 10^{-4}$	$(0,9 \cdots 1,0) \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
0,29	0,29	0,23	0,21	0,21
1,43	1,68 ··· 2,03	1,26 ··· 1,68	1,26 ··· 1,68	1,26 ··· 1,68
10^{15}	10^{16}	$10^{15} \cdots 10^{17}$	10^{14}	$10^{16} \cdots 10^{17}$
30,0	37,0	28,0 ··· 38,0	> 30,0	36,0 ··· 39,0
3,7	(3,6)	3,4 ··· 5,8	4,0	3,5
		(3,2 ··· 4,9)	(3,6)	(3,3)
0,05	(0,05)	0,01 ··· 0,025	0,005	0,012
		(0,025 ··· 0,064)	(0,010)	(0,020)
		T 3 ··· T 4		T 4 ··· T 5

Polymethylmethakrylat PMMA	Polykarbonat Typ 300	glasfaserverstärkt	Polypropylen PP	Polyoxymethylen POM
68,0 ··· 76,0	65,0	100,0	30,0 ··· 35,0	60,0 ··· 75,0
3	80 ··· 100	3,5	500 ··· 700	20 ··· 35
2,6 ··· 3,2	2,0 ··· 2,5	6,0	1,0 ··· 1,5	2,5 ··· 3,5
1,2	0,75		0,4 ··· 0,55	0,6 ··· 0,8
18	ohne Bruch	40	ohne Bruch	80 ··· 150
2	> 20	8	3 ··· 15	8 ··· 10
110,0 ··· 130,0	80,0			
155,0 ··· 180,0	95,0	160,0	60,0 ··· 80,0	140 ··· 160
80 ··· 110	140 ··· 165	170	90 ··· 100	150 ··· 160
70 ··· 105	115 ··· 125	140 ··· 150	40	65 ··· 70
$0,7 \cdot 10^{-4}$	$(0,6 \cdots 0,7) \cdot 10^{-4}$	$(0,25 \cdots 0,3) \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$
0,19	0,22	0,28	0,17 ··· 0,22	0,31
1,47	1,3	1,1	1,68	1,47
$> 10^{17}$	$> 10^{18}$	$> 10^{18}$	$> 10^{19}$	10^{17}
30,0	35,0	50,0	40,0	60,0 ··· 70,0
3,4	2,9	3,3	2,3	4,0
	(2,7)	(3,3)	(2,3)	
0,04	0,0013	0,0012	0,0005	0,001
	(0,011)	(0,011)	(0,0006)	(0,0014)
T 5	T 2 ··· T 3		T 5	T 4

Tabelle 47. Kurzzeichen und Handelsnamen von Thermoplasten

Thermoplast	Kurzzeichen	Handelsnamen
Polyäthylen	PE, PE-ND, PE-HD	Mirathen, Polyäthylen Schkopau (DDR); Bralen (ČSSR); Ropol (SR Rumänien); Alkathen (Großbritannien); Manolène, Natène (Frankreich); Alathon, Ameripol (USA); Lupolen, Hostalen Vestolen (BRD)
Polyvinylchlorid	PVC, PVC-H, PVC-W	Ekadur, Ekazell, Decelith, Skovinyl (DDR); Danuvil (Ungarn); Jugovil (SFR Jugoslawien); Rosevil (SR Rumänien); Vinoflex, Astraglas, Vestolit (BRD); Welvic, Breon, Corvic (Großbritannien); Ekavyl, Lucovyl (Frankreich)
Polystyrol	PS	Sconater (DDR); Bustren (VR Bulgarien); Trolitul, Luran, Vestyron (BRD); Afcolene, Lacqsan, Ugikral (Frankreich); Carinex, Bexan (Großbritannien)
Polyamid	PA	Miramid (DDR); Anid, Capronat (UdSSR); Tarnamid (VR Polen); Silon (ČSSR); Ultramid, Durethan, Vestamid (BRD); Rilsan, Lactame (Frankreich); Grilon (Schweiz)
Polyurethan	PUR(lin.)	SYSpur V (DDR); Caprolan, Desmopan (BRD)
Zelluloseester	CA, CAB, CAP, CN, CP	Saxetat (DDR); Cellidor, Trolit (BRD); Celadex (Großbritannien); Rhodialithe (Frankreich)
Polyfluorkarbone	PTFE, PCTFE, PFEP, PETFE, PECTFE	Heydefon (DDR); Polifen (UdSSR); Teflon, Tefzel, Halar (USA); Polyflon, Neoflon (Japan); Hostaflon (BRD); Edifran (Italien)
Polymethylmethakrylat	PMMA	Piacryl (DDR); Plexiglas (BRD); Lacrilex, Vedril (Italien); Diakon (Großbritannien)
Polykarbonat	PC	Makrolon (BRD); Lexan, Merlon (USA); Jupilon, Panlite (Japan)
Polypropylen	PP	Poprolin (UdSSR); Daplen (Österreich); Moplen (Italien); Hostalen, Novolen (BRD)
Polyoxymethylen	POM	Kematal (Großbritannien); Delrin (USA); Hostaform, Ultraform (BRD)
Polyisobutylen	PIB	Oppanol, Isolen (BRD); Hyvis (Großbritannien)
Polybuten-1	PB	Polybutene (Japan); Vestolen BT (BRD)
Polymethylpenten	PMP	TPX Polymers (Großbritannien, Japan)
Polyvinylkarbazol	PCV	Luvican (BRD)
Polyvinylazetat	PVAC	Polyvinylacetat (DDR); Vinylit (USA); Rhodopas (Frankreich); Mowilith (BRD)
Polyvinylalkohol	PVAL	Polyvinylalkohol (DDR); Poval (Japan); Polyviol (BRD); Rhoviol (Frankreich)
Polyvinylazetal	PVB, (PVF)	PV-Butyral (DDR); Butvar (USA); Mowital (BRD)
Polyvinylfluorid	PVF	Tedlar (USA); Dyflor (BRD)
Polyvinylidenfluorid	PVDF od. PVF_2	Kynar (USA), Vidar L (BRD)
Polyäthylenterephthalat	PETP	Grisuten (DDR); Vestodur, Hostadur (BRD); Arnite (Niederlande); Crastin (Schweiz); Lawsan (UdSSR)
Polybutylenterephthalat	PBTP, PTMT	Tenatine (Großbritannien); Tufpet (Japan); Ultradur (BRD)
Polyphenylenoxid	PPO	Arilox (UdSSR); PPO (USA, Niederlande); Arnox (Frankreich)
Polysulfon		Udel (USA)

Tabelle 48. Anwendungstemperaturen von Thermoplasten

Thermoplast	Anwendungstemperatur in °C		
	maximal, ohne Belastung, in Luft		minimal
	ständig	kurzzeitig	
Polyäthylen, niedere Dichte	60 ··· 80	100	−50
Polyäthylen, hohe Dichte	70 ··· 90	110	−50
Polyvinylchlorid, hart	55 ··· 60	70 ··· 80	−30
Polyvinylchlorid, schlagzäh	bis 60	80	−50
Polystyrol	65 ··· 80	75 ··· 90	−100
Polystyrol mit Butadien	65 ··· 75	75 ··· 85	−40
Styrol-Akrylnitril-Kopolymer	85	95	−25
Akrylnitril-Butadien-Styrol-Polymer	75 ··· 80	85 ··· 100	−35
Polyamid-6 (-6,6)	80 ··· 110	190 (210)	−40
Polyamid-6 mit Glasfaser	130	220	−40
Zelluloseester	50 ··· 60	80 ··· 90	−40
Polytetrafluoräthylenperfluorpropylen	200	250	−100
Polytetrafluoräthylen	250	300	−200
Polymethylmethakrylat	75 ··· 95	85 ··· 100	−40
Polykarbonat	135	160	−100
Polypropylen	80 ··· 100	130 ··· 140	0
Polyoxymethylen (Polyazetal)	90 ··· 110	110 ··· 140	−40
Polychlortrifluoräthylen	150	180	−40
Polyisobutylen	65	80	−40 (−30)
Polyvinylkarbazol	150	170	−100
Polyvinylfluorid	100		−70
Polyvinylidenfluorid	150		−60
Polyäthylenterephthalat	100	180 (220)	−20
Polyphenylenoxid	80 (100)	150 (200)	−30
Polysulfon	150 (170)	200	−70

3.2.1. Polyäthylen (PE)

Aufbau des Makromoleküls $\{CH_2-CH_2\}_n$

Herstellung

Polyäthylen[135]) wird durch Polymerisation des Äthylens ($CH_2=CH_2$) nach 3 Verfahren hergestellt:

Hochdruckverfahren: Reinigung des Äthylens von Fremdstoffen (Methan, Äthan, Sauerstoff, Azetylen). Komprimieren auf den Polymerisationsdruck und Zusetzen des Initiators (meist Sauerstoff). Reaktionsdruck etwa 150 ··· 300 MPa bei Temperaturen von 200 ··· 300 °C. Bei der Polymerisation entstehen Seitenketten (Verzweigungen) an der Hauptkette (etwa 20 ··· 50 CH_3-Gruppen je 1000 C-Atome in der Kette), dadurch geringe Dichte (PE-ND). Technische Herstellung in kontinuierlichen Anlagen. Polymerisationsdruck und -temperatur, Initiatorart und -menge sowie Verweilzeit im Reaktor beeinflussen die Polymerisateigenschaften.
Niederdruckverfahren: Reinigung des Äthylens. Polymerisation unter Anwendung von Katalysatoren nach Ziegler und Natta (z. B. Aluminiumalkyl und Titantetrachlorid) in einem Verdünnungs- oder Lösungsmittel bei Temperaturen von 60 ··· 75 °C und 0,1 ··· 1 MPa Druck. Reinigung des Polyäthylens (Entfernen des Katalysators), Waschen, Filtrieren und Zentrifugieren. Die Makromolekülketten des Niederdruckpolyäthylens sind linear (unverzweigt), dadurch höhere Dichte (PE-HD). Der Katalysator steuert die Polymerisateigenschaften, die Polymerisationstemperatur ist von geringer Bedeutung.
Mitteldruckverfahren: Analoge Verfahrensführung wie bei Niederdruckpolyäthylen. Als Katalysatorsysteme dienen reduziertes Chromoxid auf Siliziumoxid-Aluminiumoxid-Träger (PHILLIPS) und Molybdänoxid, Aluminiumoxid (STANDARD-OIL). Reaktionsparameter sind die Temperatur von 100 ··· 200 °C und Druck im Bereich von 2 ··· 5 MPa (PHILLIPS) bzw. 200 ··· 250 °C und etwa 7 MPa (STANDARD-OIL). Neben der Aufbereitung des Polymerisats erfolgt auch Regeneration des Katalysators und Wiedergewinnung des Lösungsmittels. Das bei den Verfahren entstehende Polymerisat wird mikrohomogenisiert (in Extrudern oder auf Mischwalzen) und zu Granulat aufbereitet. Stabilisierung gegen Oxydation z. B. mit

2,6-Ditertiärbutyl-4-methylphenol und Di-β-naphthyl-paraphenylendiamin. Wirksamster Stabilisator gegen Ultraviolettstrahlung ist Ruß mit einem Anteil bis 2,5%.
Polyäthylene können antistatisch und schwer entflammbar eingestellt sowie mit Gleit- und Antiblockmitteln versehen werden. Verschäumen beim Urformen ist durch Anwendung von Treibmitteln möglich; außerdem vernetzbares PE (Vernetzung durch Peroxide nach der Verarbeitung bzw. durch Bestrahlen) und mit Füllstoffen (Kaolin, Glasfasern, Ruß).
Kopolymere mit Vinylazetat und Akrylester werden als weichmachende Komponenten für PE und für die Pfropfung mit Vinylchlorid verwendet; chloriertes PE für Mischungen mit PVC zur Verbesserung der Schlagzähigkeit.

Eigenschaften

Neben den primären Parametern relative Molekülmasse, Molekülmassenverteilung und Kettenaufbau (Verzweigung) werden die Eigenschaften wesentlich durch die Kristallinität beeinflußt.
Hochdruckpolyäthylene erreichen Kristallinitäten zwischen 40 ··· 55%, bei Dichtewerten von $0{,}92 \cdot 10^3$ kg/m³ liegt die Erweichungstemperatur (Kristallitschmelzbereich) bei 105 ··· 110 °C, bei $0{,}94 \cdot 10^3$ kg/m³ Kristallitschmelzbereich 120 ··· 125 °C; die *Nieder-* und *Mitteldruckpolyäthylene* haben Kristallinitätsgrade von 60 ··· 80%, die Kristallitschmelzbereiche liegen bei 125 °C für Dichtewerte von $0{,}94 \cdot 10^3$ kg/m³ und steigen bis 135 °C bei Dichtewerten um $0{,}96 \cdot 10^3$ kg/m³. Mit steigender Kristallinität wächst die Dichte. Der sich einstellende Kristallinitätsgrad ist verarbeitungsabhängig, so ergibt schnelles Abkühlen geringe, langsames Abkühlen hohe Kristallinität. Durch Tempern kann der Kristallinitätsgrad bis zum Grenzwert gesteigert werden. Mit zunehmender Dichte steigen: Oberflächenhärte, Steifigkeit, Zugfestigkeit, Formbeständigkeit in der Wärme; es nehmen ab: Schlagzähigkeit, Gasdurchlässigkeit, Transparenz und Quellbarkeit.
Polyäthylen ist milchig durchscheinend bis transparent, geschmack- und geruchsfrei; wegen des unpolaren Charakters besitzt es sehr gute elektrische und dielektrische Werte. Das paraffine Verhalten des PE bedingt gute chemische Beständigkeit, z. B. gegenüber nichtoxydierenden Säuren, Laugen sowie wäßrigen Lösungen. Bis 60 °C ist es in allen Lösungsmitteln unlöslich; Quellung in aliphatischen und aromatischen Kohlenwasserstoffen und deren Halogenderivaten, sehr geringe Wasseraufnahme. Polyäthylen, besonders Hochdruckpolyäthylen, neigt zur Spannungsrißkorrosion. Bei Anwesenheit innerer Spannungen und oberflächenaktiver Medien (Spülmittel, Waschmittel, Seifen) oder organischer Säuren, Alkohole, Ester und Amine bilden sich Risse aus. Im Kontakt mit Weichmacher enthaltenden Stoffen begünstigt PE die Weichmacherwanderung stark. Die Permeabilität von Gasen ist abhängig von der Dichte des PE, die Wasserdampfdurchlässigkeit ist gering, dagegen hohe Durchlässigkeit für Kohlendioxid. Polyäthylen ist brennbar mit Geruch nach verbranntem Paraffin, durch Zusätze sind schwerer entflammbare Einstellungen möglich.

Verarbeitung

Extrudieren: Polyäthylen mit niedrigem *Schmelzindex* (*i*, *MI*, *MFI*) (hohe Molekülmasse); Verarbeitungstemperatur PE-ND 140 ··· 170 °C, PE-HD 170 ··· 200 °C.
Spritzgießen: Polyäthylen mit hohem Schmelzindex (*i*); Verarbeitungstemperatur PE-HD 240 ··· 300 °C, PE-ND 180 ··· 260 °C. Verarbeitungsdruck PE mit hohem *i* 60 ··· 120 MPa, PE mit geringem *i* bis 200 MPa. Werkzeugtemperatur zwischen 50 und 90 °C; möglichst unter 60 °C, um ein Festkleben zu vermeiden. Die Verarbeitungsbedingungen beeinflussen die Schwindung des Teils (1,5 ··· 5,5%). Bei höheren Gebrauchstemperaturen Nachschwindung.
Schweißen: Schweißtemperatur 120 ··· 150 °C. Dünnwandige Teile durch Wärmeimpulsschweißen, dickwandige Teile durch Heißgasschweißen unter Verwendung von Schutzgas; Preß- oder Reibungsschweißen. HF-Schweißen wegen des niedrigen dielektrischen Verlustfaktors nicht anwendbar.
Bedrucken, Lackieren, Kleben: Wegen des paraffinen Charakters von PE nur nach Vorbehandlung, Aktivieren der Oberfläche (thermisch, elektrisch, chemisch), z. B. Chlorierung, Sulfochlorierung, Beflammen, Bestrahlung. Kleben mit Epoxid- und Polyesterharzen, Polychloropren mit Isozyanatvernetzern, Polyvinylazetat und Polyakrylat-Dispersionen.
Wirbelsintern, Rotationsformen: Pulver- und Granulatverarbeitung bei 200 ··· 350 °C.
Tiefziehen und Kalandrieren: Kaum angewendet, da enge Erweichungszone.
Nach Vernetzen mit Hilfe von Bestrahlung oder Peroxiden sind Polyäthylenerzeugnisse bis 300 °C formbeständig. Herstellung von PE-Schäumen durch chemische Treibmittel — Verarbeitung durch Formschäumverfahren oder Extrudieren (z. B. bei Kabeln).

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Gehäuseteile, Verkleidungen, Transportbehälter, Auskleidungen im chemischen Apparatebau, Korrosionsschutzüberzüge, Rohrleitungen, Textilspulen, Faltenbälge, Dichtmanschetten, Lüfter, Zahnräder.



Fahrzeugbau: Gehäuseteile, Behälter, Batteriekästen, Kofferraumauskleidungen, Stoßfänger, Rohre, Schmutzfänger, Transportkästen.
Elektrotechnik: Kabelisolierungen, Installationsrohre, Teile für elektrische Haushaltgeräte, Verteilerkästen.
Bauwesen: Wasserleitungsrohre, Folien, Drainrohre, Fittings, Spülkästen, Gullys, Dachentlüfter, Schilder.
Sonstige Anwendung: Spielzeuge, Haushaltgegenstände, Gießkannen, Eimer, Flaschen.

3.2.2. Polyvinylchlorid (PVC)

Aufbau des Makromoleküls $\{CH_2-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}}\}_n$

Herstellung

Polyvinylchlorid[114][115][145][162] entsteht bei der Polymerisation des Vinylchlorids (Polyvinylchlorid-Homopolymerisat). Technisch bedeutungsvoll sind folgende Verfahren:

Suspensionspolymerisation: Suspendieren des Monomers im Wasser. Durch Zusätze wie organische Kolloide (Gelatine, Stärke) oder anorganische Stoffe (Talkum, Phosphate) wird die Suspension stabilisiert. Auslösen der Polymerisation im Monomertröpfchen durch Initiatoren (Peroxide, Azo-Verbindungen). Reaktionsparameter bei zyklischer Arbeitsweise sind eine Temperatur von 40 ··· 75 °C und ein Druck von 0,5 ··· 1,2 MPa. Nach Ablauf der Polymerisation werden die PVC-Perlen vom Wasser in Schleudern, Nutschen oder Trommeltrocknern getrennt. Durch die Verwendung nur geringer Mengen Polymerisationshilfsmittel ergibt sich eine hohe Reinheit des Polymerisats (S-PVC).
Emulsionspolymerisation: Herstellen der Emulsion aus Monomer, Wasser, Emulgator (Fettsäuren, kationischen Seifen) und Initiator. Zur Anregung der Polymerisation wird z. B. Wasserstoffsuperoxid oder Kaliumpersulfat verwendet. Arbeitsbedingungen bei kontinuierlicher oder diskontinuierlicher Polymerisation: Temperatur 40 ··· 60 °C und 0,5 ··· 0,8 MPa Druck. Aufarbeiten der Emulsionspolymerisate durch Zerstäubungstrocknen (PVC-N) oder durch Koagulieren und Filtrieren auf Imperial-Drehtrommelfiltern (PVC-I). Die Polymerisate enthalten je nach Trocknungsverfahren mehr oder weniger Emulgator.
Von geringer Bedeutung ist die *Substanzpolymerisation* von PVC.

Werden bei der Polymerisation neben Vinylchlorid noch andere Monomere verwendet, erhält man *Kopolymerisate,* z. B. aus Vinylchlorid-Vinylazetat oder Vinylchlorid-Vinylidenchlorid. Für Mischpolymerisaten oder Polyblends verwendet man Vinylazetat-Maleinsäure, Vinylazetat, Vinylpropionat, Styrol oder chloriertes Polyäthylen.
Die Polymerisate werden wegen der geringen Eigenstabilität gegen Licht und Wärme stabilisiert — z. B. gegen Wärme durch organische Stoffe mit Barium, Kalzium, Kadmium, Zink und Zinn oder anorganische und organische Bleisalze; zur Lichtstabilisierung mit Opalisierungsmitteln (Ruß) und UV-Schutzmitteln. Durch Nachchlorieren des PVC bis zu Chlorgehalten von 65 Masse-% ergibt sich eine höhere Temperaturstandfestigkeit.
Plastifizieren des PVC durch Zusatz von Weichmachern (z. B. Dioktylphthalat, Trikresylphosphat, Trioktylphosphat) in Mengen von 20 ··· 60% möglich, dadurch höhere Flexibilität, höhere Schlagbiegefestigkeit, größere Bruchdehnung, geringere Zugfestigkeit. Weitere Variation der Polymerisate durch Füllstoffe, Gleitmittel und Pigmente.

Eigenschaften

Dichte (1,35 ··· 1,55) · 10^3 kg/m³. Weichmacherfreies PVC ist sprödhart, steif und schlagempfindlich; weichmacherhaltige Polymerisate sind bis zu hoher Flexibilität einstellbar. Mischungen von PVC mit geringen Mengen chlorhaltiger Polymere haben eine verbesserte Schlagbiegefestigkeit. Mit steigender Temperatur werden Zugfestigkeit, *E*-Modul, Druckfestigkeit und Härte geringer, die Schlagbiegefestigkeit nimmt zu.
Emulsionspolymerisate haben eine höhere Wasseraufnahme und schlechtere elektrische Werte. Suspensionspolymerisate können im Gegensatz zu Emulsionspolymerisaten glasklar hergestellt werden. PVC-hart ist beständig gegen Wasser, Salzlösungen, verdünnte und konzentrierte Säuren und Laugen, Mineralöle, verdünnte und konzentrierte Alkohole. Ester, Ketone und Chlorkohlenwasserstoffe quellen PVC, Zyklohexanon löst es. PVC-hart ist physiologisch indifferent sowie wegen seines hohen Chloranteils schwer entflammbar und selbstlöschend. Die Eigenschaften von PVC-weich sind abhängig von der Art und Menge des verwendeten Weichmachers. Chemisch wird es von den gleichen Chemikalien angegriffen wie weichmacherfreies PVC; die Aufnahme von Wasser und wäßrigen Lösungen ist größer; starke Säuren und Laugen können den Weichmacher verseifen und herauslösen. PVC ist beständig gegen Spannungsrißbildung.

Verarbeitung

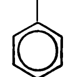
Extrudieren und Kalandrieren: Bei allen Verarbeitungsverfahren im Schmelzbereich sind wegen der Gefahr der HCl-Abspaltung säurefeste Stähle zu verwenden. Verarbeitungstemperatur: 160···180 °C.
Spritzgießen: Temperatur 160···200 °C bei Spritzdrücken von 150···200 MPa bei PVC-hart bzw. 10···20 MPa bei PVC-weich. Werkzeugtemperatur: < 70 °C bei PVC-hart; < 40 °C bei PVC-weich.
Schweißen, Kleben: Alle Schweißverfahren sind anwendbar; als Klebstoffe werden vorwiegend lösungsmittelhaltige Klebstoffe eingesetzt.
Aus der Suspension des PVC im Weichmacher (Pasten, Plastisole) werden im *Streichverfahren* Gewebekunstleder und durch *Rotationsgießen* Hohlkörper hergestellt. PVC-hart- und PVC-weich-Schäume werden nach den Hoch- und Niederdruckverfahren hergestellt.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Rohre, Behälter, Armaturen, Lüftungskanäle, Pumpenlaufräder, Siebböden, Faltenbälge, Dichtungen, Förderbänder, Auskleidungen.
Fahrzeugbau: Bezüge und Auskleidungen, Schläuche, Profile.
Elektrotechnik: Isolierrohre, Kabelisolationen, Verteilerkästen, Kabelkanäle, Gehäuse.
Bauwesen: Bodenbeläge, Rolladenprofile, Fensterrahmen, Regenrinnen, Wellplatten, Wasserleitungen, Drainrohre.
Sonstige Anwendung: Spielwaren, Stiefel, Rechen- und Zeichengeräte, Schallplatten.

3.2.3. Polystyrol (PS)

Aufbau des Makromoleküls $\{CH_2-CH\}_n$



Herstellung

Polystyrol[116])[153]) wird durch eine radikalische oder ionische Polymerisation bzw. unter Wirkung von ZIEGLER-Katalysatoren hergestellt. Technische Verfahren sind:

Suspensionspolymerisation: Dispergieren des Monomers in Wasser und Stabilisieren der sich bildenden Tröpfchen durch Kolloide (Gelatine, Methylzellulose) und feste organische Pulver (Aluminium- oder Zinkhydroxid, Bariumsulfate und -phosphate). Auslösen der Polymerisation durch Initiatoren (z. B. Benzoylperoxid oder tertiäres Butylperoxid) und vollständiges Auspolymerisieren (Polymerisationstemperatur 100···120 °C, Polymerisationszeit 15···25 h). Waschen, Zentrifugieren und Trocknen des Polymerisats. Herstellung von Homopolymerisat, Ko- und Terpolymerisat.
Lösungspolymerisation: Das Gemisch von Lösungsmittel und Styrol wird einer Kaskade von hintereinander geschalteten Reaktoren zugeführt. Bei einer 3stufigen Anlage ist die Temperaturstufung in den einzelnen Kesseln 80···130 °C, 135···150 °C und 180···240 °C. Nach der Polymerisation werden in einer Entgasungsapparatur Lösungsmittel und Restmonomere entfernt. Neben der Produktion von Standardpolystyrol werden auch schlagzähes Polystyrol (Kautschuk, Styrol) und Styrol-Akrylnitril-Kopolymerisate nach diesem Verfahren hergestellt.
Fällungspolymerisation: Herstellung von Kopolymerisaten des Styrols mit Akrylnitril. Als Fällungsmittel dient Methanol, als Initiator Azoisobuttersäurenitril; Schutzkolloid ist Polyvinyläther. Reaktionstemperatur 60···90 °C.
Emulsionspolymerisation: Das Monomer wird mit Emulgator in Wasser emulgiert und mit wasserlöslichen Katalysatoren bei Temperaturen unterhalb 100 °C polymerisiert. Die entstehende Dispersion wird teilweise direkt verwendet. Herstellung von Butadien-Styrol-Kopolymerisaten (BS) und Akrylnitril-Butadien-Styrol-(ABS)-Produkten.
Substanzpolymerisation: Kontinuierliche Polymerisation nach Vorpolymerisation bei etwa 80 °C (Verweilzeit 55 h). Das Vorpolymerisat durchläuft in Richtung steigender Temperatur von 100···220 °C einen Reaktor in etwa 28 h (Anwendung einer Schutzgasatmosphäre). Andere Varianten sind die Polymerisation eines Vorpolymerisats auf erhitzten Walzen unter Vakuum oder der Entzug des Monomers in einem Verdampfungsturm.

Neben den Polystyrol-Homopolymerisaten, Kopolymerisaten und Terpolymerisat werden auch Mischungen mit Polybutadien, BS oder Styrol-Akrylnitril-Kopolymer (SAN) hergestellt. Zur Verbesserung der verarbeitungs- und anwendungstechnischen Eigenschaften werden den Polymeren zugesetzt:

- Gleitmittel, z. B. 0,1% Zinkstearat,
- Formtrennmittel, z. B. 0,1···0,6% Stearinsäure,
- UV-Stabilisator,
- Verstärkungsmaterialien (Glasfasern),
- Farbstoffe (transparente bis gedeckte Einstellungen).

Eigenschaften

Dichte (1,05 ··· 1,08) · 10^3 kg/m³; 1,35 · 10^3 kg/m³ bei 35 Masse-% Glasfasern. Polystyrol-Homopolymerisate haben Dauergebrauchstemperaturen von 65 ··· 80 °C, butadienmodifizierte Typen von 65 ··· 75 °C, die Ko- und Terpolymerisate SAN und ABS von 75 ··· 85 °C. Die Schlagbiegefestigkeit steigt gegenüber dem reinen PS an, die elektrischen Werte verringern sich. Polystyrole sind beständig gegen Wasser, wäßrige Salzlösungen, verdünnte Säuren und Laugen und gegen pflanzliche Fette und Öle. Reinpolymerisate sind unbeständig gegen Ester, Äther, Ketone, Chlorkohlenwasserstoff und Benzin. SAN und ABS sind beständig gegen aliphatische Kohlenwasserstoffe. Polystyrol ist physiologisch unbedenklich; es brennt mit leuchtender, stark rußender Flamme. Polystyrole sind bei Einwirkung von ätherischen Ölen, Aromastoffen und Benzin spannungsrißanfällig; sie sind nicht witterungsbeständig. Die dielektrischen und elektrischen Eigenschaften sind sehr gut.

Verarbeitung

Spritzgießen: wichtigste Verarbeitungsmethode für PS. Verarbeitungstemperatur 160 ··· 280 °C bei Spritzdrücken von 60 ··· 200 MPa (untere Werte gelten für Reinpolymerisate). Werkzeugtemperatur 20 ··· 80 °C.
Extrudieren: bei Temperaturen von 160 ··· 200 °C.
Tiefziehen: bei Temperaturen von 130 ··· 150 °C.
Schweißen: nach dem Wärmeimpuls- und Heißluftschweißverfahren; HF-Schweißen nicht anwendbar, da geringe dielektrische Verluste.
Kleben: mit Lösungsmitteln (Benzol, Methylchlorid, Toluol) oder Lösungen des Polymers.
Verschäumen: Vorschäumen treibmittelhaltiger Polystyrolperlen bei 90 ··· 100 °C mit Dampf. Ausschäumen bei 110 ··· 120 °C, Dichte (13 ··· 30) kg/m³. Verschäumen von PS- und ABS-Massen beim Spritzgießen und Extrudieren mit chemischen und physikalischen Treibmitteln (Strukturschaumteile, Schaumfolie).
Veredeln: Galvanisieren (mit Chrom, Kupfer. Nickel) von ABS-Polymeren.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Gehäuse, Abdeckungen, Zählwerke, Schaugläser, Textilspulen, Kühlturmeinbauten, Lüfterräder, Kameragehäuse, Schaumpolystyrol-Isolierungen, Schwimmkörper.
Fahrzeugbau: Instrumentenblenden, Lager- und Transportbehälter, Verkehrsampeln, Batteriegehäuse, Armlehnen, Klimaanlagenteile, Rückstrahler, Rückleuchten, Lenksäulenverkleidungen, Schaumpolystyrol-Fahrzeugisolierungen.
Elektrotechnik: HF-Isolierungen, Radio-, Fernseh- und Fonoteile, Telefongehäuse, Frontrahmen, Spulen, Installationsteile, Haushaltmaschinengehäuse.
Bauwesen: Lichtraster, Leuchtenabdeckungen, Spülkästen, Blenden, Hydranten- und Energiehinweisschilder, Rohre, Fittings, Schaumpolystyrol-Isolierung gegen Kälte und Wärme, Schalldämmung, Leichtbeton-, Sandwich-Platten.
Sonstige Anwendung: Verpackungsmittel für Pharmazeutika, Kosmetika und Lebensmittel; Spielzeug, Zeichengeräte, Geschirr, Werbeartikel, Schaumpolystyrol-Verpackungen für Maschinenteile, Werkzeuge, Meßgeräte.

3.2.4. Polyamid (PA)[132]) und lineares Polyurethan (PUR)

Aufbau der Makromoleküle

6-PA: $\{NH-(CH_2)_5-CO\}_n$
6,6-PA: $\{NH-(CH_2)_6-NH-CO-(CH_2)_4-CO\}_n$
6,10-PA: $\{NH-(CH_2)_6-NH-CO-(CH_2)_8-CO\}_n$
6,12-PA: $\{NH-(CH_2)_6-NH-CO-(CH_2)_{10}-CO\}_n$
11-PA: $\{NH-(CH_2)_{10}-CO\}_n$
12-PA: $\{NH-(CH_2)_{11}-CO\}_n$
PUR(lin) $\{O-(CH_2)_4-O-CO-NH-(CH_2)_6-NH\}_n$

Herstellung

Durch Polykondensation von Diaminen mit Dikarbonsäuren (je Komponente mindestens 4 Methylengruppen) oder von Aminokarbonsäuren bzw. durch Polyaddition der Laktame. Bei der Polykondensation von Diaminen und Dikarbonsäuren sind die Ausgangskomponenten im molaren Verhältnis zuzuführen. Die technische Herstellung von PA aus ε-Aminokarbonsäure erfolgt:

diskontinuierlich: Das Laktam wird in einer konzentrierten wäßrigen Lösung (80%ig) mit einem Katalysator (0,5% Essigsäure) in einem Autoklaven unter Anwendung von Stickstoff-Schutzgasatmosphäre

auf 260 ··· 370 °C erhitzt. Beim Erreichen dieser Temperatur wird das Wasser abdestilliert, das entstandene PA zerkleinert und mit destilliertem Wasser ausgekocht, bis der Laktamanteil auf etwa 0,1% gesunken ist.
kontinuierlich (VK-Rohr): Das Laktam wird mit geringen Mengen (4%) ε-Aminokarbonsäure oder Hexamethylendiammoniumadipat (AH-Salz) versetzt und auf Reaktionstemperatur (260 °C) erhitzt. Anschließend kontinuierliche Zufuhr der Einsatzstoffe und Abzug des Polymerisats.

Die technische Herstellung von 6,6-PA hat folgende Arbeitsstufen:
- Herstellung des Salzes aus Adipinsäure und Hexamethylendiamin (AH-Salz),
- Polykondensation des AH-Salzes in wäßriger Lösung (260 ··· 280 °C, 1,5 ··· 1,6 MPa); Kettenstabilisator ist 0,2 ··· 0,5%ige Essig- oder Adipinsäure,
- Abkühlen der Schmelze und Zerkleinern,
- Trocknen des Granulats.

Neben den angeführten Polyamiden werden auch Mischpolyamide, z. B. aus $^2/_3$ AH-Salz und $^1/_3$ Kaprolaktam, und Mischungen mit anderen Polymeren (z. B. PTFE) oder mit Graphit und MoS_2 (Lagerwerkstoff) und Ruß hergestellt. Durch Glasfaserzusatz von 15 ··· 50% werden die Festigkeitswerte erheblich gesteigert. Verbesserte Flexibilität haben Typen mit hohem Monomeranteil oder mit Weichmachern.

Lineare Polyurethane (PUR) gewinnt man durch Polyaddition von Diisozyanaten mit Diolen; z. B. aus Hexamethylendiisozyanat und Butandiol-(1,4) in Gegenwart von inerten Lösungsmitteln wie Chlorbenzol, Azeton, Xylol bei Temperaturen von ≈ 200 °C ohne erhöhten Druck. Einfacher erfolgt die Polyadditionsreaktion zu PUR, wenn in Glykol ohne Verdünnungsmittel Diisozyanat einfließt. Zur Homogenisierung wird die Temperatur bis auf 200 °C erhöht. Aufbereitung des Polymerisats durch Auspressen aus Düsen und anschließendes Zerkleinern.

Eigenschaften

Polyamide sind teilkristalline Stoffe mit Schmelzpunkten im Bereich von 140 (12-PA) ··· 280 °C (6,6-PA); Dichte (1,0 ··· 1,2) · 10^3 kg/m^3. Auch fast alle anderen Eigenschaften der Polyamide ändern sich mit dem Verhältnis von reaktionsfähigen Gruppen zu Methylengruppen. Die Wasseraufnahme bei Wasserlagerung beträgt bei 6-PA und 6,6-PA ≈ 10%, bei 12-PA 1,5%. Völlig trockene Polyamide sind spannungsrißanfällig. Der Kristallinitätsgrad und die Wasseraufnahme beeinflussen die Eigenschaften, insbesondere die Zähigkeit, die Verschleißfestigkeit und die Maßhaltigkeit der Fertigteile. Der Kristallinitätsgrad ist von den Verarbeitungsbedingungen abhängig und beträgt maximal 60%. Polyamide sind beständig gegen die meisten organischen Lösungsmittel und gegen synthetische und natürliche Öle und Fette; sie sind unbeständig gegen Säuren (Verkleben von PA, z. B. durch Anlösen mit Ameisensäure), stärkere Laugen, Phenole und Kresole. Sie sind geruchlos, geschmackfrei, physiologisch unbedenklich sowie kochfest und sterilisierbar. Polyamide sind brennbar, besonders glasfaserverstärkte Typen, wobei aber flammhemmende Einstellungen möglich sind. Polyamide haben gutes Dämpfungsvermögen, einen hohen Verschleißwiderstand und gute Gleit- und Notlaufeigenschaften (Lager).

Polyurethane (linear):

Dichte (1,20 ··· 1,21) · 10^3 kg/m^3. Große Variationsmöglichkeiten der Eigenschaften durch Veränderung von Länge und Struktur der zwischen Methangruppen angeordneten Polyester- oder Polyätherketten. PUR ist beständig gegen Kraftstoffe, Öle, Fette und viele Lösungsmittel, witterungsbeständig, unbeständig gegen Säuren, Laugen und heißes Wasser. Gutes Dämpfungsvermögen von PUR.

Verarbeitung

Nur feuchtigkeitsfreie Massen verarbeiten. Im Schmelzbereich hohe Oxydationsempfindlichkeit; Schmelze hat geringe Viskosität; PUR nicht vortrocknen.
Spritzgießen: Temperatur: 200 ··· 280 °C (PA); 190 ··· 240 °C (PUR), Druck: 60 ··· 120 MPa, hohe Werkzeugtemperaturen (bis > 100 °C), um möglichst hohen Kristallinitätsgrad (Härte) zu erreichen. Volumenkontraktion bei der Erstarrung 4 ··· 7%.
Extrudieren, Hohlkörperblasen: Temperatur: 240 ··· 300 °C (PA), 190 ··· 220 °C (PUR), hohe Temperaturkonstanz erforderlich. Polyamide mit höherer Viskosität verwenden.
Wirbelsintern, Rotationsschmelzgießen, elektrostatisches Beschichten durch Verarbeitung von PA-Pulvermaterialien; Rotationsgießen von Kaprolaktam zu 6-PA; Verschweißen von PA nach allen Verfahren; Kleben, Lackieren, Bedrucken, Färben (wäßriges Bad) und Metallisieren möglich.

Anwendung

PA:

Maschinenbau, Apparatebau: Gleitlager, Zahnräder, Keilriemenscheiben, Transportketten, Kupplungsteile, Pumpenteile, Schrauben, Armaturen, Maschinengehäuse, Kugellagerkäfige, Steuerwalzen, Propeller.

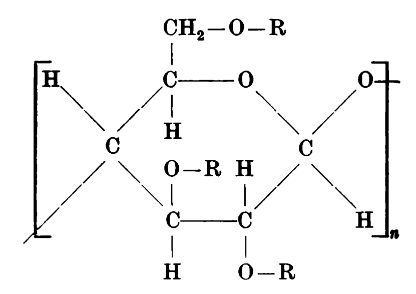
Fahrzeugbau: Türschloßteile, Lüfter, Gehäuse, Kraftstoffilter, Schalt- und Türgriffe, Schwimmer für Kraftstoffanzeiger und Vergaser, Pumpenventile.
Elektrotechnik: Elektrogerätegehäuse, Schalterteile, Klemmleisten, Nockenscheiben, Telefonteile.
Bauwesen: Armaturen, Ventilatoren, Fenster- und Türbeschläge, Handräder.

PUR, linear:

Antriebselemente, Lagerschalen, Stützringe, Rollen, Laufrollenbeschläge, Manschetten, Faltenbälge, Staubkappen, Ummantelungen, Beschichtungsmaterial.

3.2.5. Zelluloseester

Aufbau des Makromoleküls allgemein



Zelluloseazetat (CA): —R ist $-CO-CH_3$
Zellulosepropionat (CP): —R ist $-CO-CH_2-CH_3$
Zelluloseazetobutyrat (CAB): —R ist $-CO-CH_3$ und $-CO-CH_2-CH_2-CH_3$
Zellulosenitrat (CN): —R ist $-NO_2$

Herstellung

Die Zelluloseester[113][136][137][154] werden durch polymeranaloge Umsetzungsreaktionen aus natürlicher Zellulose (z. B. aus Holz oder Baumwolle) gewonnen; meist durch Veresterungen organischer Säuren und Anhydride (bei CA, CP, CAB) oder anorganischer Säuren (bei CN) mit den OH-Gruppen der Zellulose.
Die *Arbeitsstufen* sind:

- Trocknen und Vorquellen der Zellulose,
- Veresterung unter Einwirkung von Säure (Anhydrid) oder Säuregemischen und von Katalysatoren bei höheren Temperaturen in einem Kneter; evtl. Verseifen einer bestimmten Anzahl von Esterbindungen der Primärazetatmasse (z. B. Zellulose-$2^1/_2$-azetat),
- Fällung der sich in Lösung befindlichen Azetatmasse, Zentrifugieren, Trocknung,
- Aufarbeitung zur Formmasse oder zur Lösung (Folien- und Filmherstellung).

In CA-Formmassen 20 ··· 30% Weichmacher (z. B. Dibutylphthalat), bei CP 10 ··· 20% Weichmacher, bei CAB 3 ··· 18% Weichmacher und Füllstoff, CN-Massen enthalten als Weichmacher ≈ 20% Kampfer.

Eigenschaften

Zelluloseester sind thermoplastische Werkstoffe mit guten mechanischen Eigenschaften wie hoher Festigkeit, Dehnung und Oberflächenhärte (Erhöhung der Festigkeit durch Glasfaserzusatz). Wärmeformbeständigkeit gut, keine elektrostatische Aufladung. Dichte: $(1{,}18 \cdots 1{,}30) \cdot 10^3$ kg/m³. Bei CA große Formänderungen möglich durch Aufnahme von Feuchtigkeit und Abgabe von Weichmacher (Wasseraufnahme in 4 Tagen: bis 160 mg). CAB-Massen haben hohe Feuchtigkeits-, Wetter- und Tropenfestigkeit (Wasseraufnahme: 70 mg in 4 Tagen). Zelluloseester sind physiologisch indifferent, durch Weichmacherwanderung nur bedingt verwendbar bei Kontakt mit Lebensmitteln. Sie sind beständig gegen Mineralöle, Fette, Öle und Kraftstoffe (außer CN), bedingt beständig gegen schwache Säuren und unbeständig gegen Laugen, starke Säuren sowie Lösungsmittel (Alkohole, Ester, Äther, Ketone). Weichmacherfreie, trockene Zellulosenitrate haben Sprengstoffeigenschaften.

Verarbeitung (außer CN)

Spritzgießen, Extrudieren: Spritzgießtemperaturen: CA 170 ··· 210 °C, CP 180 ··· 220 °C; CAB 180 ··· 220 °C. Spritzdruck 100 ··· 150 MPa; Werkzeugtemperatur 40 ··· 70 °C, bei glasfaserverstärkten Massen bis 90 °C. Verarbeitungstemperaturen für Extrudieren 10 ··· 20 °C unter Spritzgießtemperaturen. Vor der Verarbeitung Trocknen der Massen bei 80 °C.
Tiefziehen: bei Temperaturen des Plattenmaterials zwischen 160 ··· 180 °C, vorher Trocknen erforderlich.
Kleben: mit Hilfe bestimmter Lösungsmittel, bei verschiedenen Werkstoffen mittels Zweikomponentenklebstoffe.
Wirbelsintern: mit Zelluloseesterpulver nach Erwärmen der zu beschichtenden Teile auf 300 ··· 400 °C.
Schweißen: ist nicht üblich, nach dem Wärmeimpuls- und Hochfrequenzverfahren aber möglich.

Verarbeitung von CN:

Lösungen in Alkohol oder Estern für Nitrolacke und Klebstoffe; aus Lösungen gegossen für Filmmaterial.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Gehäuse, Werkzeuggriffe, Rohrleitungen, Öl- und Wasserabscheider, Transportkästen.
Fahrzeugbau: Lenkradumkleidungen, Instrumentenbretter, Schaltknöpfe, Griffe, Rückleuchten, Beschläge.
Elektrotechnik: Mikrofongehäuse, Telefongehäuse, Tasten- und Bedienungsknöpfe, Kabelmuffen, Radiogehäuse, Skalen.
Bauwesen: Lichtkuppeln, Leuchtenabdeckungen, Türsprechanlagen, Fenster- und Türgriffe, Türschilder.
Sonstige Anwendung: Fassungen für Brillen und Lupen, Puppen, Spielzeugautos, Kämme, Bürsten, Zeichengeräte, Kugelschreiber, Füllhalter.

3.2.6. Polyfluorkarbone

Aufbau des Makromoleküls

Polytetrafluoräthylen (PTFE): $-[CF_2-CF_2]_n-$
Polychlortrifluoräthylen (PCTFE): $-[CF_2-CFCl]_n-$
Polytetrafluoräthylenperfluorpropylen (PFEP): $-[CF(CF_3)-CF_2-CF_2-CF_2]_n-$

Herstellung

Polytetrafluoräthylen[141]*:*

Nach Reinigung des Monomers kann die Polymerisation unter höheren Drücken und erhöhter Temperatur in Gegenwart von Wasser (zur Ableitung der Reaktionswärme) mit Luftsauerstoff im alkalischen Medium oder mit organischen Peroxiden (Dibernsteinsäureperoxid, Wasserstoffperoxid oder Peroxydisulfat) und mit Azodinitrilen durchgeführt werden. Arbeitsbedingungen bei Polymerisation in wäßriger Ammoniumperoxydisulfatlösung 80 °C Temperatur, Reaktionsdauer 1 h. Auch Emulsionspolymerisation ist möglich, Arbeitsbedingungen: Temperatur 40 ··· 80 °C, Druck 0,28 ··· 2,5 MPa, 0,5 ··· 3% perfluorierter Emulgator, 0,01 ··· 1% Peroxydisulfat.

Polychlortrifluoräthylen:

Die übliche Polymerisation ist die Suspensionspolymerisation. Nach Reinigung des Monomers wird bei möglichst niedrigen Temperaturen (5 °C) unter Anwendung von durch Schwermetalle aktivierten Redoxsystemen polymerisiert.
PFEP ist das Kopolymer aus Tetrafluoräthylen und Hexafluorpropylen; weitere Modifizierung der Eigenschaften durch Kopolymerisation mit Tetrafluoräthylen sowie Trifluorchloräthylen mit Äthylen. Teilweise wird dem PTFE, das nicht thermoplastisch formbar ist, Blei, Glasfaser, Graphit, Bronze oder Molybdänsulfit zugemischt. PCTFE und PFEP sind thermoplastisch und können bei der Mikrohomogenisierung konfektioniert werden.

Eigenschaften

Polyfluorkarbone sind teilkristalline halogenierte Polyolefine mit einer Dichte von $(2{,}0 \cdots 2{,}3) \cdot 10^3$ kg/m^3. Der kristalline Anteil beträgt bei PFEP bis zu 60%, bei PTFE noch darüber. Durch schnelles Abkühlen entsteht die amorphe Form (flexibel, durchsichtig), bei langsamem Abkühlen ist der kristalline Anteil



hoch; die Teile sind dann härter, weniger flexibel und transparent. Polyfluorkarbone haben einen Gebrauchstemperaturbereich von $-190 \cdots -250\,°C$ (Versprödung) bis zur Dauerwärmebeständigkeit von $+250\,°C$ bei PTFE, $+200\,°C$ bei PFEP und $+150\,°C$ bei PCTFE. Sie sind unbrennbar, UV- und feuchtigkeitsbeständig, witterungsbeständig und physiologisch indifferent. Infolge ihres paraffinen Charakters sind sie nicht benetzbar, die Reibungszahl ist sehr gering. Die elektrischen und dielektrischen Eigenschaften von PTFE und PFEP sind ausgezeichnet. Die chemische Beständigkeit ist sehr gut. PTFE und PFEP werden nur von geschmolzenen Alkalimetallen und Fluor angegriffen, PCTFE quillt auch in einigen Chlorkohlenwasserstoffen. Polyfluorkarbone sind beständig gegen Spannungsrißbildung.

Verarbeitung

PTFE:

Infolge seiner hohen Schmelzviskosität nicht durch Spritzgießen verarbeitbar. Man verarbeitet das Pulver nach folgenden Verfahren:

- *freies Sintern.* Herstellen von Formstücken aus Pulver durch Verpressen bei hohen Drücken bis 100 MPa und $20 \cdots 30\,°C$ Temperatur. Anschließend Sintern bei $370 \cdots 380\,°C$; Dichte $2{,}0 \cdot 10^3\ kg/m^3$,
- *Drucksintern.* Sintern mit Nachdruck. Das aus Pulver hergestellte Formstück wird unter Druck gesintert; Dichte: $2{,}2 \cdot 10^3\ kg/m^3$,
- *Strangpressen mit Sintern im Werkzeug.* Herstellung von Rohren, Schläuchen und Profilen.

Herstellen von Überzügen durch Aufbringen von Dispersionen und Sintern bei $\approx 400\,°C$.
Schweißen von PTFE bei $380 \cdots 390\,°C$ und $0{,}2 \cdots 0{,}3$ MPa Druck;
Kleben nach Oberflächenbehandlung mit Spezialklebstoffen.

PCTFE:

Spritzgießen und *Extrudieren* nach Vorwärmen des Materials auf 140 °C, Verarbeitungstemperatur: $250 \cdots 290\,°C$, Spritzdruck: $150 \cdots 200$ MPa, Werkzeugtemperatur $80 \cdots 130\,°C$.

PFEP:

Spritzgießen: Verarbeitungstemperatur: $330 \cdots 390\,°C$, Spritzdruck: 70 MPa, Werkzeugtemperatur: $200 \cdots 220\,°C$.
Extrudieren: Verarbeitungstemperatur zum Werkzeug von 260 °C auf 400 °C ansteigend; beim Hohlkörperblasen Werkzeugtemperatur: $150 \cdots 200\,°C$.
Mit PTFE- und PFEP-Pulver können durch Wirbelsintern Korrosionsschutzüberzüge hergestellt werden.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Dichtungen, Lager, Membranen, Faltenbälge, Ventile, Überzüge, Filter.
Fahrzeugbau: Lager, Gleitmaterial, Kraftstoff-, Getriebeöl- und Kompressorleitungen.
Elektrotechnik: Stecker, Sockel und Abstandhalter in der HF-Technik, Kondensatorfolie, Folie für Spulen und Kabel, Leiterplatten für gedruckte Schaltungen.
Bauwesen: Gleitmaterial in Brücken- und Rohrleitungen, Beschichtungen.

3.2.7. Polymethylmethakrylat (PMMA)[140]

Aufbau des Makromoleküls

$$\left[CH_2 - \underset{\underset{COO-CH_3}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}} \right]_n$$

Herstellung

Polymerisation des Methylmethakrylats meist radikalisch, aber auch ionische Polymerisation möglich. Je nach Verfahrensweise entstehen stereospezifische Modifikationen (ataktisch, isotaktisch). Technisch wichtig ist die Herstellung von Halbzeug (vorwiegend Platten) durch Polymerisation in Substanz (d. h. Polymerisation zwischen beweglichen Formwänden bei $20 \cdots 50\,°C$ und Polymerisationszeiten bis zu Wochen) und Formmassen durch Suspensionspolymerisation. Als Polymerisationsbeschleuniger dienen organische Peroxide. Kopolymere des Methylmethakrylats mit Akrylnitril, Butadien und Styrol sowie Pfropfpolymerisate mit Akrylaten haben insbesondere verbessertes Schlag- und Kerbschlagverhalten.

Eigenschaften

PMMA ist ein amorpher, glasklarer Thermoplast mit einer Dichte von $1{,}18 \cdot 10^3$ kg/m³. Durch hohe Lichtdurchlässigkeit (92%) und sehr gute Licht- und Witterungsbeständigkeit ist es ein optisch hochwertiger Werkstoff. Gute mechanische Eigenschaften (Festigkeit, Oberflächenhärte und Schlagbiegefestigkeit), physiologisch unbedenklich, geruchlos und geschmackfrei. PMMA ist beständig gegen wäßrige Säuren (Buttersäure nur 5%ig), Laugen, Salzlösungen und gegen Benzin, Mineralöl, Fette und Öle; unbeständig gegen starke Säuren, Ester, Ketone, Benzol sowie aromatische und halogenierte Kohlenwasserstoffe. PMMA ist brennbar (leicht entflammbar).

Verarbeitung

Spritzgießen, Extrudieren: Vor der Verarbeitung bei 70 ··· 100 °C trocknen. Beim Spritzgießen Verarbeitungstemperaturen von 150 ··· 250 °C, Druck: 70 ··· 180 MPa, Werkzeugtemperatur zwischen 40 und 90 °C — hohe Temperatur zur Verringerung der inneren Spannungen (bei optischen Erzeugnissen). Bei der Extrusion liegt die Massetemperatur etwas unterhalb der beim Spritzgießen.
Biegen, Tiefziehen: Im thermoelastischen Bereich bei etwa 130 ··· 170 °C umformen, langsam auf 50 ··· 60 °C abkühlen und entformen.
Schweißen: durch HF- und Heißluftschweißung, *Kleben* mit Polymerisationsklebstoffen, *spanende Bearbeitung* mit gut geschärften Werkzeugen.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Schutzscheiben, Rohre, Gehäuse, Skalen, optische Linsen, Modelle.
Fahrzeugbau: Fahrzeugverglasungen, Flugzeugkanzeln, Signalleuchten für Kraftfahrzeuge, Verkehrszeichen.
Bauwesen: Dachverglasungen, Balkonverkleidungen, Badewannen, Trennwände.
Sonstige Anwendung: Haushaltartikel, Schreib- und Zeichengeräte, Schmuck, Uhrgläser, medizinische Geräte, Werbeartikel.

3.2.8. Polykarbonat (PC)

Aufbau des Makromoleküls

$$\left[-O-C_6H_4-C(CH_3)_2-C_6H_4-O-CO- \right]_n$$

Herstellung

Polykarbonat ist ein linearer Polyester, der durch Polykondensation aus 4,4'-Dihydroxyphenyl-2,2-propan (Dian) und Kohlensäure entsteht.

Phosgenierungsverfahren (technisch). Grenzflächenpolykondensation zwischen Dian in Natronlauge (erste Phase) und chloriertem Kohlenwasserstoff, dem Phosgen (Cl_2CO) zugeführt wird (zweite Phase). Verwendung von Ammonium- oder Phosphoniumsalzen als Katalysatoren. Beim Phosgenierungsverfahren fällt das Polymer in Lösung an und wird durch Ausfällen und Zersprühtrocknen gewonnen. Je nach Anforderungen Zusatz von UV-Stabilisator, Farbstoffen oder 20 ··· 30% Glasfasern zum Polymerisat.

Umesterungsverfahren (geringere Polymerisationsgrade). Zusammenschmelzen von Dian und Diphenylkarbonat. Herstellen des Polymers in zwei Stufen bei 180 ··· 220 °C und 0,27 ··· 0,40 kPa, dann bei 300 °C $<$ 0,27 kPa.

Eigenschaften

PC ist ein transparenter, hartelastischer Thermoplast der Dichte $1{,}20 \cdot 10^3$ kg/m³ (mit 30% Glasfaser $1{,}42 \cdot 10^3$ kg/m³); auch bei tiefen Temperaturen (bei −100 °C) hohe Zähigkeit. Gebrauchstemperaturbereich −100 ··· +135 °C (145 °C für glasfasergefüllte Materialien). Bei Abrieb und dynamischer Beanspruchung nur bedingt geeignet. PC ist geruchlos, geschmackfrei und physiologisch unbedenklich. Seine Witterungs- und Alterungsbeständigkeit ist gut, die Wasseraufnahme sehr gering. PC ist schwer entflammbar und selbstverlöschend, beständig gegen Wasser, schwache Säuren, neutrale und saure Salzlösungen, Alkohole (nicht gegen Methylalkohol), Öle, Fette, Mineralöl, Benzin; unbeständig gegen Alkalilaugen, Ammoniakgas und dessen Lösungen sowie gegen technische Lösungsmittel.



Verarbeitung

Spritzgießen, Extrudieren: Vortrocknen und Vorwärmen bei 120 °C, Verarbeitungstemperaturen: 270 ··· 310 °C (glasfasergefülltes PC), Spritzdruck > 80 MPa (Schneckenplastizierung) und > 120 MPa (Kolbenplastizierung); Werkzeugtemperatur: 85 ··· 120 °C.
Lackieren und Bedrucken mit Spezialfarben; *Metallisieren* im Vakuum, *Verkleben* mit Lösungsmittel (Äthylenchlorid) oder Epoxidharz, *Verschweißen* durch HF-, Ultraschall- und Reibungsschweißen.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Gehäuseteile, Textilspulen, Ventile, Abdeckkappen, Filmspulen, Konstruktionselemente, Zahnräder.
Elektrotechnik: Spulenkörper, Stecker, Kontaktleisten, Gehäuse, Isolationsfolie, Relaissockel.
Bauwesen: Fensterrahmen, Wannen für Straßenleuchten.
Sonstige Anwendung: Füllhalterteile, Teile der Fotoindustrie.

3.2.9. Polypropylen (PP)

Aufbau des Makromoleküls

$$\left[CH_2 - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}} \right]_n$$

Herstellung

Polypropylen entsteht durch Polymerisation von Propylen unter Einwirkung metallorganischer Katalysatoren (NATTA-Katalysatoren). Diese Katalysatoren bewirken eine stereospezifische Polymerisation; es entstehen neben isotaktischem kristallisierendem PP geringe Anteile von ataktischem (ungeordnetem) PP (Schmelzpunkt 128 °C). Die technische PP-Herstellung wird kontinuierlich oder diskontinuierlich in einem Polymerisationsmedium (Kohlenwasserstoffe) bei Temperaturen zwischen 30 und 80 °C und Drücken von 0,2 ··· 0,6 MPa durchgeführt. Die Eigenschaften des Polymers werden durch den Katalysator, die Polymerisationsbedingungen (Druck und Temperatur) und die Monomerkonzentration beeinflußt. Nach der Polymerisation wird der Katalysator ausgewaschen und das Polymerisat abgetrennt (Filtrieren, Zentrifugieren). PP wird gegen thermischen Abbau (z. B. durch Amine und Phenolderivate) und gegen Abbau durch UV-Strahlung mit ≈ 2% Ruß stabilisiert.

Eigenschaften

Polypropylen ist einer der leichtesten Thermoplaste mit einer Dichte von $\approx 0{,}9 \cdot 10^3\ kg/m^3$. Es ist ein isotaktisches Polymer mit einem kristallinen Anteil bis 65%. Der Kristallitschmelzbereich liegt bei 170 °C, die Einfriertemperatur beträgt −10 °C (Versprödung), Dauergebrauchstemperatur 80 ··· 100 °C (sterilisierbar). PP hat eine hohe Oberflächenhärte (kratzfest) und keine Neigung zur Spannungsrißbildung. Nachteilig ist seine hohe Oxydationsempfindlichkeit; bei höherer Temperatur erfolgt Autoxydation. Höhere Schlagzähigkeitswerte erhält man durch Kopolymerisation mit Äthylen. Erhöhung der Steifigkeit durch Verstärkungsmaterialien (Asbestfasern, Glasfasern). Polypropylen ist beständig gegen schwache und starke Säuren und Laugen, Salzlösungen, Alkohol, Öle, Fette, unbeständig gegen oxydativen Einfluß, bedingt beständig gegen einige Lösungsmittel (Äther und Halogenkohlenwasserstoffe). PP ist brennbar.

Verarbeitung

Spritzgießen (wichtigstes Verarbeitungsverfahren für PP): Verarbeitungstemperaturen 170 ··· 300 °C, Spritzdruck 80 ··· 150 MPa, Werkzeugtemperatur 30 ··· 60 (80) °C, Verarbeitungsschwindung 1,2 ··· 3,5%, Nachschwindung ≈ 0,3%, Spritzgießen von treibmittelhaltigem PP und Sandwichspritzgießen möglich. Durch dünne Verbindungskanäle entstehen Filmscharniere.
Zum *Extrusionsblasen, Folienblasen* (Verarbeitungstemperatur 200 ··· 300 °C) und *Pressen* werden hochviskose PP-Sorten (mit hohem Polymerisationsgrad), für Flachfolie und Beschichtungen niedrigviskose verwendet.
Tiefziehen: im thermoelastischen Bereich bei 160 ··· 175 °C.
Schweißen: mit Heizelementen bei 200 ··· 230 °C und 0,1 ··· 0,2 MPa Anpreßdruck, möglichst unter Schutzgas.
Kleben und *Bedrucken:* nach Vorbehandlung (Beflammen, elektrische Aktivierung). PP kann metallisiert werden.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Rohre, Ventile, Armaturen, Ventilatoren, Filterpressenplatten, Behälter.
Fahrzeugbau: Lüfterflügel, Heizkanäle in Kraftfahrzeugen, Schutzkappen, Entfrosterdüsen.
Elektrotechnik: Drahtummantelungen, Spulenkörper, Stecker.
Bauwesen: Abzugsschächte, Teile für sanitäre Einrichtungen, Bewässerungsleitungen.
Sonstige Anwendung: Verpackungsfolien, Haushaltgeräte, Koffer, Kleinverpackungen mit Filmscharnieren.

3.2.10. Polyoxymethylen (Polyazetal) (POM)

Aufbau des Makromoleküls

$\{CH_2-O\}_n$

Herstellung

POM ist ein Linearpolymer, das durch Polymerisation von Formaldehyd oder von Trioxan (des zyklischen Trimers des Formaldehyds) gewonnen wird.

Formaldehyd-Polymerisation

Ionische Polymerisation (kationisch, anionisch) als Lösungs- oder Suspensionspolymerisation; Substanzpolymerisation wegen zu hoher Polymerisationswärme nicht geeignet.
Technische Polymerisation des reinen Monomers in einem inerten Suspensionsmittel bei Raumtemperatur oder bis 60 °C unter Mitwirkung von Initiatoren. Als Suspensionsmittel werden z. B. Propan, Pentan, Heptan, Zyklohexan und chlorierte Kohlenwasserstoffe, als Initiatoren Amine, Phosphine oder Phosphonium-Salze verwendet. Regelung des Polymerisationsgrads durch Regler, z. B. Wasser, Methanol oder Ameisensäure.

Trioxan-Polymerisation

Kationische Homopolymerisation des Trioxans mit Initiatoren wie BF_3, $FeCl_3$, $SnCl_4$. Neben der Homopolymerisation auch Kopolymerisation des Trioxans mit Monomeren wie Äthylenoxid und zyklischem Äther.
Durch den Einbau von Komonomeren oder durch Veresterung und Verätherung der Endgruppen höhere thermische Stabilität der Polyazetale (Ausbildung von Stoppstellen bei Depolymerisation).

Eigenschaften

POM hat je nach Verarbeitungsbedingungen einen Kristallinitätsgrad von 70 ··· 85% bei einer Dichte von $1{,}42 \cdot 10^3$ kg/m^3; Einfriertemperatur bei −60 °C. Die Dauergebrauchstemperatur liegt bei 90 ··· 110 °C, unter Einwirkung von Wasser niedriger. POM hat eine hohe Festigkeit (Verstärkung mit 30% Glasfasern ist möglich), eine hohe Oberflächenhärte und kann dynamisch hoch beansprucht werden — deshalb Konstruktionswerkstoff. Die Reibungszahlen sind sehr gering (0,05 ··· 0,3), sehr gute Verschleißfestigkeit. POM-Homopolymerisate sind beständig gegen Lösungsmittel, Kraftstoffe, Wasser, Öle und Fette, unbeständig gegen Säuren und oxydierende Medien. Die Kopolymerisate sind auch alkalien- und hydrolysebeständig. POM wird durch UV-Strahlung geschädigt, zeigt aber keine Spannungsrißkorrosion, es ist brennbar und physiologisch indifferent. Die elektrischen Eigenschaften sind gut.

Verarbeitung

Spritzgießen (niedrigviskoses POM), *Extrudieren, Blasformen* (hochviskoses POM): Massetemperatur 180 ··· 230 °C; Spritzdruck 80 ··· 170 MPa; Werkzeugtemperatur 60 ··· 120 °C; oberhalb 220 °C Zersetzung (zu Formaldehyd);
Umformen im Kristallitschmelzbereich; *Verbinden* durch Ultraschall und Reibungsschweißen sowie *Kleben* nach Vorbehandlung (Säurebeizen), Oberflächenaktivierung auch bei *Lackieren* und *Bedrucken* erforderlich, *Galvanisieren* und *Vakuummetallisieren* möglich.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Zahnräder, Gleitlager, Sprüh- und Spritzpistolen, Pumpen für Schmutzwasser, Laugen und Heizöl, Textilspulen.
Fahrzeugbau: Abdeckungen, Fensterkurbeln, Bedienungszubehör, Lüfterräder, Lager, Zahnräder.
Elektrotechnik: Telefon-, Radio- und Fernsehgeräteteile, Spulenkörper, Relais- und Steckerteile.
Bauwesen: Rohre, Rohrverschraubungen, Hähne, Ventile, Schloßteile, Scharniere, Türgriffe, Jalousieteile.
Sonstige Anwendung: Teile für Haushaltgeräte, optische und fototechnische Geräte, Schreib- und Rechenmaschinenteile, Hohlkörper, Aerosolflaschen.

3.2.11. Weitere Thermoplaste

3.2.11.1. Polyisobutylen (PIB)

Herstellung

Kationische Polymerisation des Isobutylens mit BF_3 in Lösungsmittel (Äthylen) bei $\approx -100\,°C$. Regelung der relativen Molekülmasse durch Zusatz von n-Buten oder Diisobuten — je nach Polymerisationsgrad entstehen Öle, plastische Massen oder gummiartige Stoffe, die meist mit Ruß, Graphit, Talkum oder PE gefüllt werden. Bei Kopolymerisation mit Isopren entsteht Butylkautschuk.

Eigenschaften

Dichte 0,92 g/cm³ (ungefüllt), geringe Festigkeit von 1,5 ··· 5 MPa, hohe Dehnungen — je nach Einstellung bis zu 1000%; gute elektrische Eigenschaften (Isolierfolie). Beständig gegen Säuren, Laugen und Salze; unbeständig gegen Chlor und Brom; löslich bzw. Quellung in aromatischen, aliphatischen und Chlorkohlenwasserstoffen, Äther, Ölen und Fetten; unlöslich in Alkoholen, Estern und Ketonen.

Verarbeitung

Thermoplastische Verarbeitung (Extrudieren, Spritzgießen, Pressen, Walzen) bei 150···200 °C, Kleben — mit lösungsmittelhaltigen Klebstoffen kalt, mit Bitumenmischungen heiß.

Anwendung

Dichtungsmassen, Dachbahnen, Folien für Bautenschutz und Behälterauskleidungen, Kabelisolierung.

3.2.11.2. Polybuten-1 (Poly-α-buten) (PB)

Herstellung

Polymerisation mit Ziegler-Natta-Katalysatoren zu stereospezifischen (isotaktischen) Polymerisaten mit sehr hohem Polymerisationsgrad.

Eigenschaften

Teilkristallines Material — Dichte je nach Modifikation 0,89 g/cm³ bzw. 0,915 g/cm³, mechanische Werte etwa wie PE (mittlere Dichte), hohe Schlag- und Kerbschlagzähigkeit, gute elektrische Eigenschaften, hohe Spannungsrißbeständigkeit, brennbar.
Beständig gegen Säuren, Laugen, Öle, Fette, aliphatische Kohlenwasserstoffe, Alkohole, Ketone; nicht beständig gegen oxydierende Säuren, Aromaten und Chlorkohlenwasserstoffe.

Verarbeitung

Extrudieren: Massetemperatur 190 ··· 290 °C;
Spritzgießen: Massetemperatur 240 ··· 280 °C; Werkzeugtemperatur 40 ··· 80 °C, Schwindung 1,5 ··· 3%;
Pressen: Massetemperatur 250 °C;
gut schweißbar, klebbar

Anwendung

Behälter, Auskleidungen, Fittings, Warmwasserleitungen, Hochspannungsisolierungen.

3.2.11.3. Polymethylpenten (PMP)

Herstellung

Durch Polymerisation des 4-Methylpenten-1 mit Hilfe von Ziegler-Natta-Katalysatoren in Heptan entsteht das kristalline (Kristallinitätsgrad ≈ 65%) Polymethylpenten.

Eigenschaften

Sehr niedrige Dichte von 0,83 g/cm³, glasklares Material, trotz Kristallinität hohe Lichtdurchlässigkeit, gute mechanische Eigenschaften — Streckspannung ≈ 30 Pa, gute Wärmestandfestigkeit, sehr gute elektrische Eigenschaften. Beständig gegen Säuren, Laugen, Öle, Fette, Alkohol und kochendes Wasser; nicht beständig gegen oxydierende Säuren, aromatische und chlorierte Kohlenwasserstoffe und Ketone; spannungsrißanfällig; brennbar.

Verarbeitung

Spritzgießen: Massetemperatur 260 ··· 320 °C, Werkzeugtemperatur 60 ··· 70 °C, Schrumpfung 1,5 ··· 3%;
Extrudieren: schwierig, enger Schmelzbereich;

Blasformen: Massetemperatur 275 ··· 290 °C;
Umformen möglich; schweißbar; bedingt klebbar.

Anwendung

Laborgeräte (Pipetten), medizinische Geräte (sterilisierbar), Gehäuse, Lampenabdeckungen, Folien für aufzuwärmende Fertiggerichte, Geschirr.

3.2.11.4. Polyvinylkarbazol (PCV)

Herstellung

N-Vinylkarbazol wird in Suspension mit Hilfe von radikalbildenden Katalysatoren (Perverbindungen) polymerisiert; auch Emulsionspolymerisation und Polymerisation in Substanz.

Eigenschaften

Dichte 1,19 g/cm³; transparentes Material mit hohem optischem Brechungsvermögen, gute mechanische Eigenschaften — Biegefestigkeit 20 ··· 30 Pa, Kugeldruckhärte 200 Pa, gute dielektrische Werte, hohe Spannungsrißbeständigkeit, witterungsbeständig, selbstverlöschend; beständig gegen Säuren, Laugen, polare Lösungsmittel, aliphatische Kohlenwasserstoffe; löslich in aromatischen und chlorierten Kohlenwasserstoffen; Ketone, Kraftstoffe quellen.

Verarbeitung

Spritzgießen: Massetemperatur 250 ··· 350 °C, hohe Werkzeugtemperaturen;
Extrudieren: Massetemperatur 300 °C;
Pressen: Sintern bei 190 °C;
spanend bearbeitbar.

Anwendung

Elektrische Isolierteile mit hoher thermischer Beanspruchung (HF-, Rundfunk- und Fernsehtechnik); Plattenmaterial für Xerografie (sensibilisiertes Material).

3.2.11.5. Polyvinylazetat (PVAC), Polyvinylalkohol (PVAL), Polyvinylazetale (PVF), (PVB)

Herstellung

Polyvinylazetat wird durch Emulsions-, Suspensions-, Lösungs- oder Massepolymerisation des Vinylazetats gewonnen (radikalische Polymerisation).
Polyvinylalkohol wird durch Hydrolyse von Polyvinylazetat mit Methanol oder Butanol erzeugt — teil- und vollverseifte Produkte.
Polyvinylazetale entstehen durch Umsetzung von Polyvinylalkohol mit Aldehyden — vorwiegend mit Formaldehyd (PVF) oder mit Butyraldehyd (PVB).

Eigenschaften

PVAC: Dichte 1,17 g/cm³, glasklare Harze — gute Binde- und Klebemittel; löslich in Chlorkohlenwasserstoffen, Alkoholen, Estern, Ketonen; nicht löslich in aliphatischen Kohlenwasserstoffen, in wasserfreien Alkoholen, Ölen, Fetten (für lichtechte, benzin-, öl- und wasserfeste Filme).
PVAL: Dichte 1,21 ··· 1,32 g/cm³, in Wasser gut löslich, in organischen Lösungsmitteln unlöslich; PVAL mit Weichmachern zu lederartigen Produkten.
Azetale: Dichte PVF 1,2 ··· 1,4 g/cm³, PVB 1,1 ··· 1,2 g/cm³; feste, schwach gelbe Harze; löslich in polaren, unlöslich in unpolaren Kohlenwasserstoffen; unbeständig gegen Säuren und Laugen.

Verarbeitung:

PVAC: wird nicht als Formmasse verarbeitet.
PVAL: durch Verspinnen, Tempern und Vernetzen werden Fasern hergestellt (Japan); Folienherstellung.
Polyvinylazetale: thermoplastisch verarbeitbar.

Anwendung

PVAC: Anstrichmittel, Schmelzklebstoffe, Kitte, Spachtelmassen, Appreturmittel.
PVAL: Dichtungen, Fasern, kraftstoffeste Schläuche, Trennfolien für Polyesterverarbeitung, wasserlösliche Verpackungsfolien.
PVB: Lacke, Klebstoffe, Zwischenschicht für Verbund- und Sicherheitsglas, Dichtungen, Schläuche (öl- und benzinfest).
PVF: kraftstoffbeständige Lacke, Zusatz für Phenolharzklebstoffe.



3.2.11.6. Polyvinylfluorid (PVF), Polyvinylidenfluorid (PVDF, PVF_2)

Herstellung

PVF: Polymerisation in wäßriger Phase mit organischen Peroxiden oder Azoverbindungen — Polymerisationstemperaturen 50 ··· 150 °C, Druck bis 50 MPa.

PVDF: Hochmolekulares Homopolymerisat, das durch radikalische Polymerisation mittels Peroxiden, Persulfaten, Azoverbindungen oder energiereicher Strahlung hergestellt wird.

Eigenschaften

allgemein: teilkristalline Polymere, sehr hohe Beständigkeit (Säuren, Laugen, Lösungsmittel); ausgezeichnete Isoliereigenschaften, gute dielektrische Werte, physiologisch indifferent, geringe Reibungskoeffizienten.

PVF: Dichte 1,38 ··· 1,57 g/cm³, glasklare Folien — chemikalien-, licht-, witterungs- und hydrolysebeständig; Festigkeit 50 ··· 150 MPa, Dehnung 100 ··· 200%; langsam brennend, Dauergebrauchstemperatur —70 ··· +100 °C.

PVDF: Dichte 1,76 ··· 1,77 g/cm³; zur thermoplastischen Verarbeitung geeignet; hohe Festigkeit und Zähigkeit; unbrennbar, Dauergebrauchstemperatur —60 ··· +150 °C.

Verarbeitung

PVF: Gießfolienherstellung

PVDF: Spritzgießen — Massetemperatur 250 ··· 290 °C; Werkzeugtemperatur 90 ··· 100 °C, 3 ··· 6% Schwindung, Extrudieren — Massetemperatur 220 ··· 270 °C.

Anwendung

PVF: Folien, Beschichtungen, Auskleidungen, Verpackungen, Rohrisolierungen.

PVDF: Dichtungen, Membranen, halogenbeständige Rohre (warmform- und schweißbar), Einbrennlackierungen, Rohr- und Behälterauskleidungen, Verpackungsfolien.

3.2.11.7. Polyäthylenterephthalat (PETP), Polybutylenterephthalat (PBTP, PTMT)

Herstellung

PETP: Kondensationsprodukt aus Terephthalsäure und Äthylenglykol — bei direkter Veresterung ist sehr reine Therephthalsäure erforderlich. Technisch auch durch Umesterung des Dimethylesters der Terephthalsäure mit Glykol.

PBTP: Kondensationsprodukt aus Terephthalsäure und Butylenglykol.

Eigenschaften

PETP: Dichte 1,33 ··· 1,38 g/cm³, teilkristallines Produkt — amorphe Produkte durch Komonomere, hochmolekulares PETP für Fasern und Folien, niedermolekulares als Spritzgießmasse. Hohe Kurz- und Langzeitfestigkeit — Zugfestigkeit 50 ··· 80 MPa, durch 20 ··· 30% Glasfaserzusatz Festigkeitssteigerung auf ≈ 3fachen Wert. Gutes Gleit- und Verschleißverhalten, hohe Steifigkeit und Härte, gute elektrische Eigenschaften (Widerstand, Durchschlagfestigkeit).
Beständig gegen schwache Säuren und Laugen, aliphatische und aromatische Kohlenwasserstoffe, Öle, Fette, Tetrachlorkohlenstoff; unbeständig gegen starke Säuren und Laugen, heißes Wasser (Hydrolyse). Verbesserung der Witterungsbeständigkeit durch Rußzusatz; PETP ist brennbar. Dauergebrauchstemperatur 100 °C (kurzzeitig 180 ··· 220 °C).

PBTP: Dichte 1,31 g/cm³, teilkristalliner Thermoplast, hohe Festigkeit und Steifheit, gutes Gleit- und Verschleißverhalten, hohe Härte und Zähigkeit, gute elektrische Eigenschaften (Durchschlagfestigkeit, Kriechstromfestigkeit).
Beständig gegen schwache Säuren, wäßrige Salzlösungen, organische Lösungsmittel, Öle, Fette, gegen Wasser bis 60 °C, unbeständig gegen starke Säuren, Laugen, Azeton, Phenol. PBTP hat hohe Wärmeformbeständigkeit, brennbar.

Verarbeitung

PETP: Vortrocknen: Spritzgießen — Massetemperatur 260 ··· 290 °C, Werkzeugtemperatur 125 ··· 150 °C, je nach Kristallinität 0,2 ··· 2% Schwindung; Extrudieren — Massetemperatur 260 ··· 280 °C; Schmelzspinnen zu Fasern.

PBTP: Spritzgießen — Massetemperatur 230 ··· 270 °C, Werkzeugtemperatur 60 °C (110 °C); 0,5 ··· 2% Schwindung; Extrudieren — Massetemperatur 250 ··· 280 °C.
PETP und PBTP sind schweißbar, klebbar und spanend zu bearbeiten.

Anwendung

PETP: Lager, Führungselemente, Zahnräder, Schaltgehäuse, Kupplungen, Fasern, aromadichte Folien, Elektrofolien, Magnetbänder.

PBTP: Lager, Zahnräder, Kurvenscheiben, Gehäuse, Laufrollen, Spulenkörper, Verteiler.

3.2.11.8. Polyphenylenoxid (PPO), Polysulfon

Herstellung

PPO (2,6-dimethyl-1,4-phenylenäther): Oxidative Kopplung („Polyoxydation") von 2,6-disubstituierten Phenolen (Substituenten z. B. Methyl, Äthyl oder Chlor) im Beisein von Katalysatoren. PPO, mit PS oder SAN modifiziert, ergibt gut verarbeitbare Polymere mit höherer Oxydationsbeständigkeit als PPO.

Polysulfon: Lineares Polymer, das in einer Mehrstufenreaktion aus Bisphenol A und 4,4'-Dichlordiphenylsulfon kondensiert wird.

Eigenschaften

PPO: Dichte 1,06 g/cm³, Konstruktionswerkstoff — Festigkeit 60 MPa (glasfaserverstärkt 120 MPa), hohe Steifheit, hoher Abriebwiderstand und Kratzfestigkeit, keine Kriechneigung, geringe Wasseraufnahme und hohe Hydrolysebeständigkeit, flammwidrig. Beständig gegen kochendes Wasser, verdünnte Säuren, Laugen, Fette, Öle, Alkohol; unbeständig gegen konzentrierte Säure, chlorierte Kohlenwasserstoffe und Aromaten. Anwendungstemperaturen 80 °C (100 °C), kurzzeitig 150 °C (200 °C).

Polysulfon: Dichte 1,24 g/cm³ hohe Festigkeit und Steifheit (Zugfestigkeit 70 MPa) — auch bei hohen Temperaturen (besser als PPO), hohe Witterungsbeständigkeit, schwer entflammbar und selbst-

Tabelle 49. Mechanische, thermische und elektrische Eigenschaften von Duromeren (Duroplasten)

Eigenschaft			Duromer (Duroplast)/Formmassetyp				
			Phenoplast-Formmasse				
			11	31	51	71	74
Mechanische	Rohdichte	in g/cm³	1,75 ··· 1,85	1,4 ··· 1,6	1,3 ··· 1,5	1,3 ··· 1,5	1,3 ··· 1,5
	Biegefestigkeit	in MPa	50 ··· 80	70 ··· 80	65 ··· 80	65 ··· 85	60 ··· 100
	Zugfestigkeit	in MPa	31 ··· 35	20 ··· 70	30 ··· 40	20 ··· 40	20 ··· 35
	Elastizitätsmodul	in GPa	8 ··· 11	4,5 ··· 7,0	6 ··· 9	6 ··· 9	6 ··· 13
	Schlagbiegefestigkeit	in kJ/m²	3,5 ··· 4,7	4,0 ··· 5,5	5,0 ··· 6,0	6,5 ··· 18,0	7 ··· 16
	Kerbschlagbiegefestigkeit	in kJ/m²	1,0 ··· 2,3	1,2 ··· 2,1	4,0 ··· 5,5	7,0 ··· 18,0	12 ··· 16
	Druckfestigkeit	in MPa	142 ··· 184	130 ··· 170	150 ··· 190	150 ··· 220	
	Kugeldruckhärte	in MPa	250 ··· 300	250 ··· 320			
Thermische	Formbeständigkeit nach MARTENS	in °C	150 ··· 172	125 ··· 130	150 ··· 170	130 ··· 170	125 ··· 170
	lin. Wärmeausdehnungskoeffizient	in 10^{-6} K^{-1}	3 ··· 25	(30 ··· 50)	(15 ··· 30)	15 ··· 35	10 ··· 30
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,35	(0,29 ··· 0,35)	(0,25 ··· 0,37)	0,31 ··· 0,38	0,31 ··· 0,38
	spez. Wärmekapazität	in kJ/(kg · K)					
	Glutbeständigkeit	IR-Wert	3,1 ··· 4,0	2,1 ··· 4,0	2,4 ··· 3,0	2,0 ··· 2,8	
Elektrische	spez. Volumenwiderstand	in Ω · cm	$10^{11} \cdots 10^{12}$		$10^{10} \cdots 10^{12}$	$10^{10} \cdots 10^{12}$	
	Durchschlagfestigkeit	in kV/mm	16 ··· 19	7 ··· 11	10 ··· 15	6 ··· 12	5 ··· 11
	rel. Dielektrizitätskonstante bei 1 kHz		16 ··· 19		5 ··· 7	3,5 ··· 6,5	5 ··· 10
	dielektrischer Verlustfaktor bei 1 kHz		0,04 ··· 0,1		$\leqq$ 0,1	$\leqq$ 0,1	0,02 ··· 0,3
	Kriechstromfestigkeit	Stufe	B 140	B 100			



verlöschend. Beständig gegen Säuren, Laugen, Salzlösungen, Fette, Öle, Alkohol; nicht beständig gegen chlorierte Kohlenwasserstoffe, Aromaten, heißes Wasser; spannungsrißanfällig in bestimmten Lösungsmitteln (z. B. Azeton), Anwendungstemperaturbereich von $-70 \cdots +150$ (170) °C, kurzzeitig 200 °C.

Verarbeitung

PPO: Spritzgießen, Blasformen — Massetemperatur 270 ··· 300 °C, Werkzeugtemperatur 90 ··· 100 °C; 0,5 ··· 0,7% Schwindung. Extrudieren — Massetemperatur 260 ··· 280 °C.

Polysulfon: Vor der Verarbeitung trocknen, Spritzgießen — Massetemperatur 330 ··· 400 °C, Werkzeugtemperatur 100 ··· 150 °C, Schwindung 0,7%; Extrudieren — Massetemperatur bei Blasfolienherstellung 410 °C — Massetemperatur beim Blasformen 300 °C, Umformen bei 200 ··· 220 °C.

PPO und Polysulfon sind schweißbar, klebbar und spanend zu bearbeiten.

Anwendung

PPO: Haushaltgeräteteile, Schaltkästen, Relaisgehäuse, medizinische Instrumente (sterilisierbar), Elektronikzubehör, elektrische Isolierfolien.

Polysulfon: Kontaktträger, Sockel, Material für gedruckte Schaltungen; mechanisch und thermisch hoch beanspruchte Teile, z. B. im Flugzeugbau und in der Feinwerktechnik.

3.3. Duromere (Duroplaste)

Die wichtigsten Kennwerte von Duromeren sind in Tabelle 49 zusammengefaßt. Handelsnamen enthält Tabelle 50, Anwendungstemperaturen Tabelle 51.

Aminoplast-Formmasse					
131	140	150	153	156	180
15	1,4 ··· 1,6	1,4 ··· 1,5	1,4 ··· 2,6	1,7 ··· 1,9	1,5
80	50 ··· 100	60 ··· 100	60 ··· 110	50 ··· 80	80
30	25 ··· 60	30 ··· 60	40 ··· 70	15 ··· 30	30
6 ··· 11	4 ··· 9	4 ··· 8	6 ··· 11	6 ··· 12	7 ··· 10
6,5	5,5 ··· 10	6,0 ··· 10,0	6,0 ··· 9,0	5,0 ··· 7,5	6
1,5	1,2 ··· 2,5	1,5 ··· 2,4	3,5 ··· 5,0	2,0 ··· 6,5	1,5
200	180 ··· 260	200 ··· 280	230 ··· 330	100 ··· 180	200
260 ··· 350	170 ··· 240	180 ··· 240	170 ··· 290	180 ··· 260	230 ··· 290
100	100 ··· 140	110 ··· 130	125 ··· 170	120 ··· 160	120
40 ··· 60	30 ··· 50	30 ··· 45	15 ··· 30	10 ··· 25	15 ··· 50
0,4	(0,35 ··· 0,37)				0,4
1,3					1,2
	2,5 ··· 4,0	3,0 ··· 4,0	2,5 ··· 3,5	3,0 ··· 4,5	
10^{11}	$10^{11} \cdots 10^{13}$	$10^{11} \cdots 10^{14}$	$10^{11} \cdots 10^{13}$	$10^{11} \cdots 10^{13}$	10^{9}
8 ··· 15	10 ··· 20	15 ··· 20	10 ··· 20	10 ··· 20	5 ··· 20
6 ··· 9	4,0 ··· 8,0	5,0 ··· 7,0	5,0 ··· 7,5	5,5 ··· 9,0	5 ··· 15
0,3	0,02 ··· 0,2	0,03 ··· 0,2	0,02 ··· 0,2	0,02 ··· 0,2	0,3
B 600	> B 600	> B 600	> B 600	> B 600	

Tabelle 49 (Fortsetzung)

	Eigenschaft		Ungesättigtes Polyesterharz					
			UP-Gießharz ohne Füllstoff	UP-Laminat, 70% Glasseide	220	291	801	830
Mechanische	Rohdichte	in g/cm³	1,15…1,3	1,9	1,7…2,0	1,7…2,0	1,8…2,0	1,8
	Biegefestigkeit	in MPa	65…140		65…110	140…190	60	120
	Zugfestigkeit	in MPa	50…85	400…600	(20…40)	20…40	25	40
	Elastizitätsmodul	in GPa		40…50	6…9	7…10	12…15	9
	Schlagbiegefestigkeit	in kJ/m²	5…15	150	12,0…21,0	60…85	22	50
	Kerbschlagbiegefestigkeit	in kJ/m²		20…60	14,0…23,0	45…80	22	40
	Druckfestigkeit	in MPa	110…140	bis 5000	110…170	110…150	120	150
	Kugeldruckhärte	in MPa		200			160…240	160
Thermische	Formbeständigkeit nach MARTENS	in °C	60…110	150	(125…140)		125	≧ 200
	lin. Wärmeausdehnungskoeffizient	in 10^{-6} K^{-1}	80…150	10	(20…30)		10…40	10…40
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,16…0,19	0,43	(0,58…0,64)		0,4	0,5
	spez. Wärmekapazität	in kJ/(kg · K)					0,9	0,9
	Glutbeständigkeit	IR-Wert			1,2…2,2	1,2…2,0		
Elektrische	spez. Volumenwiderstand	in Ω · cm	10^{15}…10^{16}	10^{16}	10^{11}…10^{14}	10^{11}…10^{14}	10^{12}	10^{14}
	Durchschlagfestigkeit	in kV/mm	30…40	30…40			13…15	13…15
	rel. Dielektrizitätskonstante bei 1 kHz			4,6			4…6	4…6
	dielektrischer Verlustfaktor bei 1 kHz			0,04	≦ 0,02	≧ 0,02	0,01	0,05
	Kriechstromfestigkeit	Stufe			≧ B 600	≧ B 500	> B 600	> B 600

Tabelle 50. Kurzzeichen und Handelsnamen von Duromeren (Duroplasten)

Duromer	Kurzzeichen	Handelsnamen
Phenol-Formaldehyd-Harze (Phenoplaste)	PF	Preßmasse, Plastadur-Preßmasse, Laccain (DDR); Bakelite, Alnovol (BRD); Novolak (international); Crayvallac (Großbritannien); *Gießharz:* Plastasol (DDR), *Schaumstoff:* Plastopor (DDR)
Aminoharze (Aminoplaste)	UF MF, DD	Meladur (DDR); Albamit, Bakelite, Resopal, Ultrapas (BRD); Cibanoid (Schweiz); Skanopal (Schweden); Plaskon (USA)
Ungesättigte Polyesterharze	UP	Polyester Schkopau, Plastadur (DDR); Apolit, Leguval, Vestopal (BRD); Lamellon (Niederlande); Viapal (Österreich)
Epoxidharze	EP	Epilox, Epasol (DDR); ES (UdSSR); Epidian (Polen); Lekutherm, Epoxin (BRD); Araldit (Schweiz); Epikote (Großbritannien); Epon (USA)
Silikonharze	Si	Aspasil, Glasil, Novomikaflex (DDR); Baysilon (BRD); GE-Silicones (USA)
Polydiallylphthalat-Formmasse	—	Bakelite, Supraplast (BRD); Neonit (Schweiz)
Polyimide	—	Torlon, Pyralin (USA); Kinel, Kerimid (Frankreich)

Epoxidharz				Silikonharz-Formmasse mit Glasfaser	Polydiallyl-phthalat-Formmasse mit Glasfaser	Polyimid mit Glasfaser 23% Harz (Kerimid 601)
EP-Gießharz ohne Füllstoff	EP-Gießharz mit Quarzmehl	370	870			
1,15 ··· 1,3	1,7 ··· 1,8	1,9 ··· 2,0	1,8 ··· 1,9	1,8 ··· 1,9	1,51 ··· 1,78	1,95
100 ··· 140		50 ··· 100	50	70 ··· 100	80 ··· 170	550
65 ··· 80	70 ··· 85		25	28 ··· 46	40 ··· 75	350
	12 ··· 14	5 ··· 10	12 ··· 15	7 ··· 18	10 ··· 15	
15 ··· 25	6 ··· 7	5 ··· 10	8			
		1,5 ··· 3,0	1,5			
90 ··· 120	200 ··· 220		120 ··· 200	70 ··· 100	175 ··· 245	350
	150 ··· 230		150			
60 ··· 125	115	100 ··· 130	120			
60 ··· 100	30 ··· 35	22 ··· 35	25 ··· 35	20 ··· 50	10 ··· 35	
0,12 ··· 0,23	0,30 ··· 0,33	0,29	0,6	0,3 ··· 0,4	0,2 ··· 0,6	
				0,8 ··· 0,9		
$10^{15} \cdots 10^{17}$	10^{16}		10^{14}	10^{14}	$10^{13} \cdots 10^{16}$	$6 \cdot 10^{14}$
35 ··· 45	25	13 ··· 20	24			
	4	4 ··· 7	5	3,2 ··· 4,5	4,1 ··· 4,5	6,6
	1,2 ··· 1,6	0,01 ··· 0,03	0,1	0,0035 ··· 0,02	0,004 ··· 0,009	0,014

Tabelle 51. Anwendungstemperaturen von Duromeren (Duroplasten)

Formstoff	Anwendungstemperatur in °C		
	maximal ohne Belastung		minimal
	ständig	kurzzeitig	
Phenol-Formaldehyd-Harz			
– anorgan. Füllstoff	130 ··· 150	160 ··· 180	
– Füllstoff Holzmehl	110	140	
– Füllstoff organische Fasern, Schnitzel und Bahnen	110 ··· 120	140 ··· 160	
Harnstoff-Formaldehyd-Harz (organ. Füllstoff)	70	100	
Melamin-Formaldehyd-Harz			
– anorgan. Füllstoff	100 ··· 120	140 ··· 170	
– organ. Füllstoff	80	120	
Ungesättigtes Polyesterharz			
UP-Formstoffe	150	200	
UP-Laminate	120 (mit Belastung)		−40
Epoxidharz-Formstoffe	130	180	
Silikonharze	180	250	−50
Polydiallylphthalat-Formmasse	150 (180)	190 (250)	−50
Polyimide	260	400	−200

3.3.1. Phenol-Formaldehyd-Harze (Phenoplaste) (PF)

Aufbau des Makromoleküls

$$\left[-C_6H_2(OH)(CH_2-O-CH_2^{\,m})-CH_2-O-CH_2- \right]_n \quad \text{Resol-Harz}$$

$$\left[-C_6H_2(OH)(CH_2^{\,m})-CH_2- \right]_n \quad \text{Novolak-Harz}$$

Herstellung

Phenol oder Gemische von Phenol, Kresol, Xylenol und Resorzin werden mit Formaldehyd in wäßriger Lösung (30 ··· 40%ige Formalin-Lösung) im Beisein von Beschleunigern zu PF[163]) umgesetzt. Die ablaufenden Reaktionen sind:

a) *Addition* des Formaldehyds mit Phenol zu Mono-, Di-, und Trimethylol-Verbindungen,
b) *Kondensation* zwischen den Methylol-Verbindungen oder zwischen Methylol-Verbindungen und Phenol, es entstehen Dimethylenätherbrücken oder Methylenbrücken; bei höheren Temperaturen gehen die Dimethylätherbrücken in Methylenbrücken über, dabei wird Formaldehyd abgespalten.

Da jeder Phenolkern bis zu 3 reaktionsfähige Gruppen trägt, entstehen zunächst lineare Produkte, die dann bei weiterer Reaktion vernetzen. Beim erforderlichen Kondensationsgrad (verarbeitbare Harze) wird die Reaktion abgebrochen, indem das Wasser abgetrennt und das anfallende Harz abgekühlt wird. Wird der Kondensationsprozeß im sauren Medium durchgeführt (Katalysatoren — HCl, H_2SO_4, starke organische Säuren), so entstehen bei einem Verhältnis Phenol zu Formaldehyd von 1,25:1 verzweigte unvernetzte Kondensate (*Novolake*). Zur Vernetzung bei der Verarbeitung müssen den Novolaken Kondensationsmittel (Hexamethylentetramin, Paraformaldehyd) zugegeben werden; die Härtung erfolgt unter Temperatur- und Druckeinwirkung (schnelle Aushärtung — Schnellpreßmassen).
Werden Phenol und Formaldehyd (Verhältnis 1:1,1 ··· 1,5) im alkalischen Medium umgesetzt, so werden bei langsamerer Kondensationsreaktion folgende Stufen durchlaufen:

— *Resol-* oder *A-Zustand*
(lösliches, schmelzbares, thermisch härtbares Harz)
— *Resitol-* oder *B-Zustand*
(abnehmende Löslichkeit, in der Wärme gummielastisch)
— *Resit-* oder *C-Zustand*
(unlösliches, unschmelzbares Harz)

Um das Harz in einem Formgebungsprozeß verarbeiten zu können, wird die Kondensation im Resitol-Zustand durch schnelles Abkühlen abgebrochen. Bei der Verarbeitung härtet das Harz unter Einwirkung von Temperatur und Druck aus (selbsthärtendes Harz).
Reinharze (Edelkunstharz, Leim- und Lackrohstoff) werden nur in geringen Mengen benötigt. Mit geschichteten flächenförmigen Füllstoffen werden Schichtpreßstoffe hergestellt; für die Formmassenherstellung (Preßmassen) verwendet man pulverförmige Füllstoffe, Fasern und Gewebe. Wichtigster Füllstoff für die Phenolharze ist Holzmehl. Die Einarbeitung des Füllstoffs erfolgt trocken oder mittels Harzlösung; Gesamtfüllstoffanteil $\approx$ 45 ··· 60%.

Eigenschaften

Die Eigenschaften von *Phenol-Formaldehyd-Formstoffen* sind bedingt durch Art und Menge des Harzes, des Füllstoffes sowie der Hilfs- und Zusatzstoffe (Härter, Beschleuniger, Gleitmittel, Farbstoff, Weichmacher). Die meisten Phenol-Formaldehyd-Formmassen haben Novolake als Harzbasis (Schnellpreßmassen); für ammoniakfreie Formmassen werden Resole verwendet. Die Rohdichte der Reinharze beträgt $\approx$ 1,3 g/cm^3, mit organischen Fasern, Schnitzeln und Bahnen als Füllstoff sind die Rohdichtewerte 1,35 ··· 1,5 g/cm^3, mit Holzmehl 1,4 g/cm^3 und mit anorganischen Füllstoffen 1,8 ··· 2,1 g/cm^3.
Die mechanischen Eigenschaften der PF-Formstoffe sind stark von der Füllstoffstruktur abhängig, faserige und flächenförmige Füllstoffe im Harz ergeben höhere Biegefestigkeiten und Schlagzähigkeiten.

Die Wärmebeständigkeit ist abhängig von der Füllstoffart, anorganisch gefüllte Harze haben Dauerwärmebeständigkeiten von 130 ··· 150 °C, mit organischen Füllstoffen 110 ··· 120 °C.
Die elektrischen Eigenschaften sind für den allgemeinen Einsatz in der Elektrotechnik ausreichend. Bei der Verwendung im Freien (Feuchtigkeitsaufnahme) sind Formmassen mit hohem Harzgehalt und anorganischen Füllstoffen zu bevorzugen.
PF-Formmassen sind beständig gegen verdünnte Säuren und Laugen, organische Lösungsmittel, Öle, Fette, Wasser; unbeständig gegen starke Säuren und Laugen. PF-Formstoffe sind brennbar; die Glutbeständigkeit ist gut (abhängig von Füllstoffart). Die Anwendung von PF-Formstoffen für Erzeugnisse, die mit Lebens- und Genußmitteln in Berührung kommen, ist nicht zulässig. Phenol-Formaldehyd-Harze haben eine gelbe bis braune Eigenfarbe, die Formmassen werden deshalb meist gedeckt eingefärbt.

Verarbeitung

Formmassenverarbeitung

Novolakharze härten schneller (Schnellpreßmassen — geringere Preßzeit) als Harze vom Resol-Typ, die zur Aushärtung keine zusätzlichen Kondensationsmittel erfordern (erhöhte Feuchtigkeitsbeständigkeit bei verringerter Lagerbeständigkeit). Neben der Härtezeit bestimmt der Kondensationsgrad des Harzes auch die Fließfähigkeit — Einstufung z. B. in „weich", „mittel", „hart". „Weiche" Formmassen haben bei guter Fließfähigkeit lange Härtezeit, „harte" Formmassen bei geringer Fließfähigkeit kurze Härtezeiten. Die Fließfähigkeit wird außerdem durch die Füllstoffstruktur beeinflußt — mit steigenden Abmessungen der Füllstoffe verringert sich die Fließfähigkeit.

Formpressen:

Formmasse-Typ	11 ··· 13	31	51, 83, 85	15, 16, 57, 74, 77
Werkzeugtemperatur in °C	150 ··· 165	155 ··· 170	155 ··· 170	155 ··· 170
Preßdruck in MPa	15 ··· 40	15 ··· 35	25 ··· 40	30 ··· 60
Härtezeit je mm Wanddicke	30 ··· 60 s			

Spritzpressen: Werkzeugtemperatur 160 ··· 190 °C, Spritzdruck 50 ··· 200 MPa, Härtezeit je mm Wanddicke 40 ··· 120 s
Spritzgießen: Zylindertemperatur, zur Düse ansteigend, 70 ··· 110 °C, Werkzeugtemperatur 170 ··· 190 °C, Spritzdruck 60 ··· 200 MPa.
Bei der Herstellung von Schichtpreßstofferzeugnissen (Hartpapier, Hartgewebe, Kunstharz-Preßholz) sind die Bedingungen beim Verpressen in Etagenpressen: Temperatur 130 ··· 180 °C, Preßdruck 7 ··· 20 MPa, Dauer des Preßzyklus 30 ··· 60 min.
Phenol-Formaldehyd-Formstoffe können geklebt, lackiert und spanend bearbeitet werden.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Gehäuse, Armaturenteile, Schaltelemente, Lagerbuchsen, Laufrollen, Zahnräder.
Fahrzeugbau: Karosserieteile, Schalthebel, Knöpfe, Griffe, Lagerbuchsen.
Elektrotechnik: Steckdosen, Stecker, Schaltgeräteteile, Sockel, Spulen, Installationsmaterial, Leiterplattenmaterial, mit Kupferfolie kaschiert.
Bauwesen: Furnierplatten, Isoliermaterial (Schaum), Beschläge, Griffe.
Sonstige Anwendung: PF mit Polyamid- und Asbestfasern als Ablationswerkstoffe (Abtragungswerkstoffe) in der Raumfahrt.

3.3.2. Aminoharze (Aminoplaste)

Harnstoff-Formaldehyd-Harz (UF), Melamin-Formaldehyd-Harz (MF)

Aufbau des Makromoleküls

(Methylenätherbildung bei der Harnstoff-Formaldehyd-Kondensation)

$$R_1-NH-CH_2-O-CH_2-NH-R_2$$

Herstellung

Als Aminoharze (Aminoplaste)[156])[163]) werden die Kondensate von Formaldehyd mit Harnstoff, Melamin, Dizyandiamid und Thioharnstoff bezeichnet. Dabei reagiert das Formaldehyd mit der Amino-, Amid- oder Iminogruppe unter Bildung von Methylolgruppen, die im weiteren Verlauf unter Bildung von Ätherbrücken miteinander kondensieren. Bei der Aushärtung (Verarbeitung) entstehen dreidimensionale Netz-

werke. Wegen der unterschiedlichen Reaktionsmöglichkeiten der Komponenten miteinander entstehen keine einheitlichen Produkte. Die Polykondensation wird beeinflußt durch das Molverhältnis der Reaktionspartner (z. B. Harnstoff-Formaldehyd-Verhältnis von 1:1 ··· 3,5), durch den *p*H-Wert, die Konzentration der Reaktionsteilnehmer und Reaktionstemperatur und Druck.
Die *technische Darstellung* der Aminoharze erfolgt in Rührkesseln in wäßriger Phase, die entstehenden Lösungen haben einen Harzgehalt von 60 ··· 65%. Bei der weiteren Verarbeitung des Harzes wird entweder direkt mit der wäßrigen Lösung gearbeitet, oder durch Abdampfen des Wassers bzw. durch Sprühtrocknung werden pulvrige Harze erhalten.
Reine Aminoharze sind spröde, neigen zu Spannungsrissen und schrumpfen stark nach; sie werden deshalb mit Füllstoffen (Naß- oder Trockenimprägnieren) für Preßmassen oder mit Papier bzw. Gewebe für Schichtpreßstoffe verwendet. Weiterhin finden sie Anwendung als Schaum (Isolierstoff), Leim, Klebstoff, Lackharz, Textilhilfsmittel und zur Oberflächenveredelung. Die Preßmassen enthalten 30 ··· 70% Füllstoff. — Organisch gefüllte Harnstoff- und Melamin-Preßmassen haben einen Harzgehalt von 40 ··· 54%; anorganisch gefüllte Preßmassen 25 ··· 40% Harzgehalt. Zellulose ist wichtigster Füllstoff. Die Preßmassen enthalten neben Harz und Füllstoff noch Gleitmittel (z. B. Zinkstearat), Farbstoffe, Weichmacher und Härtungskatalysatoren (insbesondere bei Harnstoff-Preßmassen; sie bilden bei der Härtungstemperatur die für die Aushärtung erforderliche schwache Säure).

Eigenschaften

Die Harzart, die Füllstoffe und die Zusatzstoffe bestimmen die Eigenschaften der Formmassen. Neben Formmassen mit reinen Harzkomponenten (UF, MF) werden auch solche mit Kokondensaten angewendet (MF/PF-Formmassen).
Formmassen mit anorganischen Füllstoffen haben höhere Wärmebeständigkeiten und höhere Glutfestigkeitswerte als Formmassen mit organischen Füllstoffen. Die Füllstoffstruktur beeinflußt die mechanischen Werte — körnige Füllstoffe ergeben geringere Festigkeitswerte als faserförmige oder flächenförmige Füllstoffe. Aminoharze sind im Unterschied zu den Phenolharzen farblos und verfärben sich bei Sonnenlichteinwirkung nicht, deshalb sind hellfarbige Formstoffe herstellbar.

UF-Formstoffe:

Rohdichte $1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, gute mechanische Eigenschaften (Biegefestigkeit 70 ··· 80 MPa; hohe Oberflächenhärte und Steifigkeit). Die elektrischen Eigenschaften sind gut bis sehr gut (hohe Kriechstromfestigkeit). UF-Formstoffe sind beständig gegen schwache Säuren und Laugen, Lösungsmittel, gegen Fette und Öle; sie sind unbeständig gegen starke Säuren und Laugen, kochendes Wasser, oxydierende Stoffe. Bei Bewitterung nehmen die UF-Formstoffe Feuchtigkeit auf; sie sind brennbar. Für den Kontakt mit Lebensmitteln sind sie nicht zugelassen.

MF-Formstoffe:

Rohdichte $(1{,}5 \cdots 2{,}0) \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, gute mechanische Eigenschaften, Biegefestigkeit 40 ··· 80 MPa, Füllstoff Gesteinsmehl (Füllstoff kurzfaserige Zellulose); gute bis sehr gute elektrische Eigenschaftswerte (hohe Kriechstromfestigkeit). MF-Formstoffe sind gut wärmebeständig, witterungsbeständig, bessere Chemikalienbeständigkeit als bei UF-Formstoffen. Beständig gegen schwache Säuren und Laugen, Lösungsmittel, Fette und Öle; gute Beständigkeit gegen heißes Wasser; unbeständig gegen starke Säuren und Laugen und oxydierende Stoffe.

Verarbeitung

Aminoharz-Formmassen werden durch *Formpressen, Spritzpressen* und *Spritzgießen* zu Formstoffen verarbeitet. Mit Harz getränkte flächenförmige Trägermaterialien (vorwiegend Papier) werden in Etagenpressen zu Schichtpreßstoffen verpreßt.

Verarbeitungsbedingungen

Formpressen, Spritzpressen			
Formmasse-Typ	131	150 ··· 152	156, 157
Werkzeugtemperatur in °C	130 ··· 160	140 ··· 170	140 ··· 170
Formpressen			
Preßdruck in MPa	20 ··· 50	20 ··· 50	30 ··· 60
Härtezeit je mm Wanddicke in s	20 ··· 40	20 ··· 40	20 ··· 40
Spritzpressen			
Spritzdruck in MPa		50 ··· 200	
Härtezeit in s		30 ··· 120	

Spritzgießen

Zylindertemperatur, zur Düse ansteigend, in °C	70 ··· 120	70 ··· 105	65 ··· 100
Werkzeugtemperatur in °C	150 ··· 165	160 ··· 180	160 ··· 180
Spritzdruck in MPa		150 ··· 250	

Aminoharz-Formstoffe können spanend bearbeitet werden; sie sind gut klebbar.

Anwendung

Elektrotechnik: wärme- und kriechstromfeste Isolierteile wie Schaltelemente, Funkenlöschkammern, Kontaktträger, Spulenkörper, Schalter, Steckdosen.
Bauwesen: Dekorationsplatten, Schrift- und Hinweistafeln, Möbelbeschläge, Türdrücker, Schubladen.
Sonstige Verwendung: Verpackungsmittel, Kosmetik-Schraubverschlüsse, Bedienknöpfe, Eß- und Trinkgeschirr

3.3.3. Ungesättigte Polyesterharze (UP)

Aufbau des Makromoleküls

$$R_1-O-CO-\underset{\underset{R_2}{|}}{CH}-\overset{\overset{R_3}{|}}{CH}-CO-O-R_4$$

Herstellung

Ungesättigte Polyesterharze[155]) sind Polykondensate, die reaktionsfähige Doppelbindungen enthalten. Die Polykondensate werden mit flüssigen Monomeren kopolymerisiert (Härtungsreaktion) — es entstehen dreidimensionale chemische Vernetzungen. UP werden aus Polykarbonsäuren (Maleinsäure, Fumarsäure, Phthalsäureanhydrid, Isophthalsäure u. a.) und Polyalkoholen (Propylenglykol, Äthylenglykol, Diäthylenglykol u. a.) polykondensiert (verestert). Meist werden verschiedene Komponenten verwendet — die Menge der ungesättigten Doppelbindungen im Polyester wird durch den Anteil der Dikarbonsäuren mit Doppelbindungen (Maleinsäure, Fumarsäure) bestimmt. Die angewandten Dikarbonsäuren sind hauptsächlich Phthalsäure, für selbstlöschende Harze HET-Säure, Tetrahydrophthalsäure für schlag- und wärmefeste Harze, Isophthalsäure für chemikalienbeständige und Adipinsäure für flexible Harze.
Die Herstellung der ungesättigten Polyester erfolgt in Kondensationskesseln in Schutzgasatmosphäre unter Rühren bei 200°C und darüber — vorwiegend Schmelzkondensation, auch Lösungs- und azeotrope Kondensation. Das Kondensat wird in der Monomerkomponente gelöst. Für die Vernetzung werden folgende Monomere verwendet: Styrol (vorwiegend), Vinylazetat, Methakrylester, Akrylnitril, Diallylphthalat u. a.; auch in Kombination mit Styrol. Der Styrolanteil beträgt bei technischen Polyestern 30 ··· 35%.
Zur *Härtung* bei oder nach der Formgebung setzt man dem Harz Härter (Polymerisationsinitiator), z. B. organische Peroxide, sowie Beschleuniger zu. Zur Stabilisierung des Harzes vor der Verarbeitung werden Stabilisatoren bzw. Inhibitoren (Verzögerer, z. B. Chinon) angewendet.
Die UP-Harze sind vorwiegend als Gießharze mit Füllstoffen (Füllstoffanteil bis 70 Vol.-%) wie Glasfasern, Kreide, Quarzmehl, Kaolin, Asbest und für Formmassen eingesetzt; daneben auch für andere Zwecke, z. B. für Harzbeton, Estrich, Einbettmasse, Lacke und Kleber, Beschichtungsmasse.

Eigenschaften

Dichte von Reinharz $\approx 1{,}2 \cdot 10^3$ kg/m³; mit 25% Glasgehalt $1{,}35 \cdot 10^3$ kg/m³ und mit 65% Glasgehalt $1{,}80 \cdot 10^3$ kg/m³; Reinharze sind transparent; opale Einfärbungen möglich.

UP-Gießharze

Die Eigenschaften der UP-Gießharze sind abhängig von der Rezeptur (Ausgangskomponenten, Additive) und von der Führung der Härtungsreaktion. Durch die Wahl der Ausgangskomponenten ist eine breite Variation der Eigenschaften möglich (siehe Herstellung). Die mechanischen Eigenschaften hängen insbesondere vom Vernetzungsgrad ab. Ein Verstärken der UP erfolgt mit Glasfasern als Stapelfasern, Geweben (mit verschiedener Bindung), Matten und Rovings (Glasfaserstränge) zu Schichtstoffen, Laminaten; die Menge und die Art der Glasfasern beeinflussen die mechanischen Eigenschaften erheblich. Glasfaserlaminate mit UP-Harz (glasfaserverstärkte Formteile) haben spezifische Festigkeitswerte (auf die Dichte

bezogene Werte), die höher als die von Metallen liegen; die Zugfestigkeiten betragen ≈ 100 MPa bei 25% Glasgehalt bis ≈ 500 MPa bei 65% Glasgehalt. Der Elastizitätsmodul steigt ebenfalls mit dem Glasgehalt von 7 GPa (bei 25% Glasgehalt) bis 28 GPa (bei 65% Glasgehalt). Die elektrischen Eigenschaften der UP-Harze sind gut (hoher Oberflächen- und Volumenwiderstand, hohe Durchschlag- und Kriechstromfestigkeit). UP-Harze (Normalharze) sind beständig gegen Wasser, verdünnte Säuren, Salzlösungen, Kraftstoff, Mineralöle und Fette; unbeständig gegen kochendes Wasser, starke Säuren, Laugen, Alkohole, Ester, Äther, Chlorkohlenwasserstoffe; chemikalienbeständige Harze sind außerdem beständig gegen bestimmte Säuren und Laugen (z. B. 70%ige Schwefelsäure, 40%ige Natronlauge).
Die Witterungs- und Strahlenbeständigkeit ist hoch. UP-Harze brennen mit leuchtender rußender Flamme (als Flammschutzmittel werden 10 Masse-% Antimontrioxid zugesetzt).

UP-Formmassen

Dichte $(1{,}8 \cdots 2{,}1) \cdot 10^3$ kg/m^3 (je nach Füllstoffart und -menge), UP-Formmassen enthalten meist Glasfasern als Verstärkung (Kurz- und Langfaser); Sondermassen mit anderen Füllstoffen (Textilfasern oder -schnitzel, Holzmehl, Asbest, Zellulose). Typisierte glasfaserverstärkte Formmassen haben Biegefestigkeiten von 55 ··· 60 MPa, Harze mit Glasseidenmatten (Prepreg) Biegefestigkeiten von 120 ··· 160 MPa.
Die Wärmeformbeständigkeit ist hoch, ohne mechanische Beanspruchung bis 150 (160) °C. UP-Formstoffe sind sehr kriechstromfest und dielektrisch hochwertig. Die chemischen Beständigkeiten entsprechen den UP-Gießharzen.

Verarbeitung

UP-Gieß- und -Laminierharze

UP-Gießharze haben bei kühler und dunkler Lagerung eine Lagerzeit bis zu 6 Monaten. Bei der Herstellung der verarbeitungsfähigen Ansätze sind zunächst Härter und Beschleuniger getrennt mit Harz und diese dann miteinander zu vermischen. (Mischen von Härter und Beschleuniger — Explosion!). Kalthärter arbeiten bei Raumtemperatur; Warmhärter bei 80 ··· 120 °C. Die UP-Laminierharz-Verarbeitung erfolgt vorwiegend über folgende Verfahren: Handverfahren, Injektionsverfahren, Preßverfahren, Wickelverfahren, Schleuderverfahren.

UP-Formmassen

UP-Formmassen werden als kittartige Preßmassen oder als rieselfähige (trockene) Stäbchen oder Schnitzelmassen verarbeitet; Verarbeitungsverfahren sind *Pressen*, *Spritzpressen* und *Spritzgießen*.
UP-Formmassen sind leicht fließend; die Spritzdrücke sind gering und liegen im Bereich 5 ··· 25 MPa beim Pressen und bei 20 ··· 100 MPa beim Spritzgießen. Die Preß- bzw. Werkzeugtemperaturen betragen 140 ··· 170 °C. UP-Harze und -Formstoffe können spanend bearbeitet und geklebt werden.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Schichtstoffe — Behälter, Gehäuse, Abdeckungen, Rohre, Lüfter, Kühltürme. Formmassen — Gehäuse.
Fahrzeugbau: Schichtstoffe — Rettungs- und Segelboote, Karosserien, Wohnanhänger, Tankaufbauten, Flugzeugteile, Radarkuppeln.
Elektrotechnik: Formmassen — Gehäuse, Stecker, Sockel, Schalter, Isolierteile, Spulenkörper, Zündkerzenstecker.
Bauwesen: Schichtstoffe — Bauelemente, Wellplatten, Rohre, sanitäre Einrichtungen (Badewannen), Auskleidungen.

3.3.4. Epoxidharze (EP)

Aufbau des Makromoleküls

```
CH2—CH—CH2—O—R1—O—CH2—CH—CH2—O—
   \O/                    |
                          CO
                          |
                          R2
                          |
                          CO
                          |
                          O
                          |
```



Herstellung

Epoxidharze[144]) sind Polyäther mit Epoxidgruppen an den Kettenenden. Technische Epoxidharze werden überwiegend aus Bisphenol A (2,2-Bis-4-oxyphenyl-propan) und Epichlorhydrin hergestellt; außerdem Epichlorhydrin mit Glykolen (insbesondere Äthylenglykol). Bei der Reaktion wird in abwechselnder Folge von Addition der Hydroxylgruppen mit den Epoxidgruppen und Bildung neuer Epoxidgruppen durch HCl-Abspaltung das Makromolekül gebildet (praktisch bis zu etwa 15 Epichlorhydrinmoleküle je Kette). Die entstehenden Harze (Präpolymere) werden durch eine Härtungsreaktion zum Duromer umgesetzt. Als Härter kommen zur Anwendung Karbonsäureanhydride für die Heißhärtung (z. B. Phthalsäureanhydrid, Maleinsäureanhydrid) und Polyamide für die Kalthärtung (z. B. Äthylendiamin, Propylendiamin) und Amide (Dizyandiamid). Die Vernetzungsreaktion ist eine Addition ohne Bildung von Nebenprodukten, deshalb ist drucklose Härtung möglich.
Die technische Herstellung der Präpolymere erfolgt durch Umsetzen von Bisphenol A mit Epichlorhydrin in wäßrig-alkalischer Phase in Rührkesseln bei Temperaturen, die je nach Harz zwischen 50 °C und 200 °C liegen. Das entstehende Harz (flüssige niedrigschmelzende bis hochschmelzende Produkte) setzt sich ab, wird abgezogen und mit Wasser gewaschen. Die verarbeitungsfähigen Harze werden aus Grundprodukten (Basisprodukte) je nach Anwendungszweck hergestellt. Zu ihnen gehören Harzart, Härter, Verdünner, Lösungsmittel, Weichmacher, Füllstoff, Farbstoff oder Pigmente.
Überwiegend werden die Epoxidharze als Gießharze, für Formmassen und zur Glasfaserlaminierung verwendet, außerdem Anwendung auf dem Kleb- und Lacksektor.

Eigenschaften

Dichte von EP-Formmassen: $(1{,}8 \cdots 1{,}9) \cdot 10^3$ kg/m³; Laminate $(1{,}5 \cdots 2{,}0) \cdot 10^3$ kg/m³, Reinharze $(1{,}15 \cdots 1{,}2) \times 10^3$ kg/m³. Wie bei den UP-Harzen sind auch die Eigenschaften von EP-Harzen wesentlich durch den Rezeptaufbau (Harz, Härter, Füllstoffe u. a. Zusatzstoffe) bestimmt. Als *Füllstoffe* bzw. *Verstärkungsmaterialien* kommen vorwiegend zur Anwendung:

— körnige Stoffe wie Kaolin, Kreidemehl, Schiefermehl, Quarzmehl, Quarzsand, Graphit, Metallpulver;
— Fasern und Gewebe wie Glasfasern und -gewebe, Baumwollflocken, Metallgeflechte.

Bei *Gießharzen* beträgt der Füllstoffanteil (körnige Stoffe) bis maximal 400% (Quarzsand bis 700%); in Laminaten sind etwa 30···60% Verstärkungsmaterialien. EP-Formmassen enthalten als Füllstoffe vorwiegend Glasfasern und Gesteinsmehl. Die Festigkeitswerte von EP-Harzmaterialien werden stark von Art und Menge der Verstärkungsmaterialien bzw. Füllstoffe beeinflußt.
Reinharze haben Zugfestigkeiten von 50 ··· 85 MPa; Glasmatten mit ≈ 30% Glasanteil erzielen Zugfestigkeiten im Bereich 120 ··· 200 MPa und EP-Harze mit ≈ 60% Glasanteil als Roving haben Zugfestigkeiten von 550 ··· 700 MPa [Elastizitätsmodul $(30 \cdots 50) \cdot 10^3$ MPa]. Die Zugfestigkeiten von EP-Formstoffen liegen zwischen 25 MPa und 80 MPa. EP-Harzmaterialien haben eine hohe Härte und Abriebfestigkeit und eine hohe Temperaturstandfestigkeit bei guter Maßhaltigkeit.
Die elektrischen Eigenschaften Kriechstromfestigkeit, Lichtbogenfestigkeit sind sehr gut (auch bei Feuchtigkeitseinfluß). EP-Harze sind beständig gegen schwache Säuren und schwache Laugen, Öle, Fette, Benzin; unbeständig gegen starke Säuren, bedingt beständig gegen heißes Wasser. Die Härterart beeinflußt stark die Chemikalienbeständigkeit, gute Chemikalienbeständigkeit entsteht bei Härtung mit aliphatischen Aminen, Lösungsmittelbeständigkeit durch aromatische Amine, Witterungs- und Säurebeständigkeit durch Säureanhydrid-Härter. HET-Säureanhydrid wird zur Härtung selbstlöschender Laminate verwendet.

Verarbeitung

Gieß- und Laminierharz: Kalt- und Heißhärtung (> 80 °C); geringer Volumenschrumpf, bei entsprechenden Füllstoffen gegen Null. Verarbeitungsverfahren — s. UP-Harze.

EP-Formmassen:

EP-Formmassen sind rieselfähig, begrenzt lagerstabil. Verarbeitung durch *Pressen*, *Spritzpressen* und *Spritzgießen*. Das Fließvermögen ist sehr gut, so daß Einbetten von Metallteilen möglich ist, außerdem geringe Verarbeitungsdrücke. Die Schwindung von EP-Formmassen ist gering, keine Nachschwindung.

Verarbeitungsbedingungen

Pressen: Temperatur 160 ··· 170 °C, Preßdruck 10 ··· 20 MPa.
Spritzgießen: Werkzeugtemperatur 160 ··· 170 °C, Zylindertemperatur 70 °C, Spritzdruck bis 120 MPa.
EP-Harze und -Formstoffe können spanend bearbeitet und geklebt werden.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Gießharze — Modelle, Prüflehren, Ventile, Vorrichtungen, Werkzeuge zur Metall- und Polymerverarbeitung. Preßmassen — Laufräder, Pumpenteile, Armaturen.

Fahrzeugbau: Gießharze — Modelle, Spachtelmasse. Laminierharze — Karosserien, Boote, Raketen- und Flugzeugteile, Kraftstofftanks.
Elektrotechnik: Gießharze — Einbetten von elektrischen Bauelementen und Baugruppen, Wicklungsimprägnierungen. Laminierharze — Leiterplattenmaterial. Preßmassen — Präzisionsteile mit und ohne Metalleinlagen.
Bauwesen: Gießharze — Klebemörtel, Oberflächenschutzschichten, Fahrbahnüberzüge. Laminierharze — Betonschalungen, Trennwände.

3.3.5. Weitere Duromere

3.3.5.1. Silikonharze

Herstellung

Durch Hydrolyse der monomeren Organohalogensilane zu Silanolen und deren Kondensation unter Wasserabspaltung (hydrolytisches Verfahren) oder durch Polymerisation niedermolekularer Siloxane unter katalytischem Einfluß (insbesondere für hochmolekulare lineare Produkte). Beim hydrolytischen Verfahren entstehen mit difunktionellen Ausgangsverbindungen lineare Harze, mit trifunktionellen vernetzte Harze; Variation der Silikonharze durch mono-, di- und trifunktionelle Ausgangsverbindungen. Neben härtbaren Silikonharzen auch Silikone als Öle, Pasten oder Kautschuk. Die Silikonharze werden mit anorganischen Füllstoffen wie Glasfasern, Asbest und Glimmer zu Preßmassen oder mit Asbestgewebe, Papier oder Glasfasern zu Schichtpreßstoffen verarbeitet. Zur Härtung Zusetzen von Katalysatoren. Silikonharze werden auch als Bindemittel (Schichtpreßstoffe, Preßmassen) verwendet.

Eigenschaften

Dichte von Silikon-*Formmasse* (glasfaserverstärkt) $(1{,}8 \cdots 1{,}9) \cdot 10^3$ kg/m³. Silikonharze sind sehr gut wärmebeständig (Anwendungstemperaturbereich zwischen -70 und $+250\,°C$, kurzzeitig bis $+300\,°C$). Die elektrischen und dielektrischen Werte sind gut; die mechanischen Eigenschaften sind über einem weiten Temperaturbereich gleich. Bei hohen Temperaturen sind die Silikonharze deshalb anderen Duromeren überlegen. Silikonharz-*Preßmassen* sind gut alterungsbeständig (gegen Licht, Sauerstoff und Ozon) und gegen Feuchtigkeit unempfindlich. Chemisch beständig gegen verdünnte Säuren und Laugen, Methanol; unbeständig gegen aromatische Kohlenwasserstoffe. Silikonharze sind selbstverlöschend, hydrophob und physiologisch unbedenklich.

Verarbeitung

Gute Fließeigenschaften, aber lange Aushärtezeiten. *Pressen:* Temperatur 150 ··· 180 °C, Preßdruck 30 ··· 70 MPa.
Schichtpreßstoffherstellung: Hochdruckverfahren — Temperatur 150 ··· 175 °C, 6 ··· 10 MPa Druck; Niederdruckverfahren — Temperatur 175 °C, 0,1 ··· 0,2 MPa Druck; Preßzeiten bis zu 60 min.

Anwendung

Insbesondere in der *Elektrotechnik:* Klemmbretter, Abstandhalter, Nutenverschlußkeile für Elektromaschinen, Spulenkörper, Einbetten von Bauteilen; als Lacke für Kabelisolation.

3.3.5.2. Polydiallylphthalat-Formmasse

Herstellung

Diallylphthalat (DAP) wird radikalisch zu noch reaktionsfähigen Präpolymerisaten polymerisiert und mit ungesättigten Polyestern zu Formmassen verarbeitet. Die Formmassen enthalten außerdem Füllstoffe (Gesteinsmehl, Glasfasern, Asbest- und Zellulosefasern), Katalysatoren, Farbpigmente und Gleitmittel.

Eigenschaften

Dichte $(1{,}35 \cdots 1{,}8) \cdot 10^3$ kg/m³ (je nach Füllstoff). Polydiallylphthalat-Formmassen haben gute mechanische und elektrische Eigenschaften (Zugfestigkeit 40 ··· 75 MPa); hohe Licht- und Witterungsbeständigkeit; Gebrauchstemperaturbereich von $-50 \cdots 150\,°C$ (180 °C); kurzzeitig bis 250 °C; Beständigkeit gegen verdünnte Säuren, Laugen, chlorierte und aromatische Kohlenwasserstoffe, Alkohole, Öle, Fette; unbeständig gegen konzentrierte Säuren.

Verarbeitung

Durch *Pressen, Spritzpressen* und *Spritzgießen.* Temperatur: 140 ··· 160 °C, Preß- oder Spritzdruck: 10 ··· 70 MPa, Schwindung: 0,1 ··· 1,0%.
Polydiallylphthalat-Formmassen können spanend bearbeitet werden; sie sind klebbar.

Anwendung

In der *Elektrotechnik* für isolierende Teile (Isolatoren, Klemmleisten u. a.), die gleichzeitig hohen mechanischen, thermischen und chemischen Einwirkungen ausgesetzt sind.

3.3.5.3. Polyimide

Herstellung

Polyimide werden aus aromatischen Karbonsäureanhydriden und aromatischen Diaminen durch Polykondensation (Addition und anschließende Wasserabspaltung) hergestellt. Als Verstärkungs- und Füllstoffe kommen Glasfasern, Karbonfasern, Graphit, MoS_2 und PTFE zur Anwendung.

Eigenschaften

Dichte $(1{,}33 \cdots 1{,}43) \cdot 10^3$ kg/m³ unverstärkt; mit Füllstoff bis $1{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³. Hohe mechanische Eigenschaftswerte (Festigkeit, Modul) im Temperaturbereich von $\approx -240 \cdots +370$ °C; die Kerbzähigkeit ist gering — durch Faserverstärkung verbessert. Polyimide zeigen ein sehr gutes Gleit- und Verschleißverhalten; gute elektrische Eigenschaften, die nur gering von Temperatur und Frequenz abhängen. Polyimide sind beständig gegen verdünnte Säuren und Laugen, gegen Lösungsmittel, Kraftstoffe, Öle und Fette; unbeständig gegen starke Säuren und Laugen; keine Dauerbeständigkeit gegen kochendes Wasser und Dampf. Polyimide sind selbstverlöschend. Außer zur Herstellung für Form- und Schichtstoffe werden Polyimide für Lacke, Beschichtungen, Klebstoffe und Schaumstoffe verwendet.

Verarbeitung

Spezielle Verarbeitungsverfahren

— Halbzeugherstellung nach Pulver-Sintertechnik,
— teilweise Preß- und Spritzgießverarbeitung bei ≈ 350 °C und sehr hohen Drücken möglich.

Polyimide können spanend bearbeitet werden.

Anwendung

Lager, Dichtungen, Kolbenringe, Kompressorlamellen, Teile in Strahltriebwerken, Spulenkörper, gedruckte Schaltungen, Drahtlack, Metallbeschichtungen.

3.4. Elastomere (Elaste)

Elastomere (Elaste) sind Hochpolymere, die durch weitmaschige chemische Vernetzung (*Vulkanisation*) linearer Polymere entstehen. Die unvulkanisierten, plastisch formbaren Produkte werden als *Kautschuk*, die Vulkanisate als *Gummi* bezeichnet. Wichtige Kennwerte enthält Tabelle 52, Kurzzeichen und Handelsnamen Tabelle 53.

3.4.1. Naturkautschuk (NR)

Aufbau des Makromoleküls

```
 H3C       H    H        CH3
    \     /      \      /
     C==C         C==C                 cis-1,4-Polyisopren
    /     \      /      \
—H2C       CH2—H2C       CH2—
```

Gewinnung, Herstellung

Naturkautschuk[165]),[166]) wird aus dem *Latex* der Hevea brasiliensis gewonnen. Der Latex wird dazu unter Zusatz von Ameisen- oder Essigsäure koaguliert. Das Koagulat wird gewaschen, zu Fellen gewalzt, getrocknet und zu Ballen verpackt.

Hevea-Kautschuk ist cis-1,4-Polyisopren mit im Latex vorhandenen Harzen und anderen Begleitstoffen. Durchschnittliche Zusammensetzung des Latex: 60% Wasser, 35% Kautschuk, 2,5% Eiweiß, 1,5% Harze, 1% Mineralstoffe. Naturkautschuk kann auch aus anderen Pflanzen gewonnen werden → Wildkautschuk.

Trans-1,4-Polyisoprene (Naturprodukte *Guttapercha* und *Balata*) haben keine technische Bedeutung. Das harte thermoplastische Pulver wird auch nach der Vulkanisation nicht gummielastisch.

Tabelle 52. Mechanische, thermische und elektrische Eigenschaften von Elastomeren/Kautschuk

	Eigenschaft		Naturkautschuk	Butadien-Styrol-Kautschuk	Butadien-Akrylnitril-Kautschuk	Polybutadienkautschuk	Polyurethan-Elastomere	Polyurethan-Schaumstoff	Polyisoprenkautschuk
Mechanische	Dichte, unvulkanisiert	in g/cm³	0,91 ··· 0,93	0,94	1,00	0,94	1,2 ··· 1,3		0,93
	Zugfestigkeit, vulkanisiert, mit Füllstoff	in MPa	23 ··· 30	20 ··· 25	20 ··· 25	16 ··· 18	25 ··· 30		25 ··· 30
	Zugfestigkeit, vulkanisiert, ohne Füllstoff	in MPA	22	3 ··· 5	6	2	25 ··· 40	0,3 ··· 0,8 IV)	1
	Bruchdehnung	in %	500 ··· (800)	450 ··· 650	450 ··· 600	450 ··· 500	450 ··· 650	10 ··· 15 IV)	500 ··· 650
	Modul (300% Dehnung)	in MPa	10 ··· 20	5 ··· 10	7,5 ··· 15	5 ··· 8	7 ··· 15	4 ··· 10 IV)	5 ··· 12
	Rückprallelastizität	in %	55 ··· 70	40 ··· 50	20 ··· 35	35 ··· 50	35 ··· 55		60 ··· 66
	Kerbzähigkeit	in kJ/m²	20 ··· 30	10 ··· 20		100			4 ··· 5
	Härte (SHORE A)		(30) 60 ··· 70	50 ··· 65	65 ··· 70	55 ··· 60	65 ··· 90		60
Thermische	Anwendungstemperatur minimal	in °C	−56	−30 (−48 I))	−20	−60 (−96)	−30	−30 II)/−100 (−150 III))	−60
	Anwendungstemperatur maximal	in °C	+60	+70	+110	+90	+100	+100 II)/+100 (+120 III))	+60
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,16				0,23 ··· 0,29	0,025	
Elektrische	spezifischer Volumenwiderstand	in Ω · cm	10^{15}	10^{15}	10^{10}		$10^{10} \cdots 10^{12}$		
	Durchschlagfestigkeit	in kV/mm	15 ··· 40	20 ··· 70	10 ··· 30		20 ··· 25		
	relative Dielektrizitätskonstante bei 1 kHz		2,5 ··· 2,8	2,7	10		6 ··· 8	1,1 ··· 1,3 III)	
	Dielektrischer Verlustfaktor bei 1 kHz		0,005	0,005	0,01		0,05 ··· 0,2	0,001 ··· 0,003 III)	

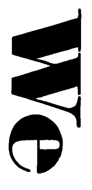


Tabelle 52 (Fortsetzung)

	Eigenschaft		Chloropren-kautschuk	Butyl-kautschuk	Silikon-kautschuk	Polysulfid-kautschuk	Äthylen-propylen-kautschuk	Akrylester-kautschuk	Chlorsulfo-niertes Polyäthylen	Fluor-kautschuk
Mechanische	Dichte, unvulkanisiert	in g/cm³	1,25	0,93	1,2 ··· 1,5	1,35 ··· 1,6	0,86	1,10	1,25	1,85
	Zugfestigkeit, vulkanisiert, mit Füllstoff	in MPa	15 ··· 25	17 ··· 21	4 ··· 10	5,5 ··· 9	25	12	20 ··· 25	15 ··· 25
	Zugfestigkeit, vulkanisiert ohne Füllstoff	in MPa	11	5	1,5	2	4	4	18	2
	Bruchdehnung	in %	400 ··· 700	600 ··· 800	150 ··· 400	200 ··· 400	500	250	200 ··· 300	350 ··· 450
	Modul (300% Dehnung)	in MPa	10 ··· 15	2,7		5 ··· 9	9,5			
	Rückprallelastizität	in %	60		30 ··· 40		60			
	Kerbzähigkeit	in kJ/m²		10 ··· 11						
	Härte (SHORE A)		50 ··· 90	40	40 ··· 50	70 ··· 80				55 ··· 65
Thermische	Anwendungstemperatur minimal	in °C	−50	−30	−60/−100[VI])	−50	−50	−10	−30	10
	Anwendungstemperatur maximal	in °C	+90/+140[V])	+120	+200/+300[V])	+120	+120	+140	+120	+190
	Wärmeleitfähigkeit	in W/(m · K)	0,23							
Elektrische	spezifischer Volumenwiderstand	in Ω · cm	$10^{12} \cdots 5 \cdot 10^{13}$	10^{16}	10^{14}	$10^{11} \cdots 10^{12}$			10^{14}	
	Durchschlagfestigkeit	in kV/mm	10 ··· 35	40 ··· 60	20 ··· 27				20	
	relative Dielektrizitäts-konstante bei 1 kHz		6,7	2,3	3 ··· 4,5	6 ··· 8			6	
	Dielektrischer Verlustfaktor bei 1 kHz		0,025 ··· 0,05	0,002	0,001 ··· 0,07	0,001 ··· 0,07				

[I]) Kaltkautschuk, [II]) Weichschaum, [III]) Hartschaum, [IV]) mit Dichte 30 ··· 50 kg/m³ (Hartschaum), [V]) kurzzeitig, [VI]) je nach Typ

Tabelle 53. Kurzzeichen und Handelsnamen von Elastomeren (Elasten)/Kautschuk

Elastomere	Kurzzeichen	Handelsnamen
Naturkautschuk	NR	Ribbed Smoked Sheets, Latex Crêpe, Brown Crêpe, Remilled Crêpe, Initial Concentration Rubber (intern.)
Butadien-Styrol-Kautschuk	SBR	Buna S, Buna SB, Buna SB-H (DDR); Buna S, Buna OP (BRD); GRS (USA); Cariflex (Holland)
Butadien-Akrylnitril-Kautschuk	NBR	Buna NB (DDR); Perbunan (BRD); Breon, Butakon A (Großbritannien); Butacril (Frankreich); Pracril (USA)
Polybutadienkautschuk	BR	Buna cis (DDR); Buna CB (BRD); Nipol BR (Japan); Cariflex BR (Frankreich); Taktene (Kanada); Ameripol CB (USA); SKA, SKB (UdSSR)
Polyurethan Polyurethan-Elastomere	PUR	SYSpur E (DDR); Vulkollan (BRD); Adipren (USA)
Polyurethan-Schaumstoffe		SYSpur S (DDR); Moltopren (BRD)
Polyisoprenkautschuk	IR	SKI (UdSSR); Cariflex IR, Coral Rubber, Natsyn (USA)
Chloroprenkautschuk	CR	Baypren, Perbunan C (BRD); Nairit (UdSSR); Neopren (USA); Butachlor (Frankreich)
Butylkautschuk	IIR, GR-I	Enjay (USA); Polysar-Butyl (Kanada)
Silikonkautschuk	Si	Silikonkautschuk NG (DDR); Silicon, Silopren (BRD); Rhodorsil (Frankreich); Silastomer (Großbritannien)
Polysulfidkautschuk (Thioplaste)	T	Resinit (UdSSR); Thionite (Japan); Thiokol (USA); Perduren (BRD)

Naturkautschuk wird nach der *Lieferform*, hauptsächlich Smoked Sheets und Crêpe, und nach der *Reinheit* unterschieden. Naturkautschuk ist hochmolekular (relative Molekülmasse 300000 ··· 400000 und mehr). Damit Mischungen hergestellt werden können, muß der Kautschuk mastiziert werden. *Mastikation* ist der oxydative Molekülabbau unter thermomechanischer Einwirkung, die Plastizität wird dabei erhöht. Die Mastikation (Plastizierung) des Naturkautschuks erfolgt auf Walzwerken und in Innenmischern (Knetern).
Nach der *Plastizierung* wird die Mischung hergestellt; sie besteht im wesentlichen aus den Komponenten Kautschuk, Weichmacher, Füllstoff, Vulkanisations- und Vulkanisationshilfsmittel, Harze, Faktis. Außerdem spezielle Zusatzstoffe wie Alterungsschutzmittel — Antioxydants (z. B. Phenylbetanaphthylamin), Lichtschutzmittel, Schutzwachse gegen Licht und Ozoneinwirkung, gegen Wärmeeinwirkung, gegen Frostsprödigkeit u. a.

Füllstoffe

Aktive und inaktive Stoffe; aktive Füllstoffe (insbesondere Ruße) verbessern die mechanischen Eigenschaften mit steigendem Anteil bis zu einem Maximum. Inaktive Füllstoffe verringern mit steigendem Anteil die mechanischen Werte. Vorwiegend mineralische Füllstoffe (z. B. Kreide, Talkum, Schwerspat, Kaolin) — sie dienen als Streckmittel, als Pigmente und zur Verbesserung der Mischungseigenschaften. Durch den Rußanteil wird die Verarbeitbarkeit verändert, die Plastizität nimmt mit steigendem Anteil ab, außerdem werden die Oberflächengestaltung und Formbeständigkeit der Mischung beeinflußt. Reifenlaufflächen haben z. B. einen Rußanteil von 28 ··· 32% bei einem Kautschukanteil von 52 ··· 62%.

Weichmacher

beeinflussen die physikalischen Eigenschaften der Vulkanisate (Modul, Härte, Kältebeständigkeit); sie verbessern die Verarbeitbarkeit durch höhere Plastizität und bessere Füllstoffverteilung in der Mischung. Außerdem dienen sie als *Streckmittel* — zur Anwendung kommen polare und unpolare Stoffe, z. B. Stearinsäure, Kautschol, Paraffine.
Der Weichmacheranteil beträgt etwa 3 ··· 10%, bezogen auf Kautschuk.

Vulkanisationsmittel und Vulkanisationshilfsmittel

Als Vulkanisationsmittel wird Schwefel verwendet. Je nach gebundenem Schwefel im Elastomer entstehen Weichgummi (5% Schwefel), lederartige Stoffe (10 ··· 15% Schwefel) oder Hartgummi (technisch



25 ··· 47% Schwefel). *Vulkanisationsbeschleuniger*, früher Metalloxide, jetzt organische Vulkanisationsbeschleuniger (z. B. Sulfenamide), verbessern die Vulkanisationsbedingungen und verringern den Schwefeleinsatz.

Harze

werden der Kautschukmischung zur Erhöhung der Klebrigkeit zugesetzt, insbesondere bei Verschnitten mit Synthesekautschuk und bei reinem Synthesekautschuk. Zur Anwendung kommen Kolophonium (3 ··· 5%), Kumaronharze (bis 30% des Kautschukanteils) und Haersen (für Synthesekautschuk).

Faktis

sind Polymerisationsprodukte aus ungesättigten Ölen und Fetten mit Schwefel oder Chlorschwefel. Sie wirken wie Weichmacher, d. h., sie verbessern die Verarbeitbarkeit (Verbesserung der Spritzbarkeit und der Standfestigkeit der Mischung bei der Vulkanisation) und erhöhen die Füllstoffaufnahmefähigkeit.
Die Eigenschaften der Mischung und des daraus durch Vulkanisation hergestellten Gummis sind abhängig von der Art und Menge der Mischungsbestandteile und von der Mischungstechnologie.
Durch Synthesekautschukzusätze wird die Neigung des Naturkautschuks zur *Übervulkanisation* vermindert. Verschnitte mit Synthesekautschuk und mit Polymeren (z. B. PVC, Polyisobutylen) ergeben spezielle Eigenschaften. Die Mischungen werden auf *Walzwerken* oder in *Innenmischern* hergestellt. Die Mischungszusammensetzung (Rezeptur) wird bestimmt durch die technischen und ökonomischen Anforderungen an das Gummihalbfabrikat oder Fertigteil, von der Rohstoffbasis und den technologischen Bedingungen (Maschinen, Anlagen).
Altgummi wird wegen ökonomischer und technologischer Vorteile regeneriert, die Regeneratart und -menge in Kautschukmischungen richten sich nach dem jeweiligen Einsatz.

Eigenschaften

Dichte des Rohkautschuks 0,911 · 10^3 kg/m³, Weichvulkanisat 0,923 · 10^3 kg/m³, Hartgummi 1,173 · 10^3 kg/m³, Hartgummi mit Füllstoffen (1,15 ··· 1,30) · 10^3 kg/m³. Die Eigenschaften der Kautschukmischung und der daraus hergestellten Erzeugnisse sind von der *Rezeptur* und der Mischungs- und Verarbeitungstechnologie abhängig (s. auch Gewinnung, Herstellung). Die Plastizität der Kautschukmischung, also die Verarbeitbarkeit, wird wesentlich durch die Kautschukart bestimmt; Oberflächenstruktur und Schrumpfverhalten sind von der Plastizität abhängig.
Die mechanischen Werte von ungefüllten Naturkautschuk-Vulkanisaten sind: Bruchfestigkeit (10) 20 ··· 25 MPa; Dehnung 600 ··· 850%, Härte 30 ··· 40 Shore-A. Vulkanisate mit 40% Ruß (für Kabelmäntel) erreichen Bruchfestigkeiten von 24 MPa bei ≈ 500% Dehnung. Die elektrischen Eigenschaften sind erheblich durch den Füllstoffanteil beeinflußt, z. B. verschlechtern Titandioxid, Zinkoxid und amorphe Ruße die dielektrischen Eigenschaften so stark, daß die Vulkanisate in hochwertigen Isoliermischungen nicht verwendet werden können. Die Leitfähigkeit ist mit Graphit und graphitischen Rußen reine Elektronenleitfähigkeit; sie ist abhängig von der Größe und der Verteilung der Füllstoffteilchen.
Naturkautschuk ist gegenüber Kohlenwasserstoffen unbeständig und löst sich → Herstellung von Kautschuklösungen für Gummierungen. Wegen der ungesättigten Bindungen im Naturkautschuk wirken höhere Temperaturen und energiereiche Strahlen (UV-Licht) versprödend; die guten elektrischen Eigenschaften gehen dabei verloren. Durch die Doppelbindungen im Naturkautschuk kann dieser leicht durch Addition oder Substitution modifiziert werden; z. B. entsteht durch Chlorierung Chlorkautschuk, der in Lacken die Witterungs- und Chemikalienbeständigkeit verbessert.
Die Vulkanisate (*Gummi*) sind in Kohlenwasserstoffen nicht beständig, sie quellen. Weichheit bzw. Härte der Vulkanisate wird wesentlich durch den Schwefelgehalt bestimmt (s. Vulkanisationsmittel); für die Regenerierbarkeit des Gummis ist ein niedriger Schwefelgehalt wichtig.

Verarbeitung

Mastikation des Kautschuks

- auf *Walzwerken:* Temperatur ≈ 40 °C,
- in *Innenmischern* (Knetern): höhere Temperaturen als auf Walzwerken, Anwendung von Plastizierhilfsmitteln (z. B. aromatische Schwefelverbindungen, Zinksalze, Merkaptoverbindungen).

Die Herstellung der *Mischung* erfolgt ebenfalls auf Walzwerken oder in Mischern. Die Mischungsqualität wird durch die Güte der Dispersion (der Verteilung der Mischungsbestandteile) erfaßt; dazu können verschiedene physikalische Werte des Vulkanisats, z. B. die Reißfestigkeit, herangezogen werden. Je nach Mischaggregat sind die Bedingungen unterschiedlich; die Temperaturen liegen im Bereich von unter 100 °C bis zu 120 °C. Neben den konventionellen Mischverfahren werden bei Naturkautschuk auch Kautschuk-Mischungen aus Vormischungen (Master-Batches) hergestellt.
Die *Verarbeitung* der Mischung durch Spritzen und Kalandrieren erfolgt im allgemeinen im Temperaturbereich von 70 ··· 110 °C; Vulkanisationserscheinungen dürfen dabei noch nicht auftreten. Die Vulkanisation wird in geheizten und geschlossenen Werkzeugen (Formen) oder in dampf- oder heißluftbeheizten

Aggregaten durchgeführt (Einbau von Stützgewebe bei der Vorverformung, vor der Vulkanisation bei Reifen). Die Temperaturen liegen bei der Schwefelvulkanisation im Bereich um 150 °C bei Vulkanisationszeiten von 20 ··· 25 min (PKW-Reifen); Verkürzung der Vulkanisationszeiten durch *Hochtemperaturvulkanisation* (170 ··· 200 °C). Die Vernetzung des Kautschuks kann auch ohne Schwefel mit speziellen Vulkanisiermitteln erfolgen (schwefelfreie Mischungen).
Naturkautschukmischungen neigen zur Übervulkanisation, wodurch Festigkeit, Elastizitätsmodul und Kerbzähigkeit abfallen und der Abrieb zunimmt.

Anwendung

Maschinenbau, Apparatebau: Dichtungen, Treib- und Keilriemen mit Gewebe, Federungselemente, Dampf- und Kühlerschläuche, Heizschläuche für die Vulkanisation, Druck-, Leit-, Quetsch- und Streckwalzen, technische Schläuche mit und ohne Textileinlagen bzw. Drahtspiralen.
Fahrzeugbau, Verkehr: Kraftfahrzeug- und Flugzeugreifen, Kraftfahrzeugschläuche, Wulst- und Felgenbänder, Manschettendichtungen, Dichtungen für Autoscheiben, Türdichtungen, Gummilager, Tankschläuche, Gleiszwischenlagen.
Elektrotechnik: Kabel, Schwach- und Starkstromkabel, Installationsleitungen, Isolierkappen, Akku-Kästen, Isolierband.
Bauwesen: Förderbänder, Schläuche für Baumaschinen, Gummilager, Federungselemente, Fußbodenbelag, Wandverkleidungen, Kittmassen, Schallisolierung (zelliger Gummi).
Sonstige Anwendung: Gartenschläuche, Schreibmaschinenwalzen, Fahrradpedale und -griffe, Radiergummis, Bade- und Sportartikel, Schwämme, Fußbekleidung aus Gummi, Sohlen, Kautschuk- und Gummilösungen, Gummierungen.

3.4.2. Butadien-Styrol-Kautschuk (SBR)

Aufbau des Makromoleküls

$$\begin{array}{l} \mathrm{H} \diagdown \quad\quad \diagup \mathrm{CH_2{-}CH_2{-}CH{-}} \\ \quad\quad \mathrm{C{=}C} \quad\quad\quad\quad\quad | \\ \mathrm{{-}H_2C} \diagup \quad\quad \diagdown \mathrm{H} \quad\quad\quad \mathrm{C_6H_5} \end{array}$$

Herstellung

Butadien-Styrol-Kautschuk wird durch Emulsionspolymerisation hergestellt; dazu wird das Gemisch aus Butadien und Styrol bei 0,7 ··· 1 MPa in Wasser emulgiert. Als Emulgatoren werden z. B. fettsaure Salze oder Nekale verwendet, als Aktivatoren organische oder anorganische Peroxide (Redox-Systeme). Der Polymerisationsgrad wird durch Regler eingestellt, z. B. Diisopropylxanthogendisulfid, Dodecylmerkaptan. Die Polymerisation wird bei etwa 60 ··· 70% Umsatz abgestoppt (sonst Vernetzung). Die Poymerisationstemperatur beträgt etwa 50 °C (Warmpolymerisate, Hot Rubber).
Die technische Durchführung der Polymerisation erfolgt kontinuierlich in einer Kaskade von 10 ··· 20 hintereinandergeschalteten heizbaren Rührkesseln. Der beim Durchlaufen der Kaskade entstehende *Latex* wird koaguliert, z. B. durch Essigsäure oder $MgCl_2$-Lauge, gewaschen, getrocknet und zu Bändern verwalzt.
Der Styrolgehalt im SBR beträgt z. B bei Buna S 3 ≈ 27%, bei Buna SB 115 ≈ 60%. Buna S 3 ist ein Warmpolymerisat. Es muß vor der Verarbeitung plastiziert werden.
Butadien-Styrol-Mischpolymerisate können auch bei tiefen Temperaturen, bei ≈ +5 °C, hergestellt werden (Tieftemperaturkautschuk, Cold Rubber). Für die Kaltpolymerisation sind hochwirksame Aktivatoren erforderlich (Kumolhydroperoxid). Der Kaltkautschuk zeichnet sich durch sehr gute Verarbeitbarkeit aus; wie bei geregelten Butadien-Styrol-Mischpolymerisaten (GRS) ist eine Mastikation vor der Verarbeitung nicht erforderlich. Die Polymerisate werden stabilisiert, da Rohkautschuke sehr oxydationsempfindlich sind.

Eigenschaften

Kopolymerisate mit mehr als 50% Styrol sind thermoplastisch und vulkanisierbar. Zusätze von Naturkautschuk zum SBR verbessern die Verarbeitbarkeit, die Elastizität und Härte (Defo-Werte) verringern sich; wird dagegen Naturkautschuk mit geringen Anteilen SBR verschnitten, so wird die Klebfähigkeit verringert und die Standfestigkeit erhöht.
Butadien-Styrol-Kopolymerisate können bis zu 50 Masse-% paraffinfreie aromatenhaltige Öle aufnehmen (ölgestreckter Kautschuk). Die mechanischen Eigenschaften von mit Ruß oder Kieselsäure gefüllten SBR liegen im Bereich der Naturkautschuk-Vulkanisate — Beispiel Buna S 3 mit 45 Masseteile Ruß CK 3



(Testrezeptur): Zerreißfestigkeit 18,5 ··· 22 MPa, Dehnung 660 ··· 580%. — Mit steigender Vulkanisationszeit Erhöhung der Festigkeit und Verringerung der Dehnung.
Warmkautschuk hat besseres Alterungs- und Abriebverhalten und eine höhere Wärmebeständigkeit als Naturkautschuk; die Kaltkautschuke ergeben mit verstärkenden Füllstoffen Vulkanisate mit noch höheren Festigkeiten und besserem Abriebverhalten.

Verarbeitung

SBR-Warmkautschuk muß vor der Verarbeitung mastiziert werden; Kaltkautschuk-Typen und geregelte Butadien-Styrol-Mischpolymerisate nicht.
Die Verarbeitbarkeit (*Kalandrieren*, *Spritzen*) von Warmkautschuk und ölgestrecktem Kautschuk ist gut; bei Kaltkautschuk sehr gut.
Verarbeitungsbedingungen s. Naturkautschuk.

Anwendung

60 ··· 70% des Butadien-Styrol-Kautschuks werden für Reifen verwendet; weiterhin für Schläuche, Matten, Transportbänder, Kabel, Schuhmaterial u. a. (s. auch Anwendung Naturkautschuk).

3.4.3. Butadien-Akrylnitril-Kautschuk (NBR)

Aufbau des Makromoleküls

$$\begin{array}{l} \mathrm{H} \diagdown \quad\quad \diagup \mathrm{CH_2{-}CH_2{-}CH{-}} \\ \quad\ \mathrm{C{=}C} \quad\quad\quad\quad\quad\ \ | \\ \mathrm{{-}H_2C} \diagup \quad \diagdown \mathrm{H} \quad\quad\quad\ \ \mathrm{CN} \end{array}$$

Herstellung

Akrylnitril-Butadien-Kopolymerisate (*Nitrilkautschuke*) mit 20 ··· 40% Akrylnitril werden durch Emulsionspolymerisation hergestellt. Ähnlich der Kopolymerisation von Butadien mit Styrol kann bei höheren Temperaturen (30 ··· 40 °C) oder bei 5 °C polymerisiert werden. Die technische Durchführung der Polymerisation des NBR erfolgt in den gleichen Anlagen, die der SBR-Erzeugung dienen.
Je nach Regelung entstehen *Weich-* oder *Harttypen*; bei starker Regelung entstehen gut misch- und verarbeitbare Kautschuke. Zur Stabilisierung werden nichtverfärbende Alterungsschutzmittel angewendet.

Eigenschaften

Mit aktiven Füllstoffen gute mechanische Eigenschaften, wie hohe Zugfestigkeit (NBR mit 27% Akrylnitrilgehalt und 50 Masseteilen Ruß CK 3). Testrezeptur für Buna NB 192 HF ergibt mit steigender Vulkanisationszeit von 30 ··· 50 min Zerreißfestigkeiten von 19,8 ··· 22,5 MPa. Hoher Abrieb- und Weiterreißwiderstand, nachteilig sind die niedrige Elastizität und die schlechte Kältebeständigkeit. Die Hitze- und Alterungsbeständigkeit sind gut. Steigender Akrylnitrilgehalt erhöht die Beständigkeit gegen unpolare Lösungsmittel (kraftstoffbeständig), gegen Öle und Fette. Gegen Säuren und Laugen sind die Polymerisate empfindlich, unbeständig gegen polare Lösungsmittel (Aromaten, Halogenkohlenwasserstoffe). NBR ist mit anderen polaren Polymeren (z. B. PVC) gut verträglich → Herstellung von Polymermischungen (blends). Toxikologisch und physiologisch unbedenkliche Einstellungen sind für den Kontakt mit Lebensmitteln geeignet.

Verarbeitung

Im allgemeinen gute bis sehr gute Spritz- und Kalandrierbarkeit, geringe Spritzquellung und Kalanderschrumpfung sowie gutes Fließvermögen. Die *Vulkanisation* erfolgt mit Schwefel, für hitzebeständige Produkte mit Tetramethylthiuramdisulfid. Durch Verschneiden (Einmischen) mit PVC entsteht ozonfester, mit Phenolharz zähelastischer, heißwasserfester Kautschuk.

Anwendung

Für öl-, fett- und kraftstoffbeständige Erzeugnisse, wie Kraftstoffschläuche, Dichtungen, Keilriemen, Förderbänder, Faltenbälge, Abfüllschläuche für Vergaserkraftstoffe, Druckwalzen, öl- und lösungsmittelbeständige Auskleidungen, Kabelummantelungen.

3.4.4. Polybutadienkautschuk (BR)

Aufbau des Makromoleküls

$$\left[CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}=CH-CH_2 \right]_n$$ 1,4-Polybutadien

Herstellung

Die Kautschuke auf Butadien-Basis werden vorwiegend durch Lösungspolymerisation bei Temperaturen zwischen 20 °C und 50 °C unter Anwendung von Katalysatoren in aliphatischen und aromatischen Lösungsmitteln hergestellt. Mit metallorganischen Misch-Katalysatoren auf der Basis von Kobalt- und Nickelverbindungen entstehen *stereospezifische Polybutadiene* mit einem 1,4-cis-Anteil von 98%. Nach einem älteren Verfahren wird Polybutadien durch Blockpolymerisation auf Mischschnecken bei ≈ 70 °C hergestellt. Durch die Anwendung von Natrium als Aktivator erhielten die Butadienpolymerisate die Bezeichnung *Buna* (*Bu*tadien-*Na*trium).
Die Polybutadienkautschuke werden mit Ruß und Öl (ölgestreckter Kautschuk) gefüllt und mit Stabilisatoren u. a. Zusätzen versehen.

Eigenschaften

1,4-cis-Polybutadiene haben geringere Festigkeits- und Modul-Werte als Naturkautschuk bzw. SBR und NBR, dabei aber sehr gutes Abriebverhalten und hohe Rückprallelastizität. Das Kälteverhalten von 1,4-cis-BR ist sehr gut; die Versprödungstemperatur beträgt −96 °C.
Durch Vermischen mit anderen Kautschuktypen, z. B. mit ölgestrecktem SBR, NBR oder mit anderen Polymeren, werden die mechanischen Eigenschaftswerte verbessert; weitere Veränderung der Eigenschaften und ökonomische Vorteile durch Füllstoffe.

Verarbeitung

Reine 1,4-cis-Polybutadien-Mischungen sind i. allg. schlecht misch- und spritzbar, deshalb Verschnitte mit NR oder SBR; spezielle Produkte zeigen gutes Verarbeitungsverhalten.

Anwendung

Überwiegend in der Reifenherstellung mit NR und SBR.

3.4.5. Polyisoprenkautschuk (IR)

Aufbau des Makromoleküls (siehe Naturkautschuk)

Herstellung

Durch Polymerisation des Isoprens mit Hilfe von Ziegler-Katalysatoren entsteht stereoregulärer 1,4-cis-Polyisoprenkautschuk; mit Lithium-Katalysatoren (z. B. n-Butyl-Lithium) in organischen Lösungsmitteln (Hexan) über 90%iges 1,4-cis-Polyisopren.

Eigenschaften

Die mechanischen Werte von Polyisoprenkautschuk sind wegen der gleichen chemischen Struktur denen des Naturkautschuks gleich. Synthetischer Polyisoprenkautschuk unterscheidet sich vom Naturkautschuk durch geringere relative Molekülmassen und engere Verteilung. Vulkanisierte Mischungen mit 50 Teilen HAF-Ruß ergeben Reißfestigkeiten von 26 MPa bei 500% Dehnung. Wegen der in synthetischem Polyisoprenkautschuk nicht enthaltenen natürlichen Begleitstoffe sind die Alterung, das Verhalten bei der Mastikation und die Kautschukklebrigkeit gegenüber dem NR verändert. Die Wärmestabilität des Polyisoprenkautschuks ist geringer als die des Naturkautschuks.

Verarbeitung

Das Verarbeitungsverhalten von Polyisoprenkautschuk ist etwas ungünstiger als das von Naturkautschuk. Polyisoprenkautschuk muß vor der Verarbeitung mastiziert werden, da die Plastizität zu gering ist. Die Mastikation wird auf *Walzwerken* oder in *Knetern* durchgeführt. Ölgestrecktes Polyisopren braucht meist



nicht mastiziert werden (höhere Plastizität). Die Mischungsherstellung, ihre Verarbeitung und die Vulkanisation sind analog der bei Naturkautschuk.

Anwendung

Polyisoprenkautschuk kann in vielen Fällen an Stelle von Naturkautschuk angewendet werden; üblich ist die Anwendung im Verschnitt mit NR und SBR. Lichtstabilisierte Qualitäten können auch für helle und farbige Artikel verwendet werden. Anwendungsbeispiele s. NR.

3.4.6. Polyurethan (PUR)

3.4.6.1. Polyurethan-Elastomere

Herstellung

Umsetzung von linearen Hydroxyverbindungen mit Diisozyanaten und Kettenverlängerern (z. B. Wasser, Glykole, Diamine) zu höhermolekularem linearem Diisozyanat. Weitere Umsetzung

- mit aromatischen Diaminen (auch mit Wasser) im Unterschuß. Es erfolgt Kettenverlängerung über Harnstoffgruppen, außerdem reagieren die Wasserstoffatome der Harnstoffgruppen mit den noch vorhandenen Isozyanatgruppen, wobei die Makromoleküle über Biuretgruppen vernetzen.
- mit kurzkettigem Glykol im Unterschuß — Kettenaufbau über Urethangruppen, Vernetzung über Allophatgruppen.

Die Allophatgruppen sind thermisch leichter rückspaltbar als die Biuretgruppen; deshalb können Polyurethan-Elastomere mit Allophatgruppen wie Thermoplaste verarbeitet werden.

Eigenschaften

Polyurethan-Elaste sind durch Abstimmen der Diisozyanate und Kettenverlängerungsmittel in allen Härtegraden einstellbar. Sie haben sehr hohe Zerreißfestigkeiten von $\approx$ 30 MPa bei 650 ··· 700% Dehnung und hohe Einreißfestigkeiten, außerdem hohe Verschleißfestigkeit und gute Dämpfungseigenschaften. Polyurethan-Elaste sind anfällig gegen hydrolytische Einflüsse; die Beständigkeit gegen Licht, Sauerstoff und Ozon ist gut. Die Temperaturbeständigkeit ist relativ gering — thermischer Abbau oberhalb 100 °C. Die Einfriertemperatur liegt bei −25 °C. Besonders öl- und kältebeständige Produkte entstehen bei Verwendung von Polythioäthern.

Verarbeitung

Gießverfahren: langkettiges Glykol wird mit Diisozyanat bei 110 ··· 120 °C unter Rühren umgesetzt, bei gleicher Temperatur wird niedermolekulares Glykol zugegeben und der Ansatz vergossen. Endvernetzung durch mehrstündige Temperatureinwirkung von 100 ··· 110 °C.
Spritzgießen, Extrudieren: bei bestimmten Ausgangskomponenten lassen sich die gegossenen Elastomere bei 170 ··· 200 °C umformen (thermisches Spalten der Allophatgruppen).
Konventionelle Kautschukverarbeitung: die Ausgangsstoffe sind plastisch, linear bis schwach verzweigt und isozyanatgruppenfrei — die Vernetzung erfolgt durch Zugabe von Diisozyanaten. Durch den Einbau spezieller Gruppen in die Ausgangsstoffe entstehen Produkte, die mit Schwefel, mit Formaldehyd oder mit Peroxid vernetzbar sind.

Anwendung

Schläuche, Dichtungen, Folien, Behälterauskleidungen, Pumpen-Membranen, Federelemente, Riemen und Zahnriemen, Reibräder, Kupplungen, Zahnräder, Lager, Rollen, Schalen für Kugelgelenke.

3.4.6.2. Polyurethan-Schaumstoffe

Herstellung

Die Schaumstoffherstellung ist das Hauptanwendungsgebiet der Polyurethane. Die *Ausgangsstoffe* sind vorwiegend Adipinsäure, Äthylenglykol, Trimethylolpropan, Polyalkylenäther, Toluoldiisozyanatgemisch und Wasser ($\approx$ 2%). Als *Hilfsstoffe* werden eingesetzt: Katalysatoren (z. B. tertiäre Amine, organische Metallverbindungen), Emulgatoren (zur Homogenisierung und Schaumstabilisierung), Stabilisatoren und Aktivatoren. Bei der Reaktion des flüssigen Gemisches entsteht der Schaumstoff bei den gleichzeitig ablaufenden Vorgängen Polyaddition und Schaumbildung infolge CO_2-Abspaltung; abhängig von den

Ausgangskomponenten entstehen weiche bis harte PUR-Schaumstoffe, die in ihrer chemischen Struktur aus vernetzten Makromolekülen aufgebaut sind.
Hartschaum wird durch Umsetzung von stärker verzweigten Polyhydroxyverbindungen mit Diisozyanat bei Anwesenheit von Trifluorchlormethan zur Schaumbildung (Verdampfen bei Reaktion) erzeugt. Durch Einbau von Phosphor oder Halogen oder durch eine hohe Vernetzungsdichte werden schwer brennbare Schaumstoffe erzeugt.

Eigenschaften

Weichschaumstoffe: Dichte 15 ··· 70 kg/m³ (meist bei 25 kg/m³); ≈ 80% offene Zellen.
Hartschaumstoffe: Dichte 10 ··· 600 kg/m³, bei Dichten von 200 ··· 300 kg/m³ können Druckfestigkeiten von ≈ 7 MPa hergestellt werden. Die Dauerwärmebeständigkeit ist bis zu 150 °C gewährleistet; die Zellen sind weitgehend geschlossen, deshalb haben die PUR-Hartschaumstoffe ein gutes Wärmeisolierverhalten.

Verarbeitung

Herstellung der Schaumstoffe nach zwei Verfahren.

Zweistufenverfahren

Bei Umsetzung von linearen Polyestern oder Polyäthern mit Diisozyanaten im Überschuß entstehen begrenzt lagerfähige „Prepolymere".

Direktverfahren (one-shot-Verfahren)

Alle Komponenten (Hydroxyverbindungen, Isozyanate, Wasser, Hilfsstoffe) werden in genauer Dosierung in Mischaggregaten (z. B. Mischkopf) intensiv vermischt. Die Verschäumung erfolgt bei Raumtemperatur, die Schauminnentemperatur steigt bis auf 180 °C.
PUR-Weichschaumstoffblöcke werden mit geheizten Drähten auf entsprechende Abmessungen geschnitten. Hartschaumstoffe können mechanisch bearbeitet werden. PUR-Schaumstoffe sind klebbar.

Anwendung

PUR-Weichschaumstoffe: Polsterungen, Schwämme, Matratzenkerne.
PUR-Hartschaumstoffe: Isolierungen (thermisch, akustisch), Dachisolationen.

3.4.7. Weitere Elastomere

3.4.7.1. Chloroprenkautschuk (CR)

Herstellung

2-Chlorbutadien-(1,3) (Chloropren) wird in wäßriger Emulsion in Anwesenheit von Emulgatoren, Aktivatoren und anderen Hilfsstoffen bei ≈ 40 °C polymerisiert. Verschiedene Produkte entstehen durch das Verfahren (*Mercaptan, Thiuram*) und die Herstellungsbedingungen. Die Kautschuktypen unterscheiden sich in Schwefelgehalt, Kristallisationstendenz, Polymerisationsgrad und Vernetzung. Mercaptan-Typen haben nur einen geringen Schwefelzusatz in Form eines Mercaptans (schwefelfreie Polymerkette); Thiuram-Typen erfordern die Verwendung von freiem Schwefel und Thiuramdisulfid (Schwefel im Polymeren).

Eigenschaften

Chloropren-Polymerisate zeichnen sich durch gute mechanische Eigenschaften, günstiges elastisches Verhalten und geringen Abrieb aus. Bei entsprechendem Mischungsaufbau werden hohe Wetter- und Ozonbeständigkeit, Flammwidrigkeit und sehr gute Alterungseigenschaften erreicht; die Heißluftbeständigkeit ist bei den Mercaptan-Typen beträchtlich. Gegen Alkalien, verdünnte Säuren und wäßrige Salzlösungen sind Chloropren-Polymerisate beständig; Ester, Aldehyde, Ketone, aromatische und chlorierte Kohlenwasserstoffe wirken stark quellend und erweichend. Die Ölbeständigkeit von Chloropren ist besser als bei Natur- oder Styrol-Butadien-Kautschuk.

Verarbeitung

Zur Mischungsherstellung werden Walzwerke und Innenmischer verwendet, niedrige Temperaturen; auch bei der Weiterverarbeitung hohe Temperaturen vermeiden. Die Spritz- und Kalandrierbarkeit und die Konfektionsklebrigkeit ist bei entsprechendem Mischungsaufbau (Füllstoffe, Faktis) gut. Die Vulkanisation erfolgt nach den üblichen Verfahren.

Anwendung

Dichtungen, Manschetten, Faltenbälge, Profile und Schläuche für Maschinen- und Fahrzeugbau, Walzen, Kabelmäntel und Isolation, Auskleidungen, Gewebegummierungen, Dachfolien, Klebstoffe.



3.4.7.2. Butylkautschuk (IIR, GR-I)

Herstellung

Butylkautschuk ist ein Polymerisat von Isobutylen mit 2 ··· 3% Isopren. Die Polymerisation wird im Lösungsmittel (Methylenchlorid) bei tiefen Temperaturen (≈ −90 °C) unter Wirkung eines Katalysators als Ionenpolymerisation durchgeführt. Das einpolymerisierte Isopren bestimmt die Anzahl der Doppelbindungen im Makromolekül.

Eigenschaften

Durch den hohen Isobutylenanteil gute Wärme- und Alterungsbeständigkeit, geringe Gasdurchlässigkeit und hohe Ozonbeständigkeit. Die Reißfestigkeiten sind hoch, auch ohne aktive Füllstoffe (Ruß); geringe Elastizität und große bleibende Dehnungen; hoher Weiterreißwiderstand und hohe Abriebfestigkeit. Butylkautschuk hat eine gute Chemikalien- und Lösungsmittelbeständigkeit; die elektrischen Eigenschaften sind gut.

Verarbeitung

Die Vulkanisation erfordert wegen der geringen Anzahl von Doppelbindungen im Kautschuk hohe Temperaturen (160 ··· 170 °C) und Beschleuniger. Die Verarbeitung von Butylkautschuk im Verschnitt mit anderem Kautschuk ist wegen des unterschiedlichen Vulkanisationsverhaltens schwer möglich.

Anwendung

Heiz- und Dampfschläuche, Autoschläuche, Kabelisolationen.

3.4.7.3. Silikonkautschuk (Si)

Herstellung

Die Ausgangsprodukte bei der Herstellung der Silikone sind *Chlorsilane*. In diesen Verbindungen tragen die vier Valenzen des Siliziums Alkylgruppen und Chloratome. Durch Hydrolyse der Chlorsilane entstehen Hydroxylverbindungen (Silanole); die *Silanole* kondensieren und bilden die *Silikone*. In schwach vernetzter Form sind die entstehenden Produkte Silikonkautschuk, in unvernetzter Form Silikonöle und -fette und bei starker Vernetzung Silikonharze (Duromere). Die Kautschuk-Mischungen enthalten neben dem Si-Kautschuk noch Füllstoffe (z. B. ZnO, $CaCO_3$, Kieselgur, Ruß), Vernetzer und evtl. Farbstoffe. Durch den Kautschuk und die Art und Menge des Füllstoffs ist eine breite Eigenschaftsvariation möglich. Heißvulkanisierender Silikonkautschuk besteht aus linearen, verzweigungsfreien Polymeren mit hoher relativer Molekülmasse. Kaltvulkanisierender Silikonkautschuk hat niedrige relative Molekülmassen; die Kettenenden tragen Hydroxylgruppen.

Eigenschaften

Dichte (unvulkanisiert) $1{,}25 \cdot 10^3\,kg/m^3$. Die Eigenschaften von Silikonkautschuk ändern sich im Bereich von −60 °C (−100 °C bei Spezialkautschuk) ··· 200 °C (kurzzeitig 300 °C) nur wenig. Die mechanischen Eigenschaften liegen bei Raumtemperatur unter denen anderer organischer Vulkanisate (z. B. Naturkautschuk), bei höheren Temperaturen sind sie jedoch besser. Die elektrischen Eigenschaften sind sehr gut. Silikongummi ist beständig gegen Wasser (bis ≈ 100 °C), i. allg. gute Mineralölbeständigkeit; unbeständig gegen starke Säuren und Laugen, chlorierte Kohlenwasserstoffe, Äther. Die Beständigkeit kann durch den Einbau von Fluor- und Nitril-Gruppen in den Kautschuk verbessert werden (*Fluor-Silikon-Kautschuk, Nitril-Silikon-Kautschuk*). Die Alterungs-, Witterungs- und Ozonbeständigkeit sind sehr gut: Silikonkautschuk ist physiologisch unbedenklich und schwer benetzbar.

Verarbeitung

Heißvulkanisation mit organischen Peroxiden bei 120 °C und höheren Temperaturen mit oder ohne Druck — je nach Peroxid. Die Kautschukverarbeitung erfolgt nach der üblichen Kautschuktechnologie (Walzen, Spritzen, Pressen, Kalandrieren). Silikonkautschuk kann auch mit Schwefel vulkanisiert werden — Anwendung bei Mischungen mit anderem Kautschuk. Kaltvulkanisierende Silikonkautschuke vernetzen durch Zugabe spezieller Vernetzer, z. B. Kieselsäureester mit metallorganischen Verbindungen (Zweikomponentenmassen), oder durch Luftfeuchtigkeitseinfluß (Einkomponentenmassen). Gieß- und streichtechnische Verarbeitung.

Anwendung

Heißvulkanisierender Silikonkautschuk: Dichtungen, Manschettendichtungen, Schläuche (Heißluft-, Sauerstoff-Schläuche), Transportbänder, Federelemente, Puffer, Profilschnüre, Heizleitungen, Gewebebeschichtungen; Elektroisolierungen (Kabel, Elektromaschinen), Zündkabel, Abschirmkabel;
Kaltvulkanisierender Silikonkautschuk: Vergußmassen, Baufugendichtungen, Formenabdruckmassen.

3.4.7.4. Polysulfidkautschuk (T) (Thioplaste)

Herstellung

Polysulfidkautschuke (*Thioplaste*) entstehen durch Umsetzung von Alkalipolysulfidlauge im Überschuß mit organischem Polyhalogenid oder einem Gemisch von Polyhalogeniden. Die Halogene können auch durch organische oder anorganische Säureester substituiert sein. Der Polykondensationsvorgang ist exotherm — es entstehen hochmolekulare, kautschukartige Produkte als *Latex*, der koaguliert, gewaschen und getrocknet wird. Der Latex kann auch direkt verwendet werden. Der Polysulfidkautschuk erhält als Zusatz aktive Füllstoffe, Stearinsäure und in geringen Mengen Natur- und Synthesekautschuk.

Eigenschaften

Die Dichte nicht vulkanisierter Thioplaste beträgt $(1{,}35 \cdots 1{,}60) \cdot 10^3$ kg/m³. Die mechanischen Eigenschaftswerte der Vulkanisate sind i. allg. nicht hoch; Zugfestigkeit $5 \cdots 10$ MPa, Bruchdehnung $300 \cdots 400\%$. Die Beständigkei gegen Säuren und aromatische Kohlenwasserstoffe ist gut; sehr gut gegen Kraftstoffe, Kohlenwasserstoffe und Öle. Die Lösungsmittelbeständigkeit nimmt mit steigendem Schwefelgehalt zu. Polysulfid-Elastomere sind sehr gut beständig gegenüber Ozon und hervorragend alterungsbeständig.

Verarbeitung

Die Plastifizierung erfolgt durch Einarbeiten von Stoffen, die gleichzeitig als Vulkanisationsbeschleuniger wirken. Der *Thiokol-Kautschuk* ist spritz-, walz- und kalandrierbar. Vulkanisiert wird (mit Zinkoxid oder anderen Verbindungen) durch Erhitzen — Vulkanisationstemperatur $\approx 140\,°C$; H_2S-Abspaltung oberhalb 155 °C.

Anwendung

Isolierungen, Behälterauskleidungen, Dichtungen, Tankschläuche, Druckplatten, Druckwalzen, Dichtungsmasse für Baufugen.

3.4.7.5. Äthylen-Propylen-Kautschuk, Akrylesterkautschuk, chlorsulfoniertes Polyäthylen, Fluorkautschuk

Äthylen-Propylen-Kautschuk

Ungesättigte Äthylen-Propylen-Polymere mit einer Terkomponente, die Diene enthält (Einpolymerisieren von Doppelbindungen), sind mit Schwefel vulkanisierbar. Besondere Eigenschaften: gute Alterungs- und Ozonfestigkeit, Kältefestigkeit, gute elektrische Eigenschaften, Dichte (unvulkanisiert) $0{,}87 \cdot 10^3$ kg/m³.

Akrylesterkautschuk

Polymerisat von Akrylsäureestern mit Akrylnitril, Butadien oder Isopren. Einmischen von Füllstoffen möglich; Vulkanisation durch Peroxide, Metalloxide oder organische Basen. Besondere Eigenschaften: ausgezeichnete Strukturfestigkeit, Beständigkeit gegen Öle und hohe Temperaturen, Dichte (unvulkanisiert) $1{,}1 \cdot 10^3$ kg/m³.

Chlorsulfoniertes Polyäthylen

Herstellung durch Sulfochlorierung von Polyäthylen; Vulkanisation durch Metalloxide und organische Säuren. Besondere Eigenschaften: beständig gegen Erdölkohlenwasserstoffe, hellfarbig, witterungs- und oxydationsbeständig, Dichte (unvulkanisiert) $1{,}25 \cdot 10^3$ kg/m³.

Fluorkautschuk

Herstellung — s. Fluorpolymere (Thermoplaste); Vulkanisation durch organische Peroxide und polyfunktionelle Amine. Besondere Eigenschaften: hohe Beständigkeit gegen einwirkende Medien und Alterung, schwer entflammbar, Dichte (unvulkanisiert) $1{,}85 \cdot 10^3$ kg/m³.

3.5. Holz und Holzwerkstoffe

Literatur: [12, 21, 25, 43, 54, 55, 56, 57, 74, 75]

3.5.1. Aufbau und Struktur des Holzes

Holz ist ein organischer Körper, der als wesentlicher Bestandteil von Bäumen und anderen holzbildenden Pflanzen durch deren natürliches Wachstum entsteht. Es setzt sich aus unterschiedlichen makromolekularen Verbindungen zusammen, aus denen die Zellen des Holzes gebildet werden. Sie sind die Grundbausteine des Holzgewebes. Holz ist ein anisotroper, inhomogener und poröser Werkstoff, dessen Eigenschaften von seinem anatomischen Aufbau abhängen, der wiederum von der Holzart[171]), der Lage im Stamm, dem Standort und Alter des Baums beeinflußt wird.

Die *chemische Zusammensetzung* ist für alle Holzarten ungefähr gleich: 50% Kohlenstoff, 6% Wasserstoff, 43% Sauerstoff, 0,1 ··· 0,3% Stickstoff. Der Rest besteht aus mineralischen Bestandteilen, der *Aschegehalt* schwankt zwischen 0,2 und 0,8%. Die differenzierten Funktionen der Makromoleküle im Holz sind aus Tabelle 54 ersichtlich.

Mikroskopischer Aufbau. Das Grundelement des Holzes ist die Zelle, deren Wände von *Fibrillen* aus Zellulosemolekülen und *Lignin* gebildet werden. Die Zellen werden vom *Kambium*, einer Schicht lebender Zellen, die sich zwischen Borke und dem Holzkörper befindet und die das Dickenwachstum des Holzes bewirkt, gebildet. Die Zellgewebe (Leitgewebe, Festigungs- oder Stützgewebe und Nährgewebe) haben dabei wesentliche Funktionen.

Makroskopischer Aufbau. Der Bau des Holzes wird anhand der drei Hauptschnittrichtungen dargestellt:

Querschnitt Q (Hirnschnitt):
Schnitt senkrecht zur Stammachse in Richtung der Markstrahlen,

Tangentialschnitt T (Fladerschnitt, Sehnenschnitt, Brettschnitt):
Schnitt parallel zur Stammachse und quer zu den Markstrahlen,

Radialschnitt R (Spiegelschnitt):
Schnitt parallel zur Stammachse und fast parallel zu den Markstrahlen.

Tabelle 54. Makromolekulare Holzbestandteile

Makromolekularer Bestandteil	Erläuterung	Funktion
Zellulose $(C_6H_{10}O_5)_n$	hochmolekulares Kohlehydrat, das zu fast 99% aus Glukosemolekülen zusammengesetzt ist*); durchschnittliche Polymerisationsgrade: Fichte: $n = 1500 \cdots 1600$, Buche: $n = 1300 \cdots 1400$	Gerüstsubstanz des Holzes; für die mechanischen Eigenschaften (Festigkeit, Zähigkeit usw.) verantwortlich; Anteil im Holz 40 ··· 60%
Hemizellulosen	Sammelbegriff für die im Holz enthaltenen Polysaccharide und Polyuranide, die in verdünnten Alkalien extrahierbar sind; durchschnittlicher Polymerisationsgrad $n = 200$	Bestandteil der Gerüstsubstanz und zusammen mit Lignin Kittsubstanz des Holzes; Anteil im Holz 15 ··· 35%
Lignin	chemisch uneinheitlich aufgebautes amorphes Gemisch hochpolymerer aromatischer Verbindungen; in Alkalien und sauren Sulfiten löslich	Hauptmasse der Kittsubstanz des Holzes; wirkt durch Anlagerung an die Gerüstsubstanz in Zellwandzwischenräumen versteifend (verholzend); Anteil im Holz 20 ··· 35%
Inhaltsstoffe	holzartabhängige ein- oder angelagerte Stoffe (Harze, Fette, Öle, Wachse, Farb- u. Gerbstoffe, Stärke, Kautschuk, usw.)	beeinflussen Farbe, Resistenz, hygroskopisches Verhalten und Bearbeitbarkeit des Holzes

*) siehe Abschn. CHEMIE, Polysaccharosen

Auf dem Querschnitt des Holzstamms werden das *Splintholz*, das *Kernholz* und die *Jahresringe* ohne optische Hilfsmittel sichtbar (Bild 51). Splintholzbäume (z. B. Erle, Birke, Weißbuche, Espe) oder Reifholzbäume (z. B. Fichte, Rotbuche, Linde) haben keinen bzw. keinen sichtbaren Kern. Bäume mit auffallend dunkel gefärbtem Kern sind die Kernholzbäume (z. B. Kiefer, Lärche, Douglasie, Eiche, Nußbaum, Robinie). Die Jahresringe sind die jährlich vom Kambium gebildeten ringförmigen Zuwachsschichten, die sich aus *Frühholz* (wird zu Beginn der Vegetationszeit gebildet) und *Spätholz* (Ausbildung am Ende der Vegetationszeit) zusammensetzen. Auf dem Tangentialschnitt erscheinen die Zuwachszonen kegel- oder fladerförmig („gefladerte Textur"). Der Radialschnitt zeigt besonders ausgeprägte, streifenförmige Jahresringe bzw. Zuwachszonen und Markstrahlen als unterschiedlich große und oft glänzende Bändchen („streifige Textur").

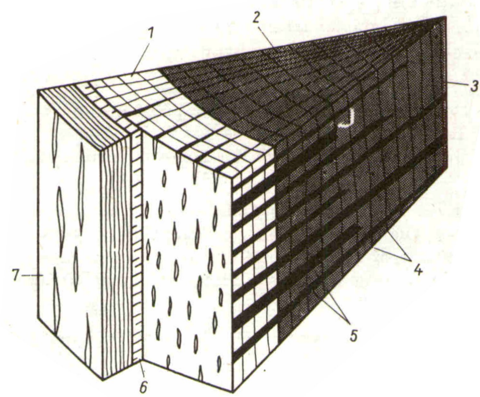


Bild 51. Holzkeil mit charakteristischen makroskopischen Erkennungsmerkmalen. *1* Splintholz; *2* Kernholz; *3* Mark; *4* Jahresringe; *5* Markstrahlen; *6* Bast; *7* Borke (nach Wagenführ)

3.5.2. Werkstoffe aus Holz*)[172]

Rohholz[173]

Das technisch verwertbare Rohholz ist *Nutzholz*, das als *Furnier-*, *Säge-*, *Platten- und Faserholz* in der ersten Verarbeitungsstufe zu Furnieren, Schnittholz, Span- und Faserplatten, Zellstoff und Holzschliff weiterverarbeitet oder als Grubenholz, für Masten, Pfähle und Stangen direkt verwertet wird. Den größten Anteil am Nutzholzverbrauch hat das *Schnittholz*[174], das in der zweiten Verarbeitungsstufe zur Herstellung von Fenstern, Türen, Bauelementen, Möbeln, Kabeltrommeln u. ä. verwendet wird.
Bei Furnieren[175] unterscheidet man entsprechend dem Arbeitsprinzip der Furniermaschinen *Messerfurniere* und *Schälfurniere*.
Holz wird durch Trocknen, Tränken und Holzschutzmaßnahmen *vergütet*. Durch die *Holztrocknung* wird ein Teil des Feuchtesatzes entzogen, um Qualitätsminderungen (Verformungen, Verwerfungen) bei der Weiterverarbeitung zu vermeiden. Durch *Tränkung* mit Vergütungsmitteln werden die physikalischen Eigenschaften des Holzes beeinflußt (Tabelle 55). *Holzschutzmaßnahmen* dienen der Erhaltung des Gebrauchswerts und der Sicherung einer maximalen Gebrauchsdauer des Holzes. Dazu gehört die Anwendung von Holzschutzmitteln, die als Salze, Salzlösungen, ölige Mittel, Pasten u. ä. im Handel sind.

Lagenholz[176][177]

Dieser Holzwerkstoff ist aus geschichteten, miteinander verklebten Furnieren aufgebaut. Typische Holzarten, die dafür eingesetzt werden, sind Rotbuche und Birke. Als Klebstoffe finden Harnstoffharze, Phenolharze und Polyesterharze Verwendung. Die Lagenholzarten unterscheidet man nach der Verdichtung, dem Plastgehalt und nach der Lage der Faserrichtung der Furniere zueinander. Begriffe enthält die Tabelle 56.

Verbundplatten[176]

Verbundplatten bestehen aus mehreren, untereinander verbundenen (verklebten) Werkstoffen. Sie sind meist aus *Mittellage* (aus Holzwerkstoffen, Plasthartschaumstoffen, Papierwabenstützkernen und Schnittholz) und symmetrisch angeordneten *Außenlagen* (aus Furnieren, Hartfaserplatten, Schichtpreßstoffen und Asbestzementplatten) aufgebaut.

*) siehe auch Fachwissen des Ingenieurs, Band 3: Abschn. Maschinen und Anlagen für die Holzbearbeitung

Tabelle 55. Begriffe für vergütetes Vollholz

Art	Erklärung
Preßvollholz (verdichtetes Vollholz)	wird unter Einwirkung von Wärme und Druck entweder einseitig (Rohdichte 1000 ··· 1200 kg/m³) oder zweiseitig (Rohdichte 1300 ··· 1400 kg/m³) verdichtet
Tränkvollholz	besitzt durch Tränken mit Holzschutzmitteln, Kunstharz, Öl oder Metallen veränderte Eigenschaften
Formvollholz	wird durch eine spezielle Vorbehandlung (Hochfrequenzerwärmung, Dämpfen oder Kochen) plastisch formbar

Tabelle 56. Einteilung von Lagenholz

Lagenholzart	Erläuterung
nach der Verdichtung und dem Plastgehalt	
Normal-Lagenholz	Lagenholz, bei dem die Furniere bei der Klebung höchstens um 10% verdichtet werden und das nur die für die Verklebung notwendige Menge härtbarer Plastklebstoffe enthält
Plastlagenholz	Lagenholz, bei dem die Furniere bei der Klebung höchstens um 10% verdichtet werden und im gesamten Furnierquerschnitt gehärtetes Plastmaterial verteilt ist
Preßlagenholz	Lagenholz, bei dem die Furniere bei der Klebung mehr als 10% verdichtet werden und das nur die für die Verklebung der Furniere notwendige Menge härtbarer Plastklebstoffe enthält
Plast-Preßlagenholz	Lagenholz, bei dem die Furniere bei der Klebung mehr als 10% verdichtet werden und im gesamten Furnierquerschnitt gehärtetes Plastmaterial verteilt ist
nach der Lage der Faserrichtung der Furniere zueinander	
Schichtholz	Lagenholz, bei dem die Faserrichtung der Furniere parallel zueinander angeordnet ist
Sperrholz	Lagenholz, bei dem die Faserrichtung der Furniere von Schicht zu Schicht im Winkel von 90° zueinander liegt
Sternholz	Lagenholz, bei dem die Faserrichtung der übereinander liegenden Furniere Winkel von 15 ··· 45° bilden

Spanplatten

Spanplatten werden überwiegend aus Schneidspänen und teilweise aus aufbereiteten Abfallspänen aller Holzarten hergestellt. Man unterscheidet sie nach Verdichtung, Spanform, Lage der Späne im Plattenquerschnitt, Querschnittstruktur und Zustand ihrer Oberfläche. Die *Holzausbeute* liegt bei der Spanplattenherstellung zwischen 85 und 95%. *Flachgepreßte Spanplatten* können ein-, drei- oder mehrschichtig oder stufenlos geschliffen sein. In *stranggepreßten Spanplatten* sind die Späne quer zur Plattenebene angeordnet. Zur Weiterverarbeitung werden sie wegen ihrer geringen Eigenfestigkeit mit Furnieren oder Faserplatten hoher Dichte versehen.

Faserplatten[178])[179])

Die Herstellung erfolgt aus Rohholzrestsortimenten und Holzabfällen von Laub- und Nadelholz nach einer speziellen Technologie. Man unterscheidet Faserplatten nach Verdichtung, Querschnittstruktur (einschichtig, mehrschichtig) und Zustand der Oberfläche. Das gegenwärtig am weitesten verbreitete Verfahren zur Faserplattenherstellung ist das *Naßverfahren* (Defibratormethode), bei dem die Ausbeute, bezogen auf die Holzmasse, 80 ··· 85% des eingesetzten Holzes beträgt. Neben dem Naßverfahren existieren noch *Halbtrocken-* und *Trockenverfahren*, bei denen die Verfilzung der Fasern ohne Wasser mechanisch bzw. im Luftstrom vorgenommen wird.

3.5.3. Eigenschaften von Vollholz und Werkstoffen aus Holz

Vollholz

Holz ist hygroskopisch. Die *Fasersättigung* (Sättigung im Kapillarsystem der Zellwand) tritt bei 25···35% Holzfeuchte ein. Zwischen Holzfeuchte, der umgebenden Luftfeuchte und -temperatur stellt sich bis zur Fasersättigung ein *hygroskopisches Gleichgewicht* ein. Werden alle Hohlräume des Holzes mit Wasser gefüllt, spricht man von der *Wassersättigung.* Im Bereich des hygroskopischen Gleichgewichts tritt bei Feuchtigkeitsabgabe *Schwinden* und bei Befeuchten trockenen Holzes *Quellen* ein. Die Schwindmaße sind abhängig von der Holzart und in den Hauptrichtungen des Stamms unterschiedlich (Tabelle 57); die axialen Schwindmaße sind meist kleiner als 0,5% und werden vielfach vernachlässigt.

Die *Festigkeitseigenschaften* des Vollholzes werden innerhalb einer Holzart wesentlich vom Winkel zwischen Holzfaser und Beanspruchungsrichtung, von der Holzfeuchte (mit steigenden Werten abnehmende Festigkeit innerhalb des hygroskopischen Bereichs) und der Umgebungstemperatur beeinflußt.
Holz hat in Luft oder Wasser eine praktisch unbegrenzte *Lebensdauer,* wenn es vor pflanzlichen oder tierischen Schädlingen geschützt wird. Die *akustischen Eigenschaften* sind von denen anderer Stoffe verschieden; so beträgt die *Schallgeschwindigkeit* in Faserrichtung 350 ··· 5300 m/s. Während die *thermischen Eigenschaften* von Rohdichte, Feuchte und Temperatur abhängen, sind die *elektrischen Eigenschaften* stark holzfeuchteabhängig. Mit steigender Holzfeuchte fällt der elektrische Widerstand, die elektrische Leitfähigkeit ist in den drei Schnittrichtungen unterschiedlich, wobei sie längs der Faser etwa doppelt so groß wie quer dazu ist.

Tabelle 57. Mittlere Schwindmaße einiger Holzarten

Holzart	Schwindmaß in %		
	radial	tangential	räumlich
Fichte	3,6	7,8	11,9
Kiefer	4,0	7,7	12,1
Lärche	3,3	7,8	11,4
Birke	5,3	7,8	13,7
Eiche	4,0	7,8	12,2
Rotbuche	5,8	11,8	17,8

Lagenholz[176])

Die Eigenschaften von Sperr- und Schichtholz werden entscheidend durch Holzart, Furnierqualität und durch die Art der Klebung beeinflußt. Die *mechanischen Eigenschaften* von unverdichtetem Lagenholz in Plattenebene sind in Abhängigkeit von der Lagenzahl, -anordnung und Klebstoffmenge weniger richtungsabhängig als bei Vollholz. *Quellen* und *Schwinden* kommen dem des Vollholzes in Faserrichtung nahe, senkrecht dazu ist das Quellverhalten geringer. Die Steifigkeit und Festigkeit von verdichtetem Lagenholz erhöhen sich gegenüber dem Ausgangswerkstoff in Abhängigkeit vom Klebstoffanteil und von der Verdichtung.

Spanplatten

Die *physikalischen Eigenschaften* hängen vorrangig von der Plattenrohdichte ab, die vom eingesetzten Rohholz, vom Plattenaufbau, von der Klebstoffart und -menge beeinflußt wird. Spanplatten haben gegenüber Vollholz verbesserte hygroskopische Eigenschaften.

Faserplatten[178])

Die *physikalischen Eigenschaften* sind von der Rohdichte der Faserplatten abhängig, die technologisch vom Verdichtungsgrad beeinflußt wird. Man teilt Faserplatten in *poröse, halbharte, harte* und *extraharte Platten* ein. Bei Faserplatten ist die ursprüngliche Richtungsabhängigkeit der Eigenschaften weitgehend aufgehoben. Technologisch bedingt ergeben

sich in Plattenlängsrichtung 10···15% höhere Festigkeitswerte als quer dazu. Die Quellung von Faserplatten ist teilweise irreversibel.
Tabelle 58 gibt Eigenschaftswerte ausgewählter Hölzer und Holzwerkstoffe wieder.

Tabelle 58. Eigenschaftswerte von ausgewählten Hölzern und Werkstoffen aus Holz (nach [55, 21, 57])

Eigenschaft	Fichte*)	Rotbuche*)	Harte Faserplatte aus Holz	Holzspanplatte	Sperrholz (Richtwert)	Plast-Preßlagenholz
Rohdichte in kg/m³	330 ··· 680	540 ··· 910	950 ··· 1 050	550 ··· 650	470 ··· 780	1 100 ··· 1 300
Zugfestigkeit in MPa	21 ··· 245 (pF)	57 ··· 180 (pF)	21 ··· 40 (pF)	5 ··· 10 (pP)	18 ··· 90 (pF)	70 ··· 140 (pF)
Biegefestigkeit in MPa	49 ··· 136 (pF)	74 ··· 210 (pF)	35 ··· 50	12 ··· 30 (sP)	25 ··· 130 (sP)	120 ··· 240 (pF, sP)
Druckfestigkeit in MPa	35 ··· 79 (pF)	41 ··· 99 (pF)	24 ··· 27	10 ··· 18 (pP)	< 45 (pF)	120 ··· 220 (pF)
Querzugfestigkeit in MPa	—	—	0,5 (sP)	0,4 ··· 0,8 (sP)	—	—
Elastizitätsmodul in MPa	12500 (pF)	16000 (pF)	3600 ··· 4400	3200	3600 ··· 13250	< 18700
Gleichgewichtsfeuchtesatz in % bei 20 °C und 60% rel. Luftfeuchte	12 ··· 15	12 ··· 15	7 ··· 9	8 ··· 11	8 ··· 12	6 ··· 8
Wärmeleitfähigkeit in W/(m · K)	0,088 ··· 0,105 (sF)	0,151 ··· 0,178 (sF)	0,140	0,093 (sP)	0,14	0,35 ··· 0,47

*) Werte gelten nur für 12% Holzfeuchte und Raumtemperatur;
(pF) parallel zur Faserrichtung, (sF) senkrecht zur Faserrichtung, (pP) parallel zur Plattenebene, (sP) senkrecht zur Plattenebene

3.5.4. Anwendung von Holz und Holzwerkstoffen

Holz gehört zu den wichtigsten natürlichen Roh- und Werkstoffen. *Vollholz* ist ein traditioneller Werkstoff des Bauwesens (Einzelbauteile, geleimte oder genagelte Holzbauelemente im Ingenieurbau). Es wird für Grubenholz im Bergbau, im Boots-, Wagen-, Möbel- und Musikinstrumentenbau eingesetzt. Die *Plattenwerkstoffe* (Furnier-, Verbund-, Span- und Faserplatten) werden für die Herstellung von Möbeln, Verpackungen, Verschalungen und im Fahrzeug- und Schiffbau verwendet. *Hartfaserplatten* sind als Deckschichtwerkstoffe für die Stützkernbauweise geeignet. *Preßlagenholz* und *-vollholz* benutzt man zur Herstellung von Maschinenelementen (Lagerschalen, Zahnräder, Webschütze) und Ziehformen. *Faserholz* ist der Rohstoff für Papier-, Kunstseide- und Zellwolleprodukte. Aus *Holzwolle* mit anorganischen Bindemitteln werden Leichtbauplatten[180]) hergestellt.
Die Verwertung von Holz ist an bestimmte Rechtsvorschriften gebunden. Begriffe und Prüfvorschriften für Holz und Holzwerkstoffe sind weitgehend standardisiert[181])···[184]).

3.6. Vulkanfiber

Vulkanfiber (Vf) ist ein Werkstoff aus Zellulosehydrat. Die Vulkanfiber hat eine *Dichte* von 1100···1400 kg/m³, sie ist bis 70 °C (maximal 90 °C) wärmebeständig und gegen Öle, Fette und Lösungsmittel widerstandsfähig, unbeständig aber gegen starke Säuren und Laugen. Ihre *Eigenschaften* sind richtungsabhängig, z. B. beträgt die *Zugfestigkeit* in Plattenlängsrichtung 80···120 MPa, quer dazu nur 50···80 MPa. Der *Elastizitätsmodul* liegt zwischen 500···750 GPa. Vulkanfiber ist unempfindlich gegenüber Schlag und Stoß und läßt sich

spangebend gut bearbeiten. Sie kann nach vorherigem Erweichen im warmen Wasser spanlos umgeformt, außerdem geklebt und genietet werden. Durch *Hydrophobierung* wird Vulkanfiber wasserabweisend; bei Erhitzen zersetzt sie sich, ohne zu schmelzen.

Vulkanfiber (Vf) wird hergestellt, indem ungeleimte saugfähige Papierbahnen durch eine 70%ige Zinkchloridlösung (75 °C) oder durch starke Schwefelsäure gezogen werden. Nach Auspressen der überschüssigen Lösung werden die Bahnen unter Wärme- und Druckeinwirkung zu mehreren, sich miteinander verbindenden Schichten auf eine Wickelwalze aufgewickelt. Danach wäscht man das Zinkchlorid oder die Schwefelsäure aus und trocknet und preßt die Vulkanfiber. Außer Platten lassen sich Rohre und Stäbe im Wickelverfahren herstellen.

Anwendung. Vulkanfiber wird als Folien- oder Plattenwerkstoff in der Koffer-, Textil- und Elektroindustrie eingesetzt. Aus ihr werden Dichtungsringe und -manschetten, Kupplungsbeläge, Bremsblöcke, Bedienteile, Textilmaschinenteile und Zahnräder hergestellt.

3.7. Faserstoffe

Literatur: [9, 22, 34, 48, 59]

Faserstoffe bestehen aus längenbegrenzten oder nichtlängenbegrenzten schmiegsamen Gebilden von (im Vergleich zu den Abmessungen des Querschnitts) großer Länge. Die Verarbeitung der Faserstoffe zum einsatzfähigen Endprodukt erfolgt in den Zweigen der *Textilindustrie*: Spinnerei, Weberei, Wirkerei, Strickerei und Veredlung. Man unterscheidet *Naturfaserstoffe*, die in der Natur bereits als Fasern oder Fäden vorkommen, und *Chemiefaserstoffe*, die auf chemischem Wege hergestellt werden. Dazu zählt man Chemiefaserstoffe aus natürlichen Polymeren (z. B. Viskose- und Azetatfaserstoffe) und Chemiefaserstoffe aus synthetischen Polymeren (Synthesefaserstoffe, z. B. Polyakrylnitril- und Polyesterfaserstoffe).

Das Gebiet der Faserstoffe wird heute durch das Anwachsen der Bedeutung der Chemiefaserstoffe, die Entwicklung neuer Herstellungs- und Behandlungsverfahren und die Entwicklung neuer Fachzweige (z. B. Nähwirktechnik, Vliesstofftechnik) bestimmt. Bild 52 gibt einen Überblick über textile Faserstoffe.

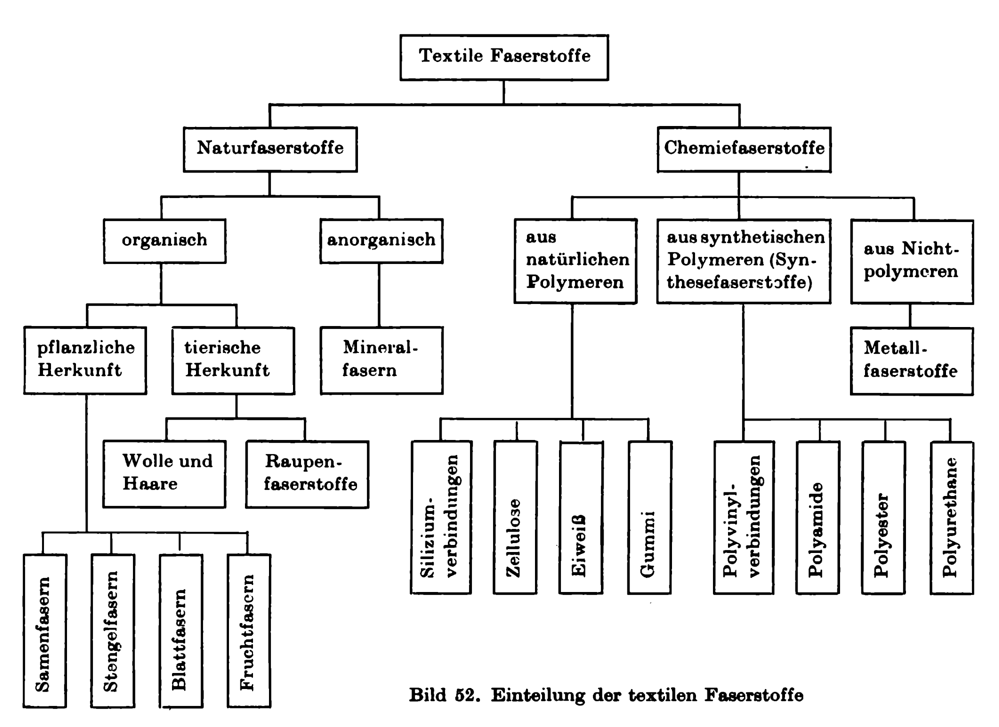


Bild 52. Einteilung der textilen Faserstoffe



3.7.1. Allgemeines über Faserstoffe

3.7.1.1. Begriffe[185])

Elementarfaden: einzelnes nichtlängenbegrenztes Gebilde des textilen Faserstoffs;
Faden: Sammelbegriff für Vorgarn, Garn, Seide, Zwirn, gefachter Faden und Schnur;
Faser: einzelnes längenbegrenztes Gebilde des textilen Faserstoffs;
Faserband: linienförmiges, verzugsfähiges Gebilde (meist ohne Drehung) aus in Längsrichtung orientierten Fasern;
Garn: aus Fasern bestehender, nicht verzugsfähiger einzelner Faden;
Gewebe: textiles Flächengebilde aus zwei im allgemeinen rechtwinklig zueinander laufenden Fadensystemen (Kette und Schuß), deren Fäden miteinander gesetzmäßig verkreuzt sind;
Schnur: geschnürter oder geflochtener Faden bis 5 mm Durchmesser;
Seide: aus einem Elementarfaden (monofile Seide) oder aus mehreren Elementarfäden (polyfile Seide) bestehender Faden;
Vlies: infolge natürlicher Haftung zusammenhängende Faserschichten
Vliesstoff: ganz oder teilweise aus Fasern bestehende Faserschichten oder Faservliese, die durch mechanisch oder adhäsiv wirkende Bindemittel zu Flächengebilden verfestigt werden;
Vorgarn: durch Verspinnen von Faserbändern oder durch Nitscheln von Florstreifen (Runden der Faserbänder mit Hilfe zweier gegenläufiger Lederbänder) entstandener verzugsfähiger Faden;
Zwirn: aus zusammengedrehten (miteinander verzwirnten) Garnen, Seiden und/oder Zwirnen bestehender Faden.
Bild 53 zeigt den Zusammenhang zwischen Faserstoffen, Fäden und textilen Flächengebilden.

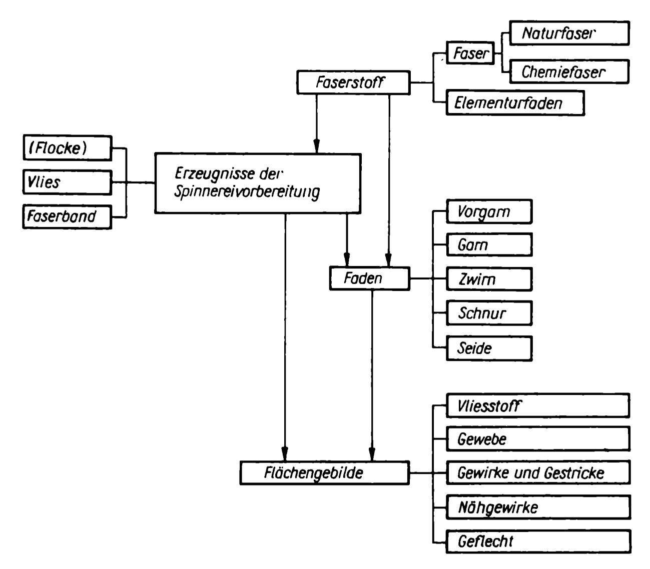


Bild 53. Zusammenhang Faserstoff — Faden — Flächengebilde

3.7.1.2. Feinheit

Die Feinheit (Tt) als Maß für die Faser- bzw. Fadendicke ist gleich dem Quotienten aus Masse und Länge der Faser bzw. des Fadens[186])[187]). Dabei wurde für 1 g/1000 m die Feinheit 1 tex eingeführt (Tabelle 59). Im Zuge der Umstellung auf die Einheiten des Internationalen Einheitensystems (SI) zählt diese Einheit

zu den SI-fremden Einheiten, die in Spezialgebieten weiterhin zugelassen sind. Für Faserstoffe wird vorzugsweise der tausendste Teil (mtex, Millitex), für besonders dicke Fäden und Faserbänder das Tausendfache (ktex, Kilotex) angegeben.
Neben der Feinheit Tt ist zur Feinheitsbezeichnung auch die *Längennumerierung* Nm üblich. Sie gibt den Quotienten aus Länge (in m) und Masse (in g) an. Feine Monofilfäden haben etwa die Feinheit $2 \cdot 10^{-6}$ kg/m (2 tex, Nm 500), dicke Jutegarne dagegen etwa 10^{-3} kg/m (1000 tex, Nm 1).
Zur Feinheitsbezeichnung von Elementarfäden der Natur- und Chemieseiden sowie von Chemiefasern wurde bisher zuweilen das System der *Gewichtsnumerierung* (Titer Denier, Td) verwendet. Die Feinheit Denier (den, 1 den = 1/20 g) gibt an, welche Masse (in g) ein Faden von 9000 m Länge hat.

Tabelle 59. Einheiten der Feinheitssysteme

Benennung	Symbol	Einheit	Kurzzeichen	Beziehung zum SI	Weitere mögliche Darstellung
Tex-System	Tt	Tex*)	tex	1 tex = 10^{-6} kg/m	1 tex = 1 g/km = 1 mg/m
Nm-System	Nm	Meter je Gramm	m/g	1 m/g = 10^3 m/kg	1 m/g = 1 mm/mg = 1 km/kg
Denier-System	Td	Denier	den	1 den = $(10^{-6}/9)$ kg/m	1 den = 1 g/9000 m

*) Die Einheit Tex ist eine SI-fremde Einheit, die nur in der Textilindustrie zugelassen ist

3.7.1.3. Kurzzeichen der textilen Faserstoffe

Zur Kennzeichnung von textilen Faserstoffen werden für den Typ, die Herstellungsform und die Ausführungsart Kurzzeichen verwendet (Tabelle 60).

Tabelle 60. Kurzzeichen von Natur- und Chemiefaserstoffen

Naturfaserstoffe

Faserstoff	Kurzzeichen	Faserstoff	Kurzzeichen
Asbest	As	Kapok	Kp
Baumwolle	Bw	Mohair	Mo
Bombyxfaserstoff	Bx	Ramie	Ra
Flachs	Fl	Roßhaar	Rh
Hanf	Ha	Sisal	Si
Jute	Ju	Tussahfaserstoff	Ts
Kamelhaar	Km	Wolle	Wo
Kokos	Ko		

Chemiefaserstoffe[188])

Faserstoff	Kurzzeichen	Faserstoff	Kurzzeichen
Alginat	AL	Polypropylen	PP
Azetat	AZ	Polyäthylen	PT
Glas	GL	Polyurethan	PU
Kasein	KA	Polyvinylalkohol	PVA
Kuoxam	KU	Polystyrol	PVB
Metall	MT	Polyvinylchlorid	PVC
Polyamid	PA	Polyvinylidenchlorid	PVD
Polybutadien	PB	Polyakrylnitril	PAN
Polyester	PE	Schlacken	SL
Polytetrafluoräthylen	PFT	Gestein	ST
Polyharnstoff	PH	Triazetat	TA
		Viskose	Vi

3.7.2. Faserstoffe und ihre Eigenschaften

3.7.2.1. Naturfaserstoffe

Pflanzliche Fasern

Die Fasergewinnung kann je nach Pflanzenart aus den *Samenfasern* der Samenkerne, den *Stengelfasern*, den *Blattfasern* oder den *Fruchtfasern* erfolgen.

Samenfasern (Samenkernfasern)

Baumwolle gewinnt man aus den Samenhaaren einer strauchartigen Malvenart. Die Fasern werden in Egreniermaschinen vom Samen getrennt. Die Linters (kurze Fasern am Samen) werden nicht versponnen, sondern vorzugsweise zur Herstellung von Kupfer-, Azetat-, aber auch Viskosefaserstoff und Schichtpreßstoff verwendet. Die Baumwolle eignet sich von allen Faserstoffen am besten zum Verspinnen.
Kapok sind die Samenhaare des tropischen Kapokbaums. Verwendung als Polstermaterial.

Stengelfasern (Bastfasern)

Flachs wird aus der einjährigen Flachspflanze (Lein) gewonnen. Die Faserbündel werden durch biologischen oder mechanischen Aufschluß aus der Pflanze entfernt. Aus Flachs erzeugt man besonders Bett- und Tischwäsche, Handtücher, Planen usw. *Hanf* sind Fasern aus den Stengeln einer einjährigen Hauspflanze. Die Gewinnung ist ähnlich wie beim Flachs. Verwendung für Bindfäden, Schnüre und feine Seilerwaren. *Jute* ist die Stengelfaser eines Lindengewächses. Verwendung für Säcke, Polstergewebe usw. Weitere Stengelfasern sind *Ramie*, *Kenaf*, *Kanatnik* (Chinafaser), *Kendir*, *Typha* und *Strohfaser*.

Blatt- oder Hartfasern (von tropischen oder subtropischen Pflanzen)

Blattfasern sind Agave- (Sisal), Abak-, Palmen-, Neuseeland- und Ananasfasern sowie Yucca. Verwendung vorwiegend für Seilerwaren, Taue, Läufer, Matten usw.

Tierische Faserstoffe

Wollen und Haare

Wolle nennt man die feinen, mehr oder weniger wellenförmig gekräuselten und filzfähigen Fasern von Schafen, Mohärziegen, Lamas, Alpakas, Vikonjas, Kamelen und Angorakaninchen. *Haare* sind dagegen nicht gekräuselte, meist gröbere Fasern von Hausziegen, Kaninchen, Pferden usw.
Naturseiden (fertige Fäden großer Länge, Feinheit und Festigkeit).
Maulbeerseide (Bombyxfaserstoff) und *Tussahseide* werden aus den Kokons des Maulbeer- bzw. Tussahspinners gewonnen. Verwendung für Nähfäden sowie Gewebe für Bekleidungszwecke.

Mineralfasern

Asbest ist die wichtigste in der Natur vorkommende Mineralfaser. Er ist ein faserig kristallisiertes, silikatisches Mineral, das in aufgeschlossenem Zustand verspinnbare Fasern von 20 ··· 40 mm Länge ergibt. Er besitzt eine hohe Temperaturbeständigkeit und ist unbrennbar. Verwendung für Schutzkleidung, Theaterdekoration, Dichtungen, Bremsbeläge, Asbestbeton, Leichtbauplatten, Feuerschutzbeläge usw.

3.7.2.2. Chemiefaserstoffe

Chemiefaserstoffe werden auf chemischem Wege hergestellt. Sie sind hochmolekular. Teils kommen die kettenartigen Moleküle in der Natur vor und brauchen nur durch chemische Modifikation in eine spinnfähige Form gebracht zu werden (*Regeneratfaserstoffe*), teils werden die Makromoleküle durch Polymerisation, Polykondensation oder Polyaddition der einfachen Grundmoleküle erzeugt (*Synthesefaserstoffe*). Die aus dem Rohprodukt gewonnenen Fäden werden im Trockenspinnverfahren z. T. nachbehandelt, im Naßspinnverfahren zusätzlich gewaschen und getrocknet. Um Fasern herzustellen, faßt man sie zu einem Spinnkabel zusammen, das man in Stücke („auf Stapel") schneidet, und diese Stapelfasern im Direktspinnverfahren zu einem Garn verspinnt.
Regeneratfaserstoffe werden durch Umwandlung von Zellulosen gewonnen und in Form von Seide (z. B. Viskoseseide, früher Kunstseide) oder Fasern (z. B. Viskosefasern, früher Zellwolle) hergestellt.

Viskosefaserstoffe sind Fasern und Seiden, die nach dem Viskoseverfahren aus Zellulose (meist Holzstoff) hergestellt (etwa 50% aller Chemiefaserstoffe) und rein oder in Mischung mit Baumwolle, Wolle oder Synthesefasern versponnen werden.
Modalfaserstoffe werden nach modifizierten Viskosespinnverfahren erzeugt. Sie zeichnen sich durch hohe Trocken- und Naßfestigkeit, geringe Naßreißdehnung und geringere Quellung gegenüber der Normalfaser aus.
Kupferfaserstoffe (Kuoxamfaserstoffe) werden aus Zellulose, die in Tetramminkupfer(II)-hydroxidlösung (Kuoxam, Kupferoxidammoniak) gelöst wurde, versponnen. Ausgangsmaterial ist Linters oder Zellstoff. Kupferseide hat naturseidenähnlichen Glanz und Griff und ist hochwertiger und teuerer als Viskoseseide. Kupferfasern werden nur noch in geringem Umfang hergestellt.
Azetatfaserstoffe werden aus Zelluloseazetat (Azetylzellulose) ersponnen. $2^1/_2$-Azetatfaserstoffe werden aus azetonlöslicher Azetylzellulose (die zu $^5/_6$ verestert ist) hergestellt. Triazetatfaserstoffe erhält man durch vollständige Veresterung von Zellulose mit Azetanhydrid. Die Azetatfaserstoffe ähneln sehr stark der Naturseide und werden deshalb besonders zu wertvollen Stoffen verarbeitet.

Synthesefaserstoffe

Polyolefinfaserstoffe (Polyäthylen- und Polypropylenfaserstoffe) werden vornehmlich für technische Zwecke (z. B. Säcke, Planen, Seilerwaren, Fußbodenbelag) verwendet. Sie sind fest, chemikalienbeständig und haben eine geringere Dichte als Wasser ($0{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³).
Polyvinylchloridfaserstoffe werden meist aus nachchloriertem Polyvinylchlorid hergestellt (z. B. PIVIACID®), sind sehr chemikalien-, fäulnis- und verrottungsfest, aber leicht elektrostatisch aufladbar, in Form versponnener Fasern wärmehaltend, nicht entflammbar, jedoch nur von geringer Temperaturbeständigkeit (bis etwa 70 °C). Sie werden hauptsächlich auf dem technischen Sektor (für Filtertücher, technische Gewebe, Autoschonbezüge), jedoch z. B. auch für Rheumawäsche und -decken (VYLAN®) verwendet. Mischpolymerisate mit Polyvinylidenchlorid (z. B. SARAN®), mit Polyvinylazetat (z. B. VINYON®) und mit Polyakrylnitril (z. B. DYNEL®) haben höhere Temperaturbeständigkeit.
Polyakrylnitrilfaserstoffe (z. B. WOLPRYLA®) ähneln im Verhalten und Aussehen der Wolle und enthalten 85 ··· 100% Akrylnitril. Sie verfügen über ein gutes Wärmehaltevermögen, geringe Dichte, gute Knitterfestigkeit, sind kochfest, bis 150 °C bügelfest, licht- sowie wetterbeständig und haben geringes Wasseraufnahmevermögen. Anwendung finden sie vor allem in Form von Wirk- und Strickwaren, Segeltuch und Dekorationsstoffen.
Polyvinylalkoholfaserstoffe werden durch teilweise Verseifung von Polyvinylazetat erhalten. Sie sind gegen Chemikalien und Mikroorganismen beständig. Ihre Wasserlöslichkeit wird bei der Verwendung als Stickgrund, Trennfäden u. ä. ausgenutzt. *Polyvinylazetalfaserstoffe* erhält man durch Azetalisierung von Polyvinylalkohol. Diese Faserstoffe sind wasserunlöslich und werden für Bekleidung und technische Textilien eingesetzt.
Polyamidfaserstoffe (z. B. DEDERON®) zeichnen sich durch sehr hohe Trocken-, Naß- und Scheuerfestigkeit, geringes Feuchtigkeitsaufnahmevermögen, gute Elastizität und geringe Empfindlichkeit gegenüber Hitze und Säuren aus. Sie eignen sich für strapazierfähige Web- und Wirkwaren sowie Fasermischungen (Ober- und Unterbekleidung, Möbelstoff, Teppiche, technische Gewebe).
Polyesterfaserstoffe (z. B. GRISUTEN®) weisen von allen Synthesefaserstoffen die höchste Knitterresistenz sowie thermische Beständigkeit (außer Perfluoräthylenfaserstoffe) und geringste Feuchtigkeitsaufnahme (außer Polyolefinfaserstoffe) auf, ferner die höchste Elastizität aller Faserstoffe, eine ausgezeichnete Formbeständigkeit, gute Licht- und Wetterbeständigkeit. Sie sind sehr gut geeignet für Kleider-, Anzug- und Mantelstoffe, für Obertrikotagen, Gardinen und auch technische Gewebe.

Die Polyamid-, Polyakrylnitril- und Polyesterfaserstoffe werden in großem Umfang auch in Mischung mit anderen Faserstoffen versponnen, wobei man durch zweckmäßige Wahl der Anteile die Eigenschaften der Faserkomponenten für den Einsatzzweck optimal kombiniert. Baumwolle und Viskosefasern haben sich in Mischung mit Polyamidfasern sowie Polyester- bzw. Polyakrylnitrilfasern mit Wolle bewährt.

Polyurethanfaserstoffe werden durch Polyaddition von Diisozyanaten mit Glykolen gewonnen. Sie zeichnen sich durch eine gute Chemikalienbeständigkeit und hohe Elastizität aus.

Anorganische Faserstoffe

Hierzu gehören neben *Glasseide* und *-fasern* auch *Metallfäden* und feine *Metalldrähte*, aus denen man Metallgewebe, Siebe und Gaze herstellt und die man auch als Zierfäden (Effektfäden) in Geweben verwendet. In Spezialfällen werden zur Verstärkung von Plasten in der Raketen- und Raumfahrttechnik *Whisker* (z. B. Siliziumkarbid) verwendet.

Werte ausgewählter Natur- und Chemiefaserstoffe enthält Tabelle 61.

Tabelle 61. Eigenschaftswerte ausgewählter Faserstoffe (Richtwerte)

Faserstoff	Länge in mm	Dicke in μm	Dichte in 10^3 kg/m³	Spez. Reißkraft in 10^5 N/(kg/m) (p/tex)	Reiß-Nennspannung in MPa	Reißdehnung, trocken in %	Hitzebeständigkeit		Feuchtegehalt in %	Feinheit in Nm
							Erweichungspunkt in °C	Schmelzpunkt in °C		
Baumwolle	10 ··· 42	12 ··· 42	1,47 ··· 1,55	27 ··· 44	400 ··· 650	6 ··· 10	wird braun bei 120 ··· 150 °C			8000 ··· 2400
Flachs Elementarfaser	20 ··· 50	12 ··· 37	1,44 ··· 1,46	30 ··· 60	430 ··· 850	3 ··· 5			10	10^4 ··· 1500
techn. Faser	100 ··· 600			40 ··· 80	570 ··· 1140	2 ··· 3				900 ··· 300
Hanf Elementarfaser	15 ··· 55	16 ··· 50	1,48	30 ··· 60	430 ··· 870	3 ··· 5			10	2000
techn. Faser	650 ··· 750			40 ··· 80	580 ··· 1160	2 ··· 3				600 ··· 100
Jute Elementarfaser	1 ··· 5	15 ··· 25	1,44	30 ··· 34	420 ··· 480	1,3			12,5	500
techn. Faser	200 ··· 250									600
Ramie	60 ··· 260	40 ··· 80	1,50	48 ··· 67	710 ··· 990	2 ··· 3			7,5	
Schafwolle	60 ··· 250 (400)	17 ··· 42 (90)	1,30 ··· 1,32	9 ··· 18	120 ··· 240	25 ··· 45	Festigkeitsverlust bei 100 ··· 130 °C, verkohlt bei 205 ··· 300 °C			
Naturseide, entbastet	3600 ··· 150000	9 ··· 11	1,25 ··· 1,37	27 ··· 40	310 ··· 570	13 ··· 31				
Viskosefasern und -elementarfäden		10 ··· 50	1,50 ··· 1,52	21 ··· 24	310 ··· 350	15 ··· 23	Festigkeitsverlust bei 150 °C, zersetzt sich bei 175 ··· 205 °C		11,5 ··· 12,5	9000 ··· 300
Azetatfasern und -elementarfäden		10 ··· 50	1,29 ··· 1,33	12 ··· 14	160 ··· 180	25 ··· 35	thermoplastisch bei 175 ··· 190 °C,	260	6,25	
Kupferfasern und -elementarfäden		10 ··· 50	1,52	14 ··· 17 15 ··· 21	210 ··· 250 220 ··· 310	30 ··· 40 10 ··· 17	Festigkeitsverlust bei 150 °C, zersetzt sich bei 175 ··· 205 °C			
Polyamidfasern und -elementarfäden		10 ··· 30	1,14 ··· 1,15	36 ··· 54 40 ··· 56	400 ··· 610 450 ··· 630	40 ··· 70 30 ··· 46	170	215	4,5 ··· 5,0	
Polyakrylnitrilfasern und -elementarfäden		10 ··· 30	1,17	22 ··· 29	250 ··· 330	25 ··· 35	Zersetzung bei 300 °C			3600 ··· 1800 (W-Typ) 1125 ··· 300 (T-Typ)
Polyesterfasern und -elementarfäden		10 ··· 30	1,38	38 ··· 60 38 ··· 45	510 ··· 820 510 ··· 610	24 ··· 55 18 ··· 30		248 ··· 256		3600 ··· 2400
Polyvinylchloridfasern		10 ··· 30	1,44	10 ··· 17	140 ··· 250	24 ··· 46	80	210	0,4	3600 ··· 1800
Polyurethanfasern und -elementarfäden			1,21	5,4 ··· 7,2	70 ··· 90		175	250	0,3	
Glasfaser-Elementarfäden	70 ··· 120	4 ··· 12 (30)	2,54	54 ··· 66	1340 ··· 1650	3 ··· 4	815		0	

3.7.2.3. Handelsnamen von Chemiefaserstoffen

Die Handelsnamen der wichtigsten Chemiefaserstoffe sind Tabelle 62 zu entnehmen.

Tabelle 62. Handelsnamen von Chemiefaserstoffen (Auswahl)

Handelsname	Faserstoff	Form*)	Herstellerland
Acetat®	AZ	F, S	BRD
Acrilan®	PAN	F, K, S	USA, GB
Akon	PA6	S	UdSSR
Anid	PA6,6	S	UdSSR
Anilana®	PAN	F	VR Polen
Antron®	PA6,6	F, K, S	USA, Kanada
Chlorin	PVC	F	UdSSR
Colva®	VI	F	BRD
Crinovyl®	PVC	F	Frankreich
Dacron®	PE	F, K, S	USA, BRD
DEDERON®	PA6	F, S, B	DDR
Diolen®	PE	F, K, S	BRD
Dralon®	PAN	F, K, S	BRD
Dynel®	PVC/PAN	F, K	USA
Elana	PE	F	VR Polen
Elastomer	PU	F, S	BRD
GRISUTEN®	PE	F, S	DDR
Kapron®	PA6	F, S	UdSSR, ČSSR
Kuralon®	PVA	F, K, S	Japan
Lycra®	PU	F, S	USA, GB, Kanada
Marvess®	PT, PP	S, K	USA
Meron	PA6	S	UdSSR
Nitron®	PAN	F	UdSSR
Nylon	PA6,6	F, S	BRD, Ital. Frankreich
Orlon®	PAN	F, K, S	USA, GB, Kanada
Perlon®	PA6	F, K, S, B	BRD
PIVIACID®	PVC	F	DDR
REGAN®	VI	F, S	DDR
Saran®	PVC/PVD	F, K, S	USA, Kanada
Silon®	PA6	F, S	ČSSR
Stilon®	PA6	S	VR Polen
Teklan®	PAN/PVD	F, S	GB
Terylene®	PE	F, K, S	BRD, GB, Kanada
Trevira®	PE	F, K, S	BRD
Velana	PE	F	ČSSR
Vestan®	PE	F, K	BRD
Vistra®	VI	F	BRD
WOLPRYLA®	PAN	F, K	DDR

*) Die Kurzzeichen der Herstellungsformen sind: *B* Konverterband; *F* Faser; *K* Elementarfadenkabel; *S* Elementarfäden als monofile oder polyfile Seide

Literaturverzeichnis

[1] *Claus, F., Göttlich, K. B.:* Umfangreiche Anregungen für hohe Materialökonomie sind vorhanden. — Z. Technische Gemeinschaft 23 (1975) 3, S. 4–7

[2] *Diehl, H., Wagner, F.:* Substitution durch Plaste. — Erfurt: Neuererzentrum des Bezirkswirtschaftsrates 1970

[3] *Drechsel, H., Kalweit, H.-J., Krimmling, W.:* Übersicht über Handelsnamen wichtiger Plast- und Elastwerkstoffe mit Einsatzgebieten. 2. Aufl. — Dresden: Institut für Leichtbau und ökonomische Verwendung von Werkstoffen 1974

[4] *Merkel, M., Thomas, K.-H.:* Technische Stoffe (Reihe: Nachschlagebücher für Grundlagenfächer). — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[5] Mitteilung Nr. 90 der Stahlberatungsstelle im Metallurgiehandel, VE Außen- und Binnenhandelsbetrieb der DDR. — Freiberg: Stahlberatungsstelle 1971

Weiterführende Literatur

[6] Aluminium-Taschenbuch. 13. Aufl. — Düsseldorf: Aluminium-Verlag GmbH 1973

[7] *Autorenkollektiv:* Aktuelle Probleme bei der Gewinnung von Nichteisenmetallen. Freiberger Forschungshefte B 113. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1967

[8] *Autorenkollektiv:* Einführung in die Werkstoffwissenschaft. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979

[9] *Autorenkollektiv:* Faserstofflehre. 5. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975

[10] *Autorenkollektiv:* Grundlagen metallischer Werkstoffe. Korrosion und Korrosionsschutz (Technische Stoffe für die Ausbildung von Ingenieuren). 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[11] *Autorenkollektiv:* Gußwerkstoffe, Nichteisenmetalle, Sinterwerkstoffe, Plaste. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[12] *Autorenkollektiv:* Lexikon der Holztechnik. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1967

[13] *Autorenkollektiv:* Lieferprogramm Stahl. 4 Teile. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975

[14] *Autorenkollektiv:* Nickel und Nickellegierungen. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1970

[15] *Autorenkollektiv:* Probleme der Verarbeitung von Nichteisenmetallschrott. Freiberger Forschungshefte B 134. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1968

[16] *Autorenkollektiv:* Probleme der Verarbeitung von Sekundärrohstoffen und Abfallprodukten in der NE-Metallurgie. Freiberger Forschungshefte B 156. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1970

[17] *Autorenkollektiv:* Qualitäts- und Edelstähle der Deutschen Demokratischen Republik. 2 Bände. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1974, 1975

[18] *Autorenkollektiv:* Stahlfehleratlas. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1971

[19] *Autorenkollektiv:* Stähle und ihre Wärmebehandlung. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[20] *Autorenkollektiv:* Tabellenbuch für Stahlverbraucher. 10. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[21] *Autorenkollektiv:* Taschenbuch der Holztechnologie. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[22] *Autorenkollektiv:* Textile Werkstoffe. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980

[23] *Autorenkollektiv:* TGL-Taschenbuch NE-Metalle. 3 Bände. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975, 1976

[24] *Autorenkollektiv:* TGL-Taschenbuch Stahl. 3 Bände. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976

[25] *Autorenkollektiv:* Werkstoffe aus Holz (Reihe Holztechnik). — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975

[26] *Autorenkollektiv:* Werkstoff-Handbuch Nichteisenmetalle. 2. Aufl. — Düsseldorf: VDI-Verlag GmbH 1960

[27] *Bachmann, A., Müller, K.:* Phenoplaste. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973

[28] *Baumgartl, E.:* Werkstoffkunde — kurz und einprägsam. 5. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[29] *Becker, R.:* Polyurethane. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973

[30] *Beckert, M., Hartmann, R.:* Nichtmetallische Werkstoffe — allgemeinverständlich. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976

[31] *Beyer, B.:* Werkstoffkunde NE-Metalle. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1971

[32] *Bickel, E.:* Die metallischen Werkstoffe des Maschinenbaues. 4. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, Springer-Verlag 1964

[33] *Biederbick, K.:* Kunststoffe kurz und bündig. 3. Aufl. — Würzburg: Vogel-Verlag 1974

[34] *Böttcher, P.:* Textiltechnik. Reihe Wissensspeicher für Technologen. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977

[35] *Dies, K.:* Kupfer und Kupferlegierungen in der Technik. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1967

[36] *Dimter, L.:* Klebstoffe für Plaste. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1969

[37] *Domininghaus, H.:* VDI-Taschenbuch Kunststoffe I. 2. Aufl. — Düsseldorf: VDI-Verlag 1972

[38] *Domke, W.:* Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung — Repetitorium des Ingenieurwissens. 5. Aufl. — Essen: Verlag W. Girardet 1973

[39] *Eckstein, H.-J.:* Wärmebehandlung von Stahl. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973

[40] *Eckstein, H.-J.:* Werkstoffkunde — Stahl und Eisen. 2 Teile. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1971, 1972

[41] *Franke, W., Meyer, K., Vinz, W.:* Kleiner Wissensspeicher Chemiefasern. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977

[42] *Grahl, F.:* Tabellenbuch für Aluminium-Verbraucher. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1967

[43] *Halász, R.:* Holzbau-Taschenbuch. 7. Aufl. — Berlin (West), München, Düsseldorf: Verlag Wilhelm Ernst & Sohn 1974

[44] *Heinrich, W.:* Grundsätze der Plastanwendung. 4. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1968

[45] *Heinz, H., Pusch, G., Krempe, M.:* Technische Stoffe. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1980
[46] *Hellerich, W., Harsch, G., Haenle, S.:* Werkstoff-Führer Kunststoffe. 2. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1979
[47] *Herfurth, K., Hilgenfeldt, W.:* Tabellenbuch für Gußverbraucher. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1968
[48] *Hermann, L.:* Polyesterfasern. Chemie und Technologie. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1975
[49] *Hornbogen, E.:* Werkstoffe. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1973
[50] *Hornbogen, E., Warlimont, H.:* Metallkunde. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1967
[51] *Hornbogen, E., Warlimont, H.:* Werkstoffe — erforscht, geprüft, verarbeitet (Vorträge 1971). — Berlin (West): Colloquium Verlag 1972
[52] *Houwink, R., Staverman, A. J.:* Chemie und Technologie der Kunststoffe. Band I—III. 4. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1962—1963
[53] *Klemm, H.:* Die Gefüge des Eisen-Kohlenstoff-Systems. 6. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979
[54] *König, E.:* Holz-Lexikon. 2 Bände. 2. Aufl. — Stuttgart: DRW-Verlag Weinbrenner GmbH 1972
[55] *Lampert, H.:* Faserplatten. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1967
[56] *Langendorf, G., Eichler, H.:* Holzvergütung (Reihe Holztechnik). 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
[57] *Langendorf, G., Schuster, E., Wagenführ, R.:* Rohholz (Reihe Holztechnik). 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976
[58] *Menges, G.:* Einführung in die Kunststoffverarbeitung. 2. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1979
[59] *Meyer, K.:* Chemiefasern. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1971
[60] *Meysenburg, C. M. Frh. v.:* Kunststoffkunde für Ingenieure. — München: Carl Hanser Verlag 1973
[61] *Oberbach, K.:* Kunststoff-Kennwerte für Konstrukteure. — München: Carl Hanser Verlag 1980
[62] *Rätzsch, M., Arnold, M.:* Hochpolymere und ihre Herstellung. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973
[63] *Saechtling, H.:* Kunststoff-Taschenbuch. 21. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1979
[64] *Schaaf, W., Hahnemann, A.:* Verarbeitung von Plasten. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1971
[65] *Scheer, L., Berns, H.:* Was ist Stahl. 14. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1974
[66] *Schmiedel, H., Schiefer, H.:* Hochpolymere und ihre Prüfung. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972
[67] *Schrader, W., Franke, W.:* Kleiner Wissensspeicher Plaste. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1970
[68] *Schreyer, G.:* Konstruieren mit Kunststoffen. — München: Carl Hanser Verlag 1972
[69] *Schumann, H.:* Metallographie. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975
[70] *Stoeckhert, K.:* Kunststoff-Lexikon. 7. Aufl. — München: Carl Hanser Verlag 1981
[71] *Uhlig, H. H.:* Korrosion und Korrosionsschutz. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1975
[72] VDI-Handbuch Kunststofftechnik. — Berlin (West), Köln: Beuth-Verlag GmbH
[73] *Vieweg, R.:* Kunststoff-Handbuch. 11 Bände. — München: Carl Hanser Verlag 1963—1975
[74] *Wagenführ, R.:* Anatomie des Holzes. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980
[75] *Wagenführ, R., Scheiber, Ch.:* Holzatlas. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
[76] *Weißbach, W.:* Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung. 7. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1979
[77] *Werner, K.:* Arbeitsstähle der Welt. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973
[78] *Wosnizok, W.:* Werkstoffe — kurz und übersichtlich. 8. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1978
[79] *Zimmer, W.:* Korrosion der Metalle. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970
[80] *Zimmermann, R., Günther, K.:* Metallurgie und Werkstofftechnik — ein Wissensspeicher. 2 Bände. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977
[81] *Autorenkollektiv:* Konstruktiver Plasteinsatz. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977
[82] *Laeis, W.:* Einführung in die Werkstoffkunde der Kunststoffe. — München: Carl Hanser Verlag 1972
[83] *Runge, F., Taeger, E.:* Einführung in die Chemie und Technologie der Kunststoffe. 4. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1976
[84] *Torner, R. W.:* Grundprozesse der Verarbeitung von Polymeren. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1974

WP Werkstoffprüfung

Von Dr. rer. nat. Horst Bretschneider, Niederwiesa (Abschn. 7.), *Dipl.-Ing. Werner Dude, Dresden* (Abschn. 1., 2. und 5.) *und Doz. Dr.-Ing. Herbert Opitz, Dresden* (Abschn. 3., 4. und 6.)

Inhaltsverzeichnis

Wichtigste Formelzeichen

Formelzeichen	Einheit	Größe	Formelzeichen	Einheit	Größe
A	μm^2	Kornfläche	α	mm^2/N	Dehnzahl
A_0	mm^2	Ausgangsquerschnitt	δ	—	Bruchdehnung
a_K	J/mm^2	Kerbschlagbiegezähigkeit	η	Pa · s, mPa · s	dynamische Viskosität
E	MPa, GPa	Elastizitätsmodul			
F	N	Kraft	σ_B	MPa	Zugfestigkeit
f	mm	Durchbiegung	σ_D	MPa	Dauerschwingfestigkeit
H_K	N/cm^2	Kugeldruckhärte	σ_S	MPa	Streck- oder Fließgrenze
HB	—	Brinellhärte	σ_W	MPa	Wechselfestigkeit
HR	—	Rockwellhärte	$\sigma_{0,01}$	MPa	technische Elastizitätsgrenze
HV	—	Vickershärte			
l_0	mm	Ausgangslänge	τ_{aB}	MPa	Scherfestigkeit
M_b	N · mm	Biegemoment	τ_{tB}	MPa	Verdreh- oder Torsionsfestigkeit
W_x	mm^3	axiales Widerstandsmoment	ψ	—	Brucheinschnürung

1. Einführung

Die Werkstoffprüfung als Teilgebiet der *Werkstoffwissenschaft* befaßt sich vorwiegend mit der Untersuchung der technischen Stoffe (Eisenwerkstoffe, NE-Werkstoffe, hochpolymere Werkstoffe, silikatische Werkstoffe, Öle, Fette usw.) hinsichtlich der Beschaffenheit und der Eignung für bestimmte Zwecke. Eine umfassende Beschreibung der Werkstoffeigenschaften durch Kenngrößen und Kennwerte ist die wichtigste Voraussetzung für den optimalen Einsatz der Werkstoffe. Werkstoffauswahl und Konstruktion setzen die Kenntnis dieser Werkstoffeigenschaften voraus. Die Eigenschaften der Werkstoffe müssen immer besser dem technischen Fortschritt nutzbar gemacht werden. Ein eigenschaftsgerechter Werkstoffeinsatz trägt schließlich dazu bei, die Effektivität der Wirtschaft zu erhöhen. Die Wahl des technisch und ökonomisch günstigsten Werkstoffs für den jeweiligen Zweck ist ein wichtiger Vorgang im Konstruktionsprozeß. Davon hängt nicht nur die Funktionsfähigkeit des Erzeugnisses ab, sondern auch seine Verkaufsfähigkeit und die Materialökonomie.
An die einzelnen Prüfverfahren werden bestimmte Forderungen gestellt, da mit der Entwicklung der Technik die Entwicklung der Werkstoffe parallel laufen muß. Solche Forderungen sind u. a.:

- Übertragbarkeit der Ergebnisse (Sind die unter den speziellen Prüfbedingungen entstandenen Kennwerte auf den praktischen Anwendungsfall übertragbar?),
- praxisnahe Prüfbedingungen,
- möglichst geringe Prüfkosten (richtiges Verhältnis zum Aufwand),
- quantitative Angabe der Kenngrößen,
- Beachtung der thermischen, mechanischen und chemischen Einflußgrößen.

In diesem Abschnitt sind die wichtigsten Werkstoffprüfverfahren zusammengestellt, ohne durch die Reihenfolge der aufgeführten Verfahren eine Wertigkeit auszudrücken. Die zerstörungsfreie Werkstoffprüfung hat in den letzten Jahrzehnten stark an Bedeutung zugenommen, vor allem deshalb, weil selbststrahlende radioaktive Präparate und magnetinduktive Verfahren entwickelt wurden.
Um in die Probleme der Werkstoffprüfung tiefer eindringen zu können, wird im Literaturverzeichnis eine Zusammenstellung weiterführender Literatur angegeben.

2. Mechanisch-technologische Prüfverfahren

Literatur: [1, 3, 9, 10, 12, 14, 26, 28]

Mit Hilfe der mechanisch-technologischen Prüfverfahren[1]) wird im Gegensatz zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung das Werkstoffverhalten anhand des teilweisen oder gesamten Zerstörungsverlaufs beurteilt. Dabei unterscheidet man je nach Krafteinwirkung (Zeit und Kraftrichtung) zwischen

— den *statischen Untersuchungen* (ruhende oder stetig anwachsende, zügige Krafteinwirkung) und
— den *dynamischen Untersuchungen* (schlag- oder stoßweise bzw. schwingende, wechselnde Krafteinwirkung).

Die mechanisch-technologische Werkstoffprüfung hat vier Aufgabengebiete:

1. Untersuchungen der Werkstoffe auf ihre Verwendbarkeit. Diese werden meist an standardisierten Proben unter ganz bestimmten Bedingungen durchgeführt.
2. Werkstoffuntersuchungen zur Qualitätskontrolle und -sicherung beim Materialeingang, während der Fertigung usw.
3. Bauteiluntersuchungen unter Betriebsbedingungen. Diese sind schwierig zu verwirklichen, da sich meist mehrere Beanspruchungsarten überlagern.
4. Werkstoffuntersuchungen zur Aufklärung von Schadensfällen, wie z. B. die Ergründung von Bruchursachen bei zerstörten Bauteilen.

2.1. Prüfverfahren bei statischer Beanspruchung

Zu den Werkstoffprüfverfahren bei ruhender oder zügiger Krafteinwirkung zählen:

Zugversuch,	Verdrehversuch,
Druckversuch,	Scher- und Lochversuch,
Biegeversuch,	Härtemessung.

Diese klassischen Verfahren sind gleichzeitig auch die historisch ältesten Werkstoffprüfverfahren, deren Geräte und Methoden ständig verbessert und verändert wurden.

2.1.1. Zugversuch[2])

Prüfbedingungen und Zweck des Zugversuchs

Zugprobe und Prüfmaschine müssen einen möglichst *einachsigen Spannungszustand* garantieren, d. h. gleichmäßig verteilte *Normalspannungen* über den gesamten Querschnitt des Prüflings hervorrufen. Die Zugbelastung der Probe muß gleichmäßig und stoßfrei vorgenommen werden, und die *Belastungsgeschwindigkeit* soll einen vom zu prüfenden Werkstoff abhängigen Wert nicht überschreiten.

Zum Beispiel soll für Stahl bis zum Eintritt der Streckgrenze die Spannungszunahme je Sekunde nicht mehr betragen als 10 MPa.

Der Zweck des Zugversuchs besteht hauptsächlich darin, vergleichbare Festigkeits- und Verformungskennwerte zu ermitteln[3]):

Festigkeitskennwerte:			*Verformungskennwerte:*		
Zugfestigkeit	σ_B	in MPa	Dehnung	ε	in %
Technische Elastizitätsgrenze	$\sigma_{0,01}$	in MPa	Bruchdehnung	δ	in %
Streckgrenze	σ_S	in MPa	Einschnürung	q	in %
0,2- (Dehn-) Grenze	$\sigma_{0,2}$	in MPa	Brucheinschnürung	ψ	in %

Andere Kennwerte:

Elastizitätsmodul E in MPa

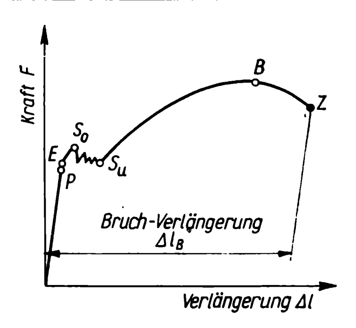


Bild 1. Kraft-Verlängerungs-Diagramm von weichem Stahl

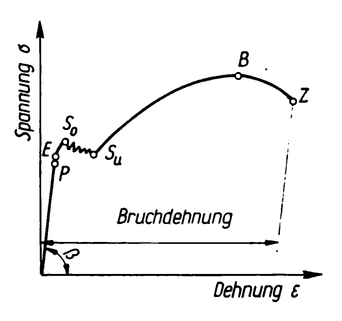


Bild 2. Spannungs-Dehnungs-Diagramm von weichem Stahl

Tabelle 1. Beanspruchungsgrenzen beim Zugversuch

Beanspruchungsgrenze	Definition	Bedeutung	Ermittlung
Proportionalitätsgrenze P	diejenige Spannung σ_P, bis zu der die Spannungen und Dehnungen zueinander proportional sind. Mathematisch wird dieser Sachverhalt durch das Hookesche Gesetz ausgedrückt: $\varepsilon = \alpha\sigma$ $\sigma = E\varepsilon$	Bis zu P liegt ein rein elastisches Verhalten vor. Der Elastizitätsmodul E ist die Kenngröße dafür.	σ_P wird praktisch nicht ermittelt. Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes kann man den Elastizitätsmodul E ermitteln, indem man bei verschiedenen Spannungen σ die Dehnung ε mißt und in die Formel einsetzt.
Elastizitätsgrenze E	diejenige Spannung σ_E, die eine bleibende Dehnung von 0,01 ··· 0,005% hervorruft. Die Abweichung vom Grenzpunkt erscheint als Index, also statt σ_E z. B. $\sigma_{0,01}$.	E ist die äußerste Grenze der zulässigen Belastbarkeit für Konstruktions- und Bauteile. In der Regel bleibt man darunter.	Es wird mit einem Feindehnungsmeßgerät eine bleibende Dehnung von 0,01% der Ausgangslänge l_0 eines Probestabes gemessen. Die dazu notwendige Spannung ist $\sigma_{0,01}$.
Streck- oder Fließgrenze S	diejenige Spannung σ_S, bei der erstmalig eine merkliche bleibende Dehnung auftritt. Bei Werkstoffen, wo dies nicht beobachtbar ist, ist es diejenige Spannung $\sigma_{0,2}$, die eine bleibende Dehnung von 0,2% hervorruft.	Bei der spanlosen Formgebung (Ziehen, Tiefziehen, Prägen usw.) muß die Streckgrenze überschritten werden.	Durch Beobachten des Kraftanzeigers erhält man σ_S. Durch Messung der bleibenden Dehnung von 0,2% erhält man $\sigma_{0,2}$. Letztere kann man auch zeichnerisch am Spannungs-Dehnungs-Diagramm ablesen, indem der Schnittpunkt einer Parallelen zur Hookeschen Geraden im Abstand von 0,2% der Meßlänge L_0 mit der Meßwertkurve ermittelt wird.
Bruchgrenze B	diejenige Spannung σ_B, bei der die maximal mögliche Spannung erreicht ist (Zugfestigkeit).	Höchste Spannung, bevor oder bei welcher der Bruch eintritt.	σ_B ist an der Zugmaschine oder am Spannungs-Dehnungs-Diagramm abzulesen.

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm und die charakteristischen Kenngrößen

Spannungs-Dehnungs- bzw. Kraft-Verlängerungs-Diagramme sind *Beanspruchungs-Verformungs-Schaulinien*, die den gesamten Deformations- und Zerstörungsverlauf des Werkstoffs bei Zugbeanspruchung darstellen (Bilder 1 und 2). Sie zeigen charakteristische *Beanspruchungsgrenzen*, die je nach Werkstoffgruppe mehr oder weniger stark ausgeprägt sind. Diese Beanspruchungsgrenzen werden wie folgt bezeichnet:

P Proportionalitätsgrenze
E Elastizitätsgrenze
S_0 obere Streck- oder Fließgrenze
S_u untere Streck- oder Fließgrenze
B Bruchgrenze
Z Zerreißpunkt

Dabei fallen die Proportionalitätsgrenze und die theoretische Elastizitätsgrenze in der Regel zusammen, bei spröden Werkstoffen ist die Bruchgrenze gleich dem Zerreißpunkt. In der Tabelle 1 sind die Beanspruchungsgrenzen definiert. Der Zerreißpunkt wurde weggelassen, da er keine praktische Bedeutung hat. Alle diese Grenzspannungen ergeben sich als Quotient aus der von der Zugmaschine angezeigten Kraft und dem Ausgangsquerschnitt des Probestabs:

$$\sigma = F/A_0 \qquad (1)$$

Die Verformungskenngrößen des Zugversuchs sind die *Bruchdehnung* und die *Brucheinschnürung*. Beide geben Auskunft über das plastische Verhalten des Werkstoffs.
Die Bruchdehnung ist die mittlere Dehnung des Probestabs nach dem Bruch. Sie berechnet sich in Prozent aus der nach erfolgtem Bruch gemessenen Verlängerung der Probe, bezogen auf die Ausgangslänge l_0:

$$\delta = (l_B - l_0)/l_0 \cdot 100\% \qquad (2)$$

l_B Bruchlänge des Probestabs

Angegeben wird die Bruchdehnung 5 oder 10 (δ_5 oder δ_{10}), je nachdem, ob das *Meßlängenverhältnis* (l_0/d_0) des Probestabs 5 oder 10 war.

Die Brucheinschnürung ψ ist die prozentuale Querschnittsverminderung an der Bruchstelle der Zugprobe:

$$\psi = (A_0 - A_B)/A_0 \cdot 100\% \qquad (3)$$

A_0 Ausgangs-, A_B Bruchquerschnitt

Bei Hochpolymeren wird statt der 0,2-(Dehn-)Grenze die 2%-Dehngrenze σ_{S2} als *Ersatzstreckgrenze* gemessen. Die Bruchdehnung wird mit ε_B bezeichnet.

Zugproben

Um vergleichbare Versuchsergebnisse zu erhalten, muß man bestimmte geometrische Formen, Maße, Maßverhältnisse und Oberflächenbeschaffenheiten bei der Herstellung der Zugproben beachten[4]). Diese sind in Abhängigkeit von der Werkstoffgruppe verschieden, jedoch muß in der Regel eine Versuchslänge l_V vorhanden sein und für die Aufnahme in die Einspannvorrichtung der Zugmaschine ein verstärkter Kopf (Bild 3).

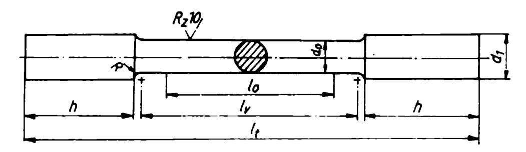


Bild 3. Rundprobe mit glatten Zylinderköpfen für Beißbacken

Auf der Versuchslänge l_V wird die Meßlänge l_0 angerissen, die die Grundlage für die Dehnungsmessung ist. Versuchslänge l_V, Meßlänge l_0 und Kopfdurchmesser d_1 sind abhängige Maße, die den entsprechenden Standards zu entnehmen sind. Der Querschnitt der Proben kann kreisförmig, quadratisch oder rechteckig sein. Bei Proben mit rechteckigem Querschnitt soll ein Seitenverhältnis von 1:4 nicht überschritten werden.

Die Kopfformen der Proben sind unterschiedlich und richten sich nach der Einspannvorrichtung der Zugmaschine und der zulässigen Rutschfreiheit des Probestabs. Es gibt z. B. für Prüfungen an Metallen Rundproben mit glattem Kopf (Bild 3), mit Gewindekopf, mit Schulterkopf und mit Kegelkopf. Besonders starke Abweichungen in Form, Maßen und Oberflächenbeschaffenheit findet man bei den Zugproben für dünne Bleche[5]), Grauguß[6]), Temperguß[7]), Nichteisenmetalldruckguß, Hochpolymere[8]), Schweißverbindungen und den Silikatwerkstoffen.

Maschinen und Geräte für den Zugversuch

Zur Durchführung von Zugversuchen benötigt man die *Zugprüfmaschine* und diverse *Meßmittel*[9]).

Zugprüfmaschinen sind in der Regel Universalprüfmaschinen, d. h., durch geringe Umbauten sind sie außer für den Zugversuch auch für den Druck-, Knick-, Biege-, Falt- und Scherversuch geeignet.

Die Zugprüfmaschine besteht aus Krafterzeugungsanlage, Einspannvorrichtung zur Aufnahme der Zugproben, Kraftmeßeinrichtung, Diagrammapparat und Dehnungsanzeiger. Moderne Zugprüfmaschinen haben elektronische Kraft- und Dehnungsanzeiger. Man unterscheidet Prüfmaschinen mit vertikaler oder horizontaler Kraftrichtung (stehende oder liegende Maschinen). In der Regel verwendet man stehende Maschinen; liegende nur für sehr lange Prüflinge. Die Zugprüfmaschinen besitzen einen elektrischen Antrieb mit mechanischer oder hydraulischer Kraftübertragung. Die Messung der auf die Probe einwirkenden Kraft geschieht mechanisch, hydraulisch oder elektronisch. Die Einspannvorrichtungen müssen schnell zu bedienen und leicht auswechselbar sein; die Verschleißteile müssen leicht ersetzt werden können. Sie haben eine einwandfreie zentrische Belastung des Probestabs zu garantieren.

Zur Ermittlung der Bruchdehnung muß die am Probestab angerissene Meßlänge l_0 (siehe Bild 3) in eine gerade Anzahl gleicher Teile eingeteilt werden. Dazu benutzt man Probestabteilmaschinen, die entweder von Hand oder durch einen Elektromotor betrieben werden.

Die wichtigsten Meßmittel sind die *Feindehnungsmeßgeräte*. Es gibt z. Z. zwei Ausführungen für Laborversuche, nämlich

— das elektronische Dehnungsmeßgerät und
— das Spiegel-Feindehnungsmeßgerät.

Außerdem gibt es noch für Untersuchungen an Bauteilen eine elektrische Dehnungsmeßanlage mit Streifengebern.

Das *elektronische Dehnungsmeßgerät* besteht aus dem *Dehnungsaufnehmer* und dem *Netzgerät*. Der Dehnungsaufnehmer ist am Probestab befestigt (Bild 4) und durch Kabel mit dem Netzteil verbunden. Das *Spiegel-Feindehnungsmeßgerät* besteht aus den Doppelschneiden mit Spiegel am Probestab (Bild 5) und den Ablesefernrohren mit Meßskalen (Bild 6). Das Meßprinzip ist dadurch charakterisiert, daß die Verlängerung Δl des Probestabs (Bild 7) in eine Drehung des Doppelschneidenkörpers *1* mit dem Spiegel *7* verwandelt wird. Der Sehstrahl wandert dadurch auf der Meßskale *8*, und der Betrag Δd, der proportional Δl ist, kann mittels des Ablesefernrohrs *9* abgelesen werden. Die Meßgenauigkeit beider Geräte ist sehr groß; es sind Verlängerungen des Probestabs von 0,0001 mm meßbar. Das elektronische Dehnungsmeßgerät hat gegenüber dem Spiegel-Feindehnungsmeßgerät einige Vorteile, z. B. einfachere Handhabbarkeit, kürzere Meßzeiten und universelle Einsatzmöglichkeiten (auch für größere Meßbereiche). Mit dem Spiegel-Feindehnungsmeßgerät können die Elastizitätsgrenze $\sigma_{0,01}$ und der Elastizitätsmodul E gemessen werden, wogegen mit dem elektronischen Dehnungsmeßgerät zusätzlich auch noch die Streckgrenze $\sigma_{0,2}$ ermittelt werden kann.

Dehnungsmessungen mit geringerer Meßgenauigkeit werden zur Ermittlung der 0,2-(Dehn-) Grenze $\sigma_{0,2}$ benötigt. Diese Geräte arbeiten mit *Meßuhren*.

Die Verlängerung des Probestabs wird über Stahlschneiden *1* (Bild 8) direkt auf den Taster der Meßuhren *2* übertragen. Die Stahlschneiden sind mit Hilfe von Federn *3* im Abstand l_0 an den Probestab *4* angeklemmt. Die unteren Stahlschneiden sind drehbar gelagert.

Probenahme und Auswertung

Die Zugprobe muß so entnommen werden, daß ihre Eigenschaften den durchschnittlichen Eigenschaften des ganzen Werkstoffs oder Halbzeugs entsprechen. Sowohl bei der Entnahme der Probe als auch bei der Bearbeitung ist darauf zu achten, daß an den Schnitt- oder Bearbeitungskanten keine Gefügeveränderungen durch Kaltverformung oder Erwärmung ein-

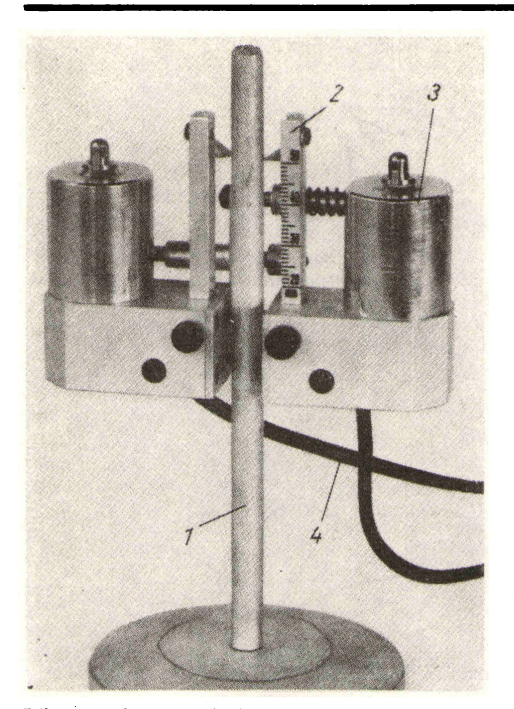


Bild 4. Dehnungsaufnehmer eines elektronischen Dehnungsmeßgeräts (VEB Carl Zeiss JENA). *1* Probestab; *2* Meßfeder; *3* induktiver Geber; *4* Zuleitung zum Netzgerät

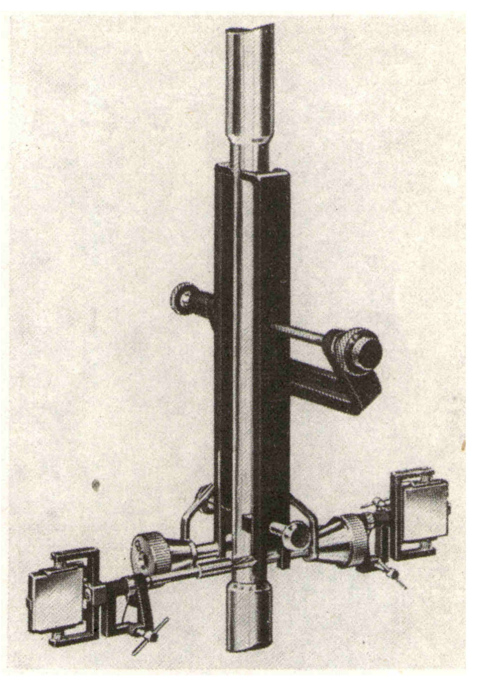
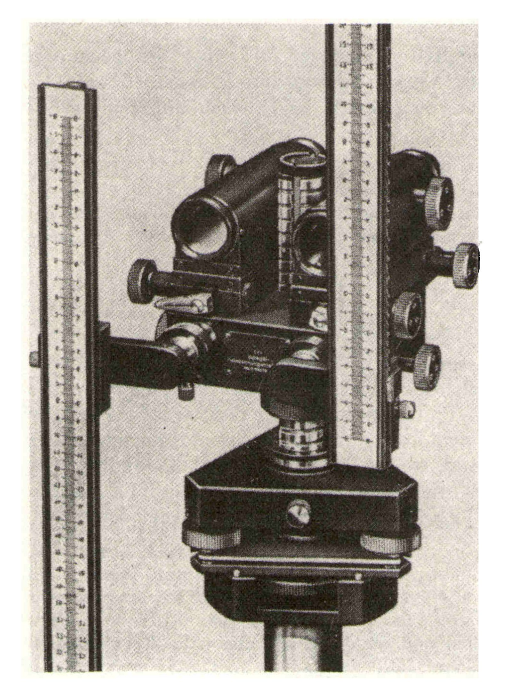


Bild 5. Doppelschneiden mit Spiegel (VEB Carl Zeiss JENA)



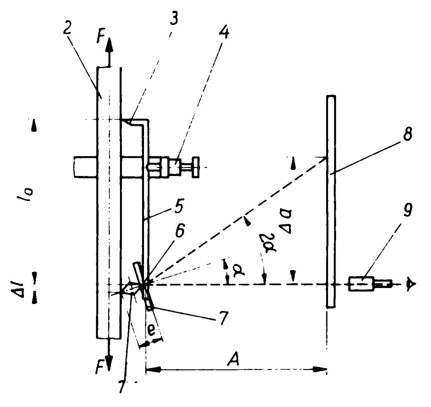


Bild 7. Meßprinzip des Spiegel-Feindehnungsmeßgeräts. *1* Doppelschneidenkörper; *2* Probestab; *3* Meßschienenschneide; *4* Meßschienenklemme; *5* Meßschiene; *6* Meßschienenpfanne; *7* Spiegel; *8* Meßskale; *9* Ablesefernrohr

Bild 6. Ablesefernrohre mit Meßskalen (VEB Carl Zeiss JENA)

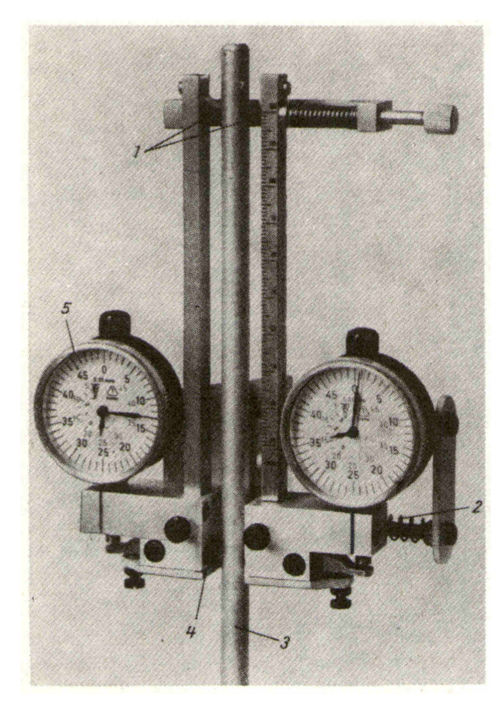


Bild 8. Dehnungsmesser mit zwei Meßuhren (VEB Carl Zeiss JENA). *1* obere Stahlschneiden; *2* Feder; *3* Probestab; *4* untere Stahlschneiden; *5* Meßuhr

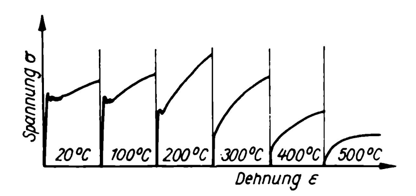


Bild 9. Veränderung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms von weichem Stahl durch Temperatureinfluß [13]

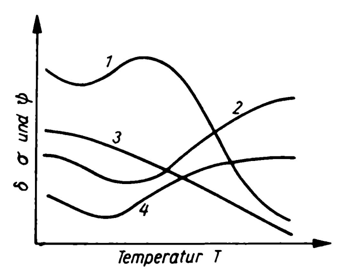


Bild 10. Veränderung der Kennwerte von unlegiertem Stahl durch Temperatureinfluß. *1* Zugfestigkeit; *2* Brucheinschnürung; *3* Streckgrenze; *4* Bruchdehnung

treten. Im übrigen müssen die Maße genau eingehalten werden, und über der gesamten Versuchslänge l_V des Probestabs muß ein konstanter Querschnitt vorhanden sein.
Zur *Auswertung* des Zugversuchs werden folgende Ergebnisse und Erscheinungen herangezogen:

- die Kennwerte der Kenngrößen $\sigma_{0,01}$, $\sigma_{0,2}$, σ_S, σ_B, δ, ψ und E;
- das Spannungs-Dehnungs- bzw. Kraft-Verlängerungs-Diagramm: (Lage der Hookeschen Geraden, Streckgrenze, Maximalwert B und Kurvenverlauf nach dem Punkt B);
- Erscheinungen und Beobachtungen während des Zugversuchs, wie z. B. Veränderungen der Oberfläche (Warzenbildung, Rauhigkeit usw.);
- die Bruchform und die Beschaffenheit der Bruchfläche.

Temperatureinfluß auf die Kenngrößen

Die Festigkeits- und die Verformungskenngrößen des Zugversuchs sind temperaturabhängige Eigenschaften, besonders bei hochpolymeren Werkstoffen. Sehr anschaulich kann man dies am Spannungs-Dehnungs-Diagramm erkennen (z. B. für einen weichen Stahl, Bild 9). Die Änderung von Zugfestigkeit, Streckgrenze, Bruchdehnung und Brucheinschnürung eines unlegierten Stahls mit der Temperatur ist aus Bild 10 ersichtlich. Bei den hochpolymeren Werkstoffen behalten die Duroplaste ihre Festigkeit annähernd bis 150 °C, während die meisten Thermoplaste bei 100 °C nur noch 20···60% ihrer Festigkeit bei Raumtemperatur besitzen.

Für die Untersuchung der Werkstoffe bei erhöhten Temperaturen führt man sog. *Warmzugversuche* durch. Sie gleichen im Prinzip dem Zugversuch bei Raumtemperatur. Es muß nur dafür gesorgt werden, daß während des Versuchs über der gesamten Versuchslänge des Probestabs die erforderliche Prüftemperatur herrscht. Für Prüftemperaturen bis 600 °C kommen dafür Flüssigkeitsbadöfen zur Anwendung. Über 600 °C verwendet man elektrisch beheizte Luftumwälzöfen und für die Erzeugung tiefer Temperaturen Behälter mit Kohlensäureschnee, flüssige Luft usw.

2.1.2. Zeitstandversuch

Versuche, in denen das Verhalten der Werkstoffe bei ruhender Beanspruchung und Temperatureinfluß über längere Zeit untersucht wird, heißen *Standversuche*[10]). Dabei unterscheidet man zwischen:

— *Zeitstandversuchen* (konstante Temperatur und konstante Belastung) und
— *Entspannungsversuchen* (konstante Temperatur und nachlassende Belastung).

Es soll in diesem Abschnitt nur auf den wichtigeren Zeitstandversuch eingegangen werden.

Tabelle 2. Temperaturbereiche für Zeitstandversuche

Werkstoffgruppe	Temperaturbereich in K (°C)	
Unlegierte Stähle	573 ··· 873	(300 ··· 600)
Niedriglegierte Stähle	573 ··· 923	(300 ··· 650)
Hochlegierte Stähle (nicht austenitische)	623 ··· 1 023	(350 ··· 750)
Hochlegierte Stähle (austenitische und halbaustenitische)	673 ··· 1 273	(400 ··· 1 000)
CrNi-Stähle	773 ··· 1 373	(500 ··· 1 100)
Cu- und Al-Legierungen	373 ··· 698	(100 ··· 425)

Tabelle 3. Kenngrößen des Zeitstandversuchs

Kenngröße	Angaben im Index*)	Symbol	Beispiel
Bruchzeit	—	t_B	—
Zeitstand-festigkeit	Zeit in h	$\sigma_{B/Zeit}$	$\sigma_{B/10000}$
Zeitdehngrenze	% bleibende Dehnung/Zeit in h	$\sigma_{Dehnung/Zeit}$	$\sigma_{1/10000}$
Kriechgrenze	Kriechgeschwindigkeit in 10^{-4}% je h — Zeit in h	$\sigma_{Kriechgeschw.\text{-}Zeit}$	σ_{10-30}
Zeitstand-bruchdehnung	Meßlängen-verhältnis/Zeit in h	$\delta_{Meßlängenverh./Zeit}$	$\delta_{5/10000}$
Zeitstand-brucheinschnürung	Zeit in h	ψ_{Zeit}	ψ_{10000}

*) Obwohl die SI-Einheit der Zeit die Sekunde ist, bleibt die Stunde (h) weiterhin gesetzliche Einheit.

Prüfbedingungen und Zweck des Zeitstandversuchs

Der Probestab muß in Richtung seiner Stabachse ruhenden Zugkräften bei konstanter Temperatur ausgesetzt werden. Das Zeitstandverhalten der Werkstoffe ist dabei charakterisiert durch Kriechvorgänge, also durch plastische Weiterverformung bei konstanter Beanspruchung. Die Ergebnisse des Zeitstandversuchs müssen mit der Temperaturangabe versehen sein. Aus Tabelle 2 ist für einige Werkstoffgruppen der Temperaturbereich ersichtlich, in dem der Zeitstandversuch anzuwenden ist. Unterhalb der angegebenen Temperaturbereiche gibt der Warmzugversuch hinreichend Auskunft über das Werkstoffverhalten.
Der Zweck des Zeitstandversuchs ist die Ermittlung der in Tabelle 3 zusammengestellten Kenngrößen. Man beachte dabei besonders die im Index der Symbole angegebenen Versuchsbedingungen. Wird die maximale Belastung gerade noch „dauernd" ertragen, spricht man

statt von der Zeitstandfestigkeit von der *Dauerstandfestigkeit.* Tritt keine Dehnung ein oder kommt der Kriechvorgang zum Stillstand, spricht man statt von der Zeitdehngrenze von der *Dauerdehngrenze.*

Verlauf des Zeitstandversuchs

Trägt man über der Zeit die Dehnung auf, so erhält man das in Bild 11 dargestellte Diagramm. Darin bedeuten:
a Belastungsdehnung unmittelbar nach Aufbringen der Last, *b* Zeitdehnung, *c* Gesamtdehnung, *d* elastische Dehnung (nach dem Bruch oder nach Entlastung eintretende Verkürzung), *e* bleibende Dehnung; *1* Zeitraum hoher Kriechgeschwindigkeit, *2* Zeitraum gleichmäßiger Kriechgeschwindigkeit, *3* Zeitraum der Bruchausbildung durch Einschnürung.

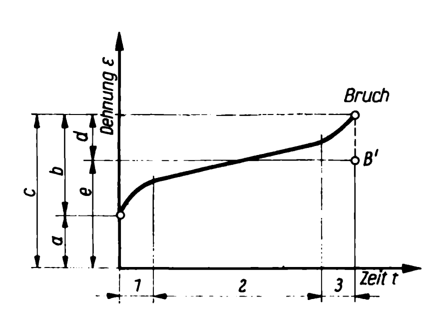


Bild 11. Zeitdehnlinie für eine bestimmte Belastung

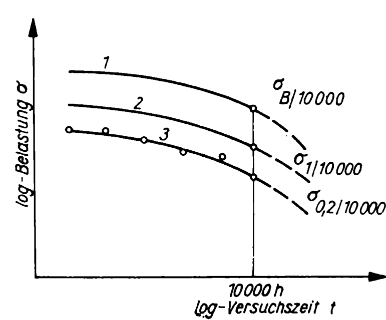


Bild 12. Zeitstand-Diagramm für Zugbeanspruchung. *1* Zeitbruchlinie; *2* 1%-Dehngrenzlinie; *3* 0,2%-Dehngrenzlinie

Die bei verschiedenen Belastungsstufen gewonnenen Zeitdehnlinien werden in das Zeitstand-Diagramm übertragen (Bild 12). Für die 0,2%-Dehngrenzlinie werden bei verschiedenen Belastungsstufen die bleibenden Dehnungen von 0,2% (*e* im Bild 11) ermittelt, in das Zeitstand-Diagramm eingetragen und die Meßpunkte miteinander verbunden.

Zeitstandprüfmaschinen

Zeitstandprüfmaschinen sind aufgrund der langen Versuchsdauer Mehrprobengeräte, die ausgestattet sind mit:

- einer *Belastungseinrichtung*, die während der gesamten Versuchszeit eine konstante Beanspruchung garantiert;
- einer *Erwärmungseinrichtung*, welche die Probe innerhalb von 1 bis 4 Stunden auf Prüftemperatur erwärmt und dann diese konstant hält;
- einer *Temperaturmeß- und Regeleinrichtung* und
- einer elektronisch registrierenden *Dehnungsmeßeinrichtung.*

2.1.3. Druckversuch

Druckversuche[10])[11]) werden durchgeführt zur Beurteilung des Verhaltens von Lagerwerkstoffen, spröden Gußwerkstoffen, Glas- und Keramikwerkstoffen und silikatischen Werkstoffen sowie zur Ermittlung des Kraft- und Arbeitsbedarfs für die spanlose Umformung.*)

Prüfbedingungen und Zweck des Druckversuchs

Die Prüfbedingungen sind im wesentlichen die gleichen wie beim Zugversuch, nur mit entgegengesetzter Kraftrichtung. Der Probekörper wird gestaucht, und anstelle der Einschnürung tritt eine *Ausbauchung* auf. Probekörper und Zug-Druck-Prüfmaschinen müssen einen *einachsigen Spannungszustand* garantieren.

*) s. auch Abschn. TECHNISCHE MECHANIK, Beanspruchung fester Körper, Druckbeanspruchung

Zweck des Druckversuchs ist es, vergleichbare Kennwerte des Festigkeits- und Verformungsverhaltens zu ermitteln, wie

Druckfestigkeit	σ_{dB}	in MPa	0,2- (Stauch-) Grenze	$\sigma_{d0,2}$	in MPa
technische Elastizitätsgrenze	$\sigma_{d0,01}$	in MPa	Stauchung	ε_d	in %
Elastizitätsmodul	E_d	in MPa	Ausbauchung	ψ_d	in %
Quetschgrenze	σ_{dS}	in MPa			

Spannungs-Stauchungs-Diagramm

Versieht man die Zugspannung und die Dehnung mit einem positiven Vorzeichen und die Druckspannung und Stauchung mit einem negativen, so erscheint in einem rechtwinkligen Koordinatensystem das Spannungs-Dehnungs-Diagramm im I. und das Spannungs-Stauchungs-Diagramm im III. Quadranten (Bild 13).

Stellt man nur das Spannungs-Stauchungs-Diagramm dar, so dreht man wegen der besseren Betrachtungsweise das Koordinatensystem um 180° (Bild 14). Außerdem ist aus Bild 14 das typische Verhalten bei Druckbeanspruchung spröder und plastischer Werkstoffe ersichtlich. Die spröden Werkstoffe gehen zu Bruch, die plastischen nicht. Deshalb ist bei den plastischen Werkstoffen die Druckfestigkeit σ_{dB} nicht feststellbar. Die Brucherscheinung bei spröden Werkstoffen ist aus Bild 15 am Beispiel von Grauguß ersichtlich. Auf Grund des Verformungsmechanismus (Bild 16) wird der Probekörper schräg zur Grundfläche zerdrückt. Das ist daraus zu erklären, daß die größten Schubspannungen in einer zur Druckrichtung unter etwa 45° geneigten Ebene auftreten.

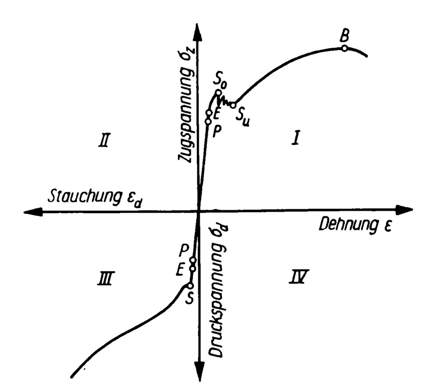


Bild 13. Spannungs-Verformungs-Diagramm von weichem Stahl

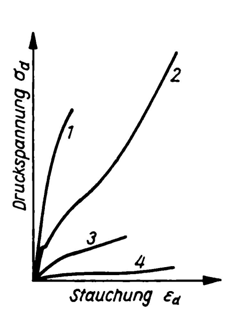
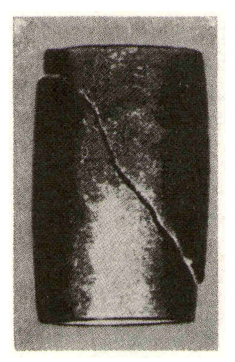


Bild 14. Spannungs-Stauchungs-Kurven verschiedener Metalle [13]. *1* Grauguß; *2* weicher Stahl; *3* Zink; *4* Blei


Bild 15. Zerdrückte zylindrische Druckprobe aus Grauguß

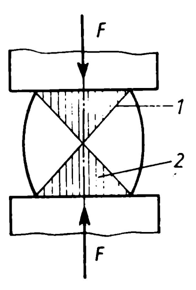


Bild 16. Verformungsmechanismus bei zylindrischen Druckproben. *1* Rutschfuge; *2* Druckkegel

Verlauf des Druckversuchs

Die Bruchprobe muß zentrisch belastet werden. Das erfordert eine sorgfältige Einspannung der Probe zwischen den beiden Druckplatten der Zug-Druck-Prüfmaschine. Nachdem die Probe unverrückbar angedrückt ist, werden (sofern notwendig) die Meßgeräte zur Stauchungsmessung angesetzt und auf Null eingestellt. Bei spröden Werkstoffen ist zu beachten, daß bei Eintritt des Bruchs Probenstücke aus der Maschine herausgeschleudert werden können. Es sind in solchen Fällen besondere Schutzvorrichtungen anzubringen!

Aus der *Bruchlast* F_{max} und dem *Ausgangsquerschnitt* A_0 wird die *Druckfestigkeit* $\sigma_{dB} = F_{max}/A_0$ errechnet. Bei plastischen Werkstoffen, die nicht zu Bruch gehen, kann man als Maximallast diejenige Last verwenden, bei der der erste Anriß zu sehen ist. Die Quetschgrenze wird analog der Streckgrenze beim Zugversuch ermittelt; ebenso der Elastizitätsmodul und die Elastizitätsgrenze. Die Stauchung und die Ausbauchung werden nach dem Versuch an der Probe ausgemessen und in % ausgedrückt.

Druckproben und Versuchseinrichtungen

Druckproben müssen gedrungene Proben sein, da sonst Knickerscheinungen eintreten können.

Das Verhältnis von Höhe h zu Durchmesser d_0 bei Rundproben bzw. h zu A_0 bei prismatischen Proben mit anderen Querschnitten darf nicht größer als 3 sein ($h : A_0 \lesssim 3$). Man unterscheidet zwischen:

- Normalproben für Grobmessungen $h = d_0$,
- Langproben für Feinmessungen, $h = (2{,}5 \cdots 3)\, d_0$,
  wobei die Meßlänge markiert wird mit $h_0 = (2 \cdots 2{,}5)\, d_0$.

Die Grund- und Deckflächen müssen planparallel und senkrecht zur Probenachse liegen.

Als Prüfmaschine wird in der Regel die Zug-Druck-Prüfmaschine verwendet.

Für die Messungen werden eine obere und eine untere Druckplatte eingebaut, wovon die untere kugelig gelagert wird. Die Versuchsanordnung ist aus Bild 17 ersichtlich. Der Mittelpunkt M der unteren Kugelplatte muß auf der Maschinenachse und in der Druckfläche liegen. Dadurch wird ein selbsttätiges Parallelstellen der Druckplatten bei Belastung ermöglicht.

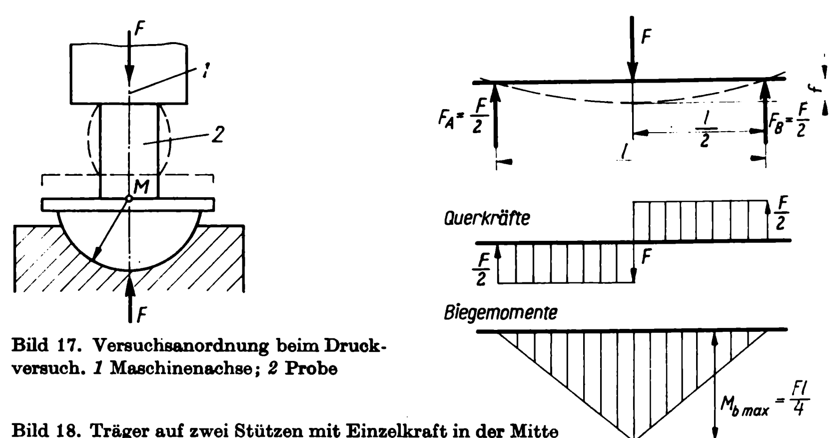


Bild 17. Versuchsanordnung beim Druckversuch. *1* Maschinenachse; *2* Probe

Bild 18. Träger auf zwei Stützen mit Einzelkraft in der Mitte

2.1.4. Biegeversuch

Der Biegeversuch[12][13] wird bevorzugt angewandt für die Ermittlung des Formänderungsvermögens von spröden Werkstoffen*). Das erfolgt durch die Messung der *Durchbiegung*.

*) s. auch Abschn. Technische Mechanik, Beanspruchung fester Körper, Biegebeanspruchung



An plastischen Werkstoffen wird der Biegeversuch nur bis zur Fließgrenze durchgeführt. Zu diesem Zweck ruft man an einem im Gleichgewicht befindlichen Probestab durch eine senkrecht zur Stabachse wirkende Kraft eine Krümmung hervor. Die dabei im Probenwerkstoff entstehenden inneren Widerstände sind Biegespannungen, die sich errechnen aus:

$$\sigma_b = M_b/W \qquad (4)$$

M_b maximales Biegemoment, W Widerstandsmoment des Probenquerschnitts

Zum Beispiel ist W für den Kreisquerschnitt $W = \pi d^3/32 \approx 0{,}1d^3$ und für den Rechteckquerschnitt $W = bh^2/6$, wobei b die Seite des Rechteckquerschnitts ist, die parallel zur Biegeachse verläuft*).

Bei der Durchführung des Biegeversuchs wird in der Regel der Belastungsfall „Träger auf zwei Stützen mit einer Einzelkraft in der Mitte" angewandt (Bild 18). Dadurch ergibt sich der dargestellte Querkraft- und Biegemomentenverlauf. F_A und F_B sind die Auflagerkräfte. Die Durchbiegung f errechnet sich aus

$$f = Fl^3/48EI \qquad (5)$$

F Belastung, l Stützweite, E Elastizitätsmodul des Probenwerkstoffs, I axiales Trägheitsmoment des Probenquerschnitts, bezogen auf die Biegeachse**)

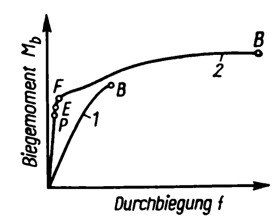


Bild 19. Belastungs-Durchbiegungs-Diagramm. *1* unlegierter Stahl; *2* Grauguß

Verwirklicht wird dieser Belastungsfall mit Hilfe der Universalmaschine (Zug-Druck-Prüfmaschine), indem am Untergehänge die beiden Stützen im Abstand l und am Obergehänge ein Druckstempel angebracht werden.

Der gesamte Biegeverlauf kann wiederum grafisch durch das Belastungs-Durchbiegungs-Diagramm dargestellt werden (Bild 19). Durch Umstellung der Gleichung (5) nach E und Messung der Durchbiegung f unter Last und im elastischen Bereich kann man den Elastizitätsmodul des Werkstoffs errechnen. Die Elastizitätsgrenze σ_{bE} wird durch das Biegemoment M_{bE} bestimmt, das erstmalig eine bleibende Durchbiegung hervorruft und nach Gl. (5) berechnet werden kann. Die Fließgrenze F wird *Biegegrenze* genannt und ist durch das Biegemoment M_{bF} bestimmt, das eine merklich starke Zunahme der bleibenden Durchbiegung hervorruft. Sie wird ebenfalls nach Gl. (5) errechnet. Während für plastische Werkstoffe damit der Biegeversuch beendet ist, wird für spröde Werkstoffe die Biegefestigkeit σ_{bB} als Spannungskennwert festgestellt; also das größte Biegemoment M_{bB} ermittelt.

Außerdem sind für spröde Werkstoffe noch einige spezielle Kennwerte von Interesse, wie z. B.

- die Bruchdurchbiegung f_B,
- der Biegepfeil $\varphi = (f_B/l) \cdot 100\%$, (6)
- der Biegefaktor σ_{bB}/σ_B
- die Steifigkeit für einen Probestab mit dem Nenndurchmesser

$$d_0 = 30\,\text{mm}: (\sigma_{bB} d/30 f_B) \qquad (7)$$

Besondere Bedeutung hat der Biegeversuch an Grauguß erlangt, wobei bestimmte Versuchsbedingungen einzuhalten sind.

2.1.5. Verdrehversuch

Bei Zug-, Druck- und Biegebeanspruchung entstehen im Werkstoff *Normalspannungen*, bei Verdrehbeanspruchungen dagegen *Tangentialspannungen*, also innere Widerstandskräfte,

*) s. auch Abschn. Technische Mechanik, Tafel 5

**) s. auch Abschn. Technische Mechanik, Tafel 7

die tangential zum Querschnitt bzw. senkrecht zur Stabachse gerichtet sind. Wirkt auf einen Probestab ein Drehmoment $M_t = 2Fr$ (Kräftepaar senkrecht zur Stabachse, diese jedoch nicht schneidend, Bild 20), so berechnet sich die dadurch entstehende Tangentialspannung aus

$$\tau_t = M_t / W_p \tag{8}$$

W_p ist das *polare Widerstandsmoment* des Probenquerschnitts, für den Kreisquerschnitt z. B. ist $W_p = \pi d^3/16$

Der Winkel γ (Bild 20) kennzeichnet die Verformung und wird *Schiebung* genannt. Der Winkel ψ_1 heißt *Verdrehwinkel* und ist der Stablänge l_0 proportional. Wird dieser Winkel auf die Länge bezogen, so entsteht die *Drillung* $\vartheta = \psi_1/l_0$ (nur für zylindrische Verdrehproben).

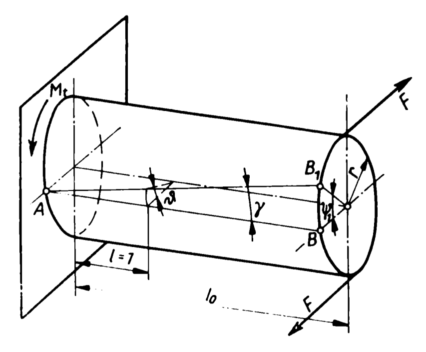


Bild 20. Zylindrischer Drehstab bei Verformung

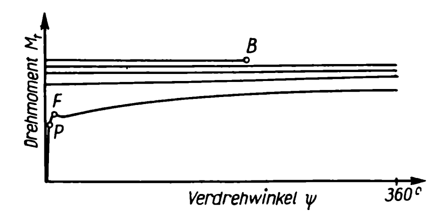


Bild 21. Belastungs-Verdrehungs-Diagramm

Der gesamte Verdrehvorgang kann auch hier wieder grafisch durch das Belastungs-Verdrehungs-Diagramm dargestellt werden (Bild 21). Bis zur Proportionalitätsgrenze gilt das HOOKEsche Gesetz, ausgedrückt durch:

$$\tau_t = G\gamma \tag{9}$$

Der Proportionalitätsfaktor G wird als *Gleit-* oder *Schubmodul* bezeichnet. Die auftretende *Fließgrenze* F (Verdrehgrenze) kann durch das *Verdrehmoment* M_{tF} bestimmt werden, welches das Drehmoment ist, bei dem trotz Verdrehung keine Kraftzunahme notwendig ist bzw. wo die Kraft sogar absinkt. Gl. (8) ergibt τ_{tF}. Die Verdrehfestigkeit τ_{tB} erhält man durch Feststellung des maximalen Drehmoments M_{tB} und Berechnung nach Gl. (8).

Für metallische Werkstoffe gelten für einige Kenngrößen im Vergleich zum Zugversuch folgende Beziehungen:

$$G \approx 0{,}38E; \quad \tau_{tF} \approx 0{,}5\sigma_S; \quad \tau_{tB} \approx 0{,}5\sigma_B.$$

2.1.6. Scher- und Lochversuch

Scher- und Lochbeanspruchungen rufen im Werkstoff Schubspannungen hervor, die jedoch noch durch Biegespannungen überlagert sind. Deshalb spricht man von *Scher-* bzw. *Lochungsspannungen.*

Beim *Scherversuch*[14]) unterscheidet man zwischen *einschnittiger* und *zweischnittiger Scherbeanspruchung.* Da bei der zweischnittigen Scherbeanspruchung der Einfluß der Biegung geringer ist als bei der einschnittigen, wird beim Scherversuch das zweischnittige Verfahren angewandt und der Biegeeinfluß vernachlässigt. Als Kenngröße wird nur die *Scherfestigkeit* τ_{aB} ermittelt:

$$\tau_{aB} = F_B/2A_0 \tag{10}$$

F_B Bruchkraft, A_0 Probenquerschnitt

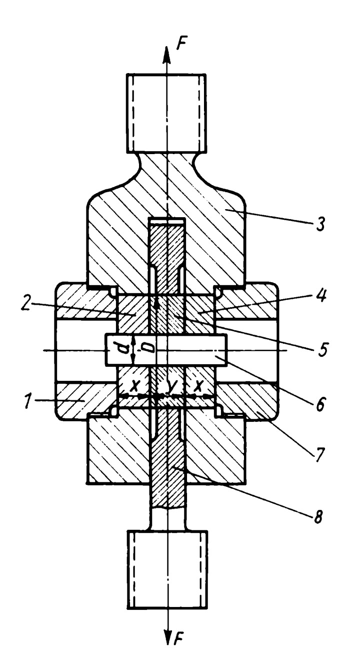


In der Regel wird dieser Versuch mit Schergeräten für Zugbelastung durchgeführt (Bild 22), die in die Zugmaschinen eingebaut werden. Die Schergeschwindigkeit soll nicht größer als 10 mm/min sein.
Mit dem *Lochversuch* wird die *Lochungsfestigkeit* τ_{lB} unter Vernachlässigung des Biegeeinflusses ermittelt:

$$\tau_{lB} = F/A = F/\pi ds \qquad (11)$$

s Blechdicke, *d* Rondendurchmesser, *F* maximale Kraft

Eine Stanzvorrichtung für Lochversuche ist in Bild 23 schematisch dargestellt. Die Lochungsfestigkeit ist kein exakter Werkstoffkennwert, eignet sich aber gut für die Qualitätskontrolle von Blechlieferungen.



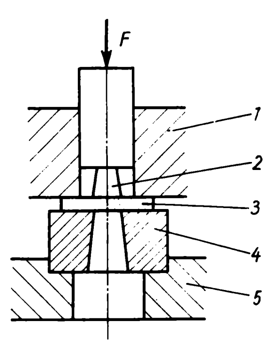


Bild 23. Stanzvorrichtung für Lochversuche. *1* Führungsplatte; *2* Lochstempel; *3* Probenronde; *4* Matrize; *5* Grundplatte

Bild 22. Schergerät für Zugbelastung (schematisch). *1* linke Verschlußmutter; *2* linke Scherbacke; *3* Gehäuse; *4* rechte Scherbacke; *5* Scherzunge; *6* Scherprobe; *7* rechte Verschlußmutter; *8* Schieber

2.1.7. Statische Härtemessungen

Der Oberflächenwiderstand eines Werkstoffs gegen das Eindringen eines härteren Prüfkörpers heißt *Härte.*
Bei der Härtemessung ermittelt man vergleichbare Kennwerte des Verformungswiderstands der Oberfläche eines Werkstoffs, die jedoch nicht eine eindeutige Stoffeigenschaft ausdrücken. Die Härtemessung geht fast zerstörungsfrei vor sich und ist einfach und schnell durchführbar. Zu beachten ist, daß jeder Härtewert unter ganz bestimmten Versuchsbedingungen entstand, weshalb die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar sind. Verschiedene statische Härtemeßverfahren sind in Tafel 1 zusammengestellt, wobei die gebräuchlichsten die *HB*-, *HV*-, *HRC*- und *HRB*-Messungen sind.

Härtemeßverfahren nach Brinell

Das Meßprinzip ist aus Tafel 1 ersichtlich; es wurde 1900 von dem Schweden J. A. Brinell (1840 bis 1925) vorgeschlagen. Für Sonderzwecke wird statt der Stahlkugel eine Hartmetall- oder Diamantkugel verwendet. Die Kraft muß eine gewisse Zeit einwirken und so groß sein, daß ein Eindruck (Kugelkalotte) hinterbleibt. Die zurückgebliebene Kugelkalotte ist das Maß für die Härte. Der Mittelwert des Durchmessers *D* zweier zueinander senkrechter Richtungen ergibt mit Hilfe einer Härtetabelle die *Brinellhärte HB.*

Tafel 1. Härtemeßverfahren [3]

Meßverfahren und Kennzeichen Eindringkörper	Prüfkraft	Prüfkraft Wirkungsart
Brinellhärte *HB*		
Stahlkugel von	*für statische Kraftwirkung:*	statisch, dynamisch
$D = 10$ mm	$F = 30 \cdot D^2$	
$D = 5$ mm	$F = 10 \cdot D^2$	
$D = 2{,}5$ mm	$F = 5 \cdot D^2$	
$D = 1{,}25$ mm	$F = 2{,}5 \cdot D^2$	
$D = 1$ mm	$F = 1{,}25 \cdot D^2$	
	$F = 0{,}5 \cdot D^2$	
je nach Probendicke	je nach Werkstoff	
Vickershärte *HV*		
Regelmäßige vierseitige Pyramide aus Diamant mit einem Winkel von 136° zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen	F kann beliebig gewählt werden, soll aber 1200 N nicht überschreiten. Möglichst vorgeschriebene Regellasten einhalten.	statisch
Rockwellhärte *HR*		
HRC Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	100 N Vorlast, 1500 N Gesamtlast	statisch
HRB Stahlkugel mit $D = 1{,}587$ mm (= $^1/_{16}''$)	100 N Vorlast, 1 000 N Gesamtlast	statisch
HRC 62,5 Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	100 N Vorlast, 625 N Gesamtlast	statisch
HRA Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	100 N Vorlast, 600 N Gesamtlast	statisch
HRD Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	100 N Vorlast, 1000 N Gesamtlast	statisch
Superrockwellhärte		
HR 15 N Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	30 N Vorlast, 150 N Gesamtlast	statisch
HR 30 N Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	30 N Vorlast, 300 N Gesamtlast	statisch
HR 45 N Diamantkegel mit 120° Spitzenwinkel	30 N Vorlast, 450 N Gesamtlast	statisch
HR 15 T Stahlkugel mit $D = 1{,}587$ mm (= $^1/_{16}''$)	30 N Vorlast, 150 N Gesamtlast	statisch
HR 30 T Stahlkugel mit $D = 1{,}587$ mm (= $^1/_{16}''$)	30 N Vorlast, 300 N Gesamtlast	statisch
HR 45 T Stahlkugel mit $D = 1{,}587$ mm (= $^1/_{16}''$)	30 N Vorlast, 450 N Gesamtlast	statisch

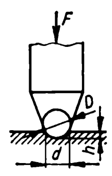
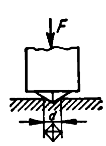
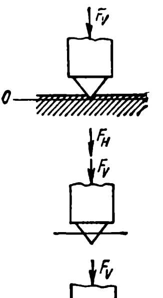
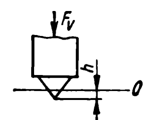
Anwendungsbereich	Meßprinzip	
bei statischer Kraftwirkung: für alle metallischen Teile mit $HB \leqq 400$		*für statische Kraftwirkung:* $HB = F/A$ F Prüfkraft in N A Oberfläche der zurückgebliebenen Kugelkalotte in mm² $HB = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$ d wird nach Entlastung gemessen!
für alle metallischen Teile, besonders für dünne Teile und für Oberflächenschichten		$HV = F/A$ F Prüfkraft in N A Oberfläche der zurückgebliebenen Pyramidenspitze in mm² $HV = \frac{1{,}8544F}{d^2}$ Diagonale d wird nach Entlastung gemessen!
für alle metallischen Teile mit $HB \geqq 400$ für alle metallischen Teile mit $HB \leqq 400$ für dünne metallische Teile mit $HB \geqq 400$ und sehr harte Teile (Hartmetalle) für sehr harte Teile (Hartmetalle) und für dünne metallische Teile mit $HB \geqq 400$ für alle metallischen Teile mit $HB \geqq 400$		$HRC = 100 - e, \quad e = \frac{h}{0{,}002}$ $HRB = 130 - e, \quad e = \frac{h}{0{,}002}$ F_V Vorlast, F_H Hauptlast h bleibende Eindrucktiefe 0 Bezugslinie zur Messung von h $HR = 100 - e$
für dünne metallische Teile mit $HB \geqq 400$		Wie bei der Rockwellhärteprüfung, jedoch $e = h/0{,}001$; $HR = 100 - e$
für dünne metallische Teile mit $HB \leqq 400$		

Tabelle 4. Anwendung der BRINELL-Härtemessung [3]

Werkstoffe	Erfaßbarer Härtebereich *HB*	Belastungsgrad x	Prüfkraft F in N*)
Weicheisen Stahl Stahlguß Temperguß Gußeisen	67 ··· 400	30	$300 \cdot D^2$
Leichtmetalle (Guß- u. Knetlegierungen, Spritzgußlegierungen) Kupfer Messing Bronze Nickel	22 ··· 315	10	$100 \cdot D^2$
Reinaluminium Magnesium Zink Gußmessing	11 ··· 158	5	$50 \cdot D^2$
Lagermetalle	6 ··· 78	2,5	$25 \cdot D^2$
Blei Zinn Weichlot	3 ··· 39	1,25	$12{,}5 \cdot D^2$
Weichmetalle bei höheren Temperaturen	1 ··· 15	0,5	$5 \cdot D^2$

*) Die Prüfkraft F ergibt sich in Newton, wenn der Kugeldurchmesser D in Millimeter eingesetzt wird.

Für die Durchführung sind in den Standards und Richtlinien[15])[16]) einige Regeln festgelegt, die unbedingt einzuhalten sind, wie z. B.:

— Mindestmaße der Probendicke für die verschiedenen Kugeldurchmesser D,
— Prüfkraft in Abhängigkeit vom Kugeldurchmesser und Werkstoff (Tabelle 4).

In Tabelle 4 ist x der Belastungsgrad. Die Ergebnisse sind nur miteinander vergleichbar, wenn mit gleichem Belastungsgrad gemessen wurde.

Die Härteangaben sollen die Versuchsbedingungen zum Ausdruck bringen. Deshalb werden hinter dem Kurzzeichen *HB* Zahlen in der Reihenfolge: Kugeldurchmesser in mm, Belastung in 10 N, Belastungszeit in s, außer bei normalen Prüfbedingungen ($D = 10$ mm, $F = 30000$ N, 10 ··· 16 s Belastungszeit) angegeben*).

Beispiel. *HB* 2,5/62,5—35 gibt die Prüfbedingungen von $D = 2{,}5$ mm, $F = 625$ N und eine Belastungszeit von 35 s an.

Zu bemerken sei noch, daß eine angenäherte Beziehung zwischen *HB* und σ_B besteht:

$$\sigma_B \approx a \cdot HB \tag{12}$$

Der Proportionalitätsfaktor a ist dabei vom Streckgrenzenverhältnis und von der Zugfestigkeit abhängig (Tabelle 5).

*) Die Angabe der Belastung erfolgte bisher noch in der SI-fremden Einheit kp. Da in diesem Werk konsequent nur SI-Einheiten verwendet werden, wird zwar die Prüfkraft in der alten Form (in kp) angegeben (siehe Beispiel), jedoch bei direkten Angaben oder Berechnungen stillschweigend in Newton umgerechnet und ebenso in Newton angegeben.[16])



Tabelle 5. Proportionalitätsfaktor *a* zwischen *HB* und σ_B für einige metallische Werkstoffe [3]

Werkstoff	*a*
Stahl	0,35
Kupfer, Messing, kaltbearbeitet	0,40
Kupfer, Messing, ausgeglüht	0,55
AlCuMg-Legierungen	0,35
AlMg-Legierungen	0,44
Mg-Legierungen	0,41
Aluminiumguß	0,26

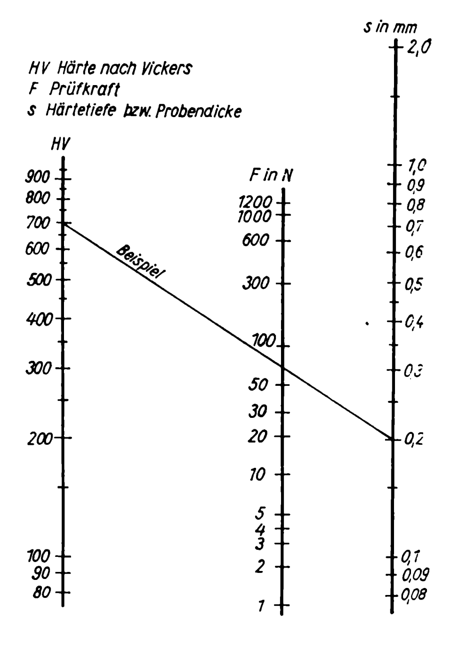


Bild 24. Nomogramm zur Ermittlung der maximalen Prüfkraft bei vorgegebener Härte und Härtetiefe bzw. Dicke des Prüflings

Härtemeßverfahren nach Vickers

Das Meßprinzip ist aus Tafel 1 ersichtlich. Es wurde 1925 von der englischen VICKERS-ARMSTRONG-Gesellschaft eingeführt und geht auf die Engländer SMITH und SANDLAND zurück. Das Maß für die Härte ist die Oberfläche des nach der Entlastung zurückgebliebenen Eindrucks der Pyramidenspitze. Gemessen wird die Diagonale *d*, mit der aus einer Härtetabelle (z. B. in [3]) die *Vickershärte HV* abgelesen werden kann. Die Prüfkraft kann beliebig gewählt werden, soll jedoch bestimmten, vom Prüfgerät abhängigen Regellasten entsprechen. Die Wahl der Prüfkraft richtet sich zunächst nach der Härtetiefe bzw. Dicke des Prüflings und der zu erwartenden Härte (Bild 24) und kann auf eine nächstliegende Regellast abgerundet werden (am Beispiel des Bilds also 50 N).

Die Härteangaben müssen ebenfalls die Versuchsbedingungen zum Ausdruck bringen[17]).
Hinter dem Kurzzeichen *HV* soll die Belastung in 10 N und die Belastungszeit in s angegeben werden (außer bei normalen Versuchsbedingungen $F = 300$ N und 10 ··· 15 s Belastungszeit)*).

Beispiel. HV 5—30 ($F = 50$ N; 30 s Belastungszeit).

Die Vickershärtemessung teilt man nach ihrer Abhängigkeit von der Prüfkraft in drei Verfahren ein:

1. *Makrohärtemessung* mit Prüfkräften von 50···1200 N,
2. *Kleinlasthärtemessung* mit Prüfkräften bis zu 1 N (besonders geeignet für dünne Teile und Oberflächenschichten),
3. *Mikrohärtemessung* mit Prüfkräften, die unter 1 N liegen (Anwendung für metallografische Untersuchungen).

Härtemeßverfahren nach Rockwell

Das Meßprinzip ist aus Tafel 1 ersichtlich (Kegel- oder Kugeldruckverfahren)[18]). Das Verfahren wurde 1919 von dem Amerikaner ROCKWELL eingeführt. Das Maß für die Härte ist die bleibende Eindringtiefe *h*, gemessen von einer durch die Vorlast hervorgerufenen Nullinie. Die *Rockwell-*

*) s. Fußnote S. 18

härte ist ebenfalls eine Vergleichszahl, für die in Tabelle 6 einige *HRC*-Richtwerte für Werkzeuge angegeben sind.

Tabelle 6. *HRC*-Richtwerte für einige Werkzeuge [3]

Werkzeug	*HRC*
Band- und Kreissäge für Holz (an den Zähnen)	54 ··· 56
Band- und Kreissäge für Metalle (an den Zähnen)	62 ··· 65
Reibahlen (Werkzeugstahl)	62 ··· 65
Beile	56 ··· 60
Biegestanzen, Stanzwerkzeuge	60 ··· 64
Bohrbuchsen, Schnitte	63 ··· 65
Drehstähle, Gewindebohrer (Werkzeugstahl)	61 ··· 63
Endmaße	66 ··· 68
Holzmesser	56 ··· 58
Schneideisen, Körner, Meißel	58 ··· 60
Lehrdorne, Rachenlehren	64 ··· 66
Sägeblätter für Metallbügelsägen	64 ··· 68
Senker	60 ··· 62
Spiralbohrer	60 ··· 63

Das ROCKWELL-Härtemeßverfahren ist besonders geeignet für die Automatisierung der Härtemessung. Rockwellhärteprüfautomaten werden in den Produktionsprozeß eingebaut, um Einzelteile 100%ig zu prüfen. Die Leistung solcher Automaten beträgt gegenwärtig 1000 Prüfungen/h.

Zwischen den einzelnen Härtemeßverfahren und der Zugfestigkeit bestehen angenäherte Beziehungen, die Umrechungstabellen [3] zu entnehmen sind.
Bei Hochpolymeren hat sich besonders die Kugeldruck-Härte H_K eingeführt. Unter Beachtung bestimmter Versuchsbedingungen ist die erreichte Eindringtiefe der Kugel unter Last das Maß für die Härte.

2.2. Prüfverfahren bei dynamischer Beanspruchung

Werkstoffprüfverfahren mit schlag- oder stoßweiser bzw. schwingender, wechselnder Krafteinwirkung sind vor allem:

- Schlagversuche,
- dynamische Härtemessungen,
- dynamische Dauerschwingversuche und
- Verschleißprüfungen.

2.2.1. Schlagversuche

Bei Schlagversuchen mit kurzzeitiger Krafteinwirkung auf die Probe verhalten sich Werkstoffe ganz anders als bei gleichartiger statischer Beanspruchung. Man kennt folgende wichtige Schlagversuche:

- Schlagzugversuche,
- Schlagdruck- (stauch-) Versuche,
- Kerbschlagbiegeversuche und
- Schlagbiegeversuche.

Einflußfaktoren auf die Ergebnisse der Schlagversuche sind Probenform, Temperatur, Vorbehandlung der Werkstoffe und das Prüfgerät.
Der *Kerbschlagbiegeversuch* für die Untersuchung von Stahl und Stahlguß sowie der *Schlagbiegeversuch* für die Untersuchung von Hochpolymeren, Grauguß, Zink und Zinklegierungen haben größte Bedeutung erlangt.

Kerbschlagbiegeversuch

Der Kerbschlagbiegeversuch*)[19][20]) dient der Beurteilung der Zähigkeit und damit der Überwachung der Wärmebehandlung. Die Ergebnisse des Kerbschlagbiegeversuchs (*Kerbschlagzähigkeit* a_K, Bruchaussehen) sind im allgemeinen nicht mit anderen Festigkeitseigenschaften vergleichbar. Jedoch liegen mit zunehmender Kerbschlagzähigkeit auch gute Dehnung und Einschnürung vor.

Kerbschlagbiegeversuche werden mit sog. *Pendelschlagwerken* durchgeführt (Bild 25). Der Pendelhammer (Masse m) trifft von der Höhe H auf die Probe, zerschlägt diese und pendelt auf der Rückseite nur noch bis zur Höhe h aus, da ein Teil der Energie des Hammers verbraucht wurde. Die verbrauchte Arbeit ergibt sich als Differenz zwischen der aufgewandten Arbeit $W_1 = mgH$ und der überschüssigen Arbeit $W_2 = mgh$ zu $W = W_1 - W_2 = mg(H - h) = mgr(\cos\beta - \cos\alpha)$ und kann am Schleppzeiger des Geräts abgelesen werden. Dividiert man diese durch den Probenquerschnitt am Kerb, erhält man die Kerbschlagzähigkeit a_K:

$$a_K = W/A_0 \qquad (13)$$

Im Kerbschlagzähigkeits-Temperatur-Diagramm (Bild 26) ist die Abhängigkeit der Kerbschlagzähigkeit von der Temperatur für Stahl mit krz-Gitter dargestellt. Daraus ersieht man, daß im kritischen Temperaturbereich a_K sehr stark abnimmt und streut (schraffierte Fläche).

Die Kerbschlagproben sind standardisiert, wie z. B. die in Bild 27 dargestellte Normalprobe. Sie muß so auf die Widerlager des Pendelschlagwerks gelegt werden, daß der Pendelhammer auf der Gegenseite der Kerbe auftrifft.

Bei der Durchführung des Versuchs sind bezüglich der Prüftemperatur, des Prüfvorgangs und der Auswertung bestimmte Bedingungen einzuhalten. Bei der Angabe der Kerbschlagzähigkeit ist die evtl. Abweichung von den Normalbedingungen ($W_1 = 300$ N · m; Normalprobe mit 3 mm Kerbtiefe) am Kurzzeichen im Index anzugeben. Zum Beispiel bedeutet $a_{K10/5}$, daß $W_1 = 100$ N · m und Kerbtiefe = 5 mm.

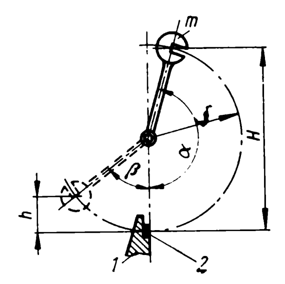


Bild 25. Kerbschlagbiegeversuch mittels Pendelschlagwerks (schematisch). *1* Widerlager; *2* Probe

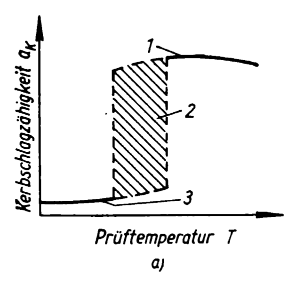
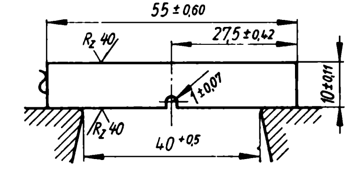


Bild 26. Kerbschlagzähigkeits-Temperatur-Diagramm. *1* Hochlage (Verformungsbrüche); *2* Steilabfall (Mischbrüche); *3* Tieflage (Trennbrüche)



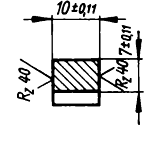


Bild 27. Normale Kerbschlagprobe

Schlagbiegeversuch

Das Versuchsprinzip ist das gleiche wie beim Kerbschlagbiegeversuch, nur daß in der Probe keine Kerbe vorhanden ist. Der Probestab wird mittels Pendelhammers zerschlagen und die

*) nur für Stahl und Stahlguß standardisiert

dabei verbrauchte Arbeit W gemessen bzw. abgelesen. Die *Schlagbiegezähigkeit* ergibt sich dann aus:

$$a_b = W/A_0 \tag{14}$$

Die Proben sind in ihren Abmessungen festgelegt, z. B. für Zinklegierungen 6 mm · 6 mm · 75 mm oder für Kunstharzpreßstoffe 10 mm · 15 mm · 120 mm.

Untersuchung mit dem Prüfgerät Dynstat

Diese Untersuchung ist eine besondere Art der Schlagbiege- und Biegeuntersuchung (statisch) an Hochpolymeren.

Die Proben haben die Abmessungen 10 mm · 15 mm · 4 mm und werden einseitig in die Halterung des Geräts eingespannt. Zur Ermittlung der Schlagbiegezähigkeit wird die Probe mittels Pendelhammers zerschlagen und aus der abgelesenen verbrauchten Arbeit W nach Gl. (14) errechnet. Zur Ermittlung der Biegefestigkeit σ_b läßt man ein statisches Biegemoment auf den einseitig eingespannten Probekörper einwirken und liest das maximale Biegemoment bei Eintritt des Bruchs ab. Mit Hilfe der Biegegrundgleichung (4) kann σ_b errechnet werden.

2.2.2. Dynamische Härtemessungen

Man unterteilt die dynamischen Härtemeßverfahren nach ihrer Wirkungsart und deren Auswirkungen in

— *dynamisch-elastische Verfahren* (Rücksprunghärtemessungen) und
— *dynamisch-plastische Verfahren* (Schlaghärtemessungen).

Das Meßprinzip der *Rücksprunghärtemessungen*[22]) ist aus Bild 28 ersichtlich. In beiden Fällen ist nach dem Aufprall des Hammers aus der Höhe h auf den Prüfkörper die Rückprallhöhe h_1 das Maß für die Härte. Die Auswertung geschieht über Eichkurven zu *Vickers-* und *Shorehärtezahlen.*
Das Meßprinzip der *Schlaghärtemessung* besteht darin, daß eine Kugel in den Prüfkörper stoßartig eingedrückt wird. Der zurückbleibende Eindruck ist das Maß für die Härte. Praktisch wird dies dadurch verwirklicht, daß eine Kugel am Prüfkörper anliegt und durch eine sich plötzlich entspannende Feder (Federschlaghärteprüfer) oder durch einen Hammerschlag (Schlaghärteprüfer) eingedrückt wird.

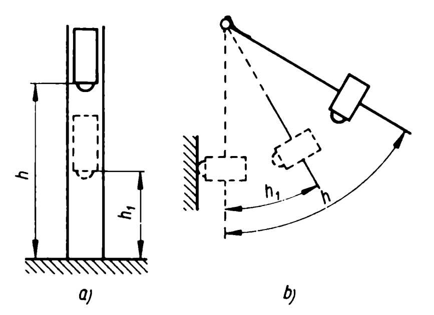


Bild 28. Dynamisch-elastische Härteprüfung (schematisch). a) Fallhammer; b) Pendelhammer

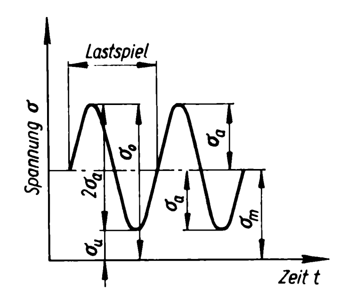


Bild 29. Periodisch schwingende Beanspruchung

2.2.3. Dynamische Dauerschwingversuche[23])[24])[25])

Zur Höhe der Beanspruchung kommt bei schwingender Beanspruchung noch die Häufigkeit der Wiederholung einer Belastung hinzu, die sog. *Lastwechselzahl.* Diese Beanspruchungsart kann mit der Zeit (auch wenn die Beanspruchungshöhe einer zulässigen statischen Belastung entspricht) zur Zerrüttung des Werkstoffgefüges und zu einem Gewaltbruch ohne plastische Verformung führen. Die untere Grenze der schwingenden Beanspruchung, die von einem Werkstoff auf die Dauer ertragen wird, nennt man *Dauerschwingfestigkeit.* Sie hängt nicht nur vom Werkstoff ab, sondern vor allem auch von der Form des Bauteils. Den Gewaltbruch

nennt man *Dauerbruch*, dessen Ursachen

- werkstoffbedingt (Härterisse, Schlackeneinschlüsse, Hohlräume, Oberflächenverletzungen usw.) oder
- formbedingt (Kerbwirkungen durch Bohrungen, Gewinde u. ä. oder Kraftumlenkungs- bzw. Kraftangriffsstellen) sein können.

An solchen Stellen entstehen mikroskopische Risse, die sich allmählich zu einem makroskopischen Anriß ausbilden. Infolge Kerbwirkung wächst der Anriß weiter, bis ein Restquerschnitt verbleibt, der dann mit Gewalt plötzlich bricht.

Begriffe und Bezeichnungen bei schwingender Beanspruchung

Aus Bild 29 ist die Wirkung einer schwingenden Beanspruchung ersichtlich. Dabei ist ein Lastspiel eine volle Schwingung mit der *Spannungsamplitude* σ_a um die *Mittelspannung* σ_m. Je nach der Lage dieser Mittelspannung unterscheidet man die in Bild 30 dargestellten Dauerschwingbereiche. Die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen der schwingenden Beanspruchung sind in Tabelle 7 zusammengefaßt. Dabei ist zu beachten, daß die Formelzeichen für

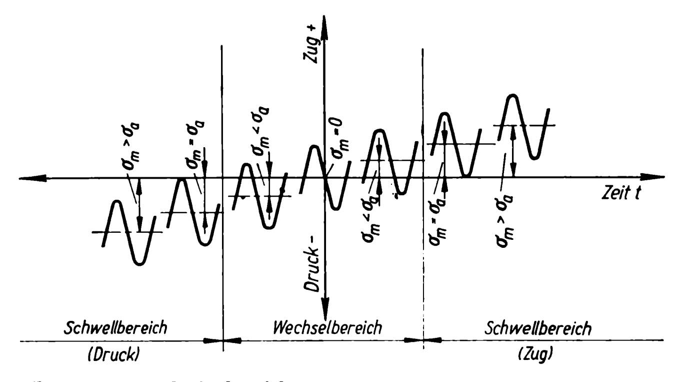


Bild 30. Dauerschwingbereiche

Tabelle 7. Zusammenstellung der wichtigsten Kenngrößen bei schwingender Beanspruchung

Kenngröße	Formelzeichen	Definition
Oberspannung	σ_o	größter auftretender Spannungswert je Lastspiel
Unterspannung	σ_u	kleinster auftretender Spannungswert je Lastspiel
Mittelspannung	σ_m	$\sigma_m = (\sigma_o + \sigma_u)/2$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens
Spannungsausschlag	σ_a	$\sigma_a = \pm(\sigma_o - \sigma_u)/2$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens
Schwingbreite	$2\sigma_a$	$2\sigma_a = \sigma_o - \sigma_u$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens
Lastspielfrequenz	n	Zahl der Lastspiele je Zeiteinheit
Lastspielzahl	N	diejenige Lastspielzahl in 10^6, die bis zum Bruch ertragen wird
Dauerschwingfestigkeit	σ_D	$\sigma_D = \sigma_m \pm \sigma_A$ wird vom Werkstoff *dauernd* ertragen
Wechselfestigkeit	σ_W	$\sigma_W = \varrho_A = \sigma_0 = \sigma_U$ (Sonderfall von σ_D mit $\sigma_m = 0$)
Schwellfestigkeit	σ_{Sch}	Sonderfall von σ_D mit $\sigma_U = 0$, $\sigma_m = \sigma_A$ und $\sigma_{Sch} = 2\sigma_A$
Grenzlastspielzahl	N_G	endliche Lastspielzahl zur Ermittlung von σ_D, z. B. $\sigma_{D(10^7)}$

Hinweis: Die Formelzeichen der Beanspruchungswerte werden mit kleinen Indexbuchstaben versehen, die Formelzeichen für die aus dem Versuch ermittelten Festigkeitswerte hingegen mit großen.

die *Beanspruchungswerte* mit *kleinen* Indexbuchstaben und diejenigen für die aus dem Versuch ermittelten *Festigkeitswerte* mit *großen* Indexbuchstaben versehen werden.

Dauerschwingfestigkeits-Diagramme

Dauerschwingfestigkeits-Diagramme sind wichtige Arbeitsunterlagen des Konstrukteurs und Berechnungsingenieurs zur Dimensionierung schwingend beanspruchter Bauteile. Bild 31 ist schematisch ein Diagramm für Zug- und Druck-Dauerschwingbeanspruchung. Ähnliche Diagramme gibt es für Biege- und Torsions-Dauerschwingbeanspruchung.

Die in Bild 31 unter 45° eingezeichnete Hilfslinie gibt die jeweilige Mittelspannung an. Die von den Grenzlinien eingeschlossene Fläche gibt für den betreffenden Werkstoff den dauerschwingfesten Bereich an. Für wichtige Werkstoffe sind Dauerschwingfestigkeits-Diagramme für Zug—Druck, Biegung und Torsion in WÖHLER-Diagrammen veröffentlicht worden, z. B. in [4].

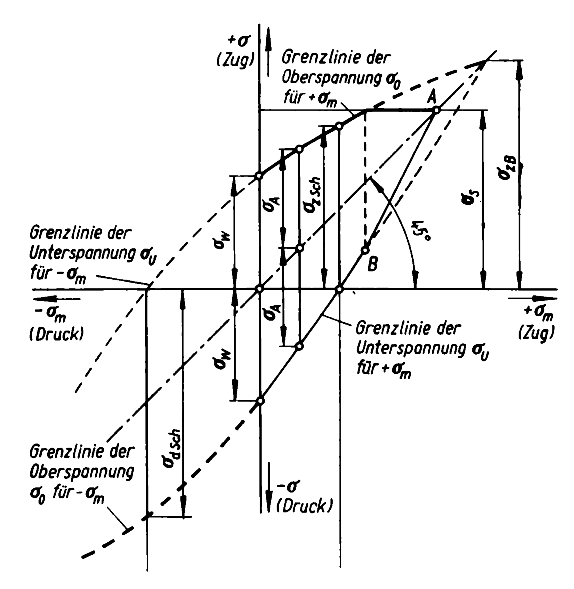


Bild 31. Dauerschwingfestigkeits-Diagramm nach SMITH (schematisch)

2.2.4. Verschleißprüfungen

Da das Verschleißverhalten der Werkstoffe von vielen mechanischen, chemischen, elektrochemischen, thermischen Einflußfaktoren sowie dem Gefügeaufbau und der Oberflächenbeschaffenheit des gleitenden oder rollenden Bauteils abhängig ist, kann eine exakte Werkstoffkenngröße *Verschleißfestigkeit* nicht ermittelt werden. Das Verschleißverhalten kann nur auf Prüfständen überprüft werden, auf denen möglichst alle verschleißbeeinflussenden Faktoren wirklichkeitsgetreu nachgeahmt werden.

Gleitreibungsverschleißprüfung

Mittels Abnutzungsprüfmaschine wird der Abrieb oder die Abnutzung einer Probe (Volumen- oder Masseverminderung) gemessen, die gegen eine rotierende Scheibe gedrückt wird.

Rollreibungsverschleißprüfung

Prinzip wie bei der Gleitreibungsverschleißprüfung. Beide Teile (zylindrische Probe und Prüfkörper) rotieren und rollen aufeinander ab.



2.3. Technologische Prüfverfahren

Technologische Untersuchungen sind Eignungsprüfungen an Werkstoffen für einen ganz bestimmten Zweck (Tiefziehen, Biegen, Zerspanen, Schmieden usw.). Dabei wird kein Kennwert festgestellt, sondern das Verhalten der Werkstoffe im kalten oder warmen Zustand unter praxisnahen Bedingungen.

2.3.1. Technologische Kaltversuche

Zu den technologischen Untersuchungen bei Raumtemperatur gehören vor allem der Biege- und Faltversuch, der Tiefungsversuch an Feinblechen und die Prüfung von Rohren und anderen Halbzeugen.

Biege- und Faltversuch

Mit dem Biege- bzw. Faltversuch[26][27][28] wird der Werkstoff auf seine *Biegbarkeit* untersucht. Das Maß dafür ist der Biegewinkel bis zum ersten Anriß auf der Zugseite. Unter Einhaltung bestimmter Versuchsbedingungen hat sich der standardisierte Biege- und Faltversuch mit der aus Bild 32 ersichtlichen Biegevorrichtung durchgesetzt.

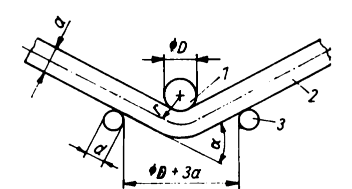


Bild 32. Biegevorrichtung für den Biege- und Faltversuch (schematisch). *1* Dorn; *2* Probe; *3* Auflagerrollen

Die Probe wird statisch (zügig und langsam) um einen Dorn mit dem Durchmesser D gebogen. Der Biegewinkel α ist vorgeschrieben, falls nicht vorher auf der Zugseite der Probe Risse aufgetreten sind. Kann der vorgeschriebene Biegewinkel mit dieser Biegevorrichtung infolge Durchziehens der Probe durch die Auflagerrollen nicht erreicht werden, wird durch Zusammendrücken der freien Schenkel mit einer anderen Vorrichtung weiter gebogen, bis Risse auftreten oder die Schenkelenden aufeinanderliegen (Faltversuch). Der Abstand der Auflagerrollen (lichte Weite) ist von der Probendicke a und dem Durchmesser D des Biegedorns abhängig und beträgt $D + 3a$. Der Durchmesser d der Auflagerrollen soll 50 mm für $a \leqq 12$ mm und 100 mm für $a > 12$ mm sein.

Hin- und Herbiegeversuch

Wenn der Werkstoff während der Formgebung oder im Gebrauch ständig oder häufig wechselnder Biegung und Gegenbiegung ausgesetzt ist (z. B. Blechstreifen eines Schnellhefters), wendet man den Hin- und Herbiegeversuch[29][30] an.

Zu diesem Zweck werden die Feinbleche oder Drähte (maximaler Durchmesser 7 mm) in eine Biegevorrichtung einseitig eingespannt und um 180° hin- und hergebogen, bis der Bruch eintritt. Die Anzahl der ertragenen Biegungen wird mittels Zählwerks registriert und mit Richtzahlen verglichen. Das Ergebnis lautet: „Für eine oft wechselnde Biegeverformung geeignet oder nicht geeignet."

Prüfung von Feinblechen auf Tiefziehfähigkeit

Es werden Feinbleche unter 3 mm Dicke auf ihre Eignung zum Tiefziehen untersucht. Dafür gibt es eine Reihe von Verfahren, wie das *Näpfchenzieh-*, *Tiefziehweitungs-* und *Einbeulverfahren*[31].

Der Tiefziehversuch nach ENGELHARDT und GROSS ist ein Näpfchenziehverfahren, bei dem aus einer Ronde mit einem Tiefziehwerkzeug ein Napf mit bestimmten Abmessungen gezogen wird. Der Ziehvorgang wird nach Erreichen der maximalen Kraft durch Festklemmen des Blechs zwischen Matrize und Fest-

halter beendet. Der Stempel jedoch bewegt sich weiter und reißt schließlich den Boden des Napfs ab. Die Tiefziehfähigkeit wird dann aus der maximalen Ziehkraft und der Abreißkraft errechnet.
Sehr weit verbreitet ist das Einbeulverfahren nach ERICHSEN[33]). Dabei wird eine Blechprobe mittels Werkzeugs (Bild 33) durch einen kugeligen Stempel bis zum Anriß eingebeult. Die erzielte Einbeultiefe t in mm wird am Gerät abgelesen und mit Richtwertkurven verglichen, wobei t über der Richtwertkurve für die betreffende Blechsorte liegen muß, wenn es zum Tiefziehen geeignet sein soll. Außerdem sind Rißverlauf und Oberflächenbeschaffenheit des Rondells Kriterien für die Qualität des Blechs.

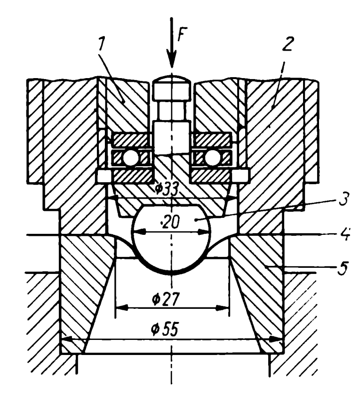


Bild 33. Normalwerkzeug für Tiefungsversuch.
1 Stempel; *2* Faltenhalter; *3* Kugel; *4* Probeblech; *5* Matrize

2.3.2. Technologische Warmversuche

Mit Hilfe der technologischen Warmversuche werden die Warmverformbarkeit und die Verwendbarkeit der Werkstoffe bei erhöhten Temperaturen überprüft.

Warm-Biege-Faltversuch

Er wird in gleicher Weise wie bei Raumtemperatur durchgeführt. Die Temperatur richtet sich nach dem Zweck und dem Werkstoff. Zum Beispiel werden für die Untersuchung von Stahl auf Warmbiegefähigkeit

- der *Rotbruchversuch* als Faltversuch bei 750···1000 °C zum Nachweis der Rotbrüchigkeit und
- der *Blaubruchversuch* als Faltversuch bei etwa 300 °C zum Nachweis der Blaubrüchigkeit durchgeführt.

Warm-Stauchversuch

Er dient der Beurteilung der Stauchverformbarkeit eines Werkstoffs (z. B. Nietwerkstoff). Es werden gedrungene zylindrische Proben bei vorgeschriebenen Temperaturen bis zur Rißbildung gestaucht. Das Verhältnis von Höhenverminderung zur Ausgangshöhe in Prozent ist der *Gütewert.*

Ausbreitversuch

Eine Flachprobe wird im glühenden Zustand von Hand oder mit der Maschine bis zum Reißen der Ränder breitgehämmert (oder bis zu einer festgelegten Breite). Das Gütemaß ist die Ausbreitung in Prozent, bezogen auf die Ausgangsbreite.

Loch- und Aufdornversuch

Beim *Lochversuch* wird ein flacher Probestreifen im rotwarmen Zustand längs der Probenkante mehrmals gelocht und der geringste Abstand als Gütemaß ermittelt, der die Lochung ohne Anrisse übersteht.

Beim *Aufdornversuch* wird ein vorgelochter Probestreifen im rotwarmen Zustand mit einem kegeligen Dorn bis auf den doppelten Vorlochdurchmesser oder bis zum Anreißen aufgetrieben. Als Gütemaß gilt die Aufweitung gegenüber dem Vorlochdurchmesser in Prozent.

2.3.3. Prüfungen von Schweißungen[33])

Faltversuch an Stumpfnaht-Schmelzschweißungen[34])

Dieser Versuch soll Auskunft über die Verformungsfähigkeit geschweißter Stumpfnähte geben. Zu diesem Zweck wird ähnlich wie beim normalen Faltversuch die Probe an der Schweißung bis zum ersten Anriß um einen Dorn gebogen. Der Biegewinkel im entspannten Zustand ist das Maß der Verformungsfähigkeit. Dabei müssen bestimmte Versuchsbedingungen (Probenform und -abmessungen, Oberflächenbeschaffenheit der Probe, Anschrägwinkel der V- oder X-Naht, Stützweite, Auflagerrollendurchmesser, Biegedorndurchmesser usw.) beachtet werden. Der Versuch kann im kalten und warmen Zustand durchgeführt werden.

Prüfungen an Kehlnaht-Schmelzschweißungen[35])

Diese Prüfungen dienen zur Kontrolle der Schweißung. Dazu bedient man sich entweder der Winkelprobe oder der Keilprobe.

Bei der *Winkelprobe* werden zwei Bleche mit bestimmten Abmessungen rechtwinklig durch eine Kehlnaht miteinander verschweißt und dann in Richtung der Schweißnaht zerbrochen. Die Bruchfläche läßt eine Beurteilung der Schweiße (Nahtbeschaffenheit, Gleichmäßigkeit, Einbrandkerben, Schlackeneinschlüsse usw.) zu.
Bei der *Keilprobe* werden zwei Bleche mit bestimmten Abmessungen parallel zueinander mittels Kehlnaht verschweißt und dann mittels Meißels oder Keils von der offenen Seite her wieder bis zum Bruch auseinandergetrieben. Das Bruchaussehen gibt auch hier Auskunft über die Qualität der Schweiße.

Prüfungen von Preßschweißungen

Widerstands-Stumpfschweißungen prüft man im Faltversuch in einer Versuchsanordnung entsprechend Bild 32.
Punkt- und Rollnahtschweißungen an Blechen prüft man mit Hilfe des *Abpellversuchs*. Dabei wird durch Abzerren mit geeigneten Mitteln der Bruch erzwungen. Das Bruchaussehen gibt Auskunft über die Qualität der Schweißung. Reißt bei einer Punktschweißung das Blech ringsherum aus, so läßt dies auf eine gute Schweißung schließen.

3. Zerstörungsfreie Werkstoffuntersuchungen

Literatur: [3, 9, 10, 21, 23]

Viele gebräuchliche Verfahren der Werkstoffprüfung führen zur Zerstörung oder Beschädigung der Werkstücke oder deren Oberfläche. Deshalb gab es schon frühzeitig das Streben nach Prüfmethoden ohne Zerstörung der Werkstücke oder Beschädigung der Oberflächen. Das führte zu einer Vielzahl von zerstörungsfreien Werkstoffprüfverfahren, die es ermöglichen, die fertigen Bauteile zu untersuchen und möglichst alle Werkstücke in die Untersuchung einzubeziehen. Bei der zerstörungsfreien Werkstoffuntersuchung erhält der Prüfer keine zahlenmäßigen und unmittelbaren Ergebnisse, sondern nur Aussagen darüber, ob Ungänzen*) im Bauteil vorhanden sind, welche Ausdehnungen sie haben und wo sich diese befinden. Die Entscheidung über die Einsetzbarkeit oder Brauchbarkeit des Werkstücks erfordert oft die Zusammenarbeit von Herstellern, Konstrukteuren und Technologen, weil so die einzelnen Informationen und deren Kombinationen über die Ungänzen unter sorgfältiger Beachtung

*) In der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung wurde für Materialinhomogenität der Begriff „Ungänze" statt Fehler eingeführt. Nicht jede Ungänze eines Werkstücks ist ein Fehler, der den Gebrauchswert herabsetzt.

der Herstellungstechnologie und Einsatzcharakteristiken erst richtig bewertet werden können.
In den letzten Jahren hat es sich allgemein eingebürgert, daß man unter zerstörungsfreier Werkstoffprüfung nur noch die *Röntgen-* und *Gammadefektoskopie*, die *Ultraschallprüfung*, die *magnetischen* und *magnetinduktiven Prüfverfahren* versteht. Dazu kommen noch einige Sonderverfahren, die die erstgenannten ergänzen.
Aus Tabelle 8 sind verschiedene Einsatzmöglichkeiten von Prüfverfahren ersichtlich.

Tabelle 8. Prüfverfahren bei verschiedenen Ungänzen*)

Ungänze	Prüfverfahren
An der Oberfläche oder dicht darunter liegende Ungänze	magnetische Risseprüfung; seltener wird die Röntgen- oder Gammadefektoskopie angewandt
An der Oberfläche endende Ungänzen	Prüfung mit Penetrierflüssigkeiten
Ungänzen in Schweißverbindungen und bei Eisenwerkstücken bis 100 mm Dicke	Röntgendefektoskopie, Ultraschallprüfungen; seltener Gammadefektoskopie
Ungänzen in Eisenwerkstücken bis 150 mm Dicke	Gammadefektoskopie, Ultraschallprüfung
Haarrisse, die in ihren Abmessungen unter den Fehlererkennbarkeitsgrenzen der Röntgen- und Gammadefektoskopie liegen	Ultraschallprüfung, Prüfung mit magnetischen oder magnetinduktiven Verfahren

*) Nicht jede Ungänze kann durch jedes Prüfverfahren ermittelt werden.

3.1. Röntgen- und Gammadefektoskopie

Literatur: [3, 9, 10, 15, 18, 20]

Röntgen- und Gammastrahlen sind elektromagnetische Wellen, die sich vom sichtbaren Licht und von anderen Strahlungen durch ihre Wellenlängen unterscheiden. Röntgenstrahlen entstehen vorwiegend durch das Abbremsen sehr hoch beschleunigter Elektronen, wogegen die Gammastrahlen beim Zerfall radioaktiver Atomkerne entstehen*). Röntgen- und Gammastrahlen haben besondere Eigenschaften. Die wichtigste davon ist die Durchdringungsfähigkeit, durch die es möglich wird, diese Strahlen in der Werkstoffprüfung einzusetzen.

3.1.1. Röntgendefektoskopie

In der Röntgenröhre[36]) verwandelt sich etwa 1% der kinetischen Energie der Elektronen in Röntgenstrahlen (Bremsstrahlen). Außer den Bremsstrahlen*), die vorwiegend für die *Grobstrukturuntersuchung* verwendet werden, entstehen unter bestimmten Bedingungen charakteristische Strahlen*), die nur vom Anodenwerkstoff abhängig sind und zur *Feinstrukturuntersuchung* benutzt werden.

Bei der Beurteilung der Bremsstrahlen für die Röntgen-Grobstrukturuntersuchung ist die kleinste Wellenlänge wichtig. Sie errechnet sich aus

$$\lambda_{\min} = hc/eU \qquad (15)$$

h PLANCKsches Wirkungsquantum, c Lichtgeschwindigkeit, e Elektronenladung, U angelegte Hochspannung

bzw.

$$\lambda_{\min} = 1{,}239/U \qquad \left|\begin{array}{cc} \lambda_{\min} & U \\ \hline \text{nm} & \text{kV} \end{array}\right| \qquad (15a)$$

*) s. Abschn. PHYSIK, Röntgenstrahlung

Während Röntgenstrahlen mit sehr kleinen Wellenlängen als harte Strahlen bezeichnet werden, ist es durch Variation der angelegten Hochspannung auch möglich, weiche, langwelligere Strahlen zu erzeugen*). Aufgrund der geringen Wellenlängen können die Röntgenstrahlen vom menschlichen Auge nicht wahrgenommen werden, durchdringen aber geradlinig alle Körper. Die Intensität der Strahlung nach Durchgang durch ein Werkstück errechnet sich aus**)

$$I = I_0 e^{-\mu d} \tag{16}$$

I_0 in das Werkstück eintretende Strahlungsintensität, μ Schwächungskoeffizient, d Werkstückdicke

Der Schwächungskoeffizient setzt sich additiv aus der Fotoabsorption (τ), der Streuung (σ) und der Paarbildung ($\varkappa$) zusammen.

$$\mu = \tau + \sigma + \varkappa \tag{17}$$

Den Zusammenhang der drei genannten Größen zeigt Bild 34.

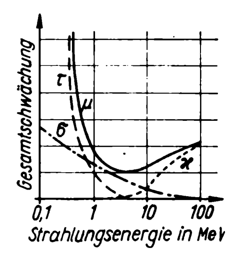


Bild 34. Schwächung in Abhängigkeit von der Strahlungsenergie. μ Schwächung; σ Streuung; τ Absorption; $\varkappa$ Paarbildung

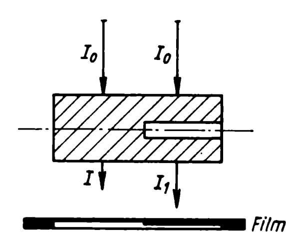


Bild 35. Unterschiedliche Schwärzung des Films durch Fehler im Werkstück

Die Röntgenstrahlen haben außer der Durchdringungsfähigkeit noch weitere wichtige Eigenschaften. Die *chemische Wirkung* der Strahlen bringt eine Veränderung der fotochemischen Schicht auf Filmen oder Papier hervor. Diese Wirkung wird zum Nachweis der Röntgenstrahlen benutzt und bildet die Grundlage für den *Nachweis von Ungänzen* in Werkstücken bei den Grobstrukturuntersuchungen.

Die chemische Wirkung der Röntgenstrahlen kann aber auch zu Veränderungen der Eigenschaften von Werkstoffen führen, Verfärbungen von Gläsern, Zerstörung von Plastarten, Veränderungen von Gewebezellen der Organismen u. a. hervorrufen.

Röntgenstrahlen bringen bestimmte Stoffe zur *Fluoreszenz*. Diese Erscheinung wird ausgenutzt bei Leuchtschirmen zur direkten Betrachtung von Durchleuchtungsaufnahmen und bei Verstärkerfolien.

Werden durch eine Röntgenanlage Strahlen mit der Intensität I_0 von einer bestimmten Entfernung auf ein Werkstück gesandt, so werden diese bei völlig kompaktem Werkstoff auf der gegenüberliegenden Seite mit der Intensität I vorliegen und den dort angebrachten Film[37])[38]) entsprechend schwärzen. Sind in dem Werkstück Hohlräume, Einschlüsse oder andere Ungänzen, so ist an dieser Stelle die Werkstückdicke d kleiner und die austretende Strahlenintensität größer und damit die Schwärzung auf dem Film intensiver (Bild 35). Auf diese Weise ist es möglich, von den Werkstücken dauerhafte Dokumente herzustellen, die Aussagen über das Vorliegen, die Ausmaße und die Lage der Ungänzen zulassen. Bei der Untersuchung von Werkstücken, bei der Röntgenbilder zur Auswertung und Beurteilung des Werkstücks angefertigt werden, muß man auch bestimmte Anforderungen an die Bildgüte solcher Aufnahmen stellen.

Dazu werden Drahtstege[39]) auf das Werkstück aufgelegt und mit geröntgt. Diese Drahtstege bestehen aus kleinen Gummi- oder Plastbehältern, die in einer bestimmten Abstufung sieben verschieden dicke Drähte aus Al, Cu oder Fe enthalten. Der Einsatzbereich der verschiedenen Drahtstege wird durch Standards vorgeschrieben. Auf dem Röntgenbild wird der benutzte Drahtsteg mit abgebildet, und bei

*) s. auch Abschn. PHYSIK, Bremsstrahlung
**) s. auch Abschn. PHYSIK, Gl. (84)

der Auswertung des Bildes ist es möglich, die Nummern des dünnsten auf dem Röntgenbild noch zu erkennenden Drahtes zu bestimmen. Diese Nummer ist die *Bildgütezahl BZ.*
Aus der Bildgütezahl *BZ* und der Dicke des durchstrahlten Materials kann die *Bildgüteklasse* ermittelt werden. Dabei ist die Bildgüteklasse 1 für solche Bauteile gefordert, die hoher Beanspruchung ausgesetzt sind und der Abnahmepflicht unterliegen.
Die Bildgüteklasse 2 ist für normal beanspruchte Werkstücke vorgesehen.
Eine besonders häufige Anwendung der Röntgen-Grobstrukturuntersuchung liegt bei Schweißverbindungen vor. Aus diesem Grund sind für die Klassifizierung und Bewertung von Schweißnahtfehlern besonders ausführliche Vorschriften geschaffen und standardisiert worden[39]).
Die Fehlerarten sind mit bestimmten Kurzzeichen versehen[39]):

Gasporen	Aa	Wurzelfehler mit Kerbwirkung, einseitig geschweißt	Db
schlauchförmige Gasporen	Ab	Wurzelfehler mit Kerbwirkung, beiderseitig geschweißt, auch Überschneidungsfehler	Dc
Gasporenkette in der Wurzel	Ac	Längsrisse	Ea
Schlackeneinschlüsse versch. Form u. Richtung	Ba	Querrisse	Eb
Schlackenzeilen	Bb	strahlenförmige Risse	Ec
linsenförmige Schlackeneinschlüsse	Bc	durchgelaufenes Schweißgut	Fa
metallische Einschlüsse	Bd	unregelmäßige Nahtoberfläche	Fb
Bindefehler	C	Einbrandkerben	Fc
konkave Nahtwurzel ohne Kerbe, einseitig geschweißt	Da		

Man erfaßt sie nach ihrer *Fehlergröße* und *Fehlerhäufigkeit.* Die sich daraus ergebenden Kombinationen werden mit fünf Noten bewertet. Zur Festlegung der *Fehlergrößenstufe* sind die Fehlergröße und die Werkstückdicke (Bild 36) maßgebend. Die Ermittlung der *Fehlerhäufigkeitsstufe* erfolgt aus der Summe der Einzelfehlerlänge innerhalb eines bestimmten Normalabschnitts und des Normalabschnitts selbst (Bild 37).

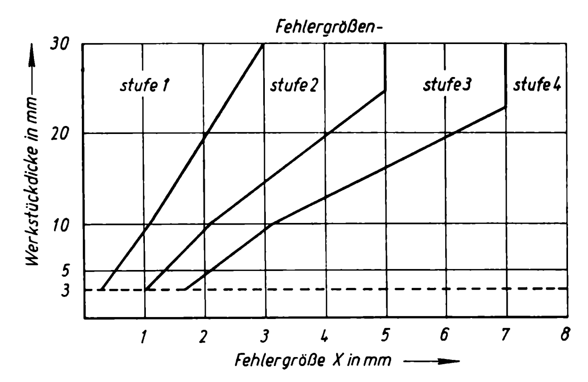


Bild 36. Diagramm zur Ermittlung der Fehlergrößenstufen[1])

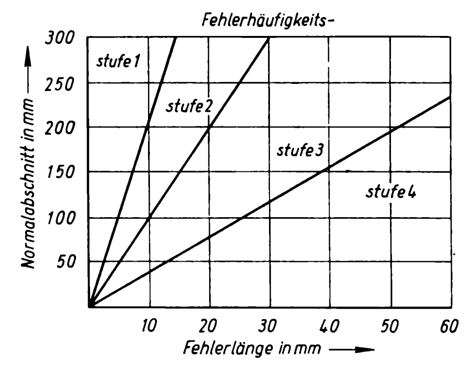


Bild 37. Diagramm zur Ermittlung der Fehlerhäufigkeitsstufen[1])

Die ermittelten Fehler sind im Prüfbefund mit zwei Ziffern zu klassifizieren, dabei bedeutet die erste die Fehlergrößenstufe und die zweite Ziffer die Fehlerhäufigkeitsstufe.
Die zulässigen Kombinationen der zwei Ziffern zur Ermittlung der entsprechenden Note sind aus Tabelle 9 ersichtlich. Eine Schweißverbindung wird als „brauchbar" bewertet, wenn die Prüfnote der geforderten Mindestnote entspricht.

Tabelle 9. Fehlerarten und -stufen zur Klassifizierung von Schweißverbindungen

Fehlerart	Note				
	1	2	3	4	5
	Zulässige Fehlerstufen gemäß Bilder 36 und 37				
Aa, Ab, Ba, Bc	11	12	13	23	
Bd		21	22 31	32	
Ac	—	11	12 21	13 22 31	
Bb	—	11	12 21	13 22	
C	—	—	—	11	
Da	—	14 21	22	23	alle übrigen
Db	—	—	11	12 21	
Dc	—	11	12 21	13 22	
Ea, Eb, Ec	—	—	—	—	

Tabelle 10. Einige wichtige Gammastrahler

Isotop	Halbwertszeit	1/10 Wertschicht	Anwendungsbereich
Kobalt-60	5,26 Jahre	51 mm Pb	über 50 mm Fe
Zäsium-137	33 Jahre	24 mm Pb	30 ··· 100 mm Fe
Iridium-192	74,5 Tage	11,5 mm Pb	8 ··· 50 mm Fe
Tantal-182	117 Tage	46 mm Pb	40 ··· 125 mm Fe
Thulium-170	127 Tage	1,5 mm Pb	unter 10 mm Fe

3.1.2. Gammadefektoskopie

Gammastrahlen unterscheiden sich von den Röntgenstrahlen nicht nur durch die geringere Wellenlänge, sondern auch durch ihre Entstehung. Die natürlichen radioaktiven Elemente Radium (Ra 226), Aktinium (Ac 228)*) und Radon (Rn 222) sind heute in der Technik kaum noch im Einsatz, weil die durchstrahlbaren Werkstückdicken klein sind und die Aufnahmezeit unwirtschaftlich groß sein müßte.
Für die technische Anwendung bei der Gammadefektoskopie sind fast nur noch künstlich hergestellte Isotope[40]) von Bedeutung**). Die wichtigsten Vertreter sind in Tabelle 10 mit einigen Eigenschaften zusammengestellt. Für die Anwendung in der Technik ist die *Aktivität* eines Gammastrahlers, die die Intensität der Strahlung bestimmt, von großer Wichtigkeit***).

*) früher Mesothorium MsTh-228 genannt
**) s. auch Abschn. PHYSIK, Anwendung von Radionukliden
***) Erläuterung s. Abschn. GRÖSSEN UND EINHEITEN und PHYSIK

Sie wird in der Einheit Becquerel (Bq) angegeben. Die *spezifische Aktivität* ist auf die Masse des Strahlers bezogen und wird in Bq/kg ausgedrückt. Da für die Gammadefektoskopie Strahler mit großer Aktivität nicht günstig sind, erfordert dies eine große spezifische Aktivität. Eine weitere wichtige Konstante für Gammastrahler ist die *Halbwertszeit* ($T_{1/2}$). Das ist die Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Atomkerne des Strahlers zerfallen ist. Für den Arbeitsschutz ist die (1/10)-Wertschicht wichtig, weil mit diesem Wert die notwendige Bleischicht, die die Expositions- oder Energiedosisleistung von Gammastrahlern einer bestimmten Energie auf 1/10 herabsetzt, angegeben wird.

In der Gammadefektoskopie ist es notwendig, für radioaktive Isotope, die ständig strahlen und damit für den Menschen eine Gefahr darstellen, *Isotopengeräte* zu verwenden. Diese haben einerseits die Aufgabe, die Gammastrahler sicher aufzubewahren, und andererseits muß es möglich sein, die Strahler in eine Arbeitsstellung zu bringen, so daß die Gammastrahlen austreten können. Weiterhin sollen die Isotopengeräte möglichst auch transportabel sein. Bild 38 zeigt ein Isotopengerät für Co 60.

In der Aufnahmetechnik der Gammadefektoskopie spielen die Größe des Strahlers, der *Strahler-Film-Abstand* (*SFA*), die Werkstückdicke, die Aktivität und die Belichtungszeit eine Rolle (Bild 39).

Der Strahler-Film-Abstand ist:

$$SFA = E(B + U_i)/U_i \tag{18}$$

U_i innere Unschärfe, B Breite des Strahlers, E Entfernung zwischen Film und der dem Strahler zugewandten Seite des Werkstücks, alles in mm

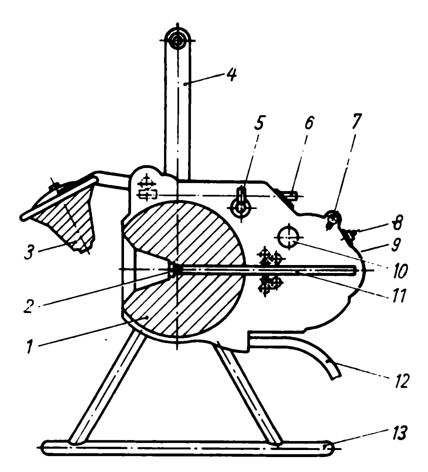
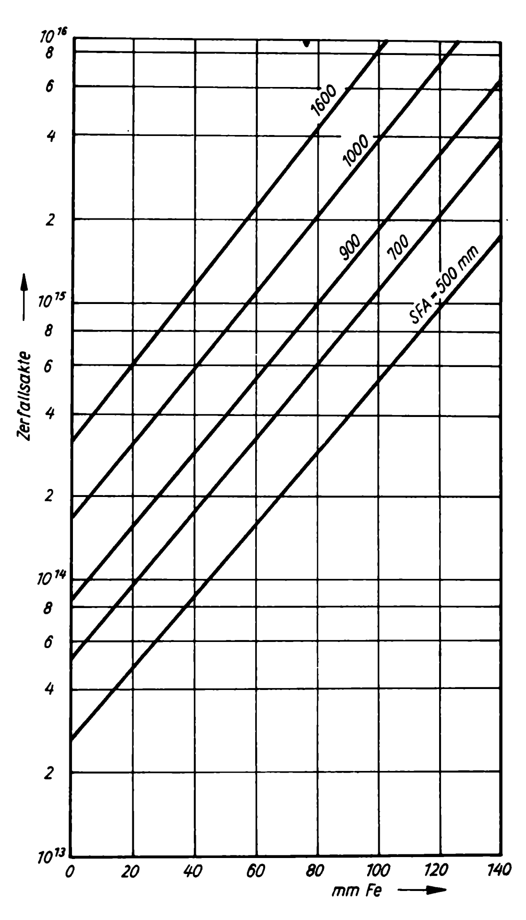
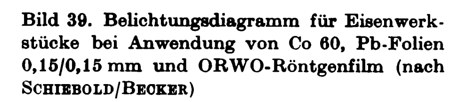


Bild 38. Schnitt durch das Isotopengerät TuR MCo 1,3. *1* Strahlenschutzteil mit Bleifüllung; *2* Kobalt-Quelle; *3* herausgeschwenkter Deckel mit Bleifüllung; *4* Tragegriff; *5* Deckelantrieb; *6* Stutzen mit Handkurbel; *7* Warnlampe; *8* Drucktaste; *9* Quellenträgerantrieb; *10* Verschlußdeckel; *11* Quellenträger; *12* Kabel zum Schaltkasten; *13* Stativ




Bild 39. Belichtungsdiagramm für Eisenwerkstücke bei Anwendung von Co 60, Pb-Folien 0,15/0,15 mm und ORWO-Röntgenfilm (nach SCHIEBOLD/BECKER)



3.1.3. Arbeitsschutz

Röntgen- und Gammastrahlen durchdringen nicht nur Materie, sondern beeinflussen auch lebende Zellen in starkem Maße. Die Skala der Schädigungen ist sehr umfangreich. Um Schäden beim Bedienungspersonal von Röntgen- und Gammaanlagen auszuschalten, darf die Belastung (Ionendosis) pro Woche einen bestimmten Wert*) nicht überschreiten.
Um die Ionendosis nicht zu überschreiten, ist eine große Zahl von Schutzmaßnahmen möglich und notwendig. Die Abschirmung[41]) der Strahlen durch Schutzschichten aus Blei, Wolfram, Eisen, Beton u. a. sowie Schutzschalter sind allgemein bekannt. Zur Kontrolle der Strahlenschutzmaßnahmen sind *Strahlenmeßgeräte* notwendig. Zur individuellen Dosiskontrolle des Bedienungspersonals werden *Filmdosimeter, Ionisationskammern* oder *Lumineszenzdosimeter* verwendet.

Filmdosimeter sind relativ billig und gestatten die Überwachung eines größeren Personenkreises. In Plaketten befinden sich fotografische Filme, die bei Vorhandensein von Strahlen geschwärzt werden. Alle 4 Wochen wird die empfangene Dosis kontrolliert. *Füllhalterdosimeter* sind Ionisationskammern, mit denen die empfangene Ionendosis täglich abgelesen werden kann. Sie ist für Langzeitmessungen nicht geeignet. Lumineszenzdosimeter werden noch nicht in großem Umfang eingesetzt.

3.2. Ultraschallprüfung

Literatur: [3, 10, 19]

Die Untersuchung *aller* Werkstücke mit Hilfe der Röntgen- oder Gammadefektoskopie wäre unökonomisch, und außerdem sind bestimmte Fehler trotzdem nicht nachweisbar. Deshalb wurden Prüfverfahren entwickelt, die einerseits mit geringem Zeitaufwand die Prüfung vieler Teile gestatten und andererseits nahezu jede Fehlerhaftigkeit der Fertigteile feststellen. Ein solches Verfahren ist die *Ultraschallprüfung*[42]), bei der Schallfrequenzen zwischen 800 kHz und 20 MHz verwendet werden**). Die gebräuchlichste Art der Schallerzeugung für die zerstörungsfreie Werkstoffprüfung ist die Ausnutzung des *piezoelektrischen Effekts.*

Dabei wird an eine Platte aus Quarzkristall (oder Bariumtitanat) eine hochfrequente Spannung angelegt. Diese Spannung bewirkt, daß der Quarz entsprechend der Frequenz seine Form ändert und entsprechende Schwingungen erzeugt. Werden diese auf Flüssigkeiten und kristalline Körper übertragen, so entstehen Longitudinalwellen, die den Körper durchdringen.

Eine zweite Möglichkeit der Schallerzeugung besteht in der Ausnutzung des *magnetostriktiven Effekts.* Dabei wird ein ferromagnetischer Werkstoff (z. B. eine Legierung aus 54% Pt und 46% Fe) durch einen Wechselstrom magnetisiert. Bei der Magnetisierung verändert sich die Form des Werkstücks in Richtung des Magnetfelds entsprechend der angelegten Frequenz. Diese mechanischen Schwingungen können in die zu untersuchenden Werkstücke übertragen werden.
Da Schallwellen sich unabhängig von der Erzeugung nur bei Vorhandensein von Materieteilchen ausbreiten können, werden sie den Werkstoff nur an den Stellen durchlaufen, wo er fehlerfrei ist. An Ungänzen sowie an den Oberflächen der Werkstücke wird der Ultraschall reflektiert. Dies wird bei dem *Impuls-Echo-Verfahren* ausgenutzt. Dagegen ist beim *Durchschallungsverfahren* die Schallintensität nach Durchgang durch das Werkstück die Meßgröße. Liegt im Werkstoff eine Ungänze vor, so ist die gemessene Schallintensität geringer. Das Durchschallungsverfahren kann auch zu Dickenmessungen verwendet werden.

3.2.1. Impuls-Echo-Verfahren

Bei diesem Ultraschallprüfverfahren werden von einem Schallgeber über ein Kopplungsmedium (dickflüssiges Öl, Pasten) kurze Impulse in das zu untersuchende Werkstück über-

---

*) in der DDR: 2,58 · 10^{-5} C/kg (≙ 0,1 R)
**) s. Abschnitt PHYSIK, Ultraschall

tragen. An Hohlräumen, Doppelungen, Rissen, Lunkern, Gasblasen u. a. sowie an der Rückseite des Werkstücks werden die Ultraschallimpulse reflektiert und in den Impulspausen des Schallgebers, der während dieser Zeit als Empfänger dient, aufgenommen. Dadurch ergeben sich auf einer Empfangs-Oszillografenröhre Impulsaufzeichnungen (Zackenschrift, Bild 40). Daraus können Aussagen über die Lage der eventuell vorhandenen Fehler abgeleitet werden. Zur Bestimmung der Fehlerausdehnung ist eine große Anzahl von Prüfungen in unterschiedlichen Richtungen notwendig.

Eine häufige Anwendung der Ultraschallprüfung liegt bei Schweißverbindungen vor, um Einschlüsse, Poren und Bindefehler an den Bindeflächen aufzufinden. Da der Ultraschallimpuls möglichst senkrecht zur größten Fehlerausdehnung laufen soll, muß bei Schweißnahtuntersuchungen mit *Winkelschallgebern*

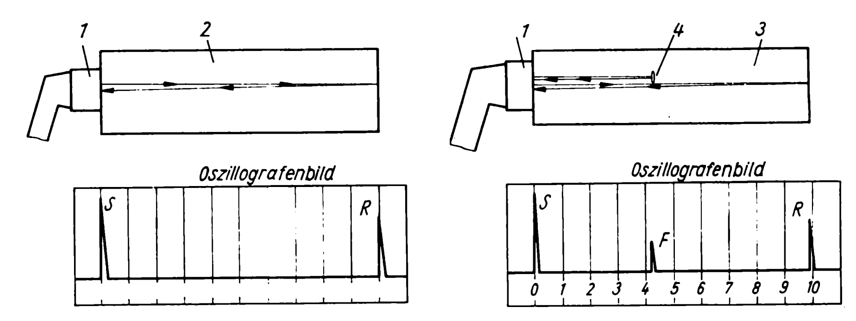


Bild 40. Schematische Darstellung der Fehleranzeige beim Impuls-Echo-Verfahren.
1 Sender und Empfänger; *2* Werkstück; *3* fehlerhaftes Werkstück; *4* Fehler; *S* Sendeimpuls; *R* Rückwandecho; *F* Fehlerecho

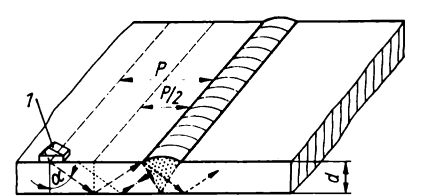


Bild 41. Winkelschallkopf an einer Schweißnaht. *1* Schallgeber

gearbeitet werden. Diese senden die Ultraschallimpulse unter einem bestimmten Winkel in das Werkstück (Bild 41). An Fehlern ergeben sich Reflexionen, die sich im Oszillografenbild als Fehlerechos widerspiegeln. Zur Bestimmung der Lage müssen die Werkstückdicke, der Einstrahlwinkel und der Sprungabstand p berücksichtigt werden. Um alle Schweißfehler zu erfassen, muß der Schallgeber zwischen p und $p/2$ bewegt werden.

3.2.2. Durchschallungsverfahren

Beim Durchschallungsverfahren werden Ultraschallwellen von einem Schallgeber in den Werkstoff gesandt und durch einen Empfänger aufgenommen. Dabei wird die Schwächung der Schallwellen gemessen. Die am Empfänger aufgenommene Schallintensität bei fehlerfreiem Material setzt man 100%. Befindet sich zwischen Schallgeber und Empfänger eine Ungänze, so wird die Schallintensität am Empfänger kleiner. Durch Abtasten des Werkstücks ist es möglich, die Flächenausdehnung der vorhandenen Ungänze zu bestimmen, jedoch nicht die Dicke.

Obwohl das Durchschallungsverfahren zwar in den gerätetechnischen Anforderungen geringe Ansprüche stellt, sind einige Nachteile nicht zu übersehen. So müssen der Schall- und der Empfängerkopf immer genau gegenüber fixiert und fehlerfrei am Werkstück angekoppelt werden. Die Nichterfüllung dieser beiden Forderungen kann zu Fehlschlüssen führen. Da die Erfüllung der Bedingungen aber nicht sehr einfach ist, hat sich das Durchschallungsverfahren noch nicht im vollen Umfang durchgesetzt.



3.3. Magnetische Prüfverfahren

Literatur: [3, 15, 21, 24]

Bei den magnetischen Prüfverfahren[42]) werden die Werkstücke magnetisiert, um Schlackenzeilen, Risse, Lunker, Poren u. a. m. an oder dicht unter der Oberfläche nachzuweisen. Dabei können *nur ferromagnetische Werkstoffe* geprüft werden. Trotz dieses Nachteils haben solche Prüfverfahren sehr große Verbreitung gefunden. Soll ein magnetisches Werkstück auf Oberflächenungänzen untersucht werden, so gibt es verschiedene Möglichkeiten der Magnetisierung. Bei der *Jochmagnetisierung* verlaufen die Feldlinien des magnetischen Felds parallel

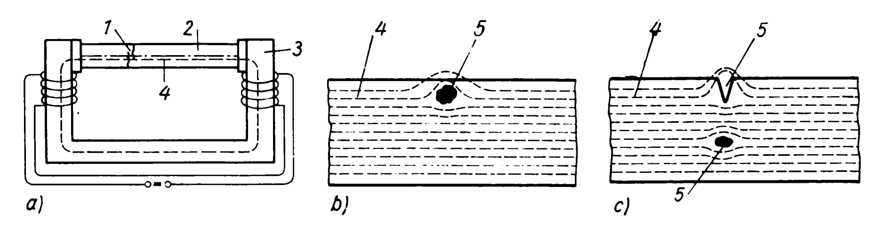


Bild 42. Schema der Jochmagnetisierung und Magnetlinienverlauf an Oberflächenungänzen.
a) Schema; b) und c) Magnetlinienverlauf. *1* Risse; *2* Prüfstück; *3* Joch; *4* Magnetlinien; *5* Fehler

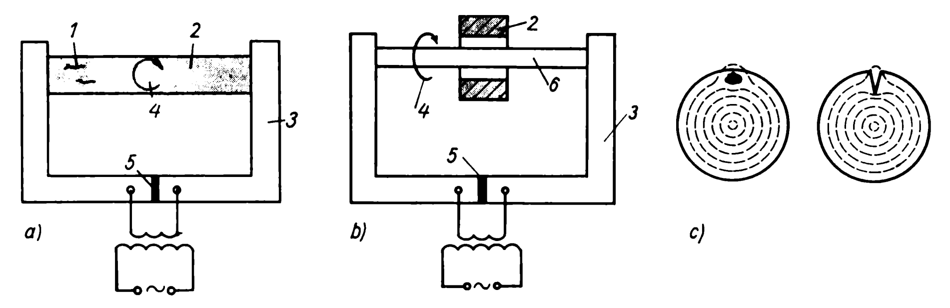


Bild 43. Schema der Selbst- und Hilfsdurchflutung sowie Magnetlinienverlauf bei Oberflächenungänzen.
a) Selbstdurchflutung; b) Hilfsdurchflutung; c) Magnetlinienverlauf. *1* Risse; *2* Prüfstück; *3* Joch; *4* Magnetlinien; *5* Isolierung; *6* Kupferstab

zur Längsachse des Werkstücks (Bild 42). Befinden sich in der Werkstückoberfläche Luft- oder Gaseinschlüsse, Schlackenteilchen, Risse, Poren u. a., so liegt an diesen Stellen eine geringere magnetische Durchlässigkeit vor. Dadurch ist das gleichmäßige Magnetfeld gestört, und die Feldlinien werden verzerrt. Da bei Oberflächenungänzen der Magnetfluß nur an einer Seite ausweichen kann, wird ein Teil der Feldlinien aus der Werkstückoberfläche herausgedrängt. Nur bei Rissen, die senkrecht zur Magnetisierungsrichtung verlaufen, sind die aus der Oberfläche heraustretenden Magnetlinien nachweisbar.

Verlaufen Risse parallel zur Feldlinienrichtung, so ist die Jochmagnetisierung nicht anzuwenden. In solchen Fällen wird die *Selbstdurchflutung*, bei Hohlkörpern die *Hilfsdurchflutung*, angewandt (Bild 43). Dabei fließt der Strom durch das Prüfstück und erzeugt in diesem ein umlaufendes Magnetfeld, welches bei Oberflächenungänzen abgelenkt wird. Spezialgeräte für den Nachweis nur einer Art von Ungänzen sind zwar notwendig, aber für die meisten der anfallenden Prüfteile unrationell. Deshalb werden sehr häufig Geräte mit einer *Kombination aus Jochmagnetisierung und Selbstdurchflutung* verwendet.
Mit ihnen ist es möglich, jede in beliebiger Lage vorhandene Oberflächenungänze nachzuweisen, weil die Magnetlinien bei einer solchen Kombination das Prüfstück in Längsrichtung und konzentrisch um die Prüflingsachse durchdringen.

Während das Magnetfeld das Prüfstück durchdringt, wird über die Oberfläche meistens Petroleum mit feinsten Eisenteilchen (Prüföl) gespült. Durch die Eisenpartikelchen bilden sich an den Austrittsstellen der magnetischen Feldlinien Anhäufungen, die das Umgehen der Oberflächenungänzen erleichtern. Dadurch ist es möglich, die örtliche Lage und den Verlauf der Ungänzen festzustellen. Durch visuelle Beurteilung wird über die Verwendbarkeit der Prüfstücke entschieden. In besonderen Fällen ist es notwendig, bleibende *Dokumente* der Prüfergebnisse herzustellen.

Das *Fotografieren* der Prüfstückoberfläche mit eventuell vorhandenen Anhäufungen von Eisenpartikelchen an Ungänzen ist eine Möglichkeit, die jedoch oft erhebliche Umstände und Kosten verursacht. Eine andere Methode ist der *Papierabdruck*. Hierbei werden durch ein Saugpapier die Pulverteilchen aufgenommen. Allerdings ist nach dem Trocknen des Papiers der Nachweis der Oberflächenungänzen seitenverkehrt. Die dritte Möglichkeit, eine bleibende Dokumentation des Untersuchungsergebnisses herzustellen, ist das *Papierauflage-*

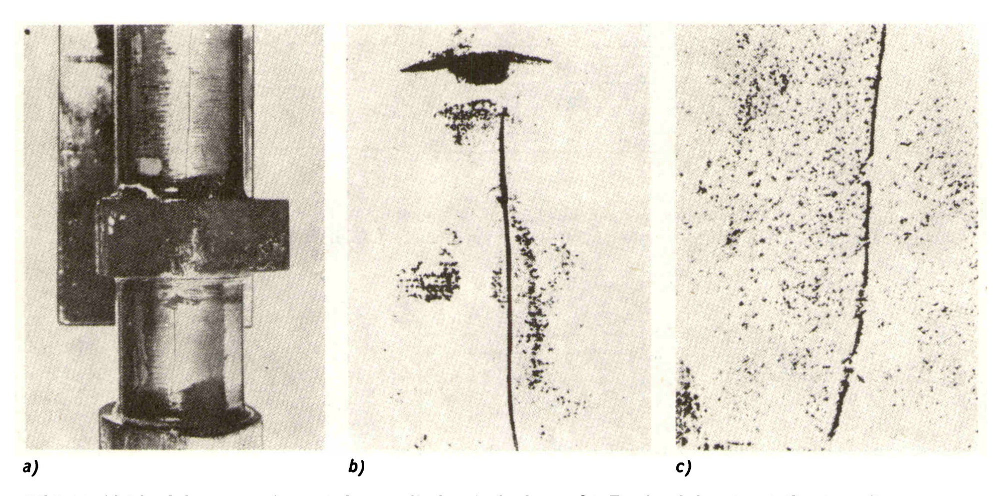


Bild 44. Fehlerdokumentation. a) fotografische Aufnahme; b) Papierabdruck; c) Papierauflage

verfahren. Ein sehr dünnes Papier wird vor dem Magnetisieren auf die Prüfstückoberfläche fest aufgelegt und während des Prüfprozesses mit Prüföl überspült. Bei vorhandenen Ungänzen sammeln sich die Eisenpartikelchen an den entsprechenden Stellen auf dem Papier an. Nach dem Prüfprozeß wird das Papier von der Oberfläche genommen und getrocknet. Die Genauigkeit und die Fehlernachweismöglichkeit sind sehr stark von der Papierdicke abhängig (Bild 44).

3.4. Magnetinduktive Prüfverfahren

Literatur: [3, 16]

Magnetinduktive Prüfverfahren können *bei allen ferro- und nichtferromagnetischen metallischen Werkstoffen* angewandt werden. Sie sind einzusetzen:

- zur Verwechslungsprüfung,
- zur Härteprüfung bei Stahl,
- zur Ermittlung der Ent- oder Aufkohlungstiefe,
- zur Prüfung der Werkstücke auf Risse und
- zur Schichtdickenmessung.

Aufgrund der vielseitigen Anwendung ist eine große Anzahl von unterschiedlichen Methoden entwickelt worden.



3.4.1. Tastspulverfahren

Beim Tastspulverfahren wird an eine Spule Wechselstrom angelegt, der in entsprechender Richtung ein magnetisches Feld aufbaut. Bei Annäherung der Spule an einen metallischen Werkstoff werden in diesem Wirbelströme induziert, durch die ein *magnetisches Gegenfeld* aufgebaut wird (Bild 45). Diese Rückwirkung wird zur Messung ausgenutzt. Da die meßbare Rückwirkung von der elektrischen Leitfähigkeit des Werkstoffs abhängig ist, können vorzugsweise nur solche Fehler ermittelt werden, die diese beeinflussen. Das sind z. B. Verunreinigungen in reinen Metallen, Gefügeunterschiede, Poren, Seigerungen, Härteunterschiede, Sortenunterschiede usw. Da die Rückwirkung auch von der Dicke der Werkstücke abhängig ist, kann das Tastspulverfahren unter bestimmten Bedingungen auch zur *Schichtdicken-* und *Dickenmessung* verwendet werden.

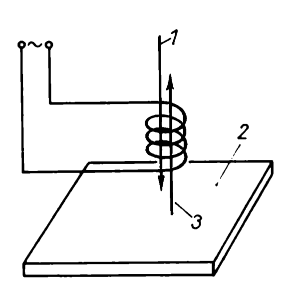


Bild 45. Schema der Tastspule. *1* magnetisches Wechselfeld der Spule; *2* Werkstück; *3* aufgebautes magnetisches Feld des Werkstücks

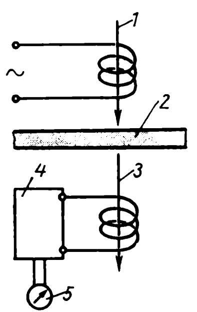


Bild 46. Schema des Gabelspulverfahrens. *1* magnetisches Wechselfeld der Primärspule; *2* Werkstück; *3* geschwächtes Wechselfeld; *4* Verstärker; *5* Anzeigegerät

3.4.2. Gabelspulverfahren

Bei diesem Prüfverfahren verwendet man eine Primär- und eine Sekundärspule, zwischen denen das Werkstück bewegt werden kann (Bild 46). Gelangt das Wechselfeld der Primärspule ohne Hindernis zur Sekundärspule, so wird in dieser eine meßbare Sekundärspannung erzeugt. Wird das Wechselfeld durch ein Werkstück zwischen den Spulen gestört, so entsteht eine Sekundärspannung, die von der ursprünglichen abweicht. Die Veränderung bzw. Schwächung des Wechselfelds hängt in der Hauptsache von der Dicke des Werkstücks zwischen den Spulen ab. Deshalb wird das Gabelspulverfahren vorzugsweise zur *Dickenmessung* in der blech- und drahtherstellenden Industrie eingesetzt.

3.4.3. Durchlaufspulverfahren

Tast- und Gabelspulverfahren werden hauptsächlich bei Werkstücken mit ebenen Flächen angewandt. Wellen, Rohre, Stangen und andere Profile, von denen Gefügezustand, Festigkeit, Härte, Einsatztiefe und innere Ungänzen (Risse u. a.) interessieren, können nur mit dem Durchlaufspulverfahren untersucht werden, von dem es 2 Varianten gibt. Die erste ist das *Vergleichsverfahren* (Bild 47). Bei ihm werden zwei Spulen mit jeweils Primär- und Sekundärwicklung verwendet. Bringt man in eine Spule eine Normalprobe, so wird in der Sekundärwicklung eine bestimmte Spannung induziert. Überstreicht die zweite Spule (Prüfspule) fehlerfreies Material, so entsteht in der Sekundärwicklung der Prüfspule ebenfalls eine induzierte Spannung, die gegenüber der in der Vergleichsspule entstandenen gleich groß ist und sich wegen der Gegenschaltung der Wicklungen aufhebt. Bei unterschiedlichem Gefügezustand entstehen in den Sekundärwicklungen unterschiedliche Spannungen. Die Differenz ist im Anzeigegerät ablesbar oder kann durch ein Oszillografenbild dargestellt werden.

Das zweite Verfahren ist das *Selbstvergleichsverfahren* (Bild 48). Es wird besonders zur Ermittlung von inneren Ungänzen verwendet, wobei das Werkstück nicht mit einem Prüfnormal verglichen wird, sondern mit einer anderen Stelle des Werkstücks. Dadurch werden mögliche Permeabilitäts- und Leitfähigkeitsunterschiede zwischen Normal- und Prüfstück ausgeschlossen, und man konzentriert sich nur auf die Inhomogenität des zu prüfenden Materials. Beim Selbstvergleichsverfahren befinden sich zwei Spulenkombinationen aus Primär- und Sekundärwicklungen in einem Gehäuse. Durch die Spulenkombinationen werden zwei benachbarte Bereiche miteinander verglichen. Befinden sich in den beiden zu vergleichenden Werkstückteilen keine Inhomogenitäten, so sind die induzierten Spannungen in den Sekundärwicklungen gleich und heben sich auf. Befindet sich in einer Spulenkombination ein Werkstückabschnitt mit einem Riß, so entstehen unterschiedliche induzierte Spannungen; das Oszillografenbild zeigt eine Veränderung an.

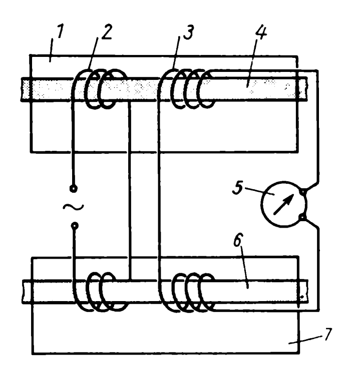


Bild 47. Schematische Darstellung der Schaltung einer Durchlaufspule zur Ermittlung der Werkstoffqualität.
1 Vergleichsspule; *2* Primärwicklung; *3* Sekundärwicklung; *4* Normalprobe; *5* Anzeigegerät; *6* Prüfstück; *7* Prüfspule

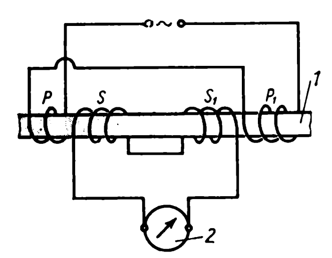


Bild 48. Schematische Darstellung der Schaltung einer Durchlaufspule zur Ermittlung von Rissen im Prüfling.
P, P_1 Primärwicklungen; S, S_1 Sekundärwicklungen; *1* Prüfling; *2* Anzeigegerät

3.5. Risseprüfung mittels Penetrierverfahren

Literatur: [3]

Der technische Aufwand der bisher beschriebenen Verfahren zur Ermittlung von Oberflächenfehlern ist in der Regel verhältnismäßig hoch. Deshalb mußten Verfahren entwickelt werden, mit denen bei allen Werkstoffen mit geringem Aufwand und in allen Situationen Risse, Poren, Lunker, Bindefehler u. a. an den Werkstückoberflächen nachgewiesen werden können. Dazu gehören unter anderem die *Penetrierverfahren*. Bei diesen Verfahren wird auf die Werkstückoberfläche eine Flüssigkeit mit sehr geringer Oberflächenspannung aufgebracht, die durch die Kapillarwirkung in die Oberflächenfehler eindringt. Nachdem die überschüssige Flüssigkeit von der Oberfläche entfernt ist, werden die eingedrungenen Mengen der Penetrierflüssigkeit auf chemischem oder physikalischem Weg sichtbar gemacht. Dadurch kann die Lage und Ausdehnung der Fehlstellen festgestellt werden.

Eines der ältesten Verfahren ist die *Ölkochprobe*[43]), bei der die Werkstücke in heißes Öl getaucht werden. Dabei dringt das sehr dünnflüssige Öl auch in vorhandene Haarrisse ein. Anschließend wird die Oberfläche in Sägespänen gesäubert und getrocknet. Da beim Erkalten des Werkstücks die Fehler volumenmäßig kleiner werden, quillt das Öl heraus, und die Lage und der Verlauf der Fehler werden sichtbar. Eine bessere Fehlererkennbarkeit ergibt sich, wenn das Werkstück unmittelbar nach der Oberflächensäuberung in Schlämmkreide getaucht wird. Durch das warme Werkstück verdunstet das Lösungsmittel schnell, und es verbleibt an der Oberfläche ein dünner weißer Überzug, in dem das austretende Öl deutlich sichtbar ist. Nachteilig bei dieser Prüfmethode ist das Arbeiten mit heißem Öl. Deshalb mußten andere, sehr



dünnflüssige Penetrierflüssigkeiten gefunden werden, die außerdem farblich noch besser sichtbar sind[44]). Zu diesem Zweck wurde das *Prüfrot ZIS* entwickelt*). Die rote Lösung wird auf die Werkstückoberfläche gebracht und nach einiger Zeit gründlich mit Wasser abgewaschen. Nach dem Trocknen des Prüflings wird das *Kontrastweiß ZIS*, dessen Löser sehr schnell verdunstet, aufgetragen. Die dünne weiße Schicht wird durch die rote Farbe in den Fehlern gefärbt. Dadurch ist die Lage und Ausdehnung der Risse feststellbar. Diese Art der Risseprüfung wird als *Farbdiffusionsverfahren* bezeichnet. Wird eine fluoreszierende Diffusionsflüssigkeit verwendet, die in ultraviolettem Licht besonders gut sichtbar ist, so bezeichnet man diese Methode als *Fluoreszenzverfahren*.

4. Metallografische Untersuchungen

Literatur: [3, 9, 10, 11, 22, 25]

Metallografische Untersuchungen geben Auskunft über den Gefügeaufbau, dessen thermisches Verhalten und Abhängigkeit von der Zusammensetzung sowie die Verteilung vorhandener Verunreinigungen. Obwohl in einzelnen Fällen das Aussehen und die Art eines Bruchs oder der Bruchfläche Rückschlüsse auf die Bruchursache oder die Wärmebehandlung zulassen, sind daraus wichtige Aussagen über die Beschaffenheit der Kristalle, deren Größe und Form, die Verteilung von Verunreinigungen und die Abhängigkeiten der Gefüge von der Temperatur nicht abzuleiten. Aus diesem Grund wurde ein Anzahl Untersuchungsmethoden entwickelt, mit deren Hilfe spezielle Aussagen möglich sind.

4.1. Mikroskopische Untersuchungen

Wird die Untersuchung so durchgeführt, daß die Ergebnisse nur mit einem Mikroskop ausgewertet werden können, so spricht man von einer *mikroskopischen Untersuchung*. Bei ihr ist eine Anzahl bestimmter Arbeitsgänge zu durchlaufen, bis das Gefüge als Endergebnis (eventuell in einer fotografischen Aufnahme) festgehalten werden kann[45]).

4.1.1. Arbeitsmethoden der mikroskopischen Untersuchung

Um richtige Aussagen aus einer Gefügeaufnahme ableiten zu können, ist es unbedingt erforderlich, daß alle Arbeitsgänge sorgfältig und unter bestimmten Gesichtspunkten durchgeführt werden.

Bei der Probenentnahme ist vorher die Schlifffläche festzulegen, weil diese dem Untersuchungszweck untergeordnet sein muß. Die Probe darf nur mit mechanischen Mitteln von dem Werkstück getrennt und jede Wärmeentwicklung, bei der sich die Gefüge verändern würden, muß vermieden werden.
Deshalb ist das günstigste Werkzeug zur *Probenentnahme* die Hand- oder Maschinensäge. Die Probengröße soll so festgelegt sein, daß das Halten mit Hand oder mit einfachen Hilfsmitteln möglich ist. Sehr kleine Probestücke sind in Kunstharz, Blei, WOODsches Metall o. ä. einzubetten, damit handliche Körper entstehen. Bei Blechen können auch Schliffkammern verwendet werden.
Die vorgesehene Schlifffläche wird mit einer Feile oder Schleifscheibe so bearbeitet, daß für das nachfolgende metallografische Schleifen mit Hand oder Maschine eine ebene Ausgangsfläche vorliegt. Die zum Schleifen verwendeten Papiere haben unterschiedliche Körnung[46]). Während der Schliffherstellung darf die Probentemperatur nicht über Handwärme ansteigen, weil sonst Gefügeveränderungen eintreten können. Deshalb wird dem *Naßschleifen* heute der Vorrang gegeben. Wenn auch beim Schleifen mit Papier geringster Körnung gearbeitet würde, so wäre doch auf der Schlifffläche noch eine Schar paralleler Schleiffurchen unter dem Mikroskop sichtbar. Deshalb wird die Oberfläche durch *Polieren* noch weiter bearbeitet. Das geschieht auf einer horizontal rotierenden Scheibe, die mit Filztuch bespannt ist und mit Poliertonerde (Aluminiumoxidaufschlämmung) befeuchtet wird. Das Polieren ist beendet, wenn unter dem Mikroskop keine Unebenheiten mehr sichtbar sind.
Anschließend wird gründlich gereinigt, mit Alkohol abgewaschen und unter Heißluft getrocknet. Das mechanische Polieren hat einen erheblichen Nachteil, der bei genauen Untersuchungen beachtet werden muß (Entstehung einer sehr dünnen, kaltverformten Oberflächenschicht).

---

*) im Zentralinstitut für Schweißtechnik Halle (ZIS)

Tabelle 11. Elektrolytlösungen für das Polieren

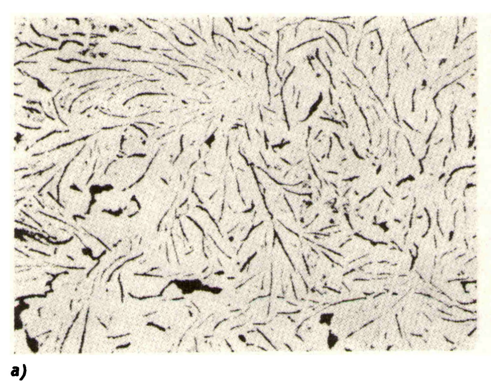
Zusammensetzung	Spannung in V	Stromstärke in mA	Polierdauer in s	Werkstoffe	Bemerkungen
45%ige Phosphorsäure	2,2	50···60	30···60	Cu, Ms, Rg, Al- und Be-Bronze	bei höherer Spannung (> 2,5 V) Sauerstoffentwicklung
350 cm³ Phosphorsäure + 650 cm³ Äthylalkohol	3···4	12···30	120···180	Mg und Mg-Legierungen, Zn, Cu-Legierungen, Zn—Mg-Legierung	
200 cm³ Perchlorsäure (Dichte 1,2 g/cm³) + 700 cm³ Äthylalkohol + 100 cm³ Butylcellosolve	30	180	30	Weicheisen, C-Stähle, leg. Stähle, Schnellarbeitsstähle, austenitische Stähle, Cd, Sn, Zn, Ni, Co, Pb, U, Be, hochwarmfeste Ni—Cr-Legierungen	Universalelektrolyt außer für Cu und Cu-Legierungen. Elektrolyt frisch ansetzen. Vorsicht beim Arbeiten!
300 cm³ konz. Salpetersäure + 700 cm³ Methylalkohol	20···30	400···500	20···40	austenitische Stähle, Ni, Al	Lösung ist begrenzt haltbar
144 cm³ Äthylalkohol + 10 g Ammoniumchlorid + 45 g Zinkchlorid + 32 cm³ Wasser + 16 cm³ *n*-Butylalkohol	18···25	100···200	180	Al, Al-Legierungen, Sn, Zn, Co, Ni, austenitische Stähle	

Dieser oft sehr störende Nachteil kann durch ein *chemisches* oder *elektrolytisches Polieren* ausgeschaltet werden. Beim elektrolytischen Polieren wird die Probe als Anode geschaltet, und bei entsprechender Elektrolytzusammensetzung (Tabelle 11), Stromdichte, Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit des Elektrolyten werden die Spitzen der Unebenheiten abgetragen. Dadurch wird die Schliffläche poliert, an der durch chemische Einwirkung das Gefüge sichtbar gemacht werden kann. In Ausnahmefällen, besonders bei Kristallgemischlegierungen mit weichen und harten Bestandteilen (z. B. bei Lagermetallen oder Grauguß), werden die verschiedenen Kristallarten unterschiedlich abgetragen; es entsteht auf der polierten Oberfläche ein Relief, welches unter einem Mikroskop sichtbar ist (Bild 49). In einem solchen Fall wird vom *Reliefpolieren* gesprochen. Wie schon erwähnt, ist eine Reliefbildung bei den meisten Metallen und Legierungen nicht möglich, so daß die Schliffoberfläche chemisch behandelt werden muß, um das vorhandene Gefüge unter dem Mikroskop sichtbar machen zu können. Diese chemische Behandlung wird als *Ätzen* bezeichnet. Da unterschiedliche Anforderungen an ein sichtbares Gefügebild gestellt werden, ist es notwendig, für das Ätzen verschiedene Chemikalien zusammenzustellen, die unterschiedliche Wirkungen auf der Probenoberfläche erzeugen (Tabelle 12).

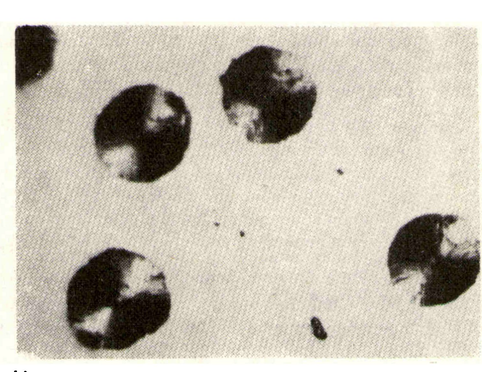
Grundsätzlich wird zwischen dem *Korngrenzenätzen* und dem *Kornflächenätzen* unterschieden. Bei der Korngrenzenätzung greifen die Ätzmittel aufgrund der unterschiedlichen Ätzgeschwindigkeit die einzelnen Kristalle unterschiedlich an, und es entsteht nach einer gewissen Ätzzeit ein *Relief* an der Oberfläche (Bild 50). Es besteht aber auch die Möglichkeit, daß die Ätzmittel die Verunreinigungen aus den Korngrenzen herauslösen und dadurch an diesen Stellen geringe Vertiefungen erzeugen. Bei beiden Möglichkeiten entstehen unter schräg einfallendem Licht Schatten, die im mikroskopischen Bild als dunkle Linien sichtbar sind (Bild 51). Eine andere Wirkung haben die Ätzmittel bei der Kornflächenätzung. Aus den verschiedensten Gründen erscheinen die einzelnen Kristalle unterschiedlich gefärbt (Bild 52). Eine Möglichkeit besteht darin, daß durch das Ätzmittel jeder Kristall verschieden aufgerauht wird und dadurch bei schräg einfallendem Licht unterschiedliche Reflexionen entstehen, die die Kristalle hell oder dunkel erscheinen lassen (Bild 53). Eine andere Möglichkeit der unterschiedlichen Färbung der Kristalle besteht in der Erzeugung von Oxidschichten auf den Kristalloberflächen durch das Ätzmittel. Da die Schichten verschieden stark sind, erscheinen sie unterschiedlich gefärbt. Dadurch werden wiederum die Kornflächen sichtbar.

Tabelle 12. Ätzmittel für mikroskopische Untersuchungen

Hauptsächlicher Anwendungsbereich	Nachweismöglichkeit	Ätzmittelzusammensetzung und Ätzzeit
Stahl, Grau-, Temper-, Hart- und Stahlguß	Korngrenzenätzung für alle kohlenstoffhaltigen Eisenwerkstoffe, gebräuchlichstes Ätzmittel	1 cm³ konz. Salpetersäure + 100 cm³ Alkohol oder 4 g Pikrinsäure + 100 cm³ Alkohol; Ätzzeit in beiden Fällen 10 bis 120 s (je nach Kohlenstoffgehalt)
Stahl, austenitische Ni-Stähle	Kornflächenätzung bei kohlenstoffarmen Stählen	10 g Ammoniumpersulfat + 100 cm³ dest. Wasser; Ätzzeit wird vom Kornflächenangriff bestimmt
Legierter Stahl	Unterscheidung von Sonderkarbiden und Zementit; Cr- und W-Karbide werden nicht, Fe-Wolframid und Fe—W-Karbid werden schneller als Zementit gefärbt	25 g Natriumhydroxid + 75 cm³ dest. Wasser + 2 g Pikrinsäure auf 100 cm³ Lösung ansetzen; Ätztemperatur 50 °C, Ätzzeit bis 10 min
Legierter Stahl	wird zur Entwicklung des Gefüges bei hochchromhaltigen nichtrostenden Stählen verwendet	15 cm³ konz. Salpetersäure + 30 cm³ konz. Salzsäure + 45 cm³ Glyzerin; die Säuren einzeln dem Glyzerin zugeben. Nach Gebrauch weggießen.
Al und Al-Legierung	mikroskopische Gefügeuntersuchungen; gebräuchlichstes Ätzmittel	0,5 cm³ Flußsäure + 100 cm³ dest. Wasser; Ätzzeit bis 10 s
Cu und Cu-Legierung	mikroskopische Ätzung an Cu, α-, β-Ms, Rotguß und Bronzen	10 g Kupferammoniumchlorid + 120 cm³ dest. Wasser. Dazu Ammoniak, bis der Niederschlag gelöst ist. Ist die Ätzzeit zu kurz, so wird mit dest. Wasser verdünnt.
Zn und Zn-Legierung	gebräuchlichste Ätzung für mikroskopische Untersuchungen	0,5 cm³ konz. Salpetersäure + 100 cm³ dest. Wasser oder 1 cm³ konz. Salpetersäure + 100 cm³ Alkohol



a)



b)

Bild 49. Reliefpolierter Grauguß, 300fache Vergrößerung. a) GGL; b) GGG

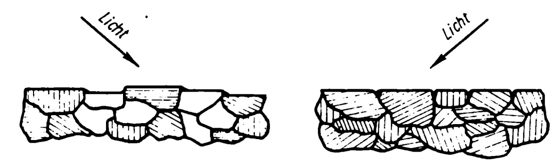
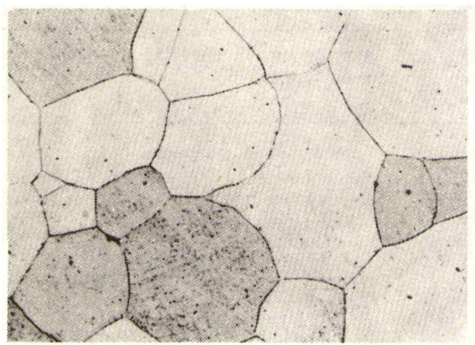


Bild 50. Korngrenzenätzung durch Reliefbildung und Korngrenzenvertiefung



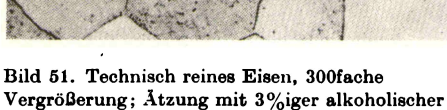


Bild 51. Technisch reines Eisen, 300fache Vergrößerung; Ätzung mit 3%iger alkoholischer Salpetersäure (Korngrenzenätzung)

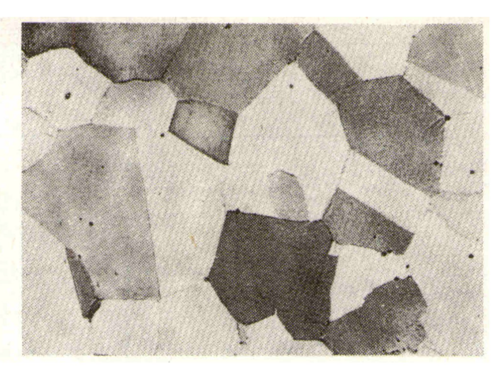


Bild 52. Gefüge nach einer Kornflächenätzung

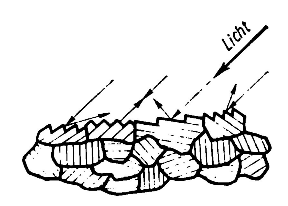


Bild 53. Kornflächenätzung bei verschiedener Reflexion des Lichts

4.1.2. Hilfsmittel und Auswertung

Das wichtigste Hilfsmittel bei der mikroskopischen Untersuchung ist das *Metallmikroskop*. Es hat die Aufgabe, die durch die verschiedensten Ätzverfahren erzeugten Gefügeerscheinungen dem menschlichen Auge zugänglich zu machen und fotografische Aufnahmen dieser Gefüge zu ermöglichen. Die Mikroskope (Bild 54, Bild 55) arbeiten nach dem Mikroskopprinzip von Le Chatelier.

Dabei wird mit auffallendem Licht gearbeitet. Die Probe befindet sich oberhalb des Objektivs auf einem Objektträgertisch, der in alle Richtungen verstellbar ist. Da bei Metallmikroskopen die normale Anordnung eines Mikroskops umgekehrt ist und außerdem noch mit auffallendem Licht gearbeitet wird, spricht man von einem *umgekehrten Auflichtmikroskop*. Der große Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß die geätzte Oberfläche immer senkrecht zur optischen Achse des Objektivs liegt und dadurch ein gleichmäßig helles und scharfes Sichtfeld gewährleistet ist.

Zu jedem Metallmikroskop gibt es eine Vielzahl von Zusatzgeräten, die einen vielseitigen Einsatz der Mikroskope ermöglichen. Durch bestimmte Veränderungen im Strahlengang des Mikroskops ist es möglich, die Hellfeld- bzw. Dunkelfeldbeleuchtung zu verwenden.

Im Bild 56 ist schematisch dargestellt, wie bei den einzelnen Beleuchtungsarten das Licht zur Probe gelangt und dort reflektiert wird. Bei der *Hellfeldbeleuchtung* fällt das Licht nahezu senkrecht auf die Oberfläche, und der größte Teil des reflektierten Lichts kommt durch das Objektiv in das Okular zur Beobachtung. Die Kristalle erscheinen deshalb zum überwiegenden Teil mehr oder weniger hell. Bei der *Dunkelfeldbeleuchtung* verläuft das Licht so schräg, daß die Reflexionen der geätzten Oberfläche am Objektiv vorbeigehen. Deshalb erscheinen dem Betrachter die meisten Kristalle dunkel. Nur die, die bei der Hellfeldbeleuchtung dunkel erscheinen, treten bei der Dunkelfeldbeleuchtung als helle Kristalle hervor. Bild 57 zeigt die gleiche Probe bei unterschiedlicher Beleuchtungsart. Die Beleuchtungsart, die bei den verschiedenen Werkstoffen anzuwenden ist, muß durch Experimente bestimmt werden.

Ein weiteres Zusatzgerät zu den Metallmikroskopen ist das *Mikrohärteprüfgerät* (Bild 58). Mit ihm kann die Härte jedes Gefügebestandteils mit unterschiedlichen Prüflasten ermittelt werden.



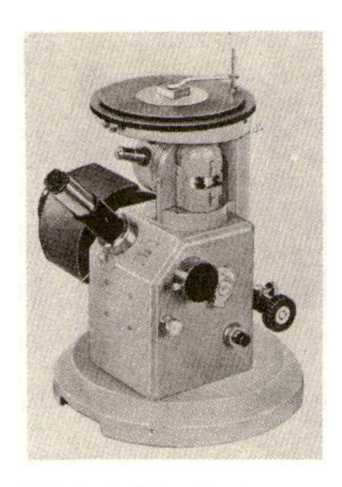


Bild 54. Auflichtmikroskop Epityp (VEB Carl Zeiss JENA)

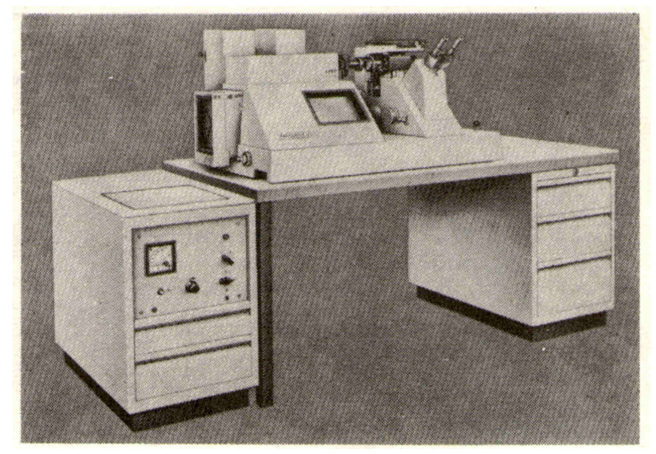
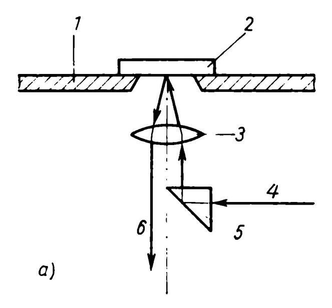


Bild 55. Großes Auflicht-Kameramikroskop Neophot 2 (VEB Carl Zeiss JENA)



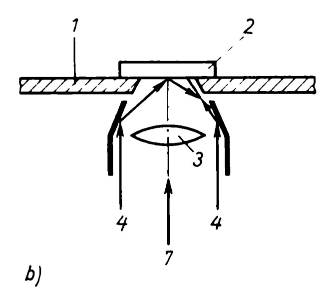
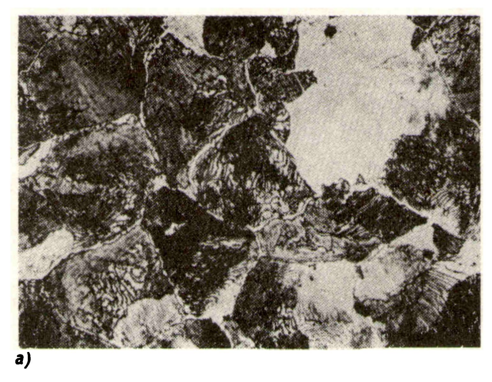


Bild 56. Schematische Darstellung der Hell- und Dunkelfeldbeleuchtung. a) Hellfeldbeleuchtung; b) Dunkelfeldbeleuchtung. *1* Objektträgertisch; *2* Probe; *3* Objektiv; *4* Licht; *5* Prisma; *6* reflektiertes Licht zum Okular; *7* Sehstrahl zeigt auf die beleuchtete Fläche

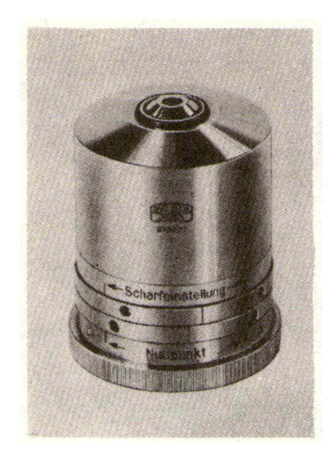


a)



b)

Bild 57. Schliffbilder der gleichen Probe bei Hell- und Dunkelfeldbeleuchtung



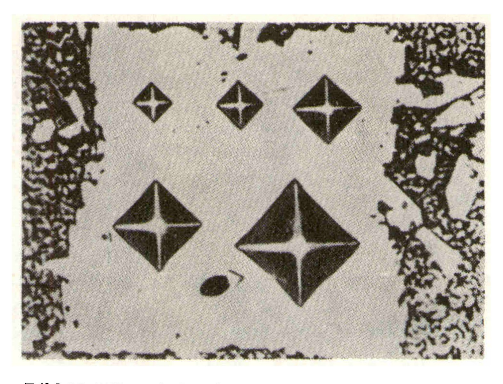


Bild 59. Mikroeindrücke steigender Prüflast in einem Kristall von Lagermetall (VEB Carl Heiss JENA)

Bild 58. Mikrohärteprüfgerät D 32 (VEB Carl Zeiss JENA)

Bild 59 zeigt Mikrohärteeindrücke an einer Lagerlegierung. Durch das Ausmessen der Prüfeindruckdiagonalen ist in Abhängigkeit von der Prüflast die Mikrohärte des Kristalls zu errechnen. Zur Vereinfachung bzw. Rationalisierung der Berechnung gibt es Nomogramme, mit deren Hilfe die Mikrohärte H_m bestimmbar ist. Auch der Vergleich mit den üblichen Vickershärtewerten ist durch Umrechnung oder mit Hilfe von Tabellen möglich.
Als Zusatzgerät für die Metallmikroskope werden oft *Richtreihenansätze* geliefert. Mit ihnen ist es möglich, die mit dem Mikroskop sichtbaren Gefüge mit Standardaufnahmen zu vergleichen. Durch diese *Vergleichsmethode* kann man innerhalb kurzer Zeit Schlackeneinschlüsse klassifizieren, die Kristallgröße bestimmen oder die etwaige Zusammensetzung einer bestimmten Legierungsreihe feststellen. Die Vergleichsmethoden mit Hilfe von Richtreihenansätzen haben sich bei Eingangskontrollen der Werkstoffe recht gut bewährt, machen aber für genauere Aussagen spezielle Untersuchungsmethoden nicht überflüssig.
In den meisten Fällen, in denen mikroskopische Untersuchungen durchgeführt werden müssen, ist es notwendig, bleibende Dokumente der Untersuchungsergebnisse herzustellen. Deshalb sind an den Metallmikroskopen immer Einrichtungen vorhanden, die es gestatten, das Gefügebild zu fotografieren. Bei größeren Auflichtmikroskopen ist eine Plattenkamera eingebaut, während die kleinen Metallmikroskope Ansatzmöglichkeiten für Kleinbildkameras besitzen. Ganz gleich, wie das Bild eines Gefüges fotografisch fixiert wird, es soll immer einen Mittelwert des vorhandenen Gefüges darstellen oder eine bestimmte Besonderheit herausheben. Auch die Wahl des Vergrößerungsmaßstabs muß dem Zweck des Gefügebilds und dessen Auswertungsziel untergeordnet sein. So sollte man z. B. eine geringe Vergrößerung wählen, wenn die Verteilung von Einschlüssen unsersucht werden soll.

Andere Verhältnisse liegen bei der Untersuchung von Ausscheidungen an den Korngrenzen (z. B. Tertiär-Zementit) vor. Dabei verwendet man möglichst große Vergrößerungen. In den Bildern 60 bis 62 sind einige Gefügeaufnahmen gezeigt. Es sind deutlich Unterschiede in der Größe und Form der Kristalle zu erkennen, die Rückschlüsse auf deren Entstehung erlauben oder Schlußfolgerungen bezüglich der Eigenschaften ermöglichen. Allerdings erfordert die genaue Kristallgrößenermittlung[47]) besondere Verfahren. An dieser Stelle soll nur das gebräuchliche *Kreisverfahren* dargestellt werden (Bild 63).

Auf einer fotografischen Aufnahme des Gefüges wird ein Kreis mit der Fläche A_{kr} gezeichnet und die Anzahl n der Kristalle, die sich innerhalb dieses Kreises befinden, bestimmt. Danach werden die Kristalle, die von der Kreislinie geschnitten werden, gezählt (n_L). Sie gehen nur zu 67% in das Kreisinnere mit ein. Zur Ermittlung der mittleren Kornfläche A wird die Gl. (19) verwendet, wobei die Vergrößerung V bekannt sein muß:

$$A = 10^6 \cdot A_{kr}/(0{,}67 n_L + n)\ V^2 \qquad (19)$$

A	A_{kr}	n	n_L	V
µm²	µm²	—	—	—

Bei der Berechnung der mittleren Kornfläche A muß beachtet werden, daß die Kreisfläche A_{kr} groß gegenüber der Kristallgröße ist und keine Vorzugsrichtungen, wie sie bei kaltgezogenem Material vorhanden sind, vorliegen.



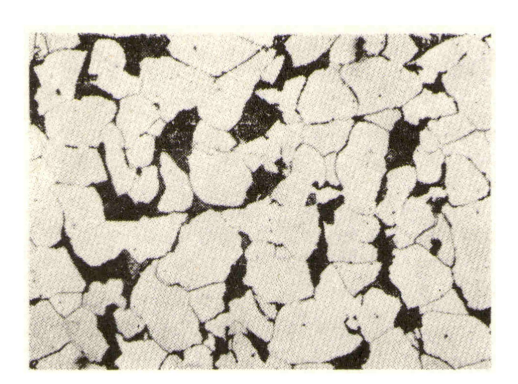


Bild 60. Gefüge eines Stahls mit etwa 0,15% Kohlenstoff, geätzt mit 3%iger alkoholischer Salpetersäure, 300fache Vergrößerung.
Helle Kristalle: Ferrit; dunkle Kristalle: Perlit

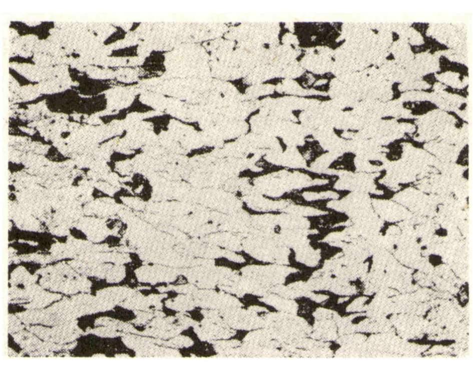
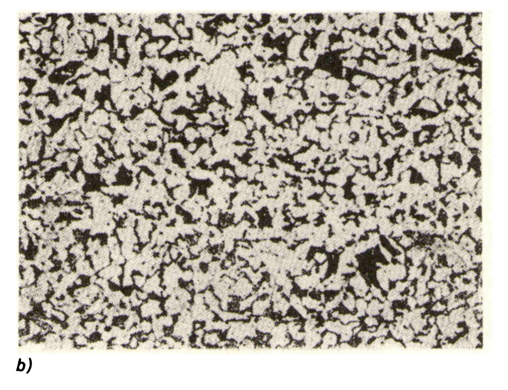


Bild 61. Gefüge eines Baustahls nach einer Kaltverformung, die Verformungsrichtung ist deutlich erkennbar. 300fache Vergrößerung;
geätzt mit 3%iger alkoholischer Salpetersäure



a)



b)

Bild 62. Baustahl mit Zeilenstruktur vor und nach dem Normalglühen, 300fache Vergrößerung, Ätzung mit 3%iger alkoholischer Salpetersäure. a) deutliche Zeilenstruktur (etwa 0,25% C); b) derselbe Stahl nach dem Normalglühen, die Zeilenstruktur ist aufgelöst

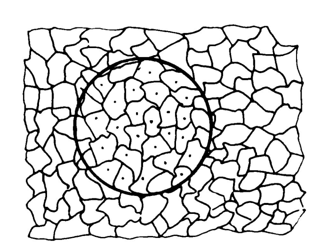


Bild 63. Kristallgrößenermittlung mit Hilfe des Kreisverfahrens

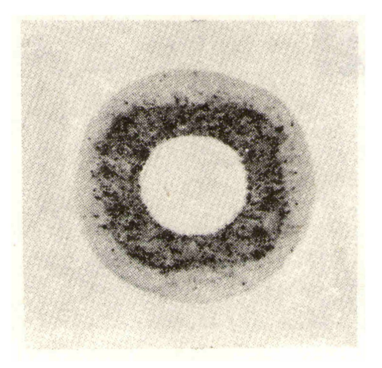


Bild 64. BAUMANN-Abdruck eines Rohrs

4.2. Makroskopische Untersuchungen

Die Ergebnisse der *makroskopischen Untersuchungen*[48]) sollen für die Auswertung nicht oder nur sehr gering vergrößert werden, um eine schnelle Beurteilung ermöglichen und somit einen größeren Überblick gestatten zu können. Durch sie sind Schwefel- und Phosphorseigerungen, Block- und Kristallseigerungen nachweisbar.
Bei Schweißverbindungen werden die Wärmeeinflußzone sowie die Größe und Lage der neugebildeten Kristalle durch Makroätzungen sichtbar. Der Faserverlauf bei Schmiedeteilen und die Kristallgrößenverteilung bei kaltverformten und rekristallisierten Bauteilen können ebenfalls durch makroskopische Untersuchungen ermittelt werden.

4.2.1. Schwefel- und Phosphorseigerungen

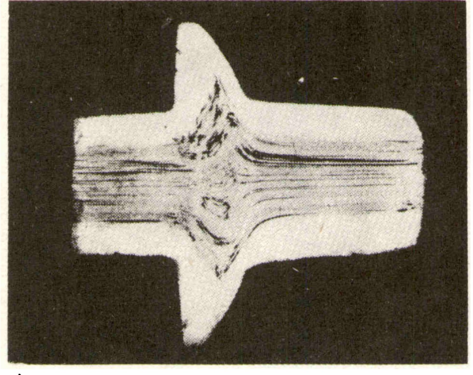
Da bei der Erstarrung einer Schmelze die Verunreinigungen (z. B. an Schwefel oder Phosphor) in das Innere des Werkstücks gedrängt werden, ist nach dem Erstarren eine inhomogene Zusammensetzung des Gußstücks vorhanden. Nach der Weiterverarbeitung durch Schmieden, Walzen, Drücken u. ä. ist die äußere Form des Werkstücks verändert, aber die Inhomogenität nicht aufgehoben, es kann nur die genaue Lage der Seigerungen nicht mehr exakt angegeben werden. Deshalb gibt es eine Reihe Prüfmethoden, mit denen die Schwefel- und Phosphorseigerungen nachweisbar sind.

Für die Durchführung eines BAUMANN-*Abdrucks* wird die dafür vorgesehene Fläche mit Schleifpapier mittlerer Körnung bearbeitet, um eine ebene und saubere Ausgangsfläche für die Untersuchung zu haben. Nach gründlicher Entfernung des Schleifstaubs wird die Fläche auf ein Stück Bromsilberpapier, welches vorher in 5%iger Schwefelsäure eingeweicht worden ist, aufgedrückt. Dabei laufen folgende chemische Reaktionen ab:

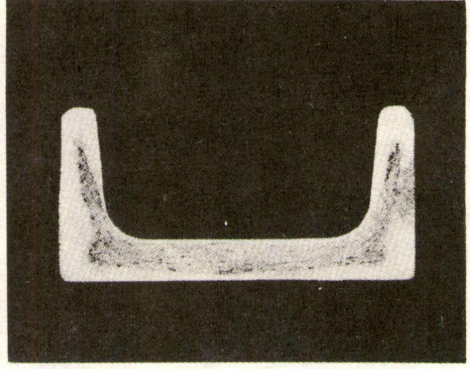
$$FeS + H_2SO_4 \rightarrow FeSO_4 + H_2S$$

$$H_2S + 2\,AgBr \rightarrow Ag_2S + 2\,HBr$$

Das Silbersulfid Ag_2S ist das Reaktionsprodukt, welches nach Entfernung der Probe vom Fotopapier als braunschwarze Färbung sichtbar ist und die Lage der Schwefelseigerung anzeigt. Wird das Bromsilberpapier fixiert, so erhält man ein dauerhaftes Dokument des Untersuchungsergebnisses (Bild 64). Eine andere Möglichkeit, Schwefel- und Phosphorseigerungen nachzuweisen, besteht mit dem HEYN*schen Ätzmittel*. Dabei wird die saubere Ausgangsfläche mit einer 9%igen Kupferammonchloridlösung geätzt. Es entsteht dabei ein Kupferniederschlag, der mit Wasser leicht abwaschbar ist. Nach Entfernen des Niederschlags treten die Seigerungen als dunkle Stellen hervor, das Eisen wird wenig angegriffen. Im Bild 65 sind zwei Beispiele gezeigt.



a)



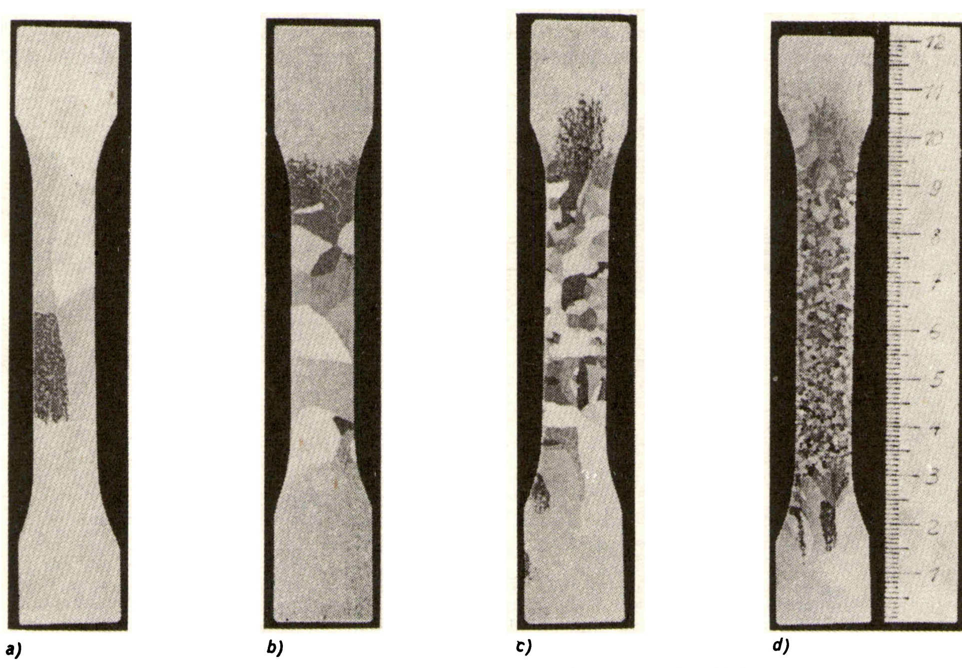
b)

Bild 65. Schwefel- und Phosphorseigerungen. a) im Kopf einer Schienenschraube; b) in einem U-Profil, geätzt mit 9%igem Kupferammonchlorid



4.2.2. Makroätzung nach der Rekristallisation

Die moderne Technik erfordert immer dringender materialökonomische Maßnahmen. Dazu gehört die spanlose Formung, durch die es möglich ist, in einigen Arbeitsgängen z. B. aus einer Blechronde einen Hohlkörper herzustellen. Dabei wird die Verformungsfähigkeit des Werkstoffs ausgenutzt. Sie ist aber durch die Kaltverfestigung auf ein bestimmtes Maß beschränkt. Durch die Rekristallisation wird die Verformungsfähigkeit wieder in ihren ursprünglichen Zustand versetzt. Beim *Rekristallisationsglühen* entstehen in Abhängigkeit des



a) b) c) d)

Bild 66. Zerreißstäbe aus reinem Aluminium mit 2-, 4-, 8- und 12prozentiger Dehnung

Verformungsgrads unterschiedlich große Kristalle, die die weitere spanlose Verformung beeinflussen. So sind große Kristalle ungünstig und kleine Kristalle günstig für den spanlosen Verformungsprozeß. Durch *Makroätzung* können nach dem Rekristallisationsglühen die Kristallgrößenunterschiede nachgewiesen werden (Bild 66). Bei Al-Werkstoffen wird die Tuckerlösung verwendet*).

4.3. Ermittlung der Zustandsänderungen

Zustandsänderungen können bei unterschiedlichsten Bedingungen auftreten. Setzt man konstanten Druck voraus, so können sie auf den Übergang vom flüssigen in den kristallinen Zustand sowie auf Umwandlungen des kristallinen Zustands reduziert werden. Die Ermittlungsmethoden der Zustandsänderungen sind von deren Auftreten abhängig.

*) *Tuckerlösung:* 15 cm³ Flußsäure + 42 cm³ konz. Salpetersäure + 16 cm³ konz. Salzsäure + 27 cm³ dest. Wasser. Arbeit nur mit Gummihandschuhen. Vorsicht! Neutralisationsmittel: Ammoniumpersulfat

4.3.1. Thermische Analyse

Reine Metalle und Legierungen verhalten sich bei Erwärmung und Abkühlung verschieden, da die Kristallarten und Kristallverteilungen darauf großen Einfluß haben. Aus diesem Grunde ist es ratsam, die Untersuchung eines völlig unbekannten Metalls oder einer unbekannten Legierung mit der *thermischen Analyse* zu beginnen. Durch den Abkühlungsverlauf ist eine Anzahl von Schlußfolgerungen möglich.
Bei reinen Metallen kann durch eine solche thermische Analyse der Erstarrungs- bzw. Schmelzpunkt ermittelt werden. Daraus ist mit Hilfe von Tabellen die Art des Metalls feststellbar. Liegt eine Legierung zur Untersuchung vor, so läßt die Art des Abkühlungsverhaltens Schlüsse auf die Kristallart und das Legierungssystem zu. Ergänzt eine qualitative Schnellanalyse die thermische Analyse, ist das zugehörige Zustandsdiagramm feststellbar und damit die entsprechende Zusammensetzung der Legierung.

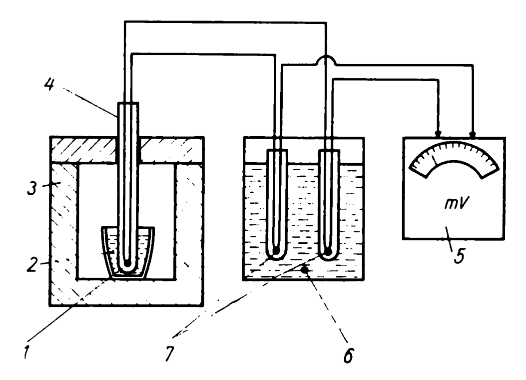


Bild 67. Versuchsaufbau zur Durchführung einer thermischen Analyse.
1 Thermoelement, Warmstelle; *2* Schmelze; *3* Ofen; *4* Schutzrohr; *5* Meßinstrument; *6* konstante Temperatur; *7* Thermoelement, Kaltstelle

Aus den Abkühlungskurven von verschiedenen Zusammensetzungen eines Legierungssystems ist das Zustandsdiagramm aufstellbar. Daraus sind für alle Legierungen des Systems die Kristallarten, der Erstarrungsbeginn und das Erstarrungsende ermittelbar.
Bild 67 zeigt schematisch den Versuchsaufbau zur Durchführung einer thermischen Analyse. Die Versuchsschmelze befindet sich in einem Tiegel, dem durch eine Wärmequelle Wärmeenergie zugeführt werden kann. In die Schmelze ragt ein Porzellanrohr mit der Warm- oder Meßstelle eines Thermoelements. Die zwei freien Enden der Thermoelementdrähte befinden sich in einer Umgebung konstanter Temperatur als Kalt- oder Vergleichsstellen. Von den Vergleichsstellen gehen Verbindungsleitungen zum Millivoltmeter. Ist die Temperatur zwischen der Meßstelle und den Vergleichsstellen unterschiedlich, so tritt eine Spannung auf. Sind die Spannungen vor dem Versuch mit den entsprechenden Temperaturen geeicht, so ist während des Versuchs die Temperatur direkt ablesbar. Allerdings muß für jeden Temperaturbereich auch das passende Thermoelement verwendet werden (bis etwa 1000 K Cu-Konstantan oder Fe-Konstantan, Ni—NiCr-Thermoelemente bis etwa 1400 K, bis etwa 1900 K Pt—PtRh-Thermoelemente).

Werden die bei einem Experiment ermittelten Temperaturen als Funktion der Temperatur dargestellt, so ergeben sich Abkühlungskurven*). Aus ihnen sind verschiedenste Schlüsse möglich (z. B. können bei einer Legierungsreihe die Zustandsdiagramme aufgestellt werden).

4.3.2. Dilatometermessung

Eine Anzahl von reinen Metallen und Legierungen zeigt Zustandsänderungen im kristallinen Zustand. Sie beruhen in der Hauptsache auf Veränderungen des Gitteraufbaus.

*) s. Abschn. WERKSTOFFE, Allgemeines über metallische Werkstoffe, Übergang flüssig—fest

Aus der Metallkunde ist bekannt, daß bei allotropen Modifikationen Atomvolumenveränderungen eintreten und dadurch Messungen der Modifikationsänderungen möglich sind. Wird z. B. ein Probestab (Länge $\gg$ Durchmesser) zur Messung verwendet, so hat eine Umwandlung des krz-Gitters in das kfz-Gitter bei steigender Temperatur eine sprunghafte Stabverkürzung zur Folge. Verwandelt sich bei weiter steigender Temperatur das kfz-Gitter erneut in das krz-Gitter, so entsteht eine spontane Stabverlängerung (Bild 68). Die Ermittlung solcher Umwandlungen ist durch die direkte Längenänderung oder durch die *Differenzmethode* möglich. Die genaueren Werte erhält man mit der Dilatometermessung im Differenzverfahren. Dabei werden zwei Stäbe verwendet. Die Ausdehnung des einen (Vergleichsstab) ist genau bekannt, und die des zweiten wird bei der Temperaturerhöhung mit dem Normal verglichen. Die Längendifferenz dieser beiden Stäbe wird registriert. Wird gleichzeitig die Temperatur gemessen, so kann man die Zustandsänderung genau ermitteln.

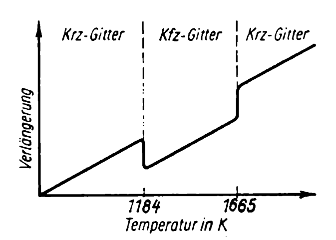


Bild 68. Stabverlängerung als Funktion der Temperatur (Dilatometerkurve)

5. Chemisch-technische Prüfverfahren

Literatur: [3, 9, 10]

5.1. Chemische Verfahren

Chemische Verfahren sind im Sinne der Werkstoffprüfung solche Untersuchungen, bei denen die Ergebnisse durch stoffliche Veränderungen des zu untersuchenden Werkstoffs erzielt werden.

5.1.1. Kohlenstoff- und Schwefelbestimmung an Stahl

Die Bedeutung von Kohlenstoff und Schwefel im Stahl bezüglich der Eigenschaftsbeeinflussung bedarf an dieser Stelle keiner Erläuterung*).

Kohlenstoffbestimmung[49])

Mit einer Analysenwaage wird genau 1 g saubere feine Späne (Bohr-, Dreh-, Hobelspäne) abgewogen und in ein Pyrolanschiffchen gegeben. Dieses wird in die Glühzone eines Rohrofens geschoben, der auf etwa 1100 °C angewärmt ist. Nach Verschließen des Ofens wird ein Sauerstoffstrom über die glühenden Späne geleitet, wodurch diese oxydieren. Ein Teil des Sauerstoffs bildet eine Eisenoxidschmelze, die im Schiffchen verbleibt, und der andere Teil reagiert mit dem Kohlenstoff zu Kohlendioxid bzw. mit dem Schwefel zu Schwefeldioxid. Außerdem bleibt noch ein Restsauerstoff übrig. Dieses Gasgemisch (Kohlendioxid und Restsauerstoff) wird aus dem Rohrofen in eine Meßbürette geleitet. Sobald diese gefüllt ist, wird der Verbrennungsvorgang beendet und das gesammelte Gasgemisch in ein Absorptionsgefäß gedrückt, wo es mit Kalilauge reagiert:

$$2\,KOH + CO_2 \rightarrow K_2CO_3 + H_2O$$

Die anderen Bestandteile des Gasgemisches reagieren nicht. Nachdem das Gasgemisch 2—3mal „durchgewaschen" wurde, wird es in die Meßbürette zurückgedrückt. Aus der Differenz der Messungen kann

*) s. Abschn. WERKSTOFFE, Eisenwerkstoffe, Stahl

man nun den Kohlenstoffgehalt des Stahls mittels eines Umrechungsfaktors errechnen. Dieser Umrechnungsfaktor ist einer zum Gerät gehörigen Tabelle zu entnehmen und ist abhängig von der Umgebungstemperatur und dem jeweils herrschenden Luftdruck.

Schwefelbestimmung[5c])

Die Schwefelbestimmung wird meist mit der Kohlenstoffbestimmung gekoppelt, indem vor den Kohlenstoff-Bestimmungsapparat ein Zusatzgerät zur Schwefelbestimmung geschaltet wird. Das vom Ofen kommende Gasgemisch wird demzufolge erst durch das SO_2-Absorptionsvorsatzgefäß geleitet und dann in die Meßbürette des C-Bestimmungsapparats.

5.1.2. Spektralanalytische Untersuchungen

Die *Metallspektroskopie* hat die Aufgabe, schnell und ohne großen Aufwand qualitativ und quantitativ Legierungselemente im Stahl nachzuweisen. Die quantitative Ermittlung der Legierungselemente sollte den Fachleuten im Labor überlassen werden. Die qualitative hingegen ist von jedem Ingenieur im Betrieb mit Hilfe eines einfachen und handlichen Geräts an Ort und Stelle durchführbar, wodurch z. B. Verwechslungen vermieden werden oder das Material schnell sortiert werden kann.

Arbeitsprinzip der Metallspektroskope:

Mit einem Stufentransformator wird die Wechselspannung (220 V) auf eine Niederspannung von 25 bis 40 Volt transformiert. Mit dieser Spannung wird zwischen dem zu untersuchenden Stahl und einer Elektrode des Geräts ein Lichtbogen erzeugt. Jedes Element sendet im gasförmigen Zustand Licht bestimmter Wellenlänge aus, welches im Spektroskop durch Prismen zerlegt und durch das Okular als *Spektrallinie* sichtbar wird. Die Spektrallinien sind im Farbenspektrum (Rot bis Violett) als helle Linien zu sehen. Durch Drehen einer Trommel kann ein im Sehfeld befindlicher schwarzer Pfeil mit einer solchen Spektrallinie zur Deckung gebracht und die Wellenlänge abgelesen werden. Damit ist das Vorhandensein eines Elements nachgewiesen. Mit einem solchen *Handspektroskop* ist der Nachweis von Nichtmetallen ausgeschlossen. Schwierigkeiten bereitet der Nachweis von Si, Al und Sb.

5.1.3. Fotometrische Analysen

Während die Metallspektroskopie fast zerstörungsfrei vor sich geht, benötigt man für die *fotometrische Analyse* eine gewisse Menge Späne des zu untersuchenden Werkstoffs.

Nach der Methode mit dem PULFRICH-*Fotometer* werden die Späne mittels Lösungsmittels aufgelöst. Die Lösung wird in eine Küvette gefüllt. Eine zweite Küvette wird nur mit dem reinen Lösungsmittel gefüllt. Beide Küvetten werden im Fotometer mit getrennten Lichtstrahlen durchleuchtet und betrachtet. Im Sehfeld ohne Filter sieht der Beobachter die eine Hälfte in einer bestimmten Farbe und die andere (entsprechend dem reinen Lösungsmittel) farblos oder in einer anderen Farbe. Nach Einsetzen eines Filters erscheinen beide Hälften gleichfarbig, aber verschieden hell. Durch Drehen an einer Meßtrommel wird gleicher Helligkeitsgrad für beide Hälften eingestellt und mit Hilfe des Ablesewerts das Ergebnis errechnet.

5.1.4. Tüpfelanalysen an Metallen

Tüpfelanalysen sind qualitative Analysen unmittelbar an der Werkstück- oder Halbzeugoberfläche durch chemische Reaktion mit einer Tüpfelflüssigkeit in Form eines Tropfens (deshalb *Tüpfeln*). Sie haben den Vorteil, einfach und schnell durchführbar zu sein; es brauchen keine Proben entnommen zu werden, und schließlich sind die einzelnen Legierungselemente klar zu unterscheiden. Diejenige Stelle, wo der Tropfen aufgebracht werden soll, muß metallisch rein sein. Man benötigt für die Tüpfelanalysen einige Chemikalien (meist Säuren und Laugen) und Hilfsmittel (Reagenzgläser, Pipetten, Watte, Filterpapier usw.). Bei der Durchführung sind die entsprechenden Vorschriften zu beachten.



Bei Stahl sind mit Hilfe der Tüpfelanalyse folgende Elemente qualitativ nachweisbar: Cr, Si, Ni, Mn, Mo, W. Bei Aluminium- und Magnesiumlegierungen kann man zunächst eine Unterscheidungsprüfung durchführen, in deren Ergebnis man feststellt, ob

— reines Magnesium oder eine Mg-Legierung,
— reines Aluminium oder eine Al-Legierung oder
— eine bestimmte Al-Legierungsgattung vorliegt.

Bei Einzeluntersuchungen an Al-Legierungen kann man folgende Elemente qualitativ nachweisen: Cu, Ni, Mg, Si.

5.1.5. Schleiffunkenanalyse

Die Schleiffunkenanalyse gehört zu den bewährten Werkstattverfahren, aus denen man ungefähr die Stahlsorte oder -gattung feststellen kann. Als Kriterium wird das Bild des Schleiffunkens zugrunde gelegt, da jedes Element im Stahl dieses Bild beeinflußt. In Bild 69 sind schematisch einige solche *Schleiffunkenbilder* dargestellt. Bei der Durchführung sind bestimmte Versuchsbedingungen einzuhalten, die sich auf den Schleifscheibendurchmesser und die -breite, die Schleifscheibengüte, die Umlaufgeschwindigkeit und den gleichmäßigen Anpreßdruck beziehen. Das Funkenbild wird dann mit denen im Bildatlas verglichen und die etwaige Stahlsorte bzw. -gattung bestimmt.

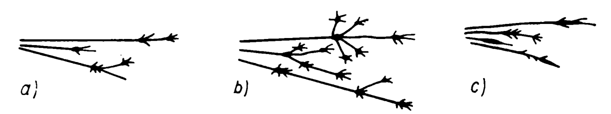


Bild 69. Schleiffunkenbilder (schematisch). a) Kohlenstoffstahl mit geringem C-Gehalt; b) Kohlenstoffstahl mit erhöhtem C-Gehalt; c) Cr-legierter Stahl

5.1.6. Löslichkeitsprüfung von Hochpolymeren

Mit Hilfe der Löslichkeitsprüfung durch Einwirkung verschiedener Flüssigkeiten (Äthanol, Diäthyläther, Benzin, Benzol, Azeton, Äthylazetat und Dichlormethan) kann man ungefähr die Art des hochpolymeren Werkstoffs identifizieren.

Solche Testversuche führt man durch, indem man 0,1 g des Werkstoffs fein zerkleinert und in einem Reagenzglas in etwa 10 cm³ des betreffenden Lösungsmittels auflöst. Das kann mitunter mehrere Stunden dauern, und es werden in gewissen Zeitabständen alle Erscheinungen (Gasentwicklung, Verfärbung, Quellung usw.) notiert. Nach 4 bis 6 Stunden gießt man ein paar Tropfen der Lösung auf ein Uhrglas und beobachtet die Reaktion bzw. Verdunstung. Der Abschlußbericht soll alle Aussagen, ob der Werkstoff löslich, teilweise löslich oder quellbar in diesem Lösungsmittel war, enthalten. Damit ist eine Aussage über die Art des hochpolymeren Werkstoffs im allgemeinen möglich.

5.1.7. Korrosionsprüfungen

Nach den gültigen Standards[51]) unterscheidet man:

1. Laboratoriumsversuche[52])

Unter Nachahmung des praktischen Korrosionsfalls sind hauptsächlich bekannt:

— Tauchversuche (Dauertauch-[53]) oder Wechseltauchversuch[54]) bzw. Rührversuch),
— Durchflußversuche,
— Lagerversuche (Feuchtlager-, Dauerbetauungs- oder Wechselbetauungsversuch),
— Sprüh- und Spritzversuche[55]),
— Koch- und Dampfversuche,
— Druckgefäßversuche,
— Schwitzwasserversuche,

- Korrosionsprüfungen auf Meer- und Klimabeständigkeit,
- Prüfungen rost- und säurebeständiger Stähle auf interkristalline Korrosion[56]),
- Prüfungen von Stählen auf interkristalline Spannungsrißkorrosion[57]) und
- Spannungsrißkorrosionsprüfungen für NE-Metallegierungen.

2. Betriebskorrosionsversuche

- Bodenkorrosionsversuche,
- Bewitterungsversuche[58]) (Auslagerung im Freiluft- oder Außenraumklima) und
- Verhalten von unverzinkten und verzinkten Stahl- und Eisenbehältern bei Einwirkung von kaltem und warmem Wasser.

3. Kurz- bzw. Langzeitversuche

Kurzzeitversuche sind solche Versuche, bei denen die Korrosion durch quantitative Verstärkung der Angriffsbedingungen beschleunigt wird.
Bei *Langzeitversuchen* wirken praxisähnliche Bedingungen so lange ein, daß man die Lebensdauer ermitteln kann.

5.2. Technisch-physikalische Verfahren

Technisch-physikalische Verfahren sind im Sinne der Werkstoffprüfung solche Untersuchungen, bei denen die Ergebnisse ohne stoffliche Veränderung des zu untersuchenden Werkstoffs erzielt werden.

5.2.1. Viskositätsermittlung

In der Praxis sehr verbreitete Geräte zur Ermittlung der Viskosität*)[59]) sind das *Kugelfallviskosimeter* nach HÖPPLER für die Untersuchung reinviskoser Flüssigkeiten (NEWTONsche Flüssigkeiten, z. B. Öle und verdünnte Lösungen der Hochpolymere) und das *Rheo-Viskometer* nach HÖPPLER für strukturviskose Flüssigkeiten (nicht-NEWTONsche Flüssigkeiten, z. B. hochpolymere Schmelzen).

Das Kugelfallviskosimeter arbeitet nach dem Kugelfallprinzip, bei dem die Fallzeit einer Kugel in einem schrägstehenden Glasrohr (welches mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist) gemessen und daraus die *dynamische Viskosität* errechnet wird. Das Rheo-Viskometer arbeitet auch nach dem Kugelfallprinzip, jedoch fällt die Kugel nicht frei, und das Prüfrohr steht senkrecht. Die Kugel wird mittels Kugelstabs an der Prüfrohrwand nach unten gedrückt (mit konstantem Druck), und aus der Durchlaufzeit einer bestimmten Wegstrecke wird die dynamische Viskosität errechnet.
Außer den Geräten, die nach dem Kugelfallprinzip arbeiten, gibt es noch eine Reihe von Geräten, die auf folgenden Prinzipien beruhen: Auslauf-, Kapillar-, Rotations- und Extrusionsprinzip.
Für die Beurteilung des Fließverhaltens besonders der Thermoplastschmelzen bedient man sich der Kapillar-, der Platte-Platte- und der Kegel-Platte-Viskosimeter.
Da die Viskosität sehr stark von der Temperatur abhängig ist, werden *Temperatur-Viskositäts-Kurven* aufgenommen. Man muß dabei mittels Thermostaten während der Versuchszeit dafür sorgen, daß die Temperatur konstant bleibt.

5.2.2. Flammpunktermittlung bei Ölen

Unter dem Flammpunkt eines Öls versteht man den Temperaturpunkt in °C, bei dem sich aus einem erwärmten Öl Dämpfe in solchen Mengen bilden, daß sich das Öldampf-Luft-Gemisch bei Annähern einer Zündflamme erstmalig entflammt. Es müssen dabei bestimmte Versuchsbedingungen unter Verwendung entsprechender Prüfgeräte eingehalten werden.

---

*) Definitionen s. Abschn. MECHANIK DER FLÜSSIGKEITEN UND GASE



5.2.3. Stock-, Fließ- und Tropfpunktermittlung

Stockpunkt

Unter dem *Stockpunkt* eines Öls versteht man den Temperaturpunkt in °C, wo das unterkühlte Öl so steif wird, daß es unter Einwirkung der Schwerkraft nicht mehr fließt.

Fließ- und Tropfpunkt

Unter dem *Fließpunkt* eines salbenartigen oder festen Schmiermittels versteht man den Temperaturpunkt in °C, wo das erwärmte Schmiermittel anfängt zu fließen, und unter dem *Tropfpunkt* denjenigen Temperaturpunkt, wo dann der erste Tropfen abfällt.
Auch für diese Untersuchungen müssen bestimmte Versuchsbedingungen unter Verwendung geeigneter Geräte eingehalten werden.

6. Prüfung von Eigenschaften der Hochpolymere

Literatur: [3, 4]

6.1. Prüfung der thermischen Eigenschaften

Besondere Bedeutung bei den Hochpolymeren hat die Formbeständigkeit, denn Temperaturschwankungen bis 400 K haben in jedem Falle Formänderungen durch die Eigenmasse und die vorhandenen Belastungen zur Folge. Dies erfordert eine genaue Kenntnis des thermischen Verhaltens im Hinblick auf die Gestaltänderung. Zu diesem Zweck wird die Temperatur, bei der eine noch zulässige Gestaltsveränderung eintritt, ermittelt. Die Prüfmethoden sind dafür unterschiedlich.
Die Hochpolymere, die bei erhöhten Temperaturen Druckbelastungen oder Scherungen ausgesetzt sind, werden im allgemeinen auf ihre *Formbeständigkeit nach* VICAT geprüft.

Dabei wird eine zylindrische Stahlnadel, deren ebene Fußfläche 1 mm² groß ist, senkrecht auf die Probenoberfläche gesetzt und mit 50 N belastet (Bild 70). Danach wird die Temperatur je Stunde um 50 K erhöht und die Temperatur ermittelt, bei der die Stahlnadel durch die Belastung 1 mm tief in die Oberfläche eingedrungen ist. Dieser Temperaturwert wird als Formbeständigkeit nach VICAT angegeben.
Vielfach werden die Hochpolymere (besonders Form- und Schichtpreßstoffe) auf Biegung bei erhöhten Temperaturen beansprucht. Das Verhalten bei diesen Belastungen wird durch die *Formbeständigkeit nach* MARTENS[60]) charakterisiert.
Dabei wird ein Probestab mit den Abmessungen 10 mm · 15 mm · 120 mm senkrecht stehend eingespannt und am oberen Ende ein Gewichtshebel angebracht, mit dem es möglich ist, eine Biegespannung von 5 MPa im Probestab zu erzeugen (Bild 71).

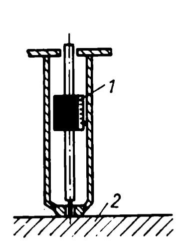


Bild 70. Meßprinzip zur Ermittlung der Formbeständigkeit nach VICAT.
1 Belastungskörper; *2* Probe

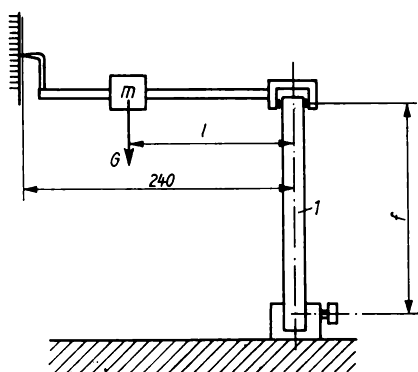


Bild 71. Meßprinzip zur Ermittlung der Formbeständigkeit nach MARTENS.
1 Prüfkörper

Bei steigender Temperatur wird der Probekörper deformiert. Ist am Ende des Gewichtshebels im Abstand von 240 mm von Probenmitte bis Hebelspitze eine Skale angebracht, so kann ein Maß für die Deformation abgelesen werden. Die Formbeständigkeit nach MARTENS ist diejenige Temperatur, bei der die Zeigerstellung sich um 6 mm gegenüber dem Ausgangswert verändert hat.

Eine weitere Prüfmöglichkeit besteht in der Ermittlung der *Formbeständigkeit in der Wärme nach ISO/R 75.*

Dabei wird ein Probekörper auf zwei Stützen im Abstand von 100 mm aufgelegt und in der Mitte mit einer Kraft so belastet, daß eine Biegespannung von 1,81 MPa (≙ 18,5 kp/cm²) oder 45,1 MPa (≙ 4,6 kp/cm²) entsteht (Bild 72). Bei einer Temperatursteigerung von 2 K je Minute wird die Temperatur gesucht, bei der eine bestimmte Durchbiegung (die von der Probenhöhe abhängig ist) erreicht ist.
Folgende Werte sind festgelegt:

Probenhöhe in mm:	9,8	10,0	11,0	12,0	12,8
Durchbiegung in mm:	0,38	0,32	0,29	0,27	0,25

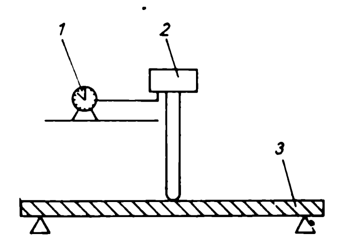


Bild 72. Meßprinzip zur Ermittlung der Formbeständigkeit nach ISO/R 75.
1 Meßuhr; *2* Belastungskörper; *3* Prüfkörper

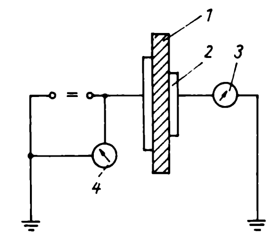


Bild 73. Meßprinzip zur Ermittlung des spezifischen Volumenwiderstands.
1 Prüfkörper; *2* Meßelektrode; *3* Galvanometer; *4* Spannungsmeßgerät

6.2. Prüfung elektrischer Eigenschaften

Um den *Isolierwiderstand* eines Hochpolymers zu berechnen, ist es notwendig, daß der spezifische elektrische Widerstand des Werkstoffs bekannt ist. Dazu wird auf beiden Seiten einer Probeplatte je eine Elektrode, die als kreisförmige Plattenelektrode ausgebildet ist, befestigt (Bild 73).
Nach dem Anlegen einer Gleichspannungsquelle von 100 bzw. 1000 V wird über eine Brückenschaltung der spezifische elektrische Widerstand gemessen. Er setzt sich zusammen aus:

$$\varrho = RA/d \quad , \qquad (20)$$

A Meßfläche der Elektrode, *d* Dicke der Probe, *R* Widerstand

Aus der Gl. (21) ist der Isolierwiderstand bzw. der effektive Widerstand des Werkstoffs zu errechnen, wenn der spezifische elektrische Widerstand gemessen wurde:

$$R = \varrho A/d \qquad (21)$$

Bei den Hochpolymeren spielt auch der *Oberflächenwiderstand* eine große Rolle, denn er charakterisiert in starkem Maße den Isolierzustand des Werkstoffs. Allerdings ist der Oberflächenwiderstand von einer Vielzahl von Einflußfaktoren abhängig, so daß er nur mit relativ geringer Genauigkeit bestimmbar ist. Die Meßanordnungen sowie die Berücksichtigung der verschiedenen Einflüsse müssen Standards[61]) entnommen werden.

Es ist bekannt, daß der Oberflächenwiderstand stark herabgesetzt wird, wenn sich zwischen Kontakten oder Klemmen Verunreinigungen oder Feuchtigkeit befindet. Dadurch entstehen *Kriechströme*, die meistens nicht zu Kurzschlüssen führen, aber doch beachtet werden müssen. Deshalb ist die Ermittlung der *Kriechstromfestigkeit* standardisiert[62]).
Ebenso wie die Kriechstromfestigkeit ist die *Durchschlagfestigkeit* eine bedeutende Kenngröße für Isolationswerkstoffe. Im Standard sind die Versuchsanordnungen festgelegt[63]).



7. Textilprüfung

Literatur: [8, 13, 17, 26]

Textilien werden als *Faserstoff*, als *Halbfabrikat* (Faden, Rohgewebe) und als *Fertigprodukt* untersucht. Für die wichtigsten Prüfungen liegen Verfahrensstandards vor[64]...[75]).
Die Prüfung der Textilien ist notwendig, weil man im allgemeinen aus der Festigkeit und Dehnung der Fasern oder Elementarfäden nicht die Festigkeit und Dehnung der Fäden berechnen kann, da diese Größen wesentlich durch die Haftung zwischen den einzelnen Fadenelementen bestimmt werden. Entsprechend kann man auch nicht direkt von der Fadenfestigkeit auf die Gewebefestigkeit schließen.

7.1. Prüfung von Fasern

Mittlere Feinheit

Aus einer Faserprobe werden parallelisierte und im entkräuselten Zustand auf gleiche Länge geschnittene Büschel hergestellt, aus denen man Bündel mit einer bestimmten Anzahl Fasern entnimmt und deren Länge und Masse bestimmt[71]). Nur bei Fasern mit rundem Querschnitt (z. B. bei Wolle, Glas u. einigen Chemiefaserstoffen) genügt es. eine *optische Dickenmessung* durchzuführen und aus dem Durchmesser die Feinheit zu errechnen.

Zugversuch

Es werden dabei die bei einachsiger, stetiger Zugbeanspruchung auftretenden Kräfte und Längenänderungen ermittelt. Aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm wird dann die *Reißkraft* ermittelt. *Reißfestigkeit* und *Reißdehnung* werden sowohl im trockenen als auch im nassen Zustand geprüft. Aus dem Zugversuch erhält man die *maximale Reißkraft.* Als Vergleichsmaß für die spezifische Belastbarkeit wurde die *spezifische Reißkraft R* eingeführt; sie wird auch als *Reißlänge* bezeichnet, da sie die Länge eines Fadens in Kilometern angibt, bei der dieser unter seiner eigenen Masse abreißen würde.

Schlingenzugversuch

Der Versuch dient der Ermittlung der *Schlingenreißkraft* bei einachsiger stetiger Zugbeanspruchung unter gleichzeitiger Biegebeanspruchung in der Schlingenkrümmung.

Weitere Prüfverfahren zur Fasercharakterisierung sind die Bestimmung der Faserlänge, der Kräuselung, der dicken Faseranteile und der Verklebung in Chemiefasern sowie die Messung des Weißgrades.

7.2. Prüfung von Fäden

Die Bestimmung der Feinheit, der Reißfestigkeit und -dehnung von Fäden wird analog der Prüfung von Fasern durchgeführt[66]).

Drehung

Die den Fäden durch den Spinn- oder Zwirnvorgang erteilte Drehung kann auf dem *Drehungszähler* überprüft werden. Dabei wird ein Fadenstück entgegengesetzt zum Spinn- oder Zwirnprozeß gedreht und im völlig aufgedrehten Zustand die Anzahl der Drehungen je Meter Fadenlänge bestimmt. Die Drehungsrichtung (d. h. Z- bzw. S-Drehung) ist aus der Faser- bzw. Elementfadenlage an der Fadenoberfläche ersichtlich.

Weiterhin können die Kontraktion und die Einkräuselung (nach Heißwasser- und Heißluftbehandlung) von Texturfäden sowie die Farbgleichmäßigkeit bestimmt werden.

7.3. Prüfung von textilen Flächengebilden

Um die Belastbarkeit textiler Erzeugnisse im Hinblick auf ihre spätere Verwendung beurteilen zu können, setzt man Stoffproben und Fertigerzeugnisse Beanspruchungen aus, die denen des praktischen Gebrauchs weitgehend entsprechen. Man prüft Zug-, Scheuer-, Biege-, Berst-, Nahtausreißfestigkeit, Widerstandsfähigkeit gegen Dauerbeanspruchung, Pillbeständigkeit, Wasser-, Luft- und Gasdurchlässigkeit, Wärmehaltung, Hitzebeständigkeit, Maßänderung bei Einfluß von Wasser und gegebenenfalls Wärme (Einlaufen), Farbechtheit, Licht-, Wasser- und Chemikalienbeständigkeit[67]...[70], [72]...[75]. Zur Charakterisierung des Gebrauchswerts reichen die genannten Prüfungen oft nicht aus, da sich im Gebrauch meist Kombinationen mehrerer Belastungen ergeben. Man führt deshalb *Tragversuche* durch und beurteilt dann den Gebrauchswert.

Brennprobe

Die organischen hochpolymeren Faserstoffe werden durch Wärmeeinwirkung geschädigt. Aus dem Zersetzungsverhalten kann man auf die chemische Natur und damit auf die Art des Faserstoffs schließen (Tabelle 13).

Tabelle 13. Verhalten der wichtigsten Faserstoffe bei der Brennprobe

	Verhalten	Geruch	Rückstand
Pflanzliche Faserstoffe	Entflammen, hell leuchtende Flamme	nach verbranntem Papier	weiß-graue Asche
Tierische Faserstoffe	langsam mit sprühender Flamme verbrennend	nach verbranntem Horn	blasig-kohlige Klümpchen
Chemiefaserstoffe			
Viskose- und Kupferfaserstoffe	Entflammen, hell leuchtende Flamme	nach verbranntem Papier	weiß-graue Asche
Azetatfaserstoffe	Schmelzen, leuchtende, nicht verlöschende Flamme	stechend, sauer	blasig-kohlige Klümpchen
Polyvinylchloridfaserstoffe	Schmelzen, stark rußende, wieder verlöschende Flamme	stechend, sauer	schwarze, spröde Knoten
Polyakrylfaserstoffe	Schmelzen, rußende, verlöschende Flamme	süßlich	schwarze, spröde Knoten
Polyesterfaserstoffe	Schmelzen, kleine rußende Flamme	süßlich	helle Schmelzperlen
Polyamidfaserstoffe	Schmelzen, wieder verlöschende Flamme	süßlich	helle Schmelzperlen

Literaturverzeichnis

[1] *Autorenkollektiv:* Werkstoffprüfung von Metallen. Band 1. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1968
[2] *Hormuth, K.:* Härtetabellen. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1963
[3] *Opitz, H., Dude, W.:* Allgemeine Werkstoffprüfung für Ingenieurschulen. 7. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974



[4] *Schmiedel, H., Schiefer, H.:* Hochpolymere und ihre Prüfung. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972
[5] *Tauscher, H.:* Dauerfestigkeit von Stahl und Gußeisen. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972

Weiterführende Literatur

[6] *Autorenkollektiv:* Einführung in die Werkstoffwissenschaft. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979
[7] *Autorenkollektiv:* Grundlagen metallischer Werkstoffe. Korrosion und Korrosionsschutz. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977
[8] *Autorenkollektiv:* Prüfen von Textilien. Band II: Mikrountersuchungen. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974
[9] *Autorenkollektiv:* Werkstoffprüfung von Metallen. Band 1: Mechanische Prüfverfahren. 2. Aufl., Band 2: Metallographische Prüfverfahren — Chemische Prüfverfahren — Physikalische Prüfverfahren — Statistische Auswertung und Prüfungen. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1968, 1969
[10] *Beckert, M.:* Technische Mechanik — Werkstoffe — Werkstoffprüfung. Reihe: Wissensspeicher für Technologen. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970
[11] *Beckert M., Klemm, H.:* Handbuch der metallographischen Ätzverfahren. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1976
[12] *Blumenauer, H., Pusch, G.:* Bruchmechanik. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973
[13] *Döcke, W.:* Prüfen von Textilien. Band I: Chemisch-analytische Prüfverfahren. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[14] *Eisenkolb, F.:* Einführung in die Werkstoffkunde. Band 2: Mechanische Prüfung metallischer Werkstoffe. 7. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1967
[15] *Glocker, R.:* Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. 5. Aufl. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1971
[16] *Heptner, H., Stroppe, H.:* Magnetische und magnetinduktive Werkstoffprüfung. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1973
[17] *Himmelreich, W., Otto, F., Pospischil, E.:* Prüfmethoden für die Labors der Textilindustrie. 3. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975
[18] *Kolb, K., Kolb, W.:* Grobstrukturprüfung mit Röntgen- und Gammastrahlen. — Braunschweig: Vieweg 1970
[19] *Krautkrämer, J., Krautkrämer, H.:* Werkstoffprüfung mit Ultraschall. 3. Aufl. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1975
[20] *Krischner, H.:* Einführung in die Röntgen-Feinstrukturanalyse. — Braunschweig: Vieweg 1974
[21] *Kurzmann, W.:* Einführung in die Werkstoffkunde. Band 6: Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1970
[22] *Meyer, K.:* Physikalisch-chemische Kristallographie. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977
[23] *Müller, E. A. W.:* Handbuch der zerstörungsfreien Materialprüfung. — München, Wien: R. Oldenbourg Verlag 1959···1975
[24] *Nitzsche, K.:* Magnetische und elektrische zerstörungsfreie Prüfung. Reihe: Automatisierungstechnik, Band 121. — Berlin: VEB Verlag Technik 1971
[25] *Schumann, H.:* Metallographie. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1975
[26] *Siebel, E.* (Herausgeber): Handbuch der Werkstoffprüfung. 5 Bände. — Berlin (West), Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1957···1969
[27] *Uhlig, H.:* Korrosion und Korrosionsschutz. 2. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1975
[28] *Weißbach, W.:* Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung. 7. Aufl. — Braunschweig: Vieweg 1979
[29] *Autorenkollektiv:* Werkstoffprüfung. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979
[30] *Kurzmann, W., Balla, G., Wagner, G.:* TGL-Taschenbuch Werkstoffprüfung. 2. Aufl. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1978
[31] *Autorenkollektiv:* Prüfung hochpolymerer Werkstoffe. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1977



St Standardisierung

Von Prof. Dr. rer. oec. Roger Giewald, Dresden (Abschn. 6.4. bis 6.6., *unter Mitarbeit von Dr.-Ing. Manfred Meissner, Ilmenau) und Dr. rer. oec. Horst Merbach, Berlin* (Abschn. 1. bis 6.3., 7. bis 9.)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Die Standardisierung gewinnt im Rahmen der Intensivierung der gesellschaftlichen Produktion zur ständigen Erhöhung der Leistungskraft der Volkswirtschaft zunehmend an Bedeutung. Als untrennbarer Bestandteil von Wissenschaft und Technik wird sie in der DDR bewußt und planmäßig zur allseitigen Stärkung des sozialistischen Staates, zur Erhöhung

von Qualität und Effektivität der gesellschaftlichen Produktion und zur ständigen Verbesserung des materiellen und kulturellen Lebensniveaus des Volkes genutzt.
Mit der Einführung der Standards des RGW und der zwischen den Regierungen der DDR und der UdSSR vereinbarten Vereinheitlichung staatlicher Standards beider Länder wird die Standardisierung auch zunehmend zu einem wichtigen Faktor der sozialistischen ökonomischen Integration. Die Standardisierung in der DDR kann daher nicht nur als wissenschaftlich-technische Aufgabe gesehen, sondern muß vor allem auch als gesellschaftliche Aufgabe verstanden und gelöst werden. Sie ist somit ein wichtiger Faktor in der Klassenauseinandersetzung mit dem Imperialismus, der dazu beiträgt, die Überlegenheit der sozialistischen Produktionsweise gegenüber der kapitalistischen zu demonstrieren, materiell-technisch zu sichern und ständig auszubauen.
In Abhängigkeit von der Entwicklung der Produktivkräfte und der Produktionsverhältnisse ändern und vervollkommnen sich Inhalt, Wirkung und Methodik der Standardisierung. Wurde die Standardisierung in der DDR bis Ende der sechziger Jahre vorrangig genutzt, um die vom Kapitalismus hinterlassene Typenvielfalt der Erzeugnisse, Baugruppen und Einzelteile und die damit verbundene Zersplitterung der Produktion zu überwinden, dient sie als wichtiger Bestandteil der Intensivierung heute der planmäßigen Rationalisierung der gesellschaftlichen Produktion.

2. Sozialistische Standardisierung

2.1. Begriffsbestimmung

Standardisierung ist *Vereinheitlichung von:*

- *Erzeugnisbeschaffenheiten* (Abmessungen, Gebrauchseigenschaften, Leistungsangaben, Zuverlässigkeit, Lebensdauer, Masse-Leistungs-Verhältnis, Materialeinsatz, Oberflächenangaben),
- *Herstellungs-, Prüf- u. a. Verfahren* (Konstruktions- und Projektionsvorschriften, Berechnungsvorschriften, technologische Prozesse und Verfahren, Prüfvorschriften, Liefer-, Verpackungs-, Lager- und Transportvorschriften),
- *Verständigungsmitteln* (Begriffe, Benennungen, Kennzeichnungen, Zeichen, Maßeinheiten, Formeln, Codierungen und Programmsprachen),
- *Verhaltensweisen* (Festlegungen des Gesundheits-, Arbeits- und Brandschutzes, des Umweltschutzes, der Wissenschaftlichen Arbeitsorganisation, der Qualitätssicherung und Standardisierung).

Diese Vereinheitlichung wird als Bestandteil der Wirtschaftspolitik einheitlich geleitet und geplant und in sozialistischer Gemeinschaftsarbeit von Herstellern, Verbrauchern und staatlichen Kontrollorganen unter Berücksichtigung bestehender und geplanter internationaler Standards durchgeführt. Ausgangspunkt für staatliche Vorgaben zur Lösung von Standardisierungsaufgaben sind die wirtschaftspolitischen Zielstellungen des sozialistischen Staates, d. h.

- der Bedarf der Bevölkerung,
- die Erfordernisse der Volkswirtschaft,
- die Verpflichtungen im Rahmen der sozialistischen ökonomischen Integration der Mitgliedsländer des RGW und
- die Anforderungen an den Export in nichtsozialistische Länder.

Standardisierungsaufgaben sind als Bestandteil der Aufgaben von Wissenschaft und Technik auf der Grundlage der neuesten Erkenntnisse der Forschung und Entwicklung zu lösen. Die *Standardisierungstätigkeit* ist demzufolge selbst eine wissenschaftlich-technische Leistung, die in der Regel im Verlauf der Neu- und Weiterentwicklung eines Erzeugnisses oder Verfahrens erbracht und deren Ergebnis, die mehrfache Anwendung vorausgesetzt, in einem Standard verbindlich festgelegt wird. Dadurch ist es möglich, wissenschaftlich-technische Erkenntnisse unter Ausschaltung von Doppelarbeiten rasch und umfassend volkswirtschaftlich rationell zu nutzen.

2.2. Hauptaufgaben

Zur Erhöhung der Qualität und Effektivität der gesellschaftlichen Produktion werden die Standardisierungsarbeiten auf die Lösung folgender Hauptaufgaben konzentriert:

- *Erhöhung der Qualität der Erzeugnisse* durch Festlegung von Qualitätskennwerten in Standards, die zwischen Herstellern, Verbrauchern und staatlichen Kontrollorganen abgestimmt sind und den Anforderungen der gesellschaftlichen Produktion von den Grundstufen bis zum Enderzeugnis entsprechen;
- *Erhöhung der Material- und Energieökonomie* durch die Aufnahme von Berechnungsvorschriften und Kennziffern zum Material- und Energieeinsatz, die dem neuesten wissenschaftlich-technischen Erkenntnisstand entsprechen;
- *Erhöhung des Wiederholfaktors der Produktion* durch Festlegung volkswirtschaftlich begründeter Sortimente in Standards zur Sicherung von Seriengrößen, die den effektiven Einsatz neuer Technologien und Verfahren in zentralen Fertigungen, die breite Nutzung von Typen- und Besttechnologien und die Rationalisierung der technischen Produktionsvorbereitung ermöglichen;
- *Verbesserung der Arbeits- und Lebensbedingungen* durch umfassende Anwendung der Wissenschaftlichen Arbeitsorganisation sowie Verbesserung des Gesundheits-, Arbeits- und Brandschutzes und des Schutzes der Umwelt.

3. Standards

Standards enthalten verbindlich vorgeschriebene volkswirtschaftliche Bestlösungen für sich wiederholende Aufgaben und im Standard selbst festgelegte Geltungsbereiche. Abweichungen von den Festlegungen sind nur unter definierten, gesetzlich bestimmten Bedingungen zulässig [1, 2]. *Inhalt* der Standards sind Erzeugnisbeschaffenheiten, Verfahren, Verständigungsmittel und Verhaltensweisen.

3.1. Nationale Standards

3.1.1. DDR-Standards

DDR-Standards (Bild 1) enthalten Grundsatzregelungen von genereller volkswirtschaftlicher Bedeutung und langfristiger Verbindlichkeit für

- hohe Qualität und Zuverlässigkeit der Erzeugnisse,
- den rationellen Einsatz von Rohstoffen, Material und Energie,
- Rastermaße, Vorzugszahlen, Toleranzen und Passungen sowie
- die Paß- und Kopplungsfähigkeit und den Austauschbau.

DDR-Standards werden vom Präsidenten des Amtes für Standardisierung, Meßwesen und Warenprüfung (ASMW) bestätigt und im Gesetzblatt der DDR, Sonderdruck „ST“, bekanntgegeben und damit für die gesamte Volkswirtschaft rechtsverbindlich [1].

3.1.2. Fachbereichstandards

Fachbereichstandards (Bild 2) enthalten Festlegungen für Erzeugnisse, Technologien und Verfahren, die entsprechend der schnellen Entwicklung von Wissenschaft und Technik in der Regel eine kurzfristige Gültigkeit haben oder deren Wirkung in der Volkswirtschaft auf einzelne Bereiche beschränkt ist.
Fachbereichstandards werden je nach ihrer volkswirtschaftlichen Bedeutung und ihrem Einflußbereich vom zuständigen Minister oder Generaldirektor des zentral unterstellten Kombinats

DK 658.562	DDR-Standard	Dezember 1978
Deutsche Demokratische Republik	Qualitätssicherung Arbeit mit Gütezeichen	TGL 29512 Gruppe 920610
Обеспечение качества Работа со знаком качества	Quality Assurance Operations Related to Quality Marks	
Deskriptoren: Qualitaetssicherung; Guetezeichen; Klassifizierung; Attestierung		
Verbindlich ab 1.9.1979		
Verantwortlich/bestätigt: 21.12.1978, Amt für Standardisierung, Meßwesen und Warenprüfung, Berlin		

Bild 1. DDR-Standard

DK 629.113.012-592.2	Fachbereichstandard	April 1980
Deutsche Demokratische Republik	Kraftfahrzeuge Armaturen für hydraulische Bremsanlagen Verteiler	TGL 29985/07 Gruppe 134 291
Автомобили Инструменты для гидравлическое тормозной устройства Распределитель	Motor Vehicles Instruments for Hydraulic Brake Systems Distributor	
Deskriptoren: Kraftfahrzeug; Bremsanlage; Armatur; Hydraulik; Verteiler		
Verbindlich ab 1.1.1981		

Bild 2. Fachbereichstandard

oder eines anderen befugten wirtschaftsleitenden Organs bestätigt und auf seinen Antrag vom Präsidenten des ASMW im Gesetzblatt der DDR, Sonderdruck „ST“, bekanntgegeben. Fachbereichstandards gelten gleichermaßen wie DDR-Standards für die gesamte Volkswirtschaft [1].

3.1.3. Werkstandards

Werkstandards (Bild 3) enthalten die für einen Betrieb, ein Kombinat, ein Institut oder eine andere Institution notwendigen Festlegungen für die rationelle Lösung betrieblicher Aufgaben [1]. Durch Werkstandards werden in erster Linie betriebstypische Probleme geregelt. Mit ihrer Hilfe sollen Bestlösungen sich wiederholender Aufgaben im Kombinat oder Betrieb verallgemeinert werden. Damit haben sie eine große Bedeutung für die Intensivierung des Reproduktionsprozesses.
Werkstandards werden durch den Generaldirektor bzw. Werkleiter für verbindlich erklärt. Ihre überbetriebliche Anwendung erfordert eine gesonderte Vereinbarung.

Werkstandard Januar 1974

EAW	Bänder, Folie und Streifen für Blattfedern aus Kupferknetlegierungen kalt gewalzt Abmessungen Festigkeitseigenschaften	EAW-S 84

Verbindlich ab 1. 5. 1974

Bild 3. Werkstandard

3.1.4. Staatliche Standards

DDR- und Fachbereichstandards sind *staatliche Standards*. Sie tragen das Symbol TGL*). Staatliche Standards sind Rechtsnormen des sozialistischen Staates und für die gesamte Volkswirtschaft verbindlich. Sie sind Gegenstand von Wirtschaftsverträgen, auch wenn sie nicht ausdrücklich in diesen zitiert werden [1]. Verstöße gegen staatliche Standards können mit Sanktionen, Ordnungsstrafen und in schweren Fällen auch strafrechtlich geahndet werden.

Von einem staatlichen Standard darf nur dann abgewichen werden, wenn dadurch im besonderen Anwenderfall nachweisbar volkswirtschaftliche Vorteile erzielt oder volkswirtschaftliche Nachteile verhindert werden können. *Abweichungen* sind zulässig [2], wenn:

- eine Ausnahmegenehmigung zur Abweichung von Standards erteilt wurde;
- der Standard durch entsprechende Angaben eine Abweichung zuläßt (dazu gehören „Richtlinien“, „Richtwerte“ sowie Formulierungen mit nicht zwingendem Charakter);
- im Rahmen der Lösung von Aufgaben des wissenschaftlich-technischen Fortschritts die Einhaltung von Standards nachweisbar nicht vertreten werden kann;
- beim Ersatzbedarf standardisierte Erzeugnisse nicht verwendet werden können;
- beim Export oder Import Abweichungen von Standards bei Einhaltung der für den Export und Import geltenden Durchführungsverordnungen unumgänglich sind.

Die Abweichung von einem Standard muß eine Ausnahme bleiben. Da in Standards volkswirtschaftliche Bestlösungen für sich wiederholende Aufgaben fixiert sind, ist ihre Einhaltung von großer volkswirtschaft-

*) TGL — ursprünglich Technische Normen, Gütevorschriften, Lieferbedingungen, heute: Symbol für staatliche Standards der DDR

licher Bedeutung. Daher sind auch jene Standards einzuhalten, bei denen die Anwendung nicht zwingend formuliert ist.

Um eine hohe Aktualität der Kennwerte der Standards zu sichern, ist jeder staatliche Standard im Verlaufe von fünf Jahren mindestens einmal zu überprüfen. Die Überprüfungstermine und die erforderlichen Überarbeitungen werden wie die Neuausarbeitung und Einführung staatlicher Standards in den Plänen Wissenschaft und Technik geplant.
Die DDR verfügt z. Z. über etwa 1000 DDR-Standards, mehr als 31000 Fachbereichstandards sowie über ungezählte Werkstandards.

3.2. RGW-Standards (ST RGW)

Die ST RGW sind wichtige Mittel der Mitgliedsländer und der Organe des RGW für die Leitung und Planung sowie Organisation der Integrationsprozesse und damit verbunden für das Wirtschaftswachstum der einzelnen sozialistischen Länder. RGW-Standards sichern die Paßfähigkeit und Austauschbarkeit von Werkstoffen, Einzelteilen, Baugruppen, Maschinen und Anlagen und bilden damit eine entscheidende Grundlage für die Verflechtung der Volkswirtschaften der sozialistischen Länder.

Grundlage für die Übernahme von ST RGW in das nationale Standardwerk bildet die *„Konvention über die Anwendung von RGW-Standards“* [3]. Hier ist festgelegt, daß die der Konvention beigetretenen Länder verpflichtet sind, RGW-Standards in das nationale Standardwerk zu übernehmen und sie in ihrer Volkswirtschaft direkt anzuwenden. Die RGW-Standards werden nach einem langfristigen Plan ausgearbeitet und sind vor allem auf folgende Schwerpunkte ausgerichtet:

- auf Erzeugnisse, die gemäß den mehr- oder zweiseitigen Vereinbarungen über die internationale Spezialisierung und Kooperation der RGW-Länder gemeinsam entwickelt und produziert werden, bzw. auf Verfahren, die gemeinsam angewandt werden;
- auf Erzeugnisse, die Gegenstand des gegenseitigen Warenaustausches sind;
- auf Objekte allgemein-technischer Verwendung mit Querschnittscharakter.

3.3. Weitere internationale Standards

An erster Stelle stehen vor allem die von der *Internationalen Standardisierungsorganisation* (ISO) herausgegebenen ISO-Standards (früher ISO-Empfehlungen) und die von der *Internationalen Elektrotechnischen Kommission* (IEC) veröffentlichten IEC-Publikationen. Durch diese Dokumente werden der internationale Austausch von Erzeugnissen und Dienstleistungen sowie die Zusammenarbeit auf geistigem, wissenschaftlichem, technischem und wirtschaftlichem Gebiet gefördert. Im Unterschied zu den RGW-Standards haben sie empfehlenden Charakter, eine Übernahme in das nationale Standardwerk ist den einzelnen Ländern freigestellt. Soweit die ISO-Standards und die IEC-Publikationen für die Volkswirtschaft der DDR von Interesse sind und mit den Beschlüssen des RGW übereinstimmen, werden sie bei der Ausarbeitung nationaler Standards berücksichtigt.
Es gibt darüber hinaus noch zahlreiche weitere internationale Organe, die sich mit der Standardisierung und Qualitätssicherung auf Spezialgebieten beschäftigen und entsprechende Empfehlungen erarbeiten. Dazu gehören u. a.:

- Wirtschaftskommission der Vereinten Nationen für Europa (ECE),
- Internationale Kommission für Regeln zur Begutachtung elektrotechnischer Erzeugnisse (CEE),
- Internationale Organisation für legale Metrologie (OIML),
- Internationale Konferenz für Meßtechnik (IMEKO),
- Internationaler Verband für Dokumentation (FID),
- Europäische Organisation für Qualitätskontrolle (EOQC),
- Internationale Radiowissenschaftliche Union (MRSI).

3.4. Gestaltung von Standards

Die einheitliche Gestaltung der Standards ist aus zwei Gründen bedeutungsvoll:

1. Standards sind *Rechtsnormen* des sozialistischen Staates. Ihr Inhalt muß daher eindeutig abgefaßt sein und darf keine unterschiedlichen Auslegungen zulassen.
2. Standards sind verbindliche *Arbeitsinstrumente* in allen Phasen des gesellschaftlichen Reproduktionsprozesses. Ein rationelles Arbeiten mit den Standards sowie auch das rationelle Ausarbeiten und Überarbeiten der Standards erfordern eine einheitliche Form, einen einheitlichen Aufbau und einheitliche Grundlagen für das Abfassen des Inhaltes der Standards.

Die einheitliche Gestaltung der Standards ist geregelt in [1], [4] und [1]).

Die Gestaltung der *Titelseite* von Standards ist aus den Bildern 1 ··· 3 zu ersehen. Besondere Beachtung ist dabei der Formulierung des Titels und des Verbindlichkeitsvermerks zu schenken.
Der *Titel* eines Standards ist für seinen sachlichen Geltungsbereich von großer Bedeutung. Aus ihm muß das Objekt, für das der Standard gelten soll, klar ersichtlich sein. Diese Forderung ist durch die Möglichkeit der Verwendung eines

— *Obertitels* mit Kennzeichnung des übergeordneten größeren Sachgebiets,
— *Haupttitels* zur konkreten Benennung des standardisierten Objekts,
— *Untertitels* zur Eingrenzung des im Haupttitel genannten Standardisierungsobjekts

in der Regel erfüllbar. Soweit erforderlich, ist eine Titelergänzung aufzunehmen.
Ein Haupttitel, der durch Großbuchstaben oder durch Unterstreichen hervorzuheben ist, ist immer anzugeben. Seine Kombination mit Ober- und/oder Untertitel ist nach der jeweiligen sachlichen Notwendigkeit zu entscheiden. Die Verwendung des gleichen Haupttitels und verschiedener Untertitel ist für Standardkomplexe erforderlich, die bei gleicher Standardnummer in mehrere Blätter gegliedert sind. Dabei gilt jeder Standard mit Blattnummer als selbstständiger Standard. Im Standard selbst dürfen keine Regelungen getroffen werden, die über den durch den Titel bestimmten sachlichen Geltungsbereich hinausgehen.
Der *Verbindlichkeitstermin* eines Standards wird auf der Titelseite rechts oben ausgewiesen. Es werden drei Grundformen der Verbindlichkeitsangaben unterschieden:

— Alle im Standard getroffenen Festlegungen sind zum gleichen Zeitpunkt verbindlich.

Beispiel.

Formulierung: Verbindlich ab 1. 1. 1978.

Das bedeutet, daß von den Festlegungen des Standards ab 1. 1. 1978 nicht abgewichen werden darf. Zu dieser Kategorie gehört die überwiegende Anzahl der bestehenden Standards.

— Alle im Standard getroffenen Festlegungen sind verbindlich, jedoch zu unterschiedlichen, gestaffelten Terminen.

Beispiel.

Formulierung: Verbindlich ab 1. 6. 1978
Abschnitt 8.5. verbindlich ab 1. 6. 1980.

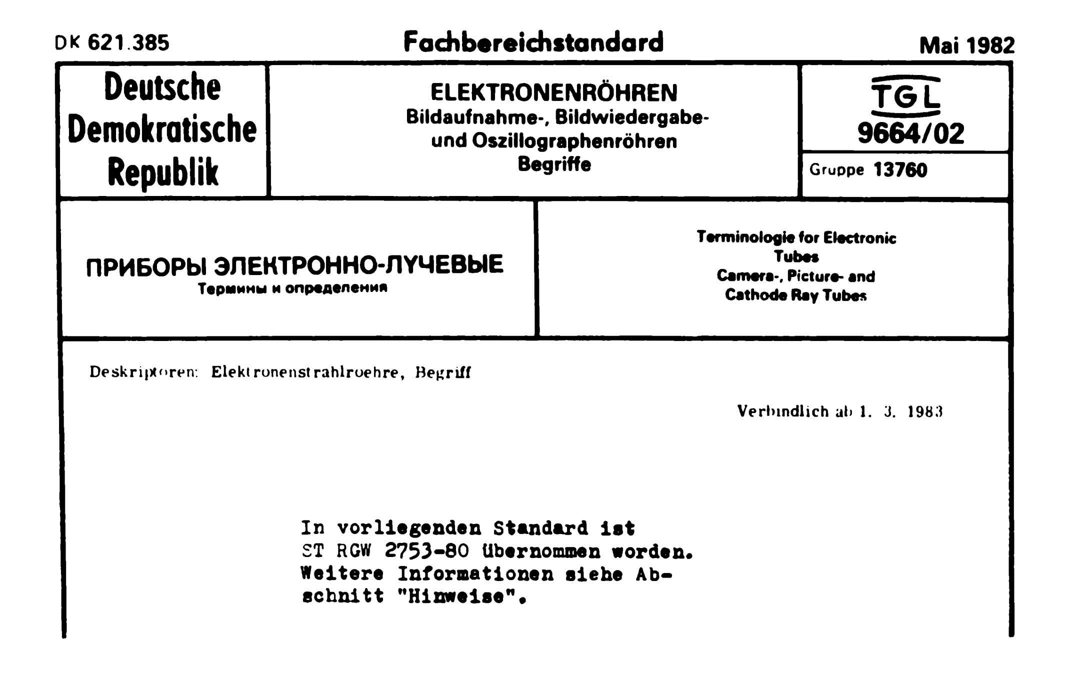
Die Konsequenzen sind die gleichen wie oben, jedoch mit einer 2 Jahre später eintretenden Verbindlichkeit für die Festlegungen des Abschnitts 8.5.

— Alle im Standard enthaltenen Festlegungen sind zur Anwendung empfohlen.

Beispiel.

Formulierung: Verbindlich ab 1. 1. 1979
Die Festlegungen dieses Standards sind zur Anwendung empfohlen.

Das bedeutet, die Festlegungen auch dieses Standards sind eine volkswirtschaftliche Bestlösung und und ab 1. 1. 1979 einzuhalten. Es darf jedoch von ihnen ohne Ausnahmegenehmigung abgewichen werden. Der durch die Abweichung erzielte volkswirtschaftliche Vorteil oder vermiedene volkswirtschaftliche Nachteil im konkreten Einzelfall muß nachweisbar sein.


DK 621.385 **Fachbereichstandard** Mai 1982

Deutsche Demokratische Republik	ELEKTRONENRÖHREN Bildaufnahme-, Bildwiedergabe- und Oszillographenröhren Begriffe	TGL 9664/02 Gruppe 13760

ПРИБОРЫ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫЕ Термины и определения	Terminologie for Electronic Tubes Camera-, Picture- and Cathode Ray Tubes

Deskriptoren: Elektronenstrahlroehre, Begriff

Verbindlich ab 1. 3. 1983

In vorliegenden Standard ist ST RGW 2753-80 übernommen worden. Weitere Informationen siehe Abschnitt "Hinweise".

Fortsetzung Seite 1 bis 9 des ST RGW 2753-80

Verantwortlich bestätigt: 14. 5. 1982, VEB Kombinat Mikroelektronik, Erfurt

Bild 4. RGW-Standard

3.5. Einführung von RGW-Standards

Die Einführung von *RGW-Standards* in das nationale Standardwerk der DDR ist in [5], [6] und [2]) geregelt. Sie erfolgt grundsätzlich als Übersetzung der Originalfassung des RGW-Standards in Form eines DDR- bzw. Fachbereichstandards. Auf der Titelseite wird folgender *Übernahmevermerk* aufgenommen:

In vorliegenden Standard ist ST RGW ...
übernommen worden. Weitere Informationen
siehe Abschnitt „Hinweise".

Im Abschnitt „Hinweise" werden genaue Aussagen zum übernommenen RGW-Standard gemacht. Dazu gehören Angaben zur Verbindlichkeit des Standards für die vertragsrechtlichen Beziehungen in der ökonomischen und wissenschaftlich-technischen internationalen Zusammenarbeit, zur vollständigen Übereinstimmung, zur Anfertigung von Auswahlen, zur Spezifizierung von Festlegungen sowie zur Zusammenfassung mehrerer RGW-Standards zu einem DDR- oder Fachbereichstandard bzw. zur Aufgliederung des Inhalts eines RGW-Standards in mehrere DDR- oder Fachbereichstandards.

Die *DDR-Erstausgabe eines RGW-Standards* muß alle zum Zeitpunkt der Übernahme vorliegenden Nachträge und Änderungen zu diesem RGW-Standard enthalten. Nach der Übernahme erscheinende Nachträge und Änderungen sind in Form von Änderungsblättern oder Folgeausgaben zur vorliegende DDR-Ausgabe zu übernehmen.

4. Standardisierung und Erzeugnisqualität

4.1. Allgemeines

Die Erhöhung der Qualität der Erzeugnisse bei gleichzeitiger Senkung des gesellschaftlichen Aufwandes für ihre Herstellung ist eine Grundfrage der sozialistischen Wirtschaftspolitik, von deren Lösung die Entwicklung der Volkswirtschaft und die Befriedigung der Bedürfnisse der Bevölkerung entscheidend bestimmt werden. Die wachsende Bedeutung der *Qualität* ist Widerspiegelung objektiver Erfordernisse der wirtschaftlichen Entwicklung.
Die Effektivität der gesellschaftlichen Produktion steigern, heißt nicht nur, die Menge der Erzeugnisse und Leistungen bei gleichem Aufwand zu erhöhen, sondern bedeutet vor allem eine Verbesserung der Qualität, d. h. der Gebrauchseigenschaften, der Zuverlässigkeit, der Funktionstüchtigkeit und der Formschönheit der Erzeugnisse. So ist es möglich, durch *bessere Gebrauchseigenschaften* der Erzeugnisse, durch *längere Lebensdauer* und *geringere Reparaturanfälligkeit* mit weniger Erzeugnissen mehr Bedürfnisse der Bevölkerung und der Volkswirtschaft und zugleich besser zu befriedigen. Aus diesem Grunde ist die Erhöhung der Qualität der Erzeugnisse entsprechend dem Bedarf der Bevölkerung und den volkswirtschaftlichen Erfordernissen bei gleichbleibendem gesellschaftlichem Aufwand gleichzusetzen mit der Steigerung der Arbeitsproduktivität. Mit Qualitätsmängeln behaftete Erzeugnisse dagegen mindern die Arbeitsproduktivität.
Eines der wirksamsten Mittel zur staatlichen Leitung und Planung der Entwicklung der Erzeugnisqualität sind staatliche Standards. Dafür sind im wesentlichen zwei Gründe entscheidend:

1. Staatliche Standards enthalten *volkswirtschaftliche Bestlösungen*, die zwischen Herstellern, Verbrauchern und staatlichen Kontrollorganen abgestimmt worden sind.
2. Staatliche Standards sind *staatliche Normative* und damit rechtlich verbindlich für alle am arbeitsteiligen Prozeß zur Herstellung eines Erzeugnisses beteiligten Produzenten.

In der DDR ist verbindlich geregelt:

— Die Produktion von Erzeugnissen hat grundsätzlich nach staatlichen Standards und anderen Vorschriften zu erfolgen. Durch Kennwerte in Standards, die in Abstimmung zwischen Herstellern und Anwendern zu erarbeiten sind, ist die Qualität der jetzigen und der künftigen Produktion zu bestimmen.
— Standards bilden eine Grundlage für die *Qualitätsbewertung.*
— Standards sind ein Mittel für die *Preisbildung.*
— Alle staatlichen Standards sind im Laufe eines Fünfjahrplanzeitraumes mindestens einmal zu überprüfen.

Die Ausarbeitung bzw. Überarbeitung von Erzeugnisstandards wird im Plan Wissenschaft und Technik als Teil der Neu- und Weiterentwicklung des betreffenden Erzeugnisses geplant. Die entsprechende F/E-Aufgabe gilt erst dann als erfüllt, wenn die notwendigen Standards erarbeitet und bestätigt worden sind. Die Ausarbeitung, Überarbeitung und Einführung der Erzeugnisstandards ist eng mit wissenschaftlich-technischen, technologischen und produktionsorganisatorischen Maßnahmen zur Sicherung der Qualität im Betrieb zu verbinden.
Für die *Neuausarbeitung* bzw. *Überarbeitung* von Standards sind bei der Neu- und Weiterentwicklung der Erzeugnisse solche Zielstellungen vorzugeben, die sichern, daß diese Erzeugnisse zum Zeitpunkt ihrer Einführung in die Produktion voll den volkswirtschaftlichen Erfordernissen entsprechen. Ausgangspunkt für die Planung der Erzeugnisstandardisierung ist deshalb neben der Bedarfsanalyse der schonungslose Vergleich der eigenen Erzeugnisse und der vorgesehenen Zielstellungen zur Neu- und Weiterentwicklung mit den besten Erzeugnissen der führenden Industrieländer. Die *Weltstandsvergleiche* sind durch *Trend-*

analysen der wissenschaftlich-technischen Entwicklung zu ergänzen [7]. Die auf dieser Grundlage erarbeiteten Aufgabenstellungen der Pläne Wissenschaft und Technik werden über die *Pflichtenhefte* [8] den Forschungs- und Entwicklungskollektiven als verbindliche Arbeitsaufträge vorgegeben. Dazu sind in die Pflichtenhefte exakte Kennziffern, insbesondere zur Leistung, Zuverlässigkeit, Lebensdauer und zum Masse-Leistungs-Verhältnis, sowie die Leistungsstufen zur Ausarbeitung von Standards [9] aufgenommen.

4.2. Qualitätsfestlegungen in Standards

Der Auswahl der Qualitätskennziffern ist die gleiche Beachtung zu schenken wie der Bestimmung ihrer Größe. Die *Qualitätskennziffern*[3]) sind wie folgt gruppiert:

- Kennziffern der *Zweckbestimmung* (Leistungskennziffern, Produktivitätskennziffern, Aufwandskennziffern, Masse-Leistungs-Verhältnis),
- Kennziffern der *Zuverlässigkeit* (Kennziffern der Fehlerfreiheit, der Langlebigkeit, der Reparaturfähigkeit, der Verfügbarkeit, der Transport- und Lagerfähigkeit),
- Kennziffern der *Standardisierung* (Standardisierungsgrad),
- Kennziffern der *Umwelt* (Kennziffern der Arbeitswissenschaften, der Umweltbeeinflussung),
- Kennziffern der *Formgestaltung* (Kriterien der ästhetischen Zweckbestimmung),
- *Schutzrechtliche Kennziffern* (Patentergiebigkeit).

Die in Standards festgelegten Qualitätskennziffern müssen unabhängig von Ort und Zeit prüfbar sein. Wenn erforderliche und angemessene *Prüfverfahren* nicht bereits in grundlegenden Standards oder in anderen Erzeugnisstandards enthalten sind, sind sie im Erzeugnisstandard oder in gesonderten Standards festzulegen. Grundsätzlich sollen in Standards folgende Angaben über die *Prüfmethoden* enthalten sein:

- Darstellung des Prüfprinzips,
- Probenahmevorschrift und Kontrollplan,
- Festlegungen für die Vorbereitung der Proben,
- Vorschriften für die Durchführung der Prüfung,
- mathematische Ermittlung des Prüfergebnisses,
- Form der Darstellung des Prüfergebnisses,
- verfahrensbedingte und objektive Prüffehler,
- Standardabweichungen und Vertrauensbereich.

Gegebenenfalls ist anzugeben, wo analytische Standardmuster für die Kontrolle der einwandfreien Durchführung der Prüfungen erhältlich sind.

4.3. Erzeugnisstandards in der Kooperationskette

Hohe Qualität der Finalerzeugnisse erfordert hohe Qualität der Arbeit in allen Produktionsstufen. Staatliche Standards haben sich dabei als wirksames Mittel zur Sicherung der Qualität in der Kooperationskette bewährt. Dazu werden aufeinanderfolgende, sich wechselseitig bedingende Standards ausgearbeitet, die vom Finalerzeugnis über die Vor- und Zwischenstufen bis hin zum Ausgangsmaterial die für das Finalerzeugnis entscheidenden Kennwerte der Qualität und Zuverlässigkeit einschließlich der erforderlichen Prüfmethoden verbindlich vorschreiben. Die Verantwortung der Finalproduzenten für eine solche *durchgängige Standardisierung* ist so wahrzunehmen, daß sie maßgeblich bestimmen, welche Qualitätsmerkmale in die Standards der einzelnen Produktionsstufen aufzunehmen sind. Sie geben in Zusammenarbeit mit den Kooperationspartnern das Niveau der Qualitätskennziffern vor. Damit ist gesichert, daß Finalerzeugnisse hergestellt werden, die in Qualität und Kosten zur bedarfsgerechten Versorgung der Bevölkerung, zur Rationalisierung der Volkswirtschaft, zur Erfüllung der Integrationsverpflichtungen im RGW sowie zu hohen Exporterlösen im nichtsozialistischen Wirtschaftsgebiet beitragen.



4.4. Qualitätsbewertung

Die Bewertung der Erzeugnisqualität erfolgt in allen Bereichen der Volkswirtschaft grundsätzlich nach Standards. Bestehen keine staatlichen Standards oder sind bestimmte, für die Verarbeitung oder Anwendung standardisierter Erzeugnisse erforderliche Eigenschaften in ihnen nicht festgelegt, z. B. wegen der möglichen schnellen Veränderung ihrer Kennwerte, so müssen die betreffenden Parameter für die Lieferung vertraglich vereinbart werden.
Standards sind Arbeitsgrundlage für alle, die die Qualität von Erzeugnissen zu bewerten haben, angefangen bei der Selbstkontrolle durch die Werktätigen am Arbeitsplatz über die Prüfstellen im Betrieb und die Technische Kontrollorganisation (TKO) sowie die staatlichen Kontrollorgane bis hin zu den Handelsorganen, bei Notwendigkeit auch der Vertragsgerichte.

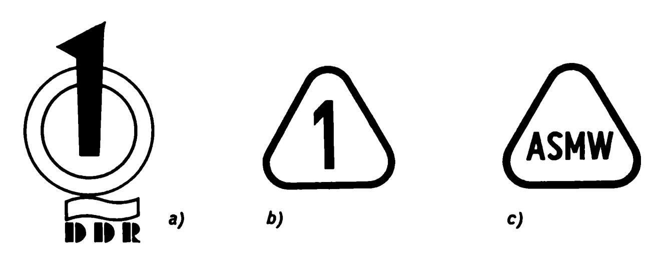


Bild 5. Gütezeichen. a) Gütezeichen Q; b) Gütezeichen „1"; c) Attestierungszeichen

4.5. Gütezeichen

Gütezeichen werden auf der Grundlage staatlicher Standards und anderer technischer Vorschriften verliehen. In der DDR gibt es drei staatliche Gütezeichen (Bild 5):

— das Gütezeichen „Q",
— das Gütezeichen „1" und
— das Attestierungszeichen.

Die Gütezeichen sind ein staatliches Kennzeichen für ein hohes Qualitäts- und Effektivitätsniveau eines prüfpflichtigen Erzeugnisses [10]. Gütezeichen werden vom Amt für Standardisierung, Meßwesen und Warenprüfung verliehen. Anforderungen und Verfahrensweg sind standardisiert[4]).

Die Gütezeichen werden verliehen [11]:

— *bei klassifizierungspflichtigen Erzeugnissen:*

das *Gütezeichen „Q"* für Erzeugnisse, die, ausgehend von den Bedürfnissen der Volkswirtschaft und der Bevölkerung, in ihren Qualitäts- und Zuverlässigkeitskennwerten den staatlichen Standards und anderen technischen Vorschriften entsprechen bzw. diese überbieten, mit hoher Effektivität hergestellt werden und in ihren Gebrauchseigenschaften und unter Berücksichtigung der Kosten Spitzenerzeugnisse auf dem Weltmarkt darstellen;

das *Gütezeichen „1"* für Erzeugnisse, die, ausgehend von den Bedürfnissen der Volkswirtschaft und der Bevölkerung, in ihren Qualitäts- und Zuverlässigkeitskennwerten den staatlichen Standards und anderen technischen Vorschriften entsprechen, mit hoher Effektivität hergestellt werden und in ihren Gebrauchseigenschaften unter Berücksichtigung der Kosten dem Durchschnitt der auf dem Weltmarkt vorhandenen Erzeugnisse entsprechen;

— *bei nicht klassifizierungspflichtigen Erzeugnissen:*

das *Attestierungszeichen* für Erzeugnisse, die den in staatlichen Standards und anderen technischen Vorschriften enthaltenen Qualitätsfestlegungen entsprechen.

4.6. Qualitätssicherung und Standardisierung im Betrieb

Die *betriebliche Qualitätssicherung und Standardisierung* (QSS)[5]) sind die aufeinander abgestimmten Maßnahmen der Qualitätssicherung, des Meßwesens und der Standardisierung im gesamten betrieblichen Reproduktionsprozeß, um dem volkswirtschaftlichen Bedarf entsprechende Erzeugnisse mit hoher Qualität und niedrigem gesellschaftlichem Aufwand herzustellen.
Die QSS sind mit dem Ziel durchzusetzen, die Qualität und Effektivität der Produktion generell zu erhöhen und bei volkswirtschaftlich wichtigen Erzeugnissen den fortgeschrittenen internationalen Stand zu bestimmen und mitzubestimmen. Unter Beachtung der konkreten betrieblichen Bedingungen sind dazu folgende Grundsätze zu verwirklichen:

1. Die *politisch-ideologische Arbeit* ist das Kernstück der QSS. In engem Zusammenwirken mit der Parteiorganisation und den anderen gesellschaftlichen Organisationen haben die Leiter eine planmäßige politisch-ideologische Arbeit zur Entwicklung des Verantwortungsbewußtseins jedes Werktätigen für eine hohe Qualität und Effektivität seiner Arbeit durchzuführen. Sie sichern, daß jeder Werktätige seine Verantwortung für eine hohe Qualität der Erzeugnisse erkennt und befähigt wird, an seinem Arbeitsplatz fehlerfrei zu arbeiten.
2. Die Maßnahmen der QSS haben den *gesamten betrieblichen Reproduktionsprozeß* — von der Forschung und Entwicklung bis zum Absatz und dem Einsatz der Erzeugnisse beim Anwender — zu erfassen.
3. Der *Forschung und Entwicklung* sind solche Ziele vorzugeben, die langfristig das erforderliche Qualitäts- und Effektivitätswachstum sichern und garantieren, daß neu- und weiterentwickelte Erzeugnisse zum Zeitpunkt ihrer Überleitung in die Produktion in Qualität und Aufwand den Forderungen der Volkswirtschaft und insbesondere des Exports entsprechen. Die *Überleitung* dieser Erzeugnisse erfolgt nur nach gründlicher Erprobung und exakter technischer Vorbereitung der Produktion.
4. Die *Produktion* erfolgt auf einem hohen technologischen Niveau mit einer rationellen und ausreichend genauen Meß- und Prüftechnik. Die technologische Disziplin wird streng eingehalten, um eine kontinuierliche, qualitätsgerechte Fertigung zu gewährleisten.
5. Die Produktion von Erzeugnissen hat grundsätzlich nach *staatlichen Standards* und anderen Vorschriften zu erfolgen. Die Wirksamkeit der Standards wird ständig überprüft. Ihre *Überarbeitung*, *Zurückziehung* oder die *Neuausarbeitung* von Standards erfolgt planmäßig und hat wirksam zur Erhöhung der Material- und Energieökonomie sowie zur Senkung von NSW-Importen beizutragen.
6. Der erreichte Stand der Qualität der Erzeugnisse und Verfahren ist ständig zu analysieren und schonungslos mit den internationalen Bestwerten zu vergleichen. Das *Gebrauchsverhalten* der Erzeugnisse und die Entwicklung der *Ausschuß-*, *Nacharbeits-* und *Garantiekosten* werden untersucht; daraus werden notwendige Maßnahmen abgeleitet und in den Plan Wissenschaft und Technik aufgenommen. Die *Fehlererfassung*, *-bewertung* und *-zuordnung* erfolgt kontinuierlich, und die Auswertung wird mit dem Verursacher vorgenommen.
7. Die Wirksamkeit der QSS ist durch rationelle Formen und Methoden der *moralischen* und *materiellen Stimulierung* zu unterstützen. Für jeden Werktätigen muß Qualitätsarbeit von moralischem und materiellem Interesse sein, und zwar dergestalt, daß die Erhöhung der Qualität der Arbeit und der Erzeugnisse nicht weniger vorteilhaft ist als die Steigerung der Mengenleistung.
8. Die Werktätigen erhalten für den sozialistischen Wettbewerb konkrete und abrechenbare Leistungsziele. Die Ergebnisse des Wettbewerbes werden öffentlich ausgewertet. Der Werktätige, der fehlerhaft arbeitet, hat vor dem Kollektiv Rechenschaft abzulegen.
9. Die Wirksamkeit der QSS ist ständig zu kontrollieren und zu erhöhen. Dazu ist eine wirksame *Qualitätskontrolle* zu sichern. Die QSS sind entsprechend den wachsenden volkswirtschaftlichen Anforderungen und den sich verändernden betrieblichen Bedingungen weiterzuentwickeln.
10. Die leitungsmäßigen und organisatorischen Regelungen zur QSS sind in *Werkstandards* festzulegen. Die Werkstandards sind in Übereinstimmung mit den bestehenden staatlichen Standards auszuarbeiten und entsprechend dem wissenschaftlich-technischen Fortschritt planmäßig zu überarbeiten. Sie werden in Verantwortung der Leiter erarbeitet, die auch für die Einhaltung zuständig sind. Werkstandards müssen untereinander abgestimmt sein und für alle Bereiche des Betriebes gelten. Sie sind in Verträge mit der Zulieferindustrie aufzunehmen.

5. Standardisierung und Materialökonomie

Der Anteil der Materialkosten am gesellschaftlichen Gesamtprodukt beträgt in der DDR über 60%. Die Aufwendungen für Erkundung, Erschließung und Gewinnung von Rohstoffen wachsen infolge der sich ständig verschlechternden natürlichen Bedingungen beträchtlich an. Hinzu kommen Preiserhöhungen für Roh- und Brennstoffe auf dem Weltmarkt, die zu erheblichen außenwirtschaftlichen Belastungen der Volkswirtschaft führen. Daraus ergibt sich, daß die *Materialökonomie* eine äußerst wichtige Frage der Intensivierung der gesellschaftlichen Produktion ist. Deshalb ist es notwendig, bei der Bewertung der Qualität der Erzeugnisse auch die Kennwerte der Materialökonomie voll zu berücksichtigen.
Durch Beschlüsse des Ministerrats der DDR wurde eine langfristige Orientierung zur strikten Nutzung der Standards für eine hohe Material- und Energieökonomie gegeben.

Die technisch-ökonomischen Kennwerte der Standards üben einen hohen Einfluß auf die Qualität der Erzeugnisse und den zu ihrer Herstellung notwendigen Materialaufwand aus.
Materialökonomische Kennwerte, insbesondere Massevorgaben, Berechnungsvorschriften und Rezepturen für den Werkstoff- und Rohstoffeinsatz, die in Standards aufgenommen werden sollen, sind auf der Grundlage der neuesten wissenschaftlich-technischen Erkenntnisse auszuarbeiten und nach strengsten Maßstäben mit den internationalen Bestwerten zu vergleichen und zu bewerten.
Materialökonomische Kennwerte sind entsprechend den Anforderungen der einzelnen Stufen der gesellschaftlichen Produktion exakt aufeinander abzustimmen und von den Grundstufen durchgängig in der ganzen Kooperationskette bis hin zum Enderzeugnis verbindlich in staatlichen Standards festzulegen.
Die Vorgaben für die Aufgaben des Planes Wissenschaft und Technik zur Neu- und Weiterentwicklung von Erzeugnissen und Verfahren und der damit verbundenen Ausarbeitung bzw. Überarbeitung von Standards haben konkrete Zielstellungen für die zu erzielenden energie- und materialökonomischen Einsparungen zu enthalten. Um diese Ziele abrechenbar zu gestalten, sind entsprechende Nutzenskennziffern in Form eines kombinierten Natural-Wert-Ausdruckes anzuwenden [12]. Damit wird die konkrete Erfassung der Materialarten und ihrer Menge ermöglicht. Die Ziele und die Ergebnisse sind dabei im umfassenden volkswirtschaftlichen Sinn festzulegen und zu beurteilen. Ein Hilfsmittel hierfür bietet der Standard[6]), nach dem die unterschiedlichen Aufwandsarten, vorwiegend Material, zu erfassen sind, die bei der Herstellung, Anwendung und Wartung von Erzeugnissen auftreten.

Die *Hauptrichtungen* der Einflußnahme auf eine hohe Material- und Energieökonomie mittels Standards lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- *rationelle Energieanwendung* durch Energieverbrauchsnormative, energetische Wirkungsgrade, zulässige Energieverluste u. a.,
- *Anwendung der Leichtbauweise* durch verarbeitungsgerechte Werkstoffcharakteristiken, Konstruktions-, Berechnungs- und Dimensionierungsvorschriften u. a.,
- *Verbesserung der Materialausnutzung* durch optimale Halbzeugsortimente und montagegerechte Fixmaße, zulässige Bearbeitungszugaben, spezifische Toleranzen, Zuschnitt- und Rezepturoptimierung, Materialausnutzungskoeffizienten u. a.,
- *Erhöhung der Qualität und Zuverlässigkeit* durch erforderliche Gebrauchseigenschaften, Zuverlässigkeitskennwerte, Erhaltung der Qualität bei Transport und Lagerung, zweckmäßige Wartung u. a.,
- *verstärkte Anwendung von Sekundärrohstoffen und von einheimischen Rohstoffen* durch Erfassung und Aufbereitung, Substitution u. a.,
- *Verbesserung des Korrosionsschutzes* durch korrosionsschutzgerechte Gestaltung, Korrosionsschutzverfahren u. a.

Zur Durchsetzung dieser Hauptrichtungen sind in Standards *Aufwands-* und *Effektivitätskennziffern* des Material- und Energieeinsatzes aufzunehmen. Solche Kennziffern sind:

- *Aufwandskennziffern:* Materialausnutzungskoeffizienten, Verlustkoeffizienten, Materialverbrauchsnormative, Normative der Materialrückgewinnung, Energieverbrauchsnormative;
- *Effektivitätskennziffern:* Masse-Leistungs-Verhältnis, Masse-Gebrauchswert-Verhältnis, energetische Wirkungsgrade.

6. Standardisierung und Wiederholfaktor

6.1. Erhöhung der Serienmäßigkeit

Effektivität der Produktion und Qualität der Erzeugnisse werden maßgeblich von der *Serienmäßigkeit* der Produktion bestimmt. Dafür sind im wesentlichen zwei Gründe maßgebend:

1. Die Frage nach der Serienmäßigkeit der Produktion ist die Frage nach der *Stückzahl* der herzustellenden Erzeugnisse, Baugruppen und Einzelteile.

Zwischen den Stückzahlen der herzustellenden Erzeugnisse und ihren *Selbstkosten* besteht ein unmittelbarer Zusammenhang. Je größer die Fertigungsstückzahlen, die Serien- und Chargengrößen, desto geringer ist der auf das Stück, auf die Charge bezogene Herstellungsaufwand, desto geringer sind auch die Selbstkosten. Dieser Zusammenhang Stückzahl—Selbstkosten ergibt sich aus den Wechselbeziehungen, die zwischen der Organisation der Produktion und der zum Einsatz kommenden Technik bestehen. Niedrige Stückzahlen bedeuten, stark vereinfacht, *Einzel-* und *Kleinserienfertigung* und damit *Werkstättenfertigung* mit Universalmaschinen und langen Transportwegen und hohen Zwischenlagerungen; hohe Stückzahlen dagegen *Großserien-* und *Massenfertigung* und damit Gegenstandsstruktur bzw. *Fließfertigung* mit hochproduktiven Spezialmaschinen und kurzen Produktionsdurchlaufzeiten.

2. Die Qualität der Erzeugnisse wird maßgeblich vom Niveau und von der Stabilität der *technologischen Prozesse* bestimmt.

Die Auswahl des technologischen Prozesses — und damit die Auswahl der anzuwendenden Anlagen, Maschinen, Geräte, Vorrichtungen, Werkzeuge und Meßmittel — ist von einer Reihe von Faktoren abhängig. Einen dominierenden Platz unter diesen Faktoren nimmt die *Stückzahl* der zu fertigenden Erzeugnisse ein. Hohe Stückzahlen ermöglichen die Anwendung moderner, hochproduktiver Verfahren und damit den Einsatz von Spezialmaschinen, Spezialwerkzeugen und Vorrichtungen sowie auch von direkt in den Produktionsprozeß integrierten speziellen, mit der erforderlichen Präzision arbeitenden Meßmitteln. Subjektive Mängel werden damit stark reduziert bzw. völlig ausgeschaltet. Es kann ein gleichmäßiges, stabiles hohes Qualitätsniveau der Produktion und damit der herzustellenden Erzeugnisse erreicht und gesichert werden. Die Stückzahlen oder die zu produzierenden Serien lassen sich aber bei gleichbleibendem Bedarf nur erhöhen, wenn Einzelteile und Baugruppen planmäßig vereinheitlicht und die noch bestehende Typenvielfalt weiter reduziert werden. Hier besteht also ein direkter Zusammenhang zwischen der Standardisierung, d. h. der *Vereinheitlichung*, und der Sicherung eines stabilen Qualitätsniveaus der Produktion.

Um den *Wiederholfaktor der Produktion* und damit volkswirtschaftlich begründete Seriengrößen zu erreichen, ergeben sich für die Standardisierung folgende Aufgaben:

- *Reduzierung der Typenvielfalt* von Einzelteilen und Baugruppen mit dem Ziel, die Stückzahlen und damit die Serienmäßigkeit der Produktion zu erhöhen,
- *konsequente Wiederverwendung* standardisierter Einzelteile und Baugruppen bei der Neu- und Weiterentwicklung von Erzeugnissen,
- Ausarbeitung und Anwendung *montage-* und *instandhaltungsgerechter Baugruppenbauweisen*,
- Ausarbeitung *technologischer Richtwerte*, die den internationalen Bestwerten entsprechen, und deren Festlegung in Standards,
- Entwicklung und Anwendung von *Typentechnologien* und *Typenprojekten* zur rationellen Herstellung der standardisierten Einzelteile und Baugruppen.

So wird es möglich, mit einem Minimum von standardisierten Einzelteilen und Baugruppen, die in spezialisierten Fertigungen mit modernsten technologischen Verfahren in hoher Qualität produziert werden, durch Kombination und Variation ein ausreichend breites, den volkswirtschaftlichen Bedürfnissen entsprechendes Sortiment von Enderzeugnissen (Maschinen, Geräte, Anlagen und Konsumgüter) mit niedrigstem Aufwand herzustellen.
Auf dieser Grundlage kann der arbeitsteilige Prozeß durch die Erhöhung der Leistungsfähigkeit bestehender und die Einrichtung weiterer zentraler Fertigungen vertieft werden. Damit ist eine *Rationalisierung* in großem Stil möglich, die die Voraussetzung für eine höhere Produktivität der gesellschaftlichen Arbeit bildet.



6.2. Baueinheitenprinzip

Das Baueinheitenprinzip, auch als *Baukastenprinzip* bezeichnet, ist ein Gestaltungsprinzip, das den Aufbau verschiedener technischer Gebilde aus einer Menge einheitlicher Baueinheiten in einem definierten Anwendungsbereich gestattet.
Eine *Baueinheit* ist ein kombinationsfähiges Element eines Systems, das im Rahmen dieses Systems eine oder mehrere definierte Teilfunktionen erfüllt.

Dem Baueinheitenprinzip liegt das Ziel zugrunde, aus möglichst wenigen verschiedenen Baueinheiten eine maximale Zahl von Endprodukten zu kombinieren. Es erhöht damit unmittelbar die Wiederverwendung standardisierter Lösungen. Die mit dem Baueinheitensystem angestrebte Einengung des Sortiments an Einzelteilen und Baugruppen beruht auf der *funktionsorientierten Vereinheitlichung.* Ausgehend von den zu realisierenden Funktionen, wird eine technisch und ökonomisch gerechtfertigte Vielfalt solcher Einzelteile und Baugruppen entwickelt, die diese Funktionen am günstigsten realisieren. Diese nach Form, Größe, Leistung und anderen Kennwerten in Typenreihen zusammengefaßte Auswahl wird in staatlichen Standards festgelegt, um so die Wiederverwendung für die in verschiedenen Konstruktionen wiederholt zu realisierenden Funktionen rationell zu ermöglichen und zu sichern. Im Ergebnis dieser Arbeiten entstehen Baukästen.

Ein *Baukasten,* auch als *Baueinheitensystem* bezeichnet, ist eine Anzahl von Baueinheiten, mit denen sich für einen abgegrenzten Anwendungsbereich nach einer Kombinationsvorschrift unterschiedliche technische Gebilde herstellen lassen.

Baukästen wurden entwickelt für häufig angewendete Funktionsgruppen (z. B. für Getriebe und für Hydraulik) wie auch als *erzeugnisspezifische Baukästen* (z. B. für Rührmaschinen, Mehrfarben-Offsetdruckmaschinen und für Klimaanlagen). Es muß das Bestreben eines Entwicklungsingenieurs sein, bei der Neu- und Weiterentwicklung von Erzeugnissen möglichst viele bereits vorhandene Baueinheiten und andere standardisierte Lösungen wiederzuverwenden.
Methodische Hinweise zur Entwicklung und Anwendung des Baueinheitenprizips sind in Standards festgelegt worden[7]).

6.3. Ingenieur-technische Arbeiten

Rationalisierung ingenieur-technischer Arbeiten kann nicht einfach dem Einsatz von EDVA und moderner Büro-, Vervielfältigungs- und Informationstechnik gleichgesetzt werden. Sollen z. B. die Arbeitsplatzstammkarten mit Hilfe einer EDVA hergestellt werden, dann setzt das voraus, daß die entsprechenden technologischen Daten erfaßt, vereinheitlicht und gespeichert worden sind. Sollen Zeichenautomaten rationell eingesetzt werden, müssen die betreffenden Einzelteile und Baugruppen klassifiziert, vereinheitlicht und gespeichert worden sein. Dazu gehört auch, daß alle erforderlichen Dokumentationen der Konstruktion und Technologie sowie auch die notwendigen Arbeitsabläufe selbst standardisiert sein müssen.
Rationalisierung der Produktionsvorbereitung ist also ihrem Wesen nach konsequente Wiederverwendung standardisierter Bestlösungen in der Erzeugnis- und Verfahrensentwicklung sowie in der Produktion.

Die Hauptaufgaben zur *Rationalisierung* der Arbeiten in den produktionsvorbereitenden Bereichen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- *Reduzierung der Typenvielfalt* durch Entwicklung volkswirtschaftlich begründeter Einzelteil- und Baugruppensortimente,
- konsequente Nutzung des *Grundklassifikators* für Einzelteile und Baugruppen[8]) und Aufbau von *Wiederholteilkatalogen,*
- konsequente *Wiederverwendung* standardisierter Einzelteile und Baugruppen bei der Neu- und Weiterentwicklung der Erzeugnisse,
- Weiterentwicklung und Neuausarbeitung von *Konstruktions-, Projektierungs- und Berechnungsvorschriften* und deren Aufnahme in staatliche Standards,
- weitere Standardisierung der *Konstruktionsdokumentation,*
- konsequente Nutzung des *Grundklassifikators* für technologische Prozesse[9])[10]),
- *Typung* technologischer Prozesse,
- weitere Standardisierung der *technologischen Dokumentation,*
- Anwendung von *Algorithmen* und *Programmbausteinen* für wissenschaftlich-technische Berechnungen u. a. konstruktive, technologische und Standardisierungsaufgaben.

Wichtige Aufgaben zur Rationalisierung der Arbeiten der Produktionsvorbereitung werden im Rahmen des RGW geleistet. Dazu gehören die Ausarbeitung und schrittweise Einführung des *Einheitlichen Systems der Konstruktionsdokumentation* (ESKD) und des *Einheitlichen Systems der Toleranzen und Passungen* (ESTP).

6.4. Standardisierung und Konstruktion

Die Analyse eines technischen Erzeugnisses (Maschine, Gerät, Bauteil; allgemein: technisches Gebilde) zeigt einen Aufbau aus zahlreichen Einzelteilen und Baugruppen, unter denen sich viele gleiche oder einander ähnliche Bauelemente befinden. Bei der Erzeugnisentwicklung kann der Konstrukteur vielfach auf gespeicherte Ergebnisse der Bauelementekonstruktion zurückgreifen und diese Bauelemente und Baugruppen in projektierend-systematischer Arbeitsweise zum Gesamterzeugnis zusammenfügen. Voraussetzung für eine solche Arbeitsweise ist u. a. die sinnvolle Einschränkung der Vielzahl möglicher Ausführungsformen, geometrischer Abmessungen und Verwendung von Werkstoffen für solche Elemente. Diese Forderung führte schon frühzeitig zur Festlegung von Normen, in denen Abmessungen, Formen und Forderungen für die Austauschbarkeit verankert wurden. Durch solche Standards für *Bauelemente* (Schrauben, Stifte u. a. Konstruktionselemente) sowie auch für *Baugruppen* (Elektromotoren, Kupplungen, Getriebe), die auf der Grundlage von Bestlösungen ständig wiederkehrender Elemente und Teilsysteme entstanden sind, wird die Routinearbeit des Konstrukteurs verringert. Die Standardisierung erstreckt sich dabei nicht nur auf technische Gebilde, sondern auch auf Begriffe, Klassifizierungen, Eigenschaften von Stoffen, Verfahren u. a. Sie ist somit ein wichtiges, hilfreiches *Arbeitsmittel für den Konstrukteur* im Sinne der Rationalisierung und Formalisierung geistiger Arbeit. Da Standards verbindlichen Charakter haben, bedeutet das für den Konstrukteur, daß er zu ihrer Einhaltung und Anwendung verpflichtet ist. Andererseits sollte jeder Konstrukteur sein ganzes Können und Wissen weiteren Standardisierungsarbeiten mit dieser Zielrichtung widmen.
Besondere Bedeutung kommt der Standardisierung bei der Realisierung der *Austauschbarkeit technischer Gebilde* zu. Der Konstrukteur ist nur dann in der Lage, technische Gebilde austauschgerecht zu konstruieren, wenn dazu in den Standards präzise Festlegungen über funktionelle und geometrische Parameter, Werkstoffe, Anschlußmaße, Prüf- und Liefervorschriften, Definitionen und Abgrenzungen usw. enthalten sind. Der *Austauschbau* ist eines der markantesten Merkmale einer modernen Produktion. Einige sehr bedeutsame, durch abgeschlossene Standardisierungsaufgaben fixierte Vereinheitlichungsergebnisse für das Konstruieren austauschbarer technischer Gebilde liegen im Internationalen System der Toleranzen und Passungen und im Internationalen System der Vorzugszahlen vor.

6.5. Toleranzen und Passungen

6.5.1. Arten von Toleranzen

Die Gestalt technischer Gebilde muß im Hinblick auf eine spätere Fertigung und Montage dieser Gebilde durch Angaben geometrischer und technisch-physikalischer Eigenschaften vom Konstrukteur festgelegt werden. Eine Fertigung und Montage ist nur möglich, wenn diese Angaben in bestimmten, festgelegten Grenzen schwanken dürfen. Diese in der Technik notwendig zuzulassenden Abweichungen von vorgeschriebenen Eigenschaften sind technische *Toleranzen.*
Die geometrische Gestalt eines herzustellenden technischen Gebildes läßt sich durch Maß-, Form-, Lage- und Oberflächenbeschaffenheitsangaben beschreiben. Demzufolge werden Maßtoleranzen (Längen- und Winkelmaßtoleranzen), Formtoleranzen, Lagetoleranzen und Oberflächenbeschaffenheitstoleranzen als *Toleranzen geometrischer Angaben* und Härte-, Masse-, Kraft-, Zeit-, Frequenz-, Widerstandstoleranzen u. a. als *Toleranzen technisch-physikalischer Eigenschaften* angegeben [16].



Sondertoleranzen werden bei speziell gestalteten Bauteilen verwendet, wie solchen mit Gewinden (Gewindetoleranzen), Verzahnungen (Verzahnungstoleranzen), Kegelansätzen (Kegeltoleranzen), elektrisch-elektronischen Bauelementen (Toleranzen für Anschlußmaße) u. a.
Größte Bedeutung haben Maßtoleranzen. Die innerhalb des Einheitlichen Systems der Toleranzen und Passungen (ESTP) des Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe (RGW) enthaltenen allgemeinen Festlegungen sind in einem Standard[11]) zusammengefaßt.

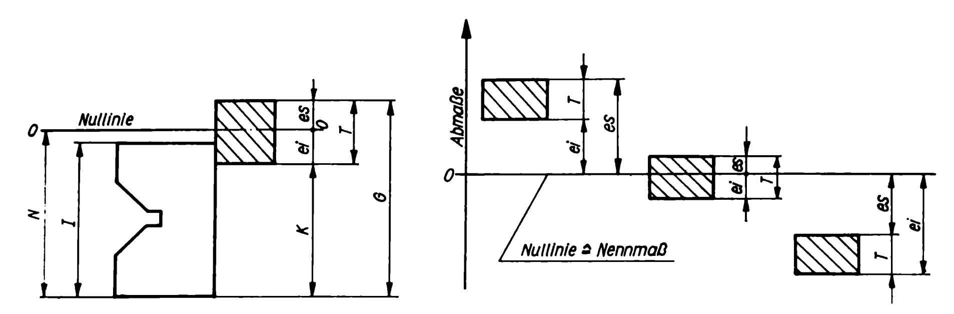


Bild 6. Maßtoleranz an einem Werkstück und mögliche Lagen von Toleranzfeldern zur Nullinie der Abmaße. N Nennmaß; G Größtmaß; K Kleinstmaß; I Istmaß; es oberes Abmaß eines Außenmaßes; T Toleranz; ei unteres Abmaß eines Außenmaßes

6.5.2. Toleranzangaben

Die Toleranz ist der Unterschied zwischen zwei zulässigen Grenzwerten, dem zulässigen *Größtwert G* und dem zulässigen *Kleinstwert K* einer Angabe oder Eigenschaft. Sie kennzeichnet somit die Grenzen der geduldeten Schwankung der *Istwerte I:*

$$T = G - K \qquad (1)$$

Zur Größenangabe dient der *Nennwert N*. Die Lage einer Toleranz und ihrer Grenzwerte zum Nennwert kann einseitig oder doppelseitig sein (Bild 6). Somit ergeben sich für Nennwertangaben mit Toleranzen die folgenden Möglichkeiten.

Beispiele.

1. *Absolutangabe:* $l = 100^{+5}_{-2}$ mm; $G = 105$ mm; $K = 98$ mm

   $T = (105 - 98)$ mm $= 7$ mm; $N = 100$ mm

2. *Prozentangabe:* $C = 50\ \mu F \pm 2\%$; $G = 51\ \mu F$; $K = 49\ \mu F$

   $T = (51 - 49)\ \mu F = 2\ \mu F$; $N = 50\ \mu F$

3. *Einseitige Lage zum Nennwert:*

   mit Pluswerten: $U = 10^{+2}_{+1}$ V; $G = 12$ V; $K = 11$ V

   $T = (12 - 11)$ V $= 1$ V; $N = 10$ V

   mit Minuswerten: $V = 10^{-0,2}_{-0,4}$ cm³; $G = 9,8$ cm³; $K = 9,6$ cm³

   $T = (9,8 - 9,6)$ cm³ $= 0,2$ cm³; $N = 10$ cm³

4. *Doppelseitige Lage zum Nennwert:*

   Symmetrische Lage: $R = 100\ k\Omega \pm 10\%$; $G = 110\ k\Omega$; $K = 90\ k\Omega$

   $T = (110 - 90)\ k\Omega = 20\ k\Omega$; $N = 100\ k\Omega$

   Asymmetrische Lage: $M_t = 100^{+2}_{-1}$ N · m; $G = 102$ N · m; $K = 99$ N · m

   $T = (102 - 99)$ N · m $= 3$ N · m; $N = 100$ N · m

Bei Toleranzen für geometrische Angaben werden stets Absolutangaben und bei Toleranzen für technisch-physikalische Werte und Eigenschaften meist Prozentangaben, aber auch Absolutangaben gemacht.

6.5.3. Toleranzsysteme für Längenmaße

Auf Fertigungsunterlagen (technischen Zeichnungen) unterscheidet man Längenmaßangaben:

— ohne Toleranzangabe[12]),[13]),
— mit zahlenmäßiger Toleranzangabe,
— mit Kurzbezeichnung der Toleranz[11]).

Für die Kennzeichnung der Toleranzen (Kurzbezeichnung) im ESTP des RGW werden *Kurzzeichen* verwendet, die sich aus Buchstaben des lateinischen Alphabets für die Kennzeichnung der Lage des Toleranzfeldes zur Nullinie (grafische Darstellung der Toleranzfelder, s. Bild 6) und aus Zahlen für die Kennzeichnung der vom Nennmaß abhängigen Größe (Qualität) der Toleranz zusammensetzen (z. B. G7, H6, f8, x7).
Für die *Kennzeichnung der Lage* von Toleranzfeldern zur Nullinie, die in der bildlichen Darstellung der Toleranzfelder dem Abmaß Null und somit die dem Nennmaß N entsprechende Bezugslinie für die Abmaße darstellt, werden alle Buchstaben des Alphabetes (außer i, I; l, L; o, O; q, Q und w, W) benutzt. Zusätzlich werden noch die Buchstabenkombinationen cd, CD; ef, EF; fg, FG; za, ZA; zb, ZB; zc, ZC und j_s, J_s verwendet.
Außenmaße (*Wellen*) werden mit kleinen Buchstaben (a, b, ..., z, za, zb, zc) und *Innenmaße* (*Bohrungen*) mit großen Buchstaben (A, B, ..., Z, ZA, ZB, ZC) bezeichnet. Die Lage der Toleranzfelder zur Nullinie wird durch die Grundabmaße festgelegt. Beispiele für Lagen von Toleranzfeldern zeigt Bild 7 (Schraffuren der Toleranzfelder nach [11]).

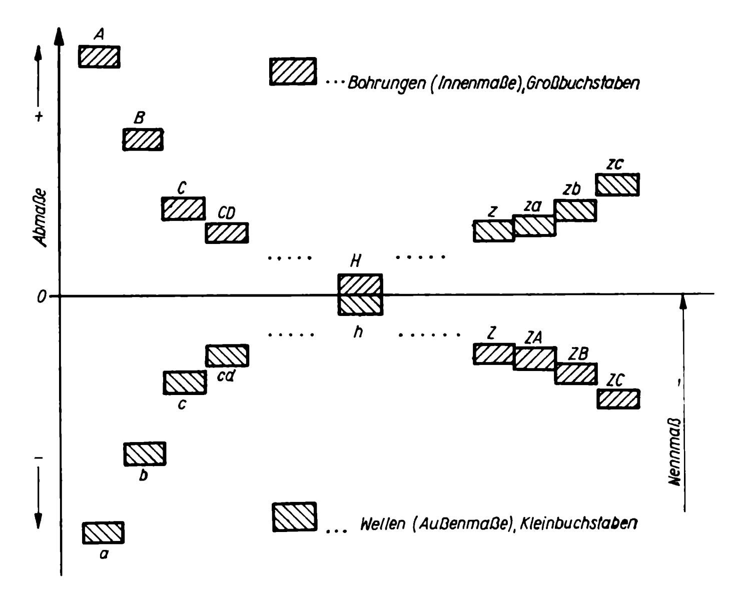


Bild 7. Beispiele für Lagen von Toleranzfeldern zur Nullinie im Maßtoleranzsystem

Die Werte der Grundtoleranzen und Grundabmaße sind nennmaßabhängig. Nennmaße sind in *Nennmaßbereiche* eingeteilt, wobei die Nennmaßbereichstufen in ihren Grenzwerten nach den Vorzugszahlenreihen R 10 und R 20 gestuft sind, so daß sich für Nennmaße bis 500 mm die in Tabelle 1 angegebenen Haupt- und Zwischenbereiche ergeben. Für Nennmaße über 500 mm bis 3150 mm sind die Nennmaßbereiche und die Beziehungen zur Bildung der Grundabmaße in [11]), für Nennmaße über 3150 mm in [14]) enthalten.

Tabelle 1. Nennmaßbereiche für Maße bis 500 mm in mm

Hauptbereiche		Zwischenbereiche		Hauptbereiche		Zwischenbereiche	
über	bis	über	bis	über	bis	über	bis
1	3	–	–	120	180	120	140
3	6	–	–			140	160
6	10	–	–			160	180
10	18	10	14	180	250	180	200
		14	18			200	225
18	30	18	24			225	250
		24	30	250	315	250	280
30	50	30	40			280	315
		40	50	315	400	315	355
50	80	50	65			355	400
		65	80	400	500	400	450
80	120	80	100			450	500
		100	120				

Tabelle 2. Grundtoleranzen IT5 bis IT17 (IT Internationale Toleranz)

Bezeichnung der Grundtoleranz	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10	IT11, ..., IT17
Wert der Grundtoleranz	$7i$	$10i$	$16i$	$25i$	$40i$	$64i$	$100i, \ldots, 1600i$

Tabelle 3. Beziehungen zur Berechnung der Grundtoleranzen IT01, IT0 und IT1

Bezeichnung der Grundtoleranz	IT01	IT0	IT1
Wert der Grundtoleranz	$0{,}3 + 0{,}008D$	$0{,}5 + 0{,}012D$	$0{,}8 + 0{,}020D$

Die Grundtoleranzen sind in 19 Qualitätsreihen eingeteilt, die mit IT01, IT0, IT1, ..., IT17 (IT Internationale Toleranz) entsprechend den Qualitäten 01, 0, 1, ..., 17 bezeichnet werden. Unter *Qualität* wird dabei die Gesamtheit der Toleranzen verstanden, die dem gleichen Genauigkeitsgrad für alle Nennmaße entsprechen.

Für die Qualitäten 5 ··· 17 werden die Werte der Grundtoleranzen durch Multiplikation der *internationalen Toleranzeinheit* i mit einem dimensionslosen Koeffizienten nach Tabelle 2 gebildet. Die internationale Toleranzeinheit i wird im Nennmaßbereich bis 500 mm nach Gl. (2) berechnet, wobei für den Nenndurchmesser D das geometrische Mittel der Grenzen des jeweiligen Nennmaßbereichs eingesetzt wird:

$$i = 0{,}45 \sqrt[3]{D} + 0{,}001 \cdot D \qquad \left|\frac{i \quad D}{\mu\text{m} \quad \text{mm}}\right| \tag{2}$$

Die Koeffizienten von i sind in diesem Bereich der Qualität nach der Vorzugszahlenreihe R 5 mit dem Anfangswert 10 gestuft. Das Produkt dieses Anfangswerts mit der Toleranzeinheit i ergibt den Wert der Grundtoleranz der Qualität 6. Für den Wert der Grundtoleranz der Qualität 5 sind $7i$ festgelegt. Die Werte der Grundtoleranzen für die Qualitäten 01, 0 und 1 werden nach den in Tabelle 3 angegebenen Beziehungen berechnet. Die Werte der Grundtoleranzen der Qualitäten 2, 3 und 4 sind Näherungswerte der Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes und letztes Glied die Werte der Grundtoleranzen der Qualitäten 1 und 5 sind.
Grundabmaße werden nach den in [11]) angegebenen Beziehungen gebildet. Eine Zusammenstellung und Erläuterung der Begriffe des Toleranz- und Passungswesens enthält [16].

6.5.4. Passungssysteme

Bei der Verbindung von zwei Einzelteilen wird eine *Passung* gebildet, die durch den Maßunterschied bestimmt wird, den die Teile vor dem Zusammenbau haben. Je nach Beschaffenheit dieses Maßunterschieds werden Spiel-, Preß- und Übergangspassungen unterschieden:

Spielpassungen ergeben sich bei Paarung von Teilen mit Außenmaßen (z. B. Wellen), die stets kleiner als die Innenmaße der entsprechenden Fügeteile (z. B. Bauteile mit Bohrungen) sind. Zwischen den zu fügenden Teilen entsteht Spiel (S) mit dem Kleinstwert S_k und dem Größtwert S_g.

Preßpassungen ergeben sich bei Paarung von Teilen mit Außenmaßen, die stets größer als die Innenmaße der dazugehörigen Teile sind. Zwischen den zu fügenden Teilen entsteht Übermaß (U) mit dem Kleinstwert U_k und dem Größtwert U_g.

Übergangspassungen liegen dann vor, wenn die Maßunterschiede der zu fügenden Teile sowoh Spiele als auch Übermaße ergeben. In jedem Fall sind die Kleinstwerte von Spiel bzw. Übermaß Null.

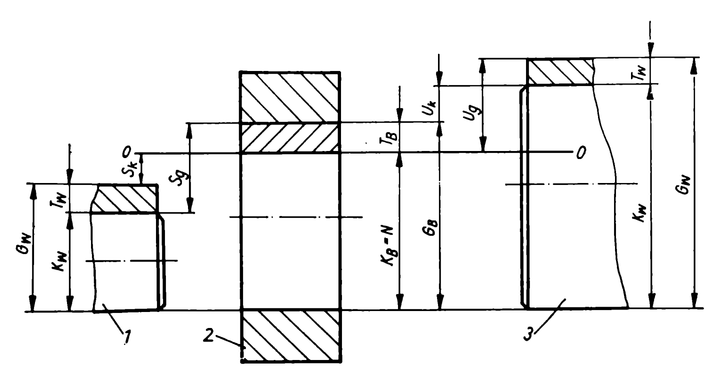


Bild 8. Passungsarten, dargestellt im System „Einheitsbohrung".
Teile 1 und 2: Spielpassung; Teile 2 und 3: Preßpassung

Die grundlegenden Zusammenhänge am Beispiel einer Welle und einem Bauteil mit Bohrung zeigt Bild 8. Es gelten folgende mathematische Zusammenhänge:

Spielpassungen ($G_W < K_B$):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Größtspiel} & S_g = G_B - K_W \\ \text{Kleinstspiel} & S_k = K_B - G_W \\ \text{Paßtoleranz} & T_p = S_g - S_k \end{array}\right\} \quad (3)$$

Preßpassungen ($K_W > G_B$):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Größtübermaß} & U_g = G_W - K_B \\ \text{Kleinstübermaß} & U_k = K_W - G_B \\ \text{Paßtoleranz} & T_p = U_g - U_k \end{array}\right\} \quad (4)$$

Übergangspassungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Größtspiel} & S_g = G_B - K_W \\ \text{Größtübermaß} & U_g = G_W - K_B \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Paßtoleranz T_p ergibt sich außerdem für alle Passungen aus:

$$T_p = IT_W + IT_B \quad (6)$$

K_W Kleinstmaß der Welle, G_W Größtmaß der Welle, K_B Kleinstmaß der Bohrung, G_B Größtmaß der Bohrung, IT_W Grundtoleranz der Welle, IT_B Bohrungsgrundtoleranz

Auf Grund des in 6.5.3. dargestellten Toleranzsystems sind durch Kombination der verschiedensten Toleranzfelder zahlreiche Passungssysteme möglich. Aus technologischen und betrieblichen Gesichts-

punkten ist jedoch eine sinnvolle Einschränkung der Auswahlmöglichkeiten angebracht. Man erhält nach Wahl des Bohrungstoleranzfeldes mit dem Kurzzeichen H (unteres Abmaß $EI = 0$) und der Kombination mit den Wellentoleranzfeldern a bis zc alle erforderlichen Passungsarten. Dieses Passungssystem wird als *System „Einheitsbohrung“* bezeichnet. Analog dazu erhält man durch Kombination des Wellentoleranzfeldes h (oberes Abmaß $es = 0$) mit den Bohrungstoleranzfeldern A bis ZC ebenfalls alle erforderlichen Passungsarten. Dieses Passungssystem wird als *System „Einheitswelle“* bezeichnet.
In der betrieblichen Praxis werden aber auch aus diesen Systemen nicht alle Kombinationsmöglichkeiten benötigt. So gibt es Passungen, die bevorzugt anzuwenden sind[15]). Den Passungen nach System „Einheitsbohrung“ ist der Vorrang einzuräumen. Aus konstruktiven, ökonomischen oder betrieblichen Gründen (besonders dann, wenn mehrere Bauteile mit Bohrungen auf einer glatten, durchgehenden Achse oder Welle angeordnet werden sollen) kann die Verwendung des Systems „Einheitswelle“ angebracht sein.

6.5.5. Toleranzen anderer geometrischer Angaben

Form- und Lageabweichungen von Oberflächen

Formabweichungen sind Abweichungen von der theoretischen Idealform der Geraden, Ebene, des Kreises, Zylinders, Kegels u. a. geometrischer Formen.
Lageabweichungen sind Abweichungen von der Parallelität, Koaxialität, Symmetrie, Rechtwinkligkeit, Nennlage usw., wobei zwischen unabhängigen und abhängigen Lageabweichungen unterschieden wird.

Bei Maßtoleranzen wird allgemein vorausgesetzt, daß Werkstückoberflächen nur innerhalb der Maßtoleranz von der theoretischen ideal geometrischen Form abweichen. Wenn die Anforderungen an Bauelemente die Festlegung besonders enger Grenzen für zulässige Form- und Lageabweichungen erforderlich machen (z. B. schwingungs- und geräuscharmer Lauf), sind solche Toleranzangaben, die jedoch kontrollierbar sein müssen, auf den Konstruktionsunterlagen zusätzlich vorzunehmen.
Die Begriffe für Form- und Lageabweichungen von Oberflächen technisch erzeugter Körper sind standardisiert[16])[17]), die entsprechenden Werte für diese Abweichungen ebenfalls[18]). Standardisierte Symbole zur Angabe solcher Toleranzen in technischen Zeichnungen enthalten [19]) und [20]). Die Angaben sind in ein der Schriftgröße angepaßtes umrahmtes Feld mit zwei bis drei Unterteilungen einzutragen. Beispiele in [16], [17] und [18].

Zulässige Abweichungen für Maße ohne Toleranzangabe

Die Darstellung jedes technischen Gebildes enthält Maße, die aus Funktions-, Fertigungs- oder Austauschbarkeitsgründen Toleranzangaben enthalten müssen. Viele Maße bedürfen jedoch keiner Tolerierung, da sie für die Funktion und die Gewährleistung der Austauschbarkeit keine Bedeutung haben. Wegen einer wirtschaftlichen Fertigung sind auch für solche Maße zulässige Abweichungen in den Klassen fein, mittel, grob und sehr grob festgelegt[12]) [13]).

Toleranzen an Bauteilen mit besonderen Formelementen

An kegelförmigen Bauteilen oder Bauteilen mit Kegelansätzen (z. B. Werkzeugkegel, Wellen-Naben-Verbindungen usw.) sind Kegelmaße zu tolerieren, da solche Kegel meist mit entsprechenden Gegenstücken gepaart werden sollen. Durch eine solche Paarungsstelle sollen oft Kraftmomente und Axialkräfte übertragen, aber auch eine Zentrierung oder Abdichtung (Absperrhahn) erreicht werden. Es existieren Toleranzen für Kegelwinkel und auch Kegelpassungen[22]), die zur Gewährleistung der Funktionssicherheit und der Austauschbarkeit solcher Verbindungsteile anzuwenden sind.

Darüber hinaus ist die Wahl von Toleranzen für Winkel standardisiert[23])[24]) vorzunehmen. An Bauteilen mit Gewinden werden für besondere Anwendungszwecke und Anforderungen an die unbedingte Austauschbarkeit Gewindetoleranzen und Gewindepassungen vorgesehen [25]) ... [27]). Verzahnungstoleranzen sind auch in Standards enthalten [28]) ... [31]). Für Keilwellenverbindungen sind Toleranzen ebenfalls standardisiert[32])[33]).

Passungen für den Wälzlagereinbau

Maßtoleranzen für die Bohrungsdurchmesser der Wälzlagerinnenringe (Kurzzeichen KB) und die Außendurchmesser der Wälzlageraußenringe (Kurzzeichen hB) enthält[34]). Für den Einbau der Wälzlager sind je nach Anforderung (fester oder loser Sitz des Wälzlagerrings)

entsprechende Toleranzen für die Durchmesser der Gehäusebohrung und der Welle festzulegen. Beispiele für Passungen zum Wälzlagereinbau in [19].

Werkstoff- und verfahrensbedingte Maßtoleranzen

Zahlreiche Standards (z. T. Fachbereichstandards) enthalten Festlegungen über zulässige Abweichungen, die sich auf besondere Herstellungs- und Bearbeitungsverfahren der metallverarbeitenden und auch andere Werkstoffe verarbeitenden Industrie beziehen (Abweichungen für Rohgußteilmaße ohne Toleranzangabe, für Gußstücke, Feingußstücke aus Stahl-, Grau- oder Temperguß und für Gußlegierungen[35]···[37]); Druckgußteile[38])). Für Erzeugnisse aus Sinterwerkstoffen werden Abweichungen für Maße ohne Toleranzangabe in [39]) angegeben, und für Plastteile sind Abweichungen und Maßtoleranzen in [40]) und [41]) enthalten.

6.5.6. Toleranzen technisch-physikalischer Eigenschaften

Zahlreiche technisch-physikalische Eigenschaften müssen herstellungsbedingt toleriert werden. Dazu gehören meß- und prüfbare Eigenschaften wie Druck, Temperatur, Zeit, Masse, Kraft, Leistung, elektrischer Widerstand, Kapazität, Spannung, Stromstärke, Frequenz usw.

Eine *Mengentoleranz* für Füllgüter von Packungen ist die zulässige Abweichung von einer angegebenen Menge m einer Ware, die nach Masse oder Volumen gehandelt wird. Sowohl die Klasseneinteilung als auch Zahlenwerte der Mengentoleranzen (für in Mengenbereichen gestufte Mengen m) sind festgelegt[42]). Die Toleranzklassen K sind gerundete Glieder der Vorzugszahlenreihe R 5 (Beispiele in Tabelle 4).

Tabelle 4. Toleranzklassen K für Mengentoleranzen bei Füllgütern von Packungen

Menge m in g		Toleranzklasse K										
		0,15	0,25	0,40	0,60	1	1,5	2,5	4	6	10	15
über	bis	Toleranz T in g										
...	...											
450	600	1	1,5	2,5	4	6	10	15	25	40	60	—
600	800	1,2	2,0	3,0	5	8	12	20	30	50	80	120
...	...											

Beispiel. Für eine Masse $m = 150$ g (Mengenbereich 120···150 g) ergibt sich für die Toleranzklasse $K = 0{,}40$ eine Mengentoleranz $T = 1$ g.

Weitere Festlegungen für Mengentoleranzen und Auswahl der Toleranzklassen für Fertigpackungen enthalten Standards[43]).

Auslieferungstoleranzen werden für passive elektronische Bauelemente verwendet. Zum Beispiel sind für Festwiderstände Auslieferungstoleranzen $\pm 0{,}1$; $\pm 0{,}25$; $\pm 0{,}5$; ± 1; ± 2; ± 5; ± 10; und $\pm 20\%$ vorgeschrieben[44]). Dabei wird als Auslieferungstoleranz die vom Hersteller angegebene zulässige Abweichung des Widerstands-Istwerts vom Widerstands-Nennwert, bezogen auf den Widerstands-Nennwert, verstanden[45]).

Beispiel. Schichtwiderstand 100 k$\Omega \pm 5\%$. Zulässiger Größtwert für den Widerstand $G = 105$ kΩ, zulässiger Kleinstwert für den Widerstand $K = 95$ kΩ.

6.5.7. Zur Anwendung von Toleranzen und Passungen in der Konstruktion

Bei der Wahl von Toleranzen in der Konstruktion ist nach dem Grundsatz: *so grob wie möglich und nur so fein wie erforderlich* zu verfahren. Jede nächsthöhere Qualität weist ein um etwa 60% größeres (breiteres) Toleranzfeld auf. Mit zunehmender Qualitätszahl sinken folglich die Herstellungskosten.

Qualitäten 01 ··· 5 (in Ausnahmen auch bis 7) werden im Lehren- und Meßzeugbau angewendet, wobei die Qualitäten 01 ··· 4 für höchste Genauigkeiten vorgesehen sind, die jedoch in der Fertigung nur schwer erreicht werden können. Diesen Umstand sollte der Konstrukteur unbedingt beachten. Qualitäten 5 ··· 12 werden überwiegend für Passungen verwendet. In der spanenden Fertigung sind Qualitäten ab 5 und in der spanlosen Fertigung ab 7 üblich, wobei die feineren Qualitäten durch Feinbearbeitungsverfahren erreicht werden. Betriebliche Belange (Zustand der Werkzeugmaschinen u. a.) beeinflussen die Festlegung der entsprechenden Qualitäten für Toleranzangaben erheblich. Nicht zuletzt zeigt sich hier die enge Verflechtung von Fertigung und Konstruktion.

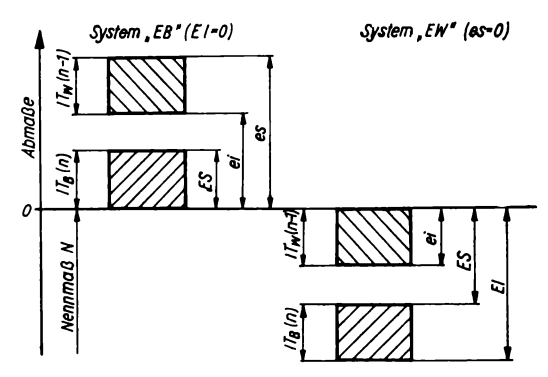


Bild 9. Grundbeziehungen bei Passungen und Darstellung der Toleranzfelder. System „Einheitsbohrung" („EB"); System „Einheitswelle" („EW"). ES oberes Abmaß der Bohrung (A_{oB}); EI unteres Abmaß der Bohrung (A_{uB}); es oberes Abmaß der Welle (A_{oW}); ei unteres Abmaß der Welle (A_{uW}); *n* Qualitätszahl (Ziffer der Qualität)

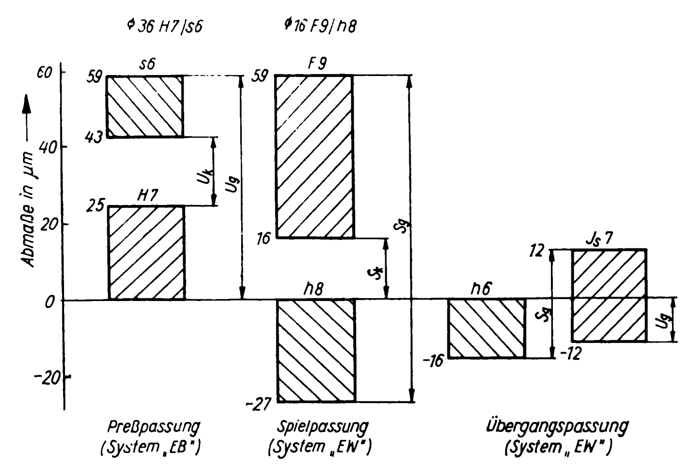


Bild 10. Beispiele für Passungen

Die *Aufteilung der Toleranzfelder von Passungen* auf die einzelnen Paßmaße sollte nach folgenden Gesichtspunkten erfolgen:

1. Passungssystem „Einheitsbohrung" bevorzugen.
2. Qualität von Wellen soll einen Grad besser als die von Bohrungen gewählt werden (Bilder 9 und 10)
3. Aufteilung der Paßtoleranz
   Preßpassung: $T_p = U_g - U_k = IT_W + IT_B$
   Spielpassung: $T_p = S_g - S_k = IT_W + IT_B$

4. Überprüfung folgender Bedingungen

Preßpassung: $U_{k\,vorh} \geqq U_{k\,erf}$; $U_{g\,vorh} \leqq U_{g\,max}$

Spielpassung: $S_{k\,vorh} \geqq S_{k\,erf}$; $S_{g\,vorh} \leqq S_{g\,max}$

Beispiel. Gegeben: $d = 75$ mm; $U_{k\,erf} = 25\,\mu m$; $U_{g\,max} = 80\,\mu m$; gesucht: Maßtoleranzen von Welle und Bohrung.

1. Paßtoleranz: $T_{p\,rech} = U_{g\,max} - U_{k\,erf} = 80\,\mu m - 25\,\mu m = 55\,\mu m$

2. Aufteilung der Paßtoleranz:
Nennmaßbereich 50···80 mm; Grundtoleranzen[11])

$$T_p = IT_W + IT_B = IT_W5 + IT_B6 = 13\,\mu m + 19\,\mu m = 32\,\mu m < T_{p\,rech}$$
$$= IT6 + IT7 = 19\,\mu m + 30\,\mu m = 49\,\mu m < T_{p\,rech}$$
$$= IT7 + IT8 = 30\,\mu m + 46\,\mu m = 76\,\mu m > T_{p\,rech}$$

Gewählt: Wellengrundtoleranz IT6 mit 19 µm, Bohrungsgrundtoleranz IT7 mit 30 µm

3. Ermittlung der Abmaße der Paßmaße. Gewählt: System „Einheitsbohrung".
Bohrungsabmaße: $EI = 0$; $ES = EI + IT_B = 0 + 30\,\mu m = 30\,\mu m$ Wellenabmaße: erforderliches unteres Abmaß $ei_{erf} = ES + U_{k\,erf} = 30\,\mu m + 25\,\mu m = 55\,\mu m$
Nach [15]) nächstgelegenes Wellentoleranzfeld: s6 mit $ei = 59\,\mu m$. Damit ergibt sich das obere Abmaß der Welle $es = ei + IT_W = 59\,\mu m + 19\,\mu m = 78\,\mu m$.

Ergebnis: ⌀ 75 H7/s6; Bohrung: H7 mit $EI = 0\,\mu m$ und $ES = 30\,\mu m$
Welle: s6 mit $ei = 59\,\mu m$ und $es = 78\,\mu m$

4. Überprüfung der Bedingungen:

$$U_{k\,vorh} = ei - ES = 59\,\mu m - 30\,\mu m = 29\,\mu m > U_{k\,erf} = 25\,\mu m;$$
$$U_{g\,vorh} = es - EI = 78\,\mu m - 0\,\mu m = 78\,\mu m < U_{g\,max} = 80\,\mu m.$$

$U_{k\,erf}$ und $U_{g\,max}$ sind Ergebnisse einer *Preßpassungsberechnung*. Bei der Aufteilung einer Spielpassung wird analog verfahren.

6.5.8. Toleranzen und Passungen im Bauwesen

Neben der metallverarbeitenden Industrie haben Toleranzen und Passungen auch in der *Bauindustrie* große Bedeutung. Industrielle Produktionsweisen bilden die Grundlage einer modernen rationellen Serienfertigung von Bauelementen und Baueinheiten in Spezialfertigungsstätten. Der Zusammenbau und die Austauschbarkeit der Bauteile ohne verteuernde Anpaßarbeiten erfordern die Einhaltung vorgeschriebener Maßtoleranzen und Passungen. Infolge der abweichenden Technologie im Bauwesen im Vergleich zum Maschinenbau weisen auch die Maß- und Passungssysteme an verschiedenen Stellen wesentliche Unterschiede auf.
Die allgemeinen Grundlagen für das System der Maßtoleranzen im Bauwesen bilden die Festlegungen des Standards[46]). Die Begriffe und ihre Definitionen weisen gewisse Ähnlichkeiten zu den im ESTP[11]) des RGW festgelegten auf. So dürfen Konstruktionsmaße l zwischen den Grenzwerten l_G (Größtmaß) und l_K (Kleinstmaß) schwanken. Der Unterschied zwischen den Grenzmaßen ist die Toleranz $T = l_G - l_K$. Nach Konstruktionsmaßbereichen und Genauigkeitsklassen geordnet, sind die Grundtoleranzen auf der Grundlage von *Vorzugszahlenreihen* festgelegt. Vergleichbar mit den Qualitäten im ESTP des RGW sind im Bauwesen Genauigkeitsklassen als Grad der Maßhaltigkeit in *Toleranzreihen* festgelegt. Diese sind zu den Konstruktionsmaßbereichen so gestuft, daß sich i. allg. für jede Toleranzreihe über alle Konstruktionsmaßbereiche gleiche Fertigungsschwierigkeiten ergeben. Die Tabellen der Grundtoleranzen mit Genau- bzw. Rundwerten sehen für sechs Konstruktionsmaßbereiche zehn Genauigkeitsklassen (GK1···GK10) vor.

Auf der Grundlage des Systems der Maßtoleranzen im Bauwesen sind *Baupassungen*[47]) festgelegt. Es werden folgende Begriffe definiert:

Baupassung ist das Zusammenwirken von in- oder aneinandergefügten Teilen einer Konstruktion im Bauwesen hinsichtlich ihrer Maßbeziehung.
Paßfläche ist die Fläche der Bauteile, an denen sich die Paßteile berühren oder, eine Fuge bildend, gegenüberstehen.



Fugentoleranz FT **ist der Unterschied zwischen Größt- und Kleinstfuge.**
Paßtoleranz PT **ist die Toleranz der Baupassung, d. h. die möglichen Schwankungen des Spiels infolge aller Maßtoleranzen einer Toleranzkette ($PT = \sum FT$).**
Bemerkenswert ist, daß bei Baupassungen Erkenntnisse der mathematischen Statistik zugrunde gelegt werden. Beim Baupaßsystem wird das Eintreten der Grenzfälle der Paß- oder Fugentoleranz gleich der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Grenzfälle jeder Paßteil- oder Montagetoleranz gesetzt.

6.6. Vorzugszahlen

6.6.1. Notwendigkeit der Vorzugszahlen

Das bedeutsamste allgemeine Charakteristikum der Standards ist die Exaktheit und Eindeutigkeit der in ihnen getroffenen Festlegungen; denn davon hängt in hohem Maße der Wert, d. h. der praktische Nutzen der Standards ab. Da die größte Exaktheit und Eindeutigkeit *Zahlenwerten* eigen ist, spielen diese in der Standardisierung und allgemein in der Technik eine hervorragende Rolle. Die weitaus meisten Standards enthalten zahlenmäßig ausgedrückte Vorschriften für die verschiedensten Eigenschaften der standardisierten Gegenstände. Hinzu kommt, daß eine Vielzahl technischer Erzeugnisse, besonders des Maschinen- und Gerätebaus, nicht nur in einer Baugröße, sondern in einer Baugrößenreihe (*Typenreihe*) entwickelt wird, um den unterschiedlichen Zwecken und Bedürfnissen der Anwender zu entsprechen. Die einzelnen Kennwerte dieser Erzeugnisse bzw. deren Bauteile müssen also gestuft werden; sie beziehen sich sowohl auf die Beschaffenheit wie auch auf die Leistungsfähigkeit der Objekte und sind sehr vielfältiger Natur. Zu ihnen gehören beispielsweise Abmessungen, Festigkeiten, Drücke, Massen, Mischungsverhältnisse, Drehzahlen, Stromstärken, Widerstände, Vorschübe, Durchlässigkeiten, Übersetzungsverhältnisse, Volumina. Für solche *Zahlenangaben* steht grundsätzlich der gesamte unendliche Zahlenvorrat des dekadischen Zahlensystems (auch dezimales oder Zehnersystem genannt) zur Verfügung. Es gibt jedoch triftige Gründe, die eine radikale Einschränkung dieser unbegrenzten Möglichkeiten und eine Konzentration auf relativ wenige Zahlen gebieterisch fordern. Das sind vor allem Austauschbarkeit, wirtschaftliche Fertigung sowie der arbeitsteilige Herstellungsprozeß. Es ist daher auf internationaler Ebene eine auf mathematischen und physiologischen Gesetzmäßigkeiten beruhende, den praktischen Erfordernissen weitestgehend entsprechende Auswahl von Zahlen vorgenommen worden, die im technischen Schaffen aller Industrieländer bevorzugt angewandt und darum *Vorzugszahlen* (in anderen Ländern auch Normzahlen) genannt werden. Das *System der Vorzugszahlen* ist in internationalen und DDR-Standards festgelegt[48]...[55]).

6.6.2. Mathematische Grundlage und Definitionen

Vorzugszahlen bzw. ihre Reihen basieren auf dem Bildungsgesetz der geometrischen Zahlenfolge*).
Eine spezielle Art von geometrischen Zahlenfolgen sind die dezimalgeometrischen, bei denen jeder Zehnerbereich die gleiche Anzahl Glieder enthält. Solche Folgen schließen die Zahl 1 ein und haben als Quotienten eine Wurzel aus 10, also ist:

$$q = \sqrt{10} \qquad (7)$$

wobei n jede ganze Zahl sein kann. Für die Stufung technischer Kennwerte nehmen die dezimalgeometrischen Folgen eine herausragende Stellung ein, weshalb sie dem System der Vorzugszahlen zugrunde gelegt wurden. Es gelten folgende Definitionen:

Vorzugszahlen sind die beim Festlegen von Größen aller Art zu bevorzugenden gerundeten Gliederwerte der mit dem Quotienten $\sqrt[80]{10}$ gebildeten dezimalgeometrischen Folge.

---

*) s. Abschn. Mathematik

Vorzugszahlenreihen sind die mit den Quotienten $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$, $\sqrt[40]{10}$ und $\sqrt[80]{10}$ gebildeten Folgen der Vorzugszahlen. Die Wurzelexponenten sind gleich der Anzahl der Glieder und damit der geometrischen Stufen in einer Dekade.

6.6.3. Grundreihen

Das internationale System der Vorzugszahlen umfaßt fünf Reihen, von denen vier als *Grundreihen* bezeichnet werden, während die feinstgestufte mit dem Quotienten $\sqrt[80]{10}$ als *Ausnahmereihe* gilt, da sie wegen der Vielzahl ihrer Glieder (sie enthält sämtliche Vorzugszahlen) nur in technisch oder ökonomisch begründeten Fällen angewandt werden darf[24]). Die wichtigsten Merkmale dieser Reihen sind in Tabelle 5 übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle 5. Stufensprünge, Wertsteigerungen und Gliederanzahl je Dekade der Vorzugszahlenreihen

Reihe (Kurzzeichen)	Stufensprung φ*)			Wertsteigerung in % (gerundet)	Anzahl der Glieder je Dekade
	theor. Wert	Genauwert	gerundeter Wert (= Hauptwert)		
R 5	$\sqrt[5]{10}$	1,5849	1,60	60	5
R 10	$\sqrt[10]{10}$	1,2589	1,25	25	10
R 20	$\sqrt[20]{10}$	1,1220	1,12	12	20
R 40	$\sqrt[40]{10}$	1,0593	1,06	6	40
R 80	$\sqrt[80]{10}$	1,0292	1,03	3	80

*) Der Stufensprung φ steht hier für den mathematischen Terminus Quotient q.

Tabelle 6 gibt die Grundreihen für die erste Dekade wieder, wobei nur die in den ersten vier Spalten aufgeführten Hauptwerte die praktisch anzuwendenden Vorzugszahlen darstellen. Vorzugszahlen anderer Dekaden ergeben sich durch Multiplikation der Tabellenwerte mit ganzzahligen Zehnerpotenzen (z. B. 0,1; 10; 100; 1000).

Die *Ordnungsnummern ON* (Spalte 5) als arithmetische Folge sind die Logarithmen der Vorzugszahlen *VZ* zur Basis $\sqrt[40]{10}$ nach der Gleichung:

$$ON_{(VZx)} = {}^{\sqrt[40]{10}}\log\,(VZx) \tag{8}$$

Sie dienen zur Erleichterung des Rechnens mit Vorzugszahlen durch Anwendung der logarithmischen Rechengesetze, so beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren, wobei sich stets wieder Vorzugszahlen ergeben. Will man beispielsweise die Vorzugszahlen 2,24 und 3,55 miteinander multiplizieren, so brauchen nur ihre Ordnungsnummern addiert zu werden:

$$\begin{array}{l} VZ\ 2{,}24 \triangleq ON\ 14 \\ VZ\ 3{,}55 \triangleq ON\ 22 \\ \hline ON\ 36 \triangleq VZ\ 8 \end{array}$$

Dem gleichen Zweck dienen die in Spalte 6 ausgewiesenen Mantissen der Zehnerlogarithmen.

6.6.4. Begrenzte Reihen

Vorzugszahlenreihen sind grundsätzlich unendliche Reihen, von denen in der Praxis jedoch nur Teilabschnitte benötigt werden, die ein- oder beidseitig begrenzt werden, beispielsweise mit folgenden Kennzeichnungen: R 20 (45···), R 5 (···1600), R 40 (28···35,5).

Tabelle 6. Grundreihen der Vorzugszahlen für den Bereich 1 bis 10

Grundreihen (Hauptwerte)				Ord-nungs-nummern	Man-tissen	Genau-werte	Abweichung der Hauptwerte von den Genauwerten in %
R 5	R 10	R 20	R 40				
1,00	1,00	1,00	1,00	0	000	1,0000	0
			1,06	1	025	1,0593	+0,07
		1,12	1,12	2	050	1,1220	−0,18
			1,18	3	075	1,1885	−0,71
	1,25	1,25	1,25	4	100	1,2589	−0,71
			1,32	5	125	1,3335	−1,01
		1,40	1,40	6	150	1,4125	−0,88
			1,50	7	175	1,4962	+0,25
1,60	1,60	1,60	1,60	8	200	1,5849	+0,95
			1,70	9	225	1,6788	+1,26
		1,80	1,80	10	250	1,7783	+1,22
			1,90	11	275	1,8836	+0,87
	2,00	2,00	2,00	12	300	1,9953	+0,24
			2,12	13	325	2,1135	+0,31
		2,24	2,24	14	350	2,2387	+0,06
			2,36	15	375	2,3714	−0,48
2,50	2,50	2,50	2,50	16	400	2,5119	−0,47
			2,65	17	425	2,6607	−0,40
		2,80	2,80	18	450	2,8184	−0,65
			3,00	19	475	2,9854	+0,49
	3,15	3,15	3,15	20	500	3,1623	−0,39
			3,35	21	525	3,3497	+0,01
		3,55	3,55	22	550	3,5481	+0,05
			3,75	23	575	3,7584	−0,22
4,00	4,00	4,00	4,00	24	600	3,9811	+0,47
			4,25	25	625	4,2170	+0,78
		4,50	4,50	26	650	4,4668	+0,74
			4,75	27	675	4,7315	+0,39
	5,00	5,00	5,00	28	700	5,0119	−0,24
			5,30	29	725	5,3088	−0,17
		5,60	5,60	30	750	5,6234	−0,42
			6,00	31	775	5,9566	+0,73
6,30	6,30	6,30	6,30	32	800	6,3096	−0,15
			6,70	33	825	6,6834	+0,25
		7,10	7,10	34	850	7,0795	+0,29
			7,50	35	875	7,4989	+0,01
	8,00	8,00	8,00	36	900	7,9433	+0,71
			8,50	37	925	8,4140	+1,02
		9,00	9,00	38	950	8,9125	+0,98
			9,50	39	975	9,4406	+0,63
10,00	10,00	10,00	10,00	40	000	10,0000	0

6.6.5. Abgeleitete Reihen

Können für Größenstufungen fallweise keine Grundreihen benutzt werden, so dürfen abgeleitete Reihen gebildet werden durch Auswahl jedes 2., 3., 4. usw., allgemein jedes p-ten Gliedes einer Grundreihe. Ihre Kennzeichnung erfolgt beispielsweise: R 10/3 (31,5···250), R 20/5 (710···).

6.6.6. Zusammengesetzte Reihen

Ist beim Aufbau einer Größenreihe — meist aus wirtschaftlichen Erwägungen — ein durchgängig einheitlicher Stufensprung nicht möglich, so ist die Bildung zusammengesetzter Reihen zulässig, die aus zwei oder mehreren Teilreihen verschiedener Vorzugszahlenreihen bestehen, z. B. R 10 (16···31,5) + R 20 (31,5···50). Diese Kopplung ergibt folgende Gliederwerte und Stufensprünge:

Teilreihen	←R 10 (16 ··· 31,5)→			← R 20 (31,5 ··· 50) →				
Gliederwerte	16	20	25	31,5	35,5	40	45	50
Stufensprünge φ	1,25	1,25	1,25	1,12	1,12	1,12	1,12	

6.6.7. Rundwertreihen

Zuweilen ist es notwendig oder zweckmäßig, einen oder mehrere Hauptwerte zusätzlich zu runden, z. B. wenn nur ganze Zahlen verwendet werden können oder wenn eine nur geringere Genauigkeit benötigt wird. Für solche Fälle sind Rundwertreihen vorgesehen, die wie folgt bezeichnet werden: R″ 5; R′ 10; R″ 10; R′ 20; R″ 20; R′ 40, wobei R″ bedeutet, daß bestimmte Gliederwerte gegenüber R′ noch stärker gerundet sind; z. B. 3,15 (R 10) → 3,2 (R′ 10) → 3 (R″ 10).

6.6.8. Vorzugsmaße

Speziell für Maßfestlegungen sind Vorzugsmaße standardisiert, und zwar für den Bereich von 0,001···20000 mm. Sie stellen eine Auswahl von dezimalgeometrisch gestuften Vorzugszahlen dar und umfassen die Reihen R 5; R 10; R′ 10; R 20; R′ 20; R 40; R′ 40 sowie Zwischenmaße, die in begründeten Fällen angewendet werden dürfen. Auch aus Vorzugsmaßen können abgeleitete und zusammengesetzte Reihen gebildet werden.

6.6.9. Vorzugswerte der Elektrotechnik

Mit der IEC-Publikation 63 hat die *Internationale Elektrotechnische Kommission* (IEC) ein eigenes System von Vorzugswerten (E-Reihen) geschaffen, dessen Geltungsbereich sich allerdings ausschließlich auf den Widerstand von Festwiderständen und die Kapazität von Festkondensatoren erstreckt. Es enthält die in Tabelle 7 dargestellten Reihen.

Tabelle 7. Stufensprünge und Gliederanzahl je Dekade der IEC-Vorzugswertereihen

Reihe (Kurzzeichen)	E 6	E 12	E 24	E 48	E 96	E 192
Stufensprung	$\sqrt[6]{10}$	$\sqrt[12]{10}$	$\sqrt[24]{10}$	$\sqrt[48]{10}$	$\sqrt[96]{10}$	$\sqrt[192]{10}$
Anzahl der Glieder je Dekade	6	12	24	48	96	192

6.6.10. Anwendung der Vorzugszahlen und ihre Grenzen

Vorzugszahlen erbringen mannigfaltigen Nutzen in allen Zweigen der Volkswirtschaft, besonders in der materiellen Produktion. Sie tragen wesentlich dazu bei, den gesamten Arbeitsprozeß wirtschaftlicher zu gestalten, vor allem dadurch, daß sie eine unnötige Typenvielfalt verhindern oder beseitigen, sinnvolle, praxisgerechte Stufungen von Kennwerten ermöglichen sowie Anschlußmaße sichern. Das gilt für Werkstoffe, Halbzeuge und Fertigerzeugnisse, aber ebenso für Vorrichtungen, Werkzeuge und Meßmittel. Erwähnt sei auch, daß eine Vielzahl häufig benötigter technischer Konstanten durch Vorzugszahlen ersetzt werden kann, so daß sich — infolge deren multiplikativer Zusammenhänge — Vorzugszahlen für weitere Kennwerte ergeben, wenn diese demselben Erzeugnis- oder Kraftsystem angehören; Beispiele zeigt Tabelle 8.

Tabelle 8. Technische Konstanten und ihnen naheliegende Vorzugszahlen

Konstante		Nächstliegende Vorzugszahl	Enthalten ab Reihe
Größe	Zahlenwert		
π	3,14159	3,15	R 10
2π	6,28319	6,3	R 5
$\pi/2$	1,57080	1,6 (1,55)	R 5 (R 80)
π^2	9,86960	10 (9,75)	R 5 (R 80)
$1/\pi$	0,31831	0,315	R 10
$\sqrt{\pi}$	1,77245	1,8 (1,75)	R 20 (R 80)
$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,12838	1,12	R 20
e	2,71828	2,65 (2,72)	R 40 (R 80)
e^2	7,38906	7,5 (7,3)	R 40 (R 80)
1/e	0,36788	0,375 (0,365)	R 40 (R 80)
$\sqrt{e}$	1,64872	1,6 (1,65)	R 5 (R 80)
g	9,80665	10 (9,75)	R 5 (R 80)
g^2	96,17040	95	R 40
$1/g$	0,10194	0,1 (0,103)	R 5 (R 80)
$\sqrt{g}$	3,13209	3,15	R 10
$\sqrt{2}$	1,41421	1,4	R 20
$\sqrt{3}$	1,73205	1,7	R 40

Obwohl die Vorzugszahlen seit Jahrzehnten weiteste Verbreitung gefunden und sich auf fast allen technischen Gebieten als außerordentlich vorteilhaft erwiesen haben, gibt es nicht wenige Fälle, wo sie aus verschiedenen Gründen nicht zweckmäßig erscheinen. Solche Gründe können technischer (konstruktiver), technologischer, ökonomischer oder anthropometrischer Natur sein. Dann bedient man sich der *arithmetischen Stufung*, die folgendem Bildungsgesetz folgt:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \ldots, a_n \tag{9}$$

Anfangsglied: a, Differenz (konstant): d, Endglied: $a_n = a + (n - 1) \cdot d$, Anzahl der Glieder: n

Arithmetische Zahlenfolgen erscheinen in folgenden prinzipiellen Anwendungsfällen erforderlich bzw. gerechtfertigt:

- bei linearen physikalischen oder mathematischen Gesetzmäßigkeiten, die dem zu stufenden Gegenstand zugrunde liegen (z. B. Brechkraft von Brillengläsern);
- bei konstruktiven Erfordernissen (z. B. Gewinde auf sehr dünnwandigen Teilen für Fotoobjektive);
- bei natürlichem Wachstum und daraus sich herleitenden Folgeerscheinungen (z. B. Konfektionsgrößen);

— bei additiven Verknüpfungen von Kennwerten (z. B. bei Anwendung des Baueinheitenprinzips im Werkzeugmaschinenbau, in der Möbelindustrie, bei Paletten und Containern sowie im Bauwesen; letzteres besitzt sogar eine eigene Maßordnung, die auf einem arithmetisch aufgebauten Raster- oder Modulsystem beruht);
— bei zu großem, nicht verwertbarem Größenüberschuß (z. B. bei Drähten, Streifen und Blechen aus Edelmetallen).

Für arithmetische Stufungen existiert bisher jedoch kein einheitliches System und daher kein allgemeiner Grundlagenstandard, wie ein solcher für das internationale System der dezimalgeometrisch gestuften Vorzugszahlen geschaffen wurde.

7. Standardisierung und Arbeits- und Lebensbedingungen

7.1. Wissenschaftliche Arbeitsorganisation (WAO)

Zwischen der Wissenschaftlichen Arbeitsorganisation (WAO) und der Standardisierung bestehen enge Wechselbeziehungen. Diese lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Standards sind Mittel zur Durchsetzung der WAO und damit der sozialistischen Arbeitskultur. So gibt es staatliche Standards für:

— das *Arbeitsstudium* (z. B. Zeitgliederung in der Produktion, Begriffe, Kurzzeichen, Erläuterungen, standardisierte Symbole für das Arbeitsstudium, standardisierte Vordrucke für das Arbeitsstudium),
— die *Arbeitsgestaltung* (z. B. Schallschutz, Wärmeschutz, Sicherheitsfarben und Sicherheitszeichen),
— die *Arbeitsnormung* (z. B. wissenschaftlich begründete Arbeitszeit- und Besetzungsnormen, Verständigungs- und Hilfsmittel zur Arbeitszeitnormung).

2. Die WAO fördert die Standardisierung und die Qualitätssicherung. Hierbei kommt der arbeitswissenschaftlichen Begründung von Festlegungen über Erzeugnisse, Maschinen, Anlagen und Verfahren eine besondere Bedeutung zu.

7.2. Gesundheits-, Arbeits- und Brandschutz (GAB)

Der Gesundheits- und Arbeitsschutz sowie der Brandschutz unterliegen der besonderen Obhut des sozialistischen Staates. Ein enger Zusammenhang mit der Standardisierung besteht darin, daß für die Bewertung der Qualität der Erzeugnisse die Einhaltung der in Standards, in Arbeitsschutzanordnungen (ASAO) und in Arbeitsschutz- und Brandschutzanordnungen (ABAO) geforderten arbeitsschutz- und sicherheitstechnischen Forderungen eine wichtige Bedingung ist.
Für die weitere Arbeit auf diesem Gebiet sind wichtige Festlegungen getroffen worden:

— Der wesentliche Inhalt der ASAO und ABAO ist in staatliche Standards zu überführen. Das betrifft sowohl technische Festlegungen als auch Verhaltensanforderungen.
— Die in der DDR erarbeiteten staatlichen Standards, insbesondere die für den GAB maßgebenden Standards, sind durch die verantwortlichen Staatsorgane mit den Partnerorganen der UdSSR abzustimmen, um die Integration zu fördern.

Die wesentlichsten Regelungen für die Planung und Durchführung dieser Arbeiten sind in [13] enthalten.
Grundsätzliche technische, technologische und Verhaltensforderungen des GAB werden in Grundlagenstandards festgelegt, die im TGL-Nummernbereich 30000 bis 30999 herausgegeben werden. Alle speziellen Forderungen an den GAB, vor allem die, die im Rahmen der Erzeugnisentwicklung entstehen, sind in spezifische DDR- und Fachbereichstandards aufzunehmen.



7.3. Umweltschutz

Die zunehmende Industrialisierung und Verkehrsdichte, die Einführung industriemäßiger Produktionsmethoden in der Landwirtschaft und der steigende Anfall kommunaler und industrieller Abfälle stellen an die sozialistische Landeskultur und den Umweltschutz große Anforderungen. Um eine hohe Wirksamkeit der Standardisierung auf diesem Gebiet zu erreichen, werden folgende Aufgaben gestellt [14]:

— Erarbeitung von Grundlagenstandards, die dem komplexen Charakter von Landeskultur und Umweltschutz gerecht werden,
— erhöhter Einfluß auf die Entwicklung und die Produktion von umweltfreundlichen Erzeugnissen und Verfahren,
— Festlegung der Verantwortung der zentralen staatlichen Organe für die Erarbeitung diesbezüglicher Standards.

8. Ausarbeitung von Standards

Standards werden grundsätzlich als Bestandteil von Forschungs- und Entwicklungsaufgaben im Prozeß der Neu- und Weiterentwicklung von Erzeugnissen und Verfahren ausgearbeitet bzw. überarbeitet. Die Standardisierungsaufgaben werden im Plan Wissenschaft und Technik festgelegt und entsprechend der „Nomenklatur der Arbeitsstufen und Leistungen von Aufgaben des Planes Wissenschaft und Technik" [9] gelöst und abgerechnet. In der Nomenklatur sind für die Standardisierungsaufgaben folgende Arbeitsstufen vorgeschrieben:

— Analysen und Studien (AS),
— Ausarbeitung des Standardentwurfs (S 6),
— Bestätigung des Standards (S 11),
— Einführung des Standards (S 12)

Da Standards als Teil der Entwicklung von Erzeugnissen und Verfahren ausgearbeitet werden, sind die Arbeitsstufen der Standardisierung den entsprechenden Arbeitsstufen der Forschung und Entwicklung zuzuordnen und mit diesen abzurechnen. Die 4 Leistungsstufen für die Ausarbeitung der Standards können durch die Betriebe in eigener Verantwortung weiter untergliedert werden. Es ist zu gewährleisten, daß spätestens mit der Überleitung der Erzeugnisse und Verfahren in die Produktion der entsprechende Standard bestätigt worden ist.
Für die Ausarbeitung von RGW-Standards und für die Vereinheitlichung staatlicher Standards der DDR und der UdSSR gibt es gesonderte Arbeitsstufen, die in [9] festgelegt sind.

9. Standardisierungsorgane

Die Standardisierung ist unmittelbarer Bestandteil der Aufgaben des wissenschaftlich-technischen Fortschritts. Standards werden grundsätzlich im Prozeß und als Teil der Aufgaben zur Weiter- bzw. Neuentwicklung von Erzeugnissen und Verfahren überprüft, überarbeitet bzw. neu ausgearbeitet. Daraus ergibt sich, daß derjenige Leiter für die Standardisierung verantwortlich ist, der für die Erzeugnis- bzw. Verfahrensentwicklung, für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt auf dem jeweiligen Gebiete die Verantwortung trägt. Von diesem Grundsatz ausgehend, sind Verantwortlichkeit der Leiter und die Hauptaufgaben der zentralen Staatsorgane, der wirtschaftsleitenden Organe und der Betriebe in der Standardisierungsverordnung eindeutig geregelt [1].
Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, zur vollen Wahrnehmung der Verantwortung der Leiter für die Standardisierung spezielle Standardisierungsorgane einzusetzen. So bestehen und haben sich bewährt

— *Koordinierungsstellen für Standardisierung* (KfS) bei den Ministerien,
— *Zentralstellen für Standardisierung* (ZfS) bei den Generaldirektoren der Kombinate,

— *Leitstellen für Standardisierung* (LfS) bei den Direktoren der Leitbetriebe in den Kombinaten und
— *Büros für Standardisierung* (BfS) bei den Leitern der Betriebe.

Aufgabe der Standardisierungsorgane ist es, notwendige Leitungsentscheidungen für die Lösung der dem jeweiligen Leiter auf dem Gebiete der Standardisierung übertragenen Aufgaben vorzubereiten und ihre Durchsetzung in seinem Auftrage zu kontrollieren.

Dazu gehören:

— ständige Analyse der Effektivität der Standardisierungsarbeit,
— Ausarbeitung von Vorschlägen für die Festlegung der Grundlinie der Standardisierung und für notwendige Regelungen auf diesem Gebiet,
— Ausarbeitung von Vorschlägen zum Plan Wissenschaft und Technik sowie Teilnahme an den Planverteidigungen,
— Kontrolle der termin- und qualitätsgerechten Ausarbeitung und Einführung von Standards einschließlich der Standards des RGW sowie Teilnahme an der Verteidigung der Ergebnisse des Planes Wissenschaft und Technik,
— Unterstützung der einzelnen Struktureinheiten bei der planmäßigen Lösung von Standardisierungsarbeiten,
— standardtechnische Prüfung der Standardentwürfe,
— Vorbereitung der Bestätigung und Verbindlichkeitserklärung der Standards.

Detailliert sind die Aufgaben der Standardisierungsorgane und die Rahmenfunktionspläne für deren Leiter und Mitarbeiter in der von der Gesellschaft für Standardisierung herausgegebenen KDT-Empfehlung [15] zusammengefaßt.

Literaturverzeichnis

[1] Verordnung über die Standardisierung in der DDR (Standardisierungsverordnung) vom 21. 9. 1967, GBl. II, Nr. 90, S. 665

[2] Zweite Durchführungsbestimmung zur Standardisierungsverordnung — Abweichungen von DDR- und Fachbereichstandards vom 11. 9. 1968, GBl. II, Nr. 100, S. 802

[3] Konvention über die Anwendung der Standards des Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe vom 21. 6. 1974, GBl. II, Nr. 27, S. 507

[4] Vierte Durchführungsbestimmung zur Standardisierungsverordnung — Verbindlichkeit von DDR- und Fachbereichstandards vom 11. 9. 1968, GBl. II, Nr. 100, S. 806

[5] Verordnung über den Standard des Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe vom 19. 9. 1974, GBl. I, Nr. 55, S. 499

[6] Erste Durchführungsbestimmung zur Verordnung über den Standard des Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe — Planung, Ausarbeitung, Bestätigung und Einführung von RGW-Standards vom 24. 4. 1975, GBl. I, Nr. 28, S. 526

[7] KDT-Empfehlung: Hinweise zur Arbeit mit Weltstandsvergleichen in den Betrieben und Kombinaten der sozialistischen Industrie. KDT Berlin

[8] Verordnung über das Pflichtenheft für Aufgaben der Forschung und Entwicklung (Pflichtenheft-Verordnung) vom 17. 1. 1981, GBl. I, Nr. 1, S. 1

[9] Nomenklatur der Arbeitsstufen und Leistungen von Aufgaben des Planes Wissenschaft und Technik vom 28. 5. 1975, herausgegeben vom Ministerium für Wissenschaft und Technik der DDR

[10] Anordnung über die Anmeldepflicht und Prüfpflicht auf dem Gebiet der staatlichen Qualitätskontrolle vom 20. 10. 1980, GBl. Sonderdruck Nr. 803/4

[11] Verordnung über die Entwicklung und Sicherung der Qualität der Erzeugnisse vom 17. 4. 1980, GBl. I, Nr. 14, S. 117

[12] Anwendung grundsätzlicher Nutzens-Kennziffern der Materialökonomie für die Planung der Einführungs- und Standardisierungsaufgaben. Mitteilungen des ASMW Berlin 4 (1977) Mai 10, S. 1/255

[13] Sechste Durchführungsbestimmung zur Standardisierungsverordnung — Standardisierung von Forderungen des Gesundheits- und Arbeitsschutzes sowie Brandschutzes vom 26. 6. 1974, GBl. I, Nr. 35, S. 334

[14] Siebente Durchführungsbestimmung zur Standardisierungsverordnung — Standardisierung von Forderungen zur Gewährleistung der sozialistischen Landeskultur und des Umweltschutzes vom 27. 11. 1975. GBl. I, Nr. 47, S. 763

[15] KDT-Empfehlung: Zur Leitung, Planung und Durchsetzung der Standardisierung in Kombinaten und Betrieben. KDT Berlin



[16] *Felber, E., Felber, K.:* Toleranz- und Passungskunde. 9. Aufl. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[17] *Fischer, H.:* Taschenbuch Feingerätetechnik, Band 2. 2. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1972
[18] *Hildebrand, S., Markert, C.:* Zeichnungen und Darstellungen in der Elektrotechnik. 9. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1979
[19] *Autorenkollektiv:* Taschenbuch Maschinenbau, Band 1/I. 4. Aufl. — Berlin: VEB Verlag Technik 1978
[20] *Giewald, R., Günther, O.:* Zur Problematik der Größenstufung. Standardisierung und Qualität 22 (1976) 8, S. 329—334
[21] *Giewald, R., Schwertner, D.:* Vorzugszahlen. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1964

Weiterführende Literatur

[22] *Sievernich, M.:* Standards rationell und effektiv erarbeiten. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977
[23] *Autorenkollektiv:* Qualitätssicherung und Standardisierung. — Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1979
[24] *Autorenkollektiv:* Rechtsfragen der Standardisierung. 2. Aufl. — Berlin: Staatsverlag 1978

SV Sachwortverzeichnis








SV








SV






SV





Autorenkollektiv · **Fachwissen des Ingenieurs**

Das Fachwissen des Ingenieurs setzt den bekannten allgemein eingeführten Titel *Grundwissen des Ingenieurs* als Nachschlagewerk für Studenten, Betriebsingenieure und Lehrkräfte der Ingenieur- und Hochschulen fort. Über 300 namhafte Fachleute und Wissenschaftler aus Praxis, Lehre und Forschung haben daran mitgearbeitet.

Band 1: Grundlagen des Konstruierens

Unter Federführung von Dr.-Ing. Klaus Haase und Dr.-Ing. Johannes Neukirchner

7., neubearbeitete Auflage · Etwa 752 Seiten mit 778 Bildern, 135 Tabellen und 93 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 547 0225 Fachwissen Ing. 1

Aus dem Inhalt: Technisches Zeichnen / Prinzipielle Fragen des Konstruierens / Maschinenelemente: Verbindungselemente — Federn — Achsen und Wellen — Lager — Kupplungen — Zahnräder — Reibkörpergetriebe — Riemengetriebe — Kettengetriebe — Rohrleitungen — Rohrleitungsarmaturen / Schwingungen im Maschinenbau / Reibung, Schmierung und Verschleiß / Hydraulik / Pneumatische Antriebs- und Steuerungstechnik / Getriebetechnik

Band 2: Grundlagen der Automatisierung

Unter Federführung von Dr. sc. techn. Eberhard Oberst

7. Auflage · 491 Seiten mit 574 Bildern, 51 Tabellen und 22 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 545 634 3 · Fachwissen Ing. 2

Aus dem Inhalt: Meßeinrichtungen und Meßverfahren der Automatisierungstechnik / Steuerungs- und Regelungstechnik / Entwurf von Schaltsystemen / Bauelemente der Automatisierungstechnik / Statistische Probleme der Automatisierungstechnik

Band 3: Fertigungstechnik — Fertigungsmittel

4. Auflage · 1039 Seiten mit 1122 Bildern, 119 Tabellen und 17 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 545 728 2 · Fachwissen Ing. 3

Aus dem Inhalt: Maschinen der Umformtechnik: Gießereimaschinen — Plastverarbeitungsmaschinen / Umformende und schneidende Maschinen der Halbzeugfertigung / Umformende und schneidende Werkzeugmaschinen / Maschinen und Werkzeuge zur spanenden Formung / Maschinen und Einrichtungen für das Abtragen / Maschinen und Anlagen für die Holzbearbeitung / Fertigungshilfsstoffe / Verpackungsmaschinen

Band 4: Kraft- und Arbeitsmaschinen — Kältemaschinen

4. Auflage · 526 Seiten mit 468 Bildern, 37 Tabellen und 2 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 5462196 · Fachwissen Ing. 4

Aus dem Inhalt: Grundlage der Hubkolbenmaschinen: Einsatzgebiete — Bauformen / Verbrennungsmotoren: Arbeitsverfahren — Bauformen und Ausführungsarten / Gasturbinen: Allgemeine Grundlagen — Beurteilungsmaßstäbe / Dampfturbinen: Bedeutung und Einsatzmöglichkeiten der Dampfturbinen — Eindimensionale Berechnung einer Dampfturbinenstufe / Pumpen und Verdichter: Grundlagen — Verdrängermaschinen — Strahlpumpen — Sonderarten — Strömungsmaschinen / Kältemaschinen: Gas-Kältemaschinen — Verdichter-Kältemaschinen

Band 5: Elektrotechnik — Elektronik

Unter Federführung von Prof. Dr.-Ing. Gerhard Linnemann und Dr.-Ing. Kurt Repenning

4., neubearbeitete Auflage · 810 Seiten mit 907 Bildern, 134 Tabellen und 38 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 5467747 · Fachwissen Ing. 5

Aus dem Inhalt: Elektrische Maschinen / Grundlagen des elektromotorischen Antriebs/ Stromrichter / Hochspannungstechnik / Starkstromgeräte und -anlagen / Lichttechnik / Bauelemente und Grundschaltungen der Elektronik / Funktechnik / Leitungsgebundene Übertragungstechnik / Mikrowellentechnik / Elektrische Meßgeräte

Band 6: Energie- und Stoffumwandlung

3. Auflage · 636 Seiten mit 467 Bildern, 113 Tabellen und 18 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 5457311 · Fachwissen Ing. 6

Aus dem Inhalt: Dampferzeuger / Kernenergieanlagen / Gastechnik / Heizung / Lüftung / Anlagen und Geräte der chemischen Industrie

Band 7: Stahlbau, Förder-, Bau- und Landmaschinen

3., verbesserte Auflage · 700 Seiten mit 607 Bildern, 126 Tabellen und 16 Tafeln · 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 5456351 · Fachwissen Ing. 7

Aus dem Inhalt: Stahlbau: Verbindungen — Zug- und Druckstäbe — Fachwerke — Biegeträger — Stützen und Rahmen / Fördergeräte: Allgemeine Maschinensätze — Unstetig- und Stetigförderer — Tagebaugroßgeräte / Bau- und Baustoffmaschinen: Erdbewegungs-, Gesteins- und Erdbohrmaschinen — Rammen und Pfahlzieher — Verdichtungs- und Mischmaschinen — Transportmittel für Beton und Mörtel — Betonstahl-, Betonformgebungs- und Straßenbaumaschinen / Landmaschinen und Traktoren: Maschinen und Geräte für Bodenbearbeitung, Melioration, Düngung, Saat und Pflege — Beregnungsanlagen — Erntemaschinen — Melkanlagen — Traktoren — Instandhaltung in der Landtechnik

Band 8: Verkehrsmittel

Unter Federführung von Prof. Dr.-Ing. Klaus Wächter

2., völlig neubearbeitete Auflage · 962 Seiten mit 847 Bildern, 150 Tabellen und 30 Tafeln 16,5 cm × 23 cm · Ganzgewebeeinband (Kunstleder) · Bestellangabe: 546 577 6 · Fachwissen Ing. 8

Aus dem Inhalt: Kraftfahrzeugtechnik: Kraftfahrzeugtechnische Grundsätze — Fahrdynamik — Fahrtechnik — Antriebstechnik — Elektrische Fahrzeugausrüstung — Betrieb und Instandhaltung / Schienenfahrzeugtechnik: Grundlagen der Schienenfahrzeuge — Wagen — Triebfahrzeuge — Fahrdynamik — Fahrzeugdienst — Instandhaltung / Schiffbautechnik: Schiffbau — Schiffsmaschinen / Luftfahrzeugtechnik: Einteilung — Aeromechanik — Flugmechanik — Flugzeugkonstruktion — Triebwerke — Ausrüstung — Fliegerischer Betrieb — Instandhaltung